



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## La formazione delle caustiche nella struttura su grande scala dell’Universo

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Alessandro Bianchetti

Anno Accademico 2019/2020

# Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Il problema di ricostruzione</b>	<b>4</b>
1.1 Equazioni della fluidodinamica . . . . .	4
1.2 Approssimazione di Zel'dovich . . . . .	6
1.3 Metodi di ricostruzione . . . . .	8
<b>2 Tipi di singolarità nella trattazione Lagrangiana</b>	<b>12</b>
2.1 Setup e scelta delle condizioni iniziali . . . . .	12
2.2 Evoluzione post-Zel'dovich . . . . .	14
2.3 Asintoti e singolarità . . . . .	17
<b>Conclusioni</b>	<b>18</b>

# Introduzione

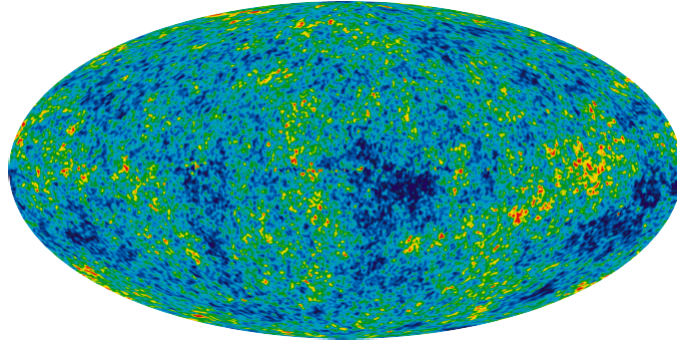
Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# Capitolo 1

## Il problema di ricostruzione

### 1.1 Equazioni della fluidodinamica

Una delle ipotesi vertice della seguente trattazione è quella che il plasma primordiale fosse altamente omogeneo. Tale teoria è avallata dallo spettro della CMB (Cosmic Microwave Background), che risulta riprodurre la stessa isotropia, eccezion fatta per deboli fluttuazioni termiche che caratterizzavano lo stesso plasma primordiale.



**Figura 1.1:** Immagine dello spettro della CMB attraverso le misurazioni della sonda spaziale WMAP

Ci muoviamo innanzitutto dal modello cosmologico Einstein-De Sitter, che pone la curvatura dell'universo e la costante cosmologica  $\Lambda$  pari a 0 e prevede uno spazio composto sostanzialmente di materia oscura fredda (CDM). In tale cornice definiamo una mappa Lagrangiana  $\mathbb{M} : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau)$  che connette la posizione iniziale alla posizione corrente  $\mathbf{x}$  al tempo di scala  $\tau \propto t^{\frac{2}{3}}$ . Inoltre le coordinate  $\mathbf{x}$  sono coordinate comoventi legate alle coordinate fisiche  $\mathbf{r}$  dalla relazione  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$ , dove  $a$  rappresenta il fattore cosmico di scala, che corrisponde a  $\tau$  in un universo EdS. Definiamo infine le velocità  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + \mathbf{v}$

Per approcciare la dinamica di particelle non collidenti ("polvere"), definiamo una funzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  che corrisponde alla densità degli stati nello spazio delle fasi. E' possibile quindi utilizzare il Teorema di Liouville, che afferma che la densità sopra citata si conserva nell'evoluzione di un sistema conservativo: in effetti l'ipotesi di assenza di collisioni ci permette di soddisfare ai requisiti del teorema, e quindi possiamo porre a zero la derivata totale della funzione densità, ricavando l'equazione di Vlasov.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} f + \dot{\mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \quad (1.1)$$

L'equazione di Vlasov è molto difficile da risolvere analiticamente: adottiamo quindi un approccio teorico semplificato, cioè la descrizione Newtoniana di fluido: in particolare sposiamo l'ipotesi di entropia costante e di assenza di termini di pressione dal momento che trattiamo la CDM come una polvere autogravitante e non collidente.

Il set di equazioni adatto all'approccio fluidodinamico è dato da

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{w} = -\nabla_{\mathbf{r}} \Phi \quad (1.3)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.4)$$

dove la 1.2 è l'equazione di continuità che costituisce la conservazione della massa, la 1.3 è l'equazione di Eulero e viene dalla conservazione del momento, mentre la 1.4 rappresenta l'equazione di Poisson relativa al potenziale gravitazionale  $\Phi$ .

Poniamo inoltre  $\rho = \rho_b + \delta\rho$ , dove  $\rho_b$  è la densità media di background e  $\delta\rho$  costituisce una deviazione da tale valore medio.  $\Phi = \Phi_b + \phi'$  invece è la somma di un potenziale di background e un potenziale peculiare  $\phi'$ . Grazie a queste due apposizioni possiamo separare l'equazione di Poisson, ottenendo un'equazione nella sola coordinata comovente  $\mathbf{x}$ . Possiamo riscrivere anche 1.3 e 1.4 nelle coordinate  $\mathbf{x}$ , usando la relazione

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + H(\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \quad (1.5)$$

Si ricava dunque

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + 3H\rho + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = -\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\phi = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \phi' = 4\pi G \delta\rho \quad (1.8)$$

Le equazioni della fluidodinamica rappresentano in effetti uno sviluppo dell'equazione di Vlasov fino al primo ordine. Per spiegare questo passaggio, osserviamo che la densità di massa e la velocità sono associate rispettivamente al momento di aspettazione di ordine zero e di primo ordine della densità nello spazio delle fasi  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ .

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{a^3} \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{a^3} \frac{\int d^3p \mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} \quad (1.10)$$

Integrando ora l'equazione di Vlasov sul dominio del momento  $\mathbf{p}$ , si trova che l'ultimo termine dell'integrando rappresenta un'integrale di volume della forza  $\partial f / \partial p$ , che tramite il Teorema di Gauss si può riscrivere come un integrale su una superficie all'infinito, dove la forza si annulla. Utilizzando poi le definizioni 1.9 e 1.10 si ricava

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} (a^3 \rho) + \frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{x}} \int d^3p \mathbf{p} f = 0 \quad (1.11)$$

maneggiando opportunamente quest'ultima e utilizzando le definizioni fornite in 1.9 e 1.10 si arriva esattamente all'equazione di continuità 1.2.

Se invece si moltiplica l'equazione di Vlasov per  $\mathbf{p}$  per poi integrare di nuovo su tale variabile, conviene lavorare sul termine  $i$ -esimo e operare un'integrazione per parti sempre sull'ultimo addendo dell'integrando.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3 p p^i f + \frac{1}{ma^2} \partial^i \int d^3 p p_j p_j f + a^3 \rho \partial^i \phi = 0 \quad (1.12)$$

Manipolando questa espressione e utilizzando l'equazione di continuità, si arriva proprio all'equazione di Eulero 1.3.

Le equazioni della fluidodinamica rappresentano dunque i primi termini dello sviluppo dell'equazione di Vlasov, e perciò costituiscono una via più facilmente percorribile, offrendo la possibilità di giungere a delle soluzioni analitiche altrimenti proibitive.

## 1.2 Approssimazione di Zel'dovich

A questo punto tuttavia conviene operare un ulteriore cambio di variabili sul set di equazioni ottenute 1.6, 1.7 e 1.8. Per farlo si definisce meglio il fattore di scala per mezzo di un'ampiezza  $a_*$  e un tempo caratteristico  $t_*$ , in modo che  $a(t) = a^*(t/t_*)^{2/3}$ . Ricordando inoltre  $\rho = \rho_b + \delta\rho$  e  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$ , facciamo le seguenti sostituzioni

$$\rho \mapsto \eta = \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta \quad (1.13)$$

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{da} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{da} = \frac{\mathbf{v}}{a\dot{a}} \quad (1.14)$$

$$\phi' \mapsto \phi = \frac{3t_*^2}{2a_*^3} \phi' \quad (1.15)$$

Grazie alla mappatura  $(\rho, \mathbf{v}, \phi') \mapsto (\eta, \mathbf{u}, \phi)$ , le equazioni del fluido assumono la nuova forma

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} + \frac{3}{2a}\mathbf{u} = -\frac{3}{2a}\nabla\phi \quad (1.16)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\delta}{a} \quad (1.18)$$

dove la derivata  $D/Da$  si dice *derivata convettiva*. Ora usiamo il fatto che in un universo EdS linearizzato, la soluzione *growing mode* è data complessivamente da  $\delta \propto t^{2/3}$ ,  $\mathbf{v} \propto t^{1/3}$  e  $\phi = \text{const}$ . Con questi andamenti, è evidente che la nuova coordinata di velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/(a\dot{a}) \approx \text{const}$ , dal momento che sia  $\mathbf{v}$  che  $a\dot{a} \propto t^{2/3} \cdot t^{-1/3}$  hanno lo stesso andamento  $t^{1/3}$ .

Ma allora il termine  $Du/Da$  nell'equazione di Eulero si può considerare nullo

$$\frac{Du}{Da} = 0 \quad (1.19)$$

ottenendo così

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi \quad (1.20)$$

che è la soluzione linearizzata, valida per piccole deviazioni dalla densità di background, ovvero per  $\delta < 1$ . L'approssimazione di Zel'dovich sta nel considerare tale risultato legittimo anche oltre il regime di linearità, ossia assumere la validità di 1.19 ovunque. Si può inoltre osservare che in queste condizioni l'equazione di Poisson gravitazionale risulta disaccoppiata dalle altre due ed è utile per applicare le condizioni iniziali. La 1.19 descrive un moto rettilineo uniforme, in cui la particella è soggetta solamente alla propria inerzia senza perturbazioni gravitazionali esterne. Quindi se la posizione iniziale è descritta dalla coordinata lagrangiana  $\mathbf{q}$ , allora per ogni posizione euleriana  $\mathbf{x}$  del moto varrà che

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = \mathbf{u}_0(\mathbf{q}) \quad (1.21)$$

Le traiettorie delle particelle, rettilinee e a velocità costante  $u$ , sono descritte da

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + a\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) \quad (1.22)$$

Ma usando 1.20 si ricaverà

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} - a\nabla\phi_0 \quad (1.23)$$

Alla fine di questi passaggi si è in grado di identificare la mappa  $\mathbb{M}$  che collega le coordinate lagrangiane iniziali con quelle finali euleriane.

A questo punto saremmo in grado di risolvere l'equazione di continuità semplicemente come un'equazione a variabili separabili, trovando quindi la forma di  $\eta$ . Tuttavia la via più semplice risulta invece dall'impostare la conservazione della massa dei singoli elementi fluidi.

$$\eta(\mathbf{x}, a)d^3x = \eta_0(\mathbf{q})d^3q \quad (1.24)$$

da cui

$$\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = (1 + \delta_0(\mathbf{q})) \det \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (1.25)$$

Ma supponendo che nella configurazione iniziale la perturbazione di energia sia nulla  $\delta_0 = 0$  e contemporaneamente utilizzando le proprietà del determinante, si potrà scrivere anche

$$\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \left[ \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \right]^{-1} \quad (1.26)$$

E' possibile scrivere la matrice  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$  in componenti, sapendo che  $x_i = q_i - a \frac{\partial \phi_0}{\partial q^i}$ , e derivando ulteriormente

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \delta_j^i - a \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial q_i \partial q^j} = \delta_j^i - a D_j^i(q) \quad (1.27)$$

dove si è definito il tensore di deformazione  $D_j^i$ , connesso al laplaciano del potenziale gravitazionale. Nel sistema di riferimento opportuno tale tensore ha forma diagonale, con i tre autovalori  $\lambda_1(\mathbf{q})$ ,  $\lambda_2(\mathbf{q})$  e  $\lambda_3(\mathbf{q})$ , dipendenti dalle coordinate iniziali. Questi governano la deformazione locale della materia lungo i tre assi ortogonali identificati dagli autovettori. Si può dimostrare che nell'ipotesi in cui il potenziale  $\phi_0$  sia gaussiano come previsto dal meccanismo di inflazione, allora nel almeno uno dei tre autovalori del tensore di deformazione è positivo nel 92% dei casi. Ora, riscrivendo il rapporto di densità  $\eta$



$$\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \left[ \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \right]^{-1} = [\det (\mathbb{I} - aD)]^{-1} = \frac{1}{(1 - a\lambda_1(\mathbf{q}))(1 - a\lambda_2(\mathbf{q}))(1 - a\lambda_3(\mathbf{q}))} \quad (1.28)$$

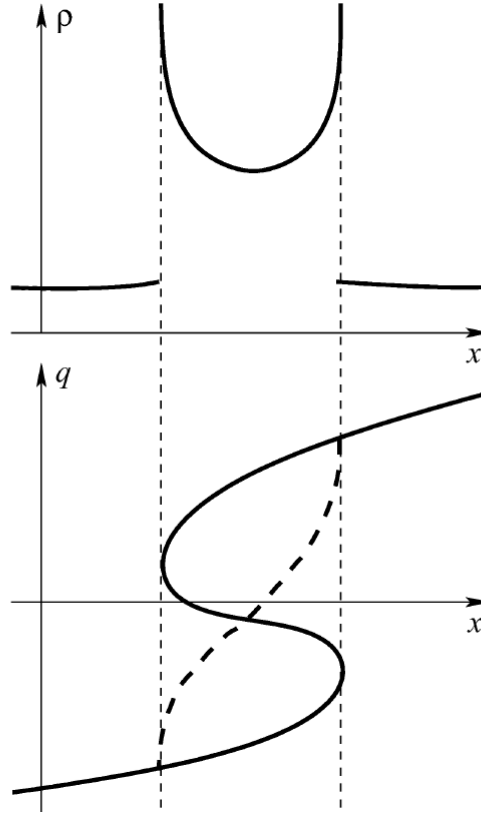
A questo punto, è evidente che, supponendo che  $\lambda_1(\mathbf{q})$  sia l'autovalore maggiore, allora il tempo  $\bar{a} = 1/\lambda_1(\mathbf{q})$  rappresenta una criticità, in quanto la quantità  $\eta$  diverge e con essa la densità. Questo tipo di evento è detto *shell-crossing* o *caustica* ed è rappresenta il fenomeno che si registra quando due particelle con diverse coordinate lagrangiane iniziali  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  confluiscono nella stessa coordinata di campo  $\mathbf{x}$ , dando luogo a densità infinita. Tale divergenza è racchiusa nella mancata biunivocità della mappa  $\mathbb{M}^{-1}$ , dal momento che a una sola coordinata euleriana possono corrispondere più coordinate iniziali. A causa della mancanza di tale biunivocità, la matrice Jacobiana  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$  risulta essere mal definita. Le caustiche delimitano le zone del cosiddetto *multistreaming*, regioni entro le quali non è più possibile ritracciare le particelle all'indietro, in quanto non sappiamo come si sono comportate negli eventi di shell-crossing. Le strutture di materia che si formano sono detti *pancakes*, filamenti "quasi" unidimensionali o bidimensionali, nel senso che la grumosità si sviluppa sostanzialmente in una oppure due direzioni. Queste strutture saranno l'opportuna sede la formazione delle galassie.

Nel regime di single-stream l'approssimazione di Zel'dovich è opportuna, in quanto costituisce un modello non accelerato dove le particelle procedono imperturbate lungo una traiettoria rettilinea e a velocità costante. Tuttavia a partire dal primo shell-crossing l'approssimazione perde di validità, in quanto non prevede effetti di accelerazione gravitazionale esercitata dalle particelle vicine, che modificherebbe il cammino della particella in modo sensibile.

### 1.3 Metodi di ricostruzione

Come anticipato all'inizio del capitolo, l'alta uniformità della CMB è una prova forte dell'omogeneità dell'Universo primordiale. La grumosità della distribuzione attuale della massa si spiega invece con la formazione di strutture filiformi e oblate come i pancakes. Per poter rendere conto di questa transizione, sono possibili due tipi di atteggiamento: un *forward approach*, che si basa sull'ipotizzare un modello iniziale, presumibilmente a densità costante, ed eseguire una simulazione a N corpi sulle basi della dinamica Newtoniana, e controllare il grado d'accordo tra l'output della simulazione e la distribuzione attuale delle galassie, per poi accettare o eventualmente rigettare il modello iniziale. Tale approccio è praticabile solo tramite tecniche numeriche e non permette di formulare analiticamente il problema a causa del numero troppo elevato di gradi di libertà.

Un modo di ottenere soluzioni analitiche invece è seguire un approccio di *reconstruction*, in cui si tenta di fittare in modo esatto la distribuzione di massa attuale dell'universo e di mappare la velocità delle galassie, per poi invertire il problema usando le posizioni attuali come posizioni iniziali e cambiando segno alla velocità. Tuttavia mentre l'approccio forward, pur con il suo alto coefficiente di difficoltà, si può formulare in un ben definito problema di Cauchy che garantisca l'unicità delle soluzioni, la reconstruction non si può formulare allo stesso modo, dato che si è osservato che a causa dello shell-crossing a una coordinata euleriana possono corrispondere più posizioni iniziali. Quindi con la ricostruzione si pone un problema di condizioni al contorno, per cui la sfida consiste nel trovare un algoritmo che garantisca unicità.



**Figura 1.2:** Esempio di ricostruzione senza unicità. La densità nel grafico superiore potrebbe essere stata generata sia dalla mappa lagrangiana in grassetto che da quella tratteggiata. Figura tratta da [2]

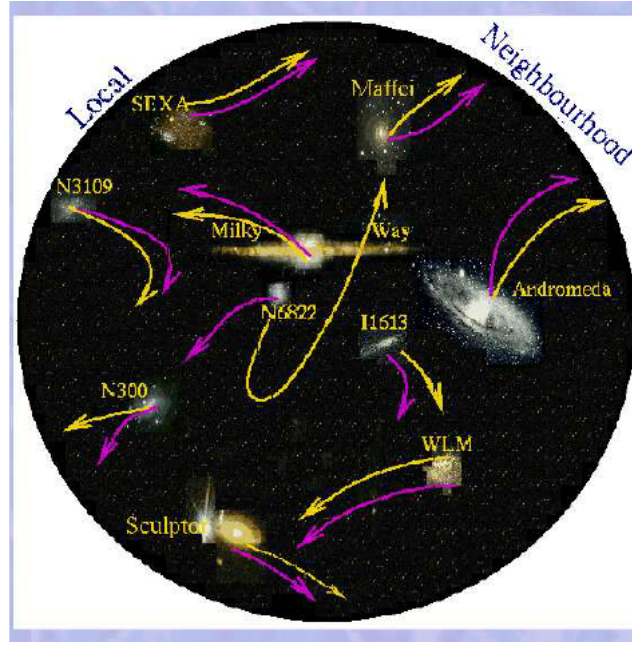
Una via percorribile è rappresentata dal problema variazionale come fu formulato da Peebels in [5]. Anziché risolvere le equazioni del moto, è possibile cercare i punti stazionari della corrispondente azione di Eulero-Lagrange, scritta nelle coordinate comoventi  $\mathbf{x}$  come

$$S = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{m_i a^2 \dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} - \frac{G m_i m_j}{a |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + \frac{2}{3} \pi G \rho_b a^2 m_i \mathbf{x}_i^2 \right] \quad (1.29)$$

dove  $t_0$  rappresenta il tempo attuale,  $\mathbf{x}_i$  è la traiettoria della  $i$ -esima particella e  $\rho_b$  è la densità media di background. Se denotiamo come  $\mathcal{L}$  l'integrando di 1.29, allora è possibile calcolare la variazione di azione e porla uguale a zero per cercare le orbite stazionarie.

$$\delta S = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \delta \mathbf{x}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i \right] = 0 \quad (1.30)$$

Ponendo le opportune condizioni al contorno sarà possibile trovare soluzioni analitiche per  $\mathbf{x}_i$ . In particolare nel suo primo lavoro Peebles considerò solamente i punti di minimo dell'azione: trovò successivamente che considerando anche i punti di sella si trovava un accordo migliore con i parametri osservati nel Gruppo Locale.



**Figura 1.3:** Raffigurazione schematica della ricostruzione di Peebles per il Gruppo Locale. Le orbite rosa corrispondono alla scelta del minimo dell'azione, mentre quelle gialle indicano la selezione del punto di sella. Interessante è il caso della galassia N6822, che offre sia una soluzione in avvicinamento che in allontanamento: l'accordo corretto si trova con l'orbita prevista con il punto di sella. Immagine tratta da [4].

Tuttavia è impresa ardua ripetere gli stessi risultati su altri set di galassie redshiftate, di cui sono sconosciute le velocità, necessarie a porre opportune condizioni al contorno. Non è possibile quindi scegliere l'orbita corretta tra le molte proposte dall'approccio variazionale, per cui si perde l'unicità della soluzione, come accennato in precedenza.

Oltre all'approccio variazionale appena esposto, un'opzione valida è la ricostruzione POTENT, che si basa sul rintracciare il campo potenziale della velocità integrando le componenti radiali della velocità. Questo metodo regge solamente in regime euleriano lineare  $|(\rho - \rho_b)/\rho_b| \leq 1$ , pertanto non recuperano le corrette condizioni iniziali delle regioni di attuale alta densità, in quanto non lineari: in altre parole, è un metodo di ricostruzione che non funziona nelle regioni di multistreaming.

Infine il metodo MAK supera sia il problema della non unicità che affligge la ricostruzione di Peebles, sia i limiti di validità dell'algoritmo POTENT, rimanendo valido anche ben oltre il regime lineare euleriano. Occorre innanzitutto formulare un'equazione di conservazione della massa e prenderla a vincolo

$$\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \rho_0(\mathbf{q})d\mathbf{q} \quad (1.31)$$

dove  $\rho_0(\mathbf{q})$  è la densità iniziale e a  $\rho(\mathbf{x})$  è la densità alla posizione attuale euleriana. Manipolando tale equazione di conservazione otterremo

$$\det \left[ \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{q})} \quad (1.32)$$

dove il membro di destra dovrebbe essere noto: conosciamo infatti la posizione della particella e la densità del campo euleriano, e assumiamo inoltre una densità iniziale costante  $\rho_0(\mathbf{q}) = \rho_0$ . Per risolvere l'equazione, si fa l'ipotesi che la mappa lagrangiana  $\mathbb{M} : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}$  si possa scrivere come il gradiente di un potenziale convesso  $\Phi$ .

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}, t) \quad (1.33)$$

La convessità del potenziale assicura una relazione biunivoca tra coordinata lagrangiana e coordinata euleriana, ossia garantisce l'unicità evitando i fenomeni di multistreaming. Si osserva che nel caso dell'approssimazione di Zel'dovich, con l'equazione 1.23 che esplicita la mappa lagrangiana è possibile costruire il potenziale  $\Phi$ , che sarebbe dato da  $\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q}^2/2 - a\phi_0(\mathbf{q}, t)$ . Tuttavia è evidente che tale potenziale non è convesso ovunque, e proprio per questo l'approssimazione di Zel'dovich non garantisce unicità, in quanto propone una traiettoria rettilinea secondo cui le particelle proseguono dritte nella direzione in cui sono entrate nella zona di shell-crossing, in modo abbastanza irrealistico, dal momento che la traiettoria di una particella che entra in una zona di alta densità viene presumibilmente modificata in modo consistente. Sarà invece possibile identificare un potenziale convesso e recuperare quindi l'unicità solamente con una proposta alternativa all'approssimazione di Zel'dovich, ossia il modello di adesione, che prevede l'aggiunta di termini di interazione gravitazionale. Se  $\Phi$  esiste ed è convesso sarà definita convessa anche la mappa inversa  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  tale caustiche  $\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta$ . La relazione tra  $\Phi$  e  $\Theta$  è stabilita dalle trasformazioni di Legendre-Fenchel.

$$\Theta(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{q}}\{\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \Phi(\mathbf{q})\} \quad \Phi(\mathbf{q}) = \max_{\mathbf{x}}\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - \Theta(\mathbf{x})\} \quad (1.34)$$

A questo punto l'equazione 1.32 diventa l'equazione di Monge-Ampere.

$$\det \left[ \frac{\partial^2 \Theta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right] = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} \quad (1.35)$$

Solo recentemente si è scoperto che la soluzione a tale equazione è equivalente alla soluzione unica di un problema di trasporto ottimo, in particolare il problema di trasporto di massa di Monge-Kantorovich, in cui si cerca quale relazione tra  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{x}$  minimizza la la funzione quadratica di costo  $c(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2$ , o meglio si cerca la minimizzazione del funzionale I.

$$I = \int_{\mathbf{q}} \rho_0(\mathbf{q}) |\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2 d\mathbf{q} = \int_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2 d\mathbf{x} \quad (1.36)$$

Si trova infatti che per ottenere la condizione  $\delta I = 0$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  deve essere il gradiente di una funzione di  $\mathbf{x}$ . I dettagli della trattazione sono reperibili in [4] e [2]. Per risolvere l'equazione 1.36 la si discretizza e si risolve il relativo problema di assegnazione tramite algoritmi numerici, come quelli presentati in [4], che permettano di preservare l'unicità delle soluzioni.

aaa

## Capitolo 2

# Tipi di singolarità nella trattazione Lagrangiana

### 2.1 Setup e scelta delle condizioni iniziali

In cosmologia le caustiche, che nascono da una singolarità nella trattazione di fluido esposta nel precedente capitolo, rappresentano in realtà il processo fondamentale della formazione di strutture a grande scala nell'universo. Al primo shell-crossing le particelle affrontano il *collasso gravitazionale secondario*, per cui il numero di collisioni aumenta sostanzialmente, e così aumenta il numero di pancakes e strutture filiformi. Tuttavia la forma oblata quasi unidimensionale del pancake non è l'unica forma che si registra: infatti nel contesto di una trattazione nonlineare della dinamica gravitazionale con l'approssimazione di Zel'dovich si incontrano una serie di strutture scrupolosamente classificate per i casi semplici unidimensionale e bidimensionale in [1].

Tuttavia la varietà di strutture che può emergere a seguito del collasso gravitazionale non possono essere previste da un modello che include l'approssimazione di Zel'dovich, la quale si basa sull'ipotesi di velocità costante. In effetti si è spiegato nel primo capitolo che ZA risulta essere una soluzione esatta solamente nel caso unidimensionale, e in ogni caso valida esclusivamente fino al primo shell-crossing, dove le equazioni del fluido falliscono. È necessario quindi tornare all'equazione di riferimento, ossia all'equazione di Vlasov 1.1, anche limitandosi in prima battuta al caso unidimensionale, dal momento che gli shell-crossing si manifestano, almeno nella loro fase iniziale, come fenomeni unidimensionali.

Inquadriamo l'analisi in un universo EdS, dove  $\tau = a$  come accennato in precedenza, quando abbiamo anche fornito la definizione  $u(x(q, \tau), \tau) = \partial_a x(q, \tau) = \partial_\tau(q, \tau) = \dot{x}(q, \tau)$ . Si riportano le equazioni 1.16 e 1.18.

$$\ddot{x} + \frac{3}{2\tau}\dot{x} = -\frac{3}{2\tau}\nabla_x\phi \quad (2.1)$$

$$\nabla_x^2\phi = \frac{\delta}{\tau} \quad (2.2)$$

dove si ricorda che  $\delta = (\rho - \rho_b)/\rho_b$  rappresenta la deviazione dalla densità media, e sia  $\delta$  che  $\phi$  dipendono da  $x$ . In particolare si può riscrivere

$$\delta(x(q, \tau), \tau) = \int dq' \delta_D[x(q, \tau) - x(q', \tau)] - 1 \quad (2.3)$$

dove  $\delta_D$  è una delta di Dirac che dà contributo quando due particelle partite da diverse posizioni iniziali  $q$  e  $q'$  collidono nella stessa posizione euleriana  $x$ .

Si osserva ora che tale set di equazioni gode di invarianza rispetto a trasformazioni di Galileo della forma  $x \mapsto x + \zeta(\tau)$ : possiamo sfruttare al presenza di questa simmetria per imporre una condizione al centro di massa. Per scriverla definiamo il dislocamento lagrangiano  $\xi(q, \tau) := x(q, \tau) - q$ .

$$\int_{\mathbb{T}} \xi(q', \tau) dq' = 0 \quad (2.4)$$

Se tale condizione non fosse rispettata significherebbe che esiste una certa direzione privilegiata di moto delle particelle, incompatibilmente con l'assenza di forze esterne.

A questo punto si procede prendendo la divergenza di 2.1 e inserendovi 2.2, ottenendo

$$\nabla_x \ddot{x} + \nabla_x \left( \frac{3}{2\tau} \dot{x} \right) = -\frac{3}{2\tau} \nabla_x^2 \phi = -\frac{3\delta(x)}{2\tau^2} \quad (2.5)$$

Sostituendo  $\nabla_x = \partial_x q \nabla_q$ , si ottiene

$$\nabla_q \ddot{x} + \frac{3}{2\tau} \nabla_q \dot{x} = -\frac{3}{2\tau^2} \frac{\partial x}{\partial q} \delta(x(q, \tau)) \quad (2.6)$$

$$\nabla_q \left[ \tau^2 \partial_\tau^2 + \frac{3}{2} \tau \partial_\tau \right] x = -\frac{3}{2} \frac{\partial x}{\partial q} \delta(x(q, \tau)) \quad (2.7)$$

A questo punto definiamo la funzione  $F(x(q, \tau))$  come una forza "efficace" di multistreaming, utilizzando la definizione della densità 2.3. Nel dettaglio,  $F(x(q, \tau)) = (\partial_q x) \int \delta_D[x(q, \tau) - x(q', \tau)] dq' - 1$ . Ma allora il secondo membro della 2.7 si può scrivere come

$$-\frac{3}{2} (\partial_q x) \delta = -\frac{3}{2} (F + 1 - \partial_q x) = -\frac{3}{2} F + \frac{3}{2} (\partial_q x - 1) = -\frac{3}{2} F + \frac{3}{2} \partial_q \xi \quad (2.8)$$

dato che in effetti  $\partial_q \xi = \partial_q (x - q) = \partial_q x - 1$ .

Il primo membro di 2.7 invece contiene un operatore temporale che agisce su  $x$ . Se si scrive  $x(q, \tau) = \xi(q, \tau) + q$  e si nota che  $q$  non dipende dal tempo, è equivalente far agire l'operatore su  $\xi$  anzichè su  $x$ .

$$\partial_q \left[ \tau^2 \partial_\tau^2 + \frac{3}{2} \tau \partial_\tau \right] \xi = -\frac{3}{2} F(x(q, \tau)) + \frac{3}{2} \partial_q \xi \quad (2.9)$$

$$\partial_q \mathcal{R}_\tau \xi = -\frac{3}{2} F(x(q, \tau)) \quad (2.10)$$

dove si è definito l'operatore  $\mathcal{R}_\tau = \tau^2 \partial_\tau^2 + (3\tau/2) \partial_\tau - 3/2$ . Integrando ora la 2.10 sulla coordinata  $q$ , sarà possibile ottenere l'equazione del moto del dislocamento  $\xi$ .

$$\mathcal{R}_\tau [\xi(q, \tau) - \xi_c(\tau)] = -\frac{3}{2} S(x(q, \tau)) \quad (2.11)$$

dove  $S$  è definito come l'integrale della forza generalizzata  $S = \int_0^q F(q', \tau) dq'$  e  $\xi_c$  rappresenta il dislocamento alla coordinata  $q = 0$ . Per potere risolvere l'equazione differenziale espressa nella 2.11 ci occorrono però delle condizioni iniziali per l'istante  $\tau = 0$ .

$$\xi(q, 0) = -q + \frac{q^3}{6} + cq^4 + o(q^4) = \xi_{ZA}^{ini} \quad (2.12)$$

in cui si assume  $c \ll 1$ . Questa condizione iniziale viene da [7], in cui si applica un'espansione di Taylor al potenziale gravitazionale, sapendo che quest'ultimo, nell'approssimazione di Zel'dovich, esatta in una dimensione, è collegato alla velocità, come evidente in 1.20, dove si osserva che la velocità non è altro che la derivata del potenziale. Proviamo dunque a espandere il potenziale

$$\phi(q) = \phi_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + o(q^3) \quad (2.13)$$

$$\phi'(q) = a_1 + 2a_2 q + 3a_3 q^2 + o(q^2) \quad (2.14)$$

$$\phi''(q) = 2a_2 + 6a_3 q + o(q) \quad (2.15)$$

$$\phi'''(q) = 6a_3 + o(const) \quad (2.16)$$

La derivata seconda del potenziale è tuttavia esprimibile tramite gli autovalori  $\lambda(q)$  del tensore di deformazione, come mostrato nel capitolo precedente. Pertanto, nel momento in cui si adotta l'ipotesi di minimo per tale autovalore, ossia per la derivata seconda del potenziale, si chiede  $\lambda'(q) = 0$ , cioè  $\phi'''(q) = 0$ . Pertanto è conveniente la scelta  $a_3 = 0$ , che priva la derivata prima  $\phi'(q)$ , e con essa la velocità, della terza potenza. L'espansione proposta in 2.13 è quella proposta in [3], mentre in [6] si raggiungono gradi superiori arrivando a disporre del termine di quarto grado nella velocità, come espresso in 2.12.

Finchè non vi sono eventi di collisione, ossia nella regione di single-stream, non si verificano sovrapposizioni tra coordinate euleriane generate da diversi antecedenti lagrangiani, ossia  $x(q) \neq x'(q')$ . Questo rende l'espressione di densità 2.3 nulla, e con essa anche la forza generalizzata  $F(x(q, \tau))$  e il suo integrale  $S(x(q, \tau))$ . Pertanto l'equazione 2.11 si riduce a  $\mathcal{R}_\tau[\xi(q, \tau) - \xi_c(\tau)] = 0$ . Sfruttando inoltre la condizione del centro di massa 2.4, imponiamo  $\xi_c = 0$ , recuperando così la soluzione di Zel'dovich.

$$x_{ZA}(q, \tau) = q + \tau \xi_{ZA}^{ini} \quad (2.17)$$

Sappiamo che tale soluzione risulta valida solamente fino al primo shell-crossing, momento in cui si verifica la condizione  $\partial_q x_{ZA} = 0$ , che causa invece la divergenza della densità prima nulla. Infatti, ricordando la proprietà della delta di Dirac

$$\delta_D(f(x)) = \sum_i \frac{\delta_D(x - a_i)}{f'(a_i)} \quad (2.18)$$

dove  $\{a_i\}$  sono gli zeri di  $f(x)$ , si trova che la 2.3 diventa

$$\delta(x_{ZA}) = \int dq' \delta_D[x(q, \tau) - x(q', \tau)] - 1 = \int dq' \frac{\delta_D(q' - q)}{\partial_q x_{ZA}(q, \tau)} - 1 = \frac{1}{\partial_q x_{ZA}} - 1 \quad (2.19)$$

per cui si è chiarito perché la densità diventa infinita quando  $\partial_q x_{ZA} = 0$ .

Inoltre, grazie alla scelta delle condizioni iniziali, il primo shell crossing avviene a  $\bar{\tau} = 1$ .

## 2.2 Evoluzione post-Zel'dovich

Dopo lo shell-crossing è necessario rinunciare alla soluzione analitica della 2.11 per fare uso invece di un algoritmo iterativo, il cui primo ciclo adotterà come forza generalizzata la  $F(x_{ZA}(q, \tau))$  calcolata sull'ultima  $x_{ZA}$  ricavata dall'approssimazione di Zel'dovich.

$$\mathcal{R}_\tau[\xi_{PZA}(q, \tau) - \xi_c(\tau)] = -\frac{3}{2} S_{ZA}(q, \tau) \quad (2.20)$$

Per determinare  $S_{ZA}(q, \tau)$  occorre cercare le condizioni per cui si cancella l'argomento della delta di Dirac con cui è costruita la forza generalizzata. Svolgendo i calcoli, si trova che l'argomento della delta di Dirac si annulla per tre radici  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , per cui, utilizzando la proprietà 2.18, è possibile riscrivere  $F(x_{ZA}(q, \tau))$  come

$$F(x_{ZA}(q, \tau)) = \partial_q x_{ZA}(q) \left[ \frac{1}{\partial_q x(q_1)} + \frac{1}{\partial_q x(q_2)} + \frac{1}{\partial_q x(q_3)} \right] \quad (2.21)$$

A questo punto ci è possibile calcolare  $S_{ZA}$ : attraverso la teoria delle perturbazioni si ricava, per coefficienti  $c$  piccoli, il seguente risultato.

$$S_{ZA} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \tau \leq \tau_{com} \\ -sign(q)\sqrt{D(q, \tau, c)} & \tau_{com} \leq \tau \leq \tau_{min} \\ -3q & \tau_{min} \leq \tau \end{cases} \quad (2.22)$$

dove  $D(q, \tau, c) = 24 - 3q^2 - 42/\tau + 24cq(3 - 1^2 - 3/\tau)$ , mentre i due tempi che separano i tre diversi andamenti sono dati da  $\tau_{com} = 8/(8 - q^2 - 5cq^3)$  e  $\tau_{min} = 2/(2 - q^2 - 8cq^3)$ . Tramite questi tempi sono definite le coordinate lagrangiane  $q_{max}$  e  $q_{comax}$ , che sono le coordinate lagrangiane associate alla posizione euleriana massima  $x_{max}$  che delimita l'estremo superiore della zona di multistreaming, e  $q_{min}$  e  $q_{comin}$ , associate all'altro estremo della zona di multistreaming  $x_{min}$ .

$S_{ZA}$  ci è necessaria per il primo ciclo del calcolo iterativo di  $\xi_{PZA}$ , ma occorre anche conoscere il valore della costante di integrazione  $\xi_c(\tau)$ . Per determinarla definiamo  $M(q, \tau) = \mathcal{R}_\tau \xi_c(\tau) - 3/2 S_{ZA}(q, \tau)$ , da cui possiamo scrivere, riordinando la 2.11 e integrando per  $q \in [-\pi, \pi]$ , la seguente.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}_\tau \xi_{PZA}(q', \tau) dq' = \int_{-\pi}^{\pi} M(q', \tau) dq' \quad (2.23)$$

In tale equazione si può far uso della condizione 2.4 per cancellare il membro di sinistra e ottenere quindi che l'integrale di  $M$  deve essere nullo. Questo integrale risulta problematico per via della definizione di  $S_{ZA}$  2.22, per cui facciamo l'ipotesi forte  $\xi_c = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$  dove le  $\{\xi_i\}$  sono soluzioni individuali delle tre regioni di definizione, cioè le costanti di integrazione di ciascun tratto.

Imporre  $\int_{-\pi}^{\pi} M(q', \tau) dq' = 0$  equivale a chiedere  $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}_\tau \xi_c(q', \tau) dq' = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2} S_{ZA}(q', \tau) dq'$  ma dato che  $\xi_c$  è indipendente da  $q$  la stessa equazione si può riscrivere come

$$\mathcal{R}_\tau \xi_c(\tau) = \left\langle \frac{3}{2} S_{ZA}(q, \tau) \right\rangle \quad (2.24)$$

Questa stessa equazione, ripartita nei vari regimi, si traduce nel seguente gruppo di equazioni

$$\mathcal{R}_\tau \xi_1(\tau) = 0 \quad (2.25)$$

$$\mathcal{R}_\tau \xi_2(\tau) = -\left\langle \frac{3}{2} sign(q)\sqrt{D(q, \tau, c)} \right\rangle = 18c(1 - \frac{1}{\tau}) \quad (2.26)$$

$$\mathcal{R}_\tau \xi_3(\tau) = -\left\langle \frac{9}{2} q \right\rangle = 36c(1 - \frac{1}{\tau}) \quad (2.27)$$

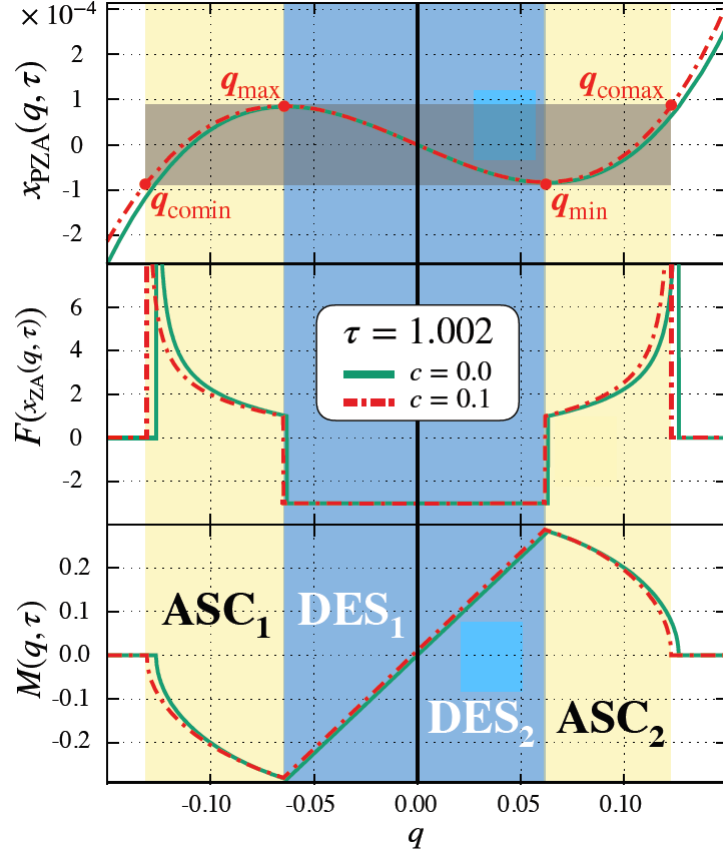
La soluzione della 2.25, nel regime di single stream, è data da  $\xi_1 = 0$ , mentre 2.26 e 2.27 richiedono l'utilizzo delle condizioni iniziali  $\xi(\tau = 1) = 0$  e  $\dot{\xi}(\tau = 1) = 0$ . Si ottengono dunque delle soluzioni valide per  $\xi_i$ , che sommate danno luogo al valore della costante di integrazione  $\xi_c$ .

$$\xi_c(\tau) = -\frac{18c}{5} \left( 10 + 8\tau^{-\frac{2}{3}} - \frac{15}{\tau} - 3\tau \right) \quad (2.28)$$

Si osserva che  $\xi_c$ , che si attiva solamente dopo il primo shell crossing, ossia a  $\tau = 1$ , ossia è interpretato come un boost dipendente dal tempo che non sarebbe prevedibile con l'appoggio della sola approssimazione di Zel'dovich.

In 2.1 è rappresentato il moto della particelle nell'istante  $\tau = 1.002$ , ovvero poco dopo il primo shell-crossing.



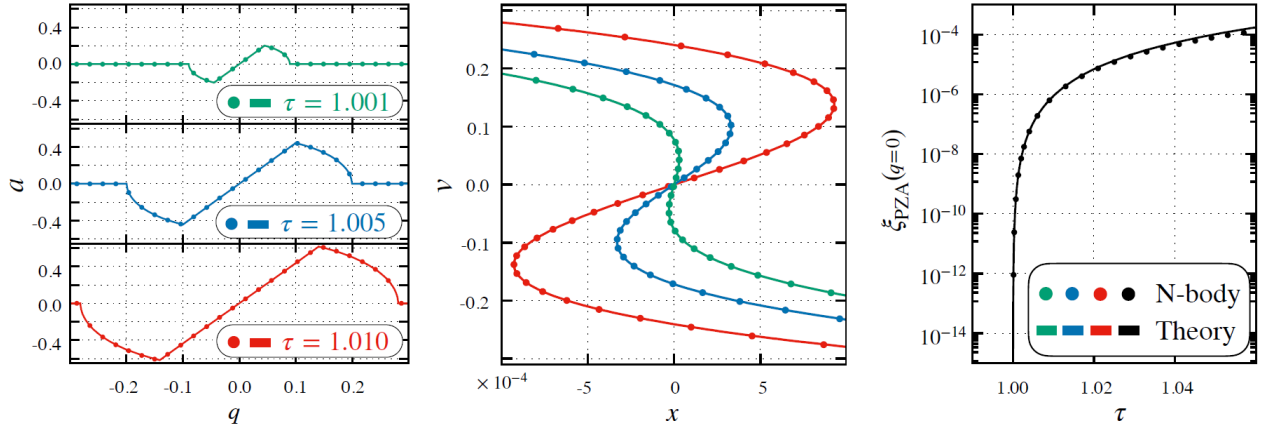


**Figura 2.1:** Nel pannello in alto è raffigurata un'immagine della mappa post-Zeldovich a  $\tau = 1.002$ , nel pannello centrale e quello inferiore sono mappate rispettivamente  $M(q, \tau)$  e  $F(q, \tau)$ . La linea verde rappresenta la soluzione con  $c = 0$ , mentre la linea rossa tratteggiata è la soluzione con  $c = 0.1$ . Nel pannello in alto la zona grigia corrisponde alla zona di multistreaming, dove si vede che a una stessa posizione  $x$  possono corrispondere più posizioni iniziali  $q$ . Inoltre il primo pannello definisce due regioni verticali *ascending* e *descending*. Si osserva inoltre, nel secondo pannello, la presenza di punti con derivata discontinua della forza generalizzata, corrispondenti a effetti di singolarità fisiche.

Ricavata dunque una soluzione per  $\xi_c$  è possibile tornare all'equazione 2.11 e risolvere per  $\xi_{PZA}$  utilizzando il metodo di variazione delle costanti su  $\xi_{PZA} = \lambda(\tau)\tau + \mu(\tau)\tau^{-3/2}$  adottando le condizioni iniziali  $\xi_{PZA}(\tau = 1) = \xi_{ZA}^{ini}$  e  $\dot{\xi}_{PZA} = \dot{\xi}_{ZA}^{ini}$ . Su queste basi si ricava

$$\xi_{PZA} = \xi_c(\tau) + \begin{cases} \tau \xi_{ZA}^{ini}(q) & 0 \leq \tau \leq \tau_{com} \\ \tau \xi_{ZA}^{ini}(q) + \frac{\text{sign}(q)}{180} \frac{D^{\frac{5}{2}}(q, \tau, c) \tau}{8 - q^2 + cq(48 - 11q^2)} & \tau_{com} \leq \tau \leq \tau_{min} \\ -3q + \frac{4}{5}q\tau - \frac{17}{60}q^3\tau + \frac{48}{5} \sqrt{\frac{2}{2 - q^2}} \frac{q}{8 - q^2} \tau^{-\frac{3}{2}} + cf(q, \tau) & \tau_{min} \leq \tau \end{cases} \quad (2.29)$$

dove la definizione di  $D(q, \tau, c)$  è stata fornita in precedenza, mentre  $f(q, \tau) = \frac{11}{20}q^4\tau - \frac{36}{5}q^4 \left( \frac{2}{2 - q^2} \right)^{3/2} \frac{3q^2 - 4}{(q^2 - 8)^2} \tau^{-\frac{3}{2}}$ . La 2.29 fornisce quindi l'andamento complessivo del dislocamento  $\xi$ . In figura 2.2 è proposto un confronto tra previsione teorica e simulazione a N corpi.



**Figura 2.2:** Confronto tra predizione teorica (linea continua) e simulazione a N corpi (punti). Il pannello di sinistra raffigura l'accelerazione  $\xi_{PZA}$  per  $c=0$ , in cui è possibile visualizzare alcuni punti a derivata discontinua che rivelano le singolarità fisiche, ben riprodotte anche dall'andamento della simulazione. Il pannello centrale raffigura le orbite nello spazio delle fasi  $(x, v)$  sempre con  $c=0$ . Il pannello di destra invece raffigura l'improvviso valore non nullo di  $\xi_{PZA}$  al primo shell-crossing ( $\tau = 1$ ), in conseguenza dell'attivazione della forza di multistreaming all'istante  $\tau = 1$ , costruita con  $c=0.1$ .

## 2.3 Asintoti e singolarità

# Conclusioni

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# Bibliografia

- [1] V. Arnold, Sergei Shandarin e Ya Zeldovich. “The Large Scale Structure of the Universe I. General Properties. One-and Two-Dimensional Models”. In: *Geophysical&Astrophysical Fluid Dynamics* 20 (apr. 1982), pp. 111–130.
- [2] Y. Brenier et al. “Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem”. In: *Royal Astronomical Society* (2003).
- [3] Stéphane Colombi. “Vlasov–Poisson in 1D for initially cold systems: post-collapse Lagrangian perturbation theory”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 446.3 (nov. 2014), pp. 2902–2920.
- [4] R. Mohayaee et al. “Back to the primordial Universe by a Monge-Ampere-Kantorovich optimization scheme”. In: *Astronomy&Astrophysics* (2003).
- [5] P. J. E. Peebles. “Tracing galaxy orbit back in time”. In: *The Astrophysical journal* 344 (1989).
- [6] Cornelius Rampf, Uriel Frisch e Oliver Hahn. *Unveiling the singular dynamics in the cosmic large-scale structure*. 2019.
- [7] S. F. Shandarin e Ya. B. Zeldovich. “The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium”. In: *Rev. Mod. Phys.* 61 (2 1989), pp. 185–220.