



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## La formazione delle caustiche nella struttura su grande scala dell’Universo

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Alessandro Bianchetti

Anno Accademico 2019/2020



# Abstract

La tesi è dedicata allo studio del fenomeno matematico delle caustiche, che in cosmologia trova applicazione nella distribuzione delle masse galattiche, caratterizzata da strutture disomogenee.

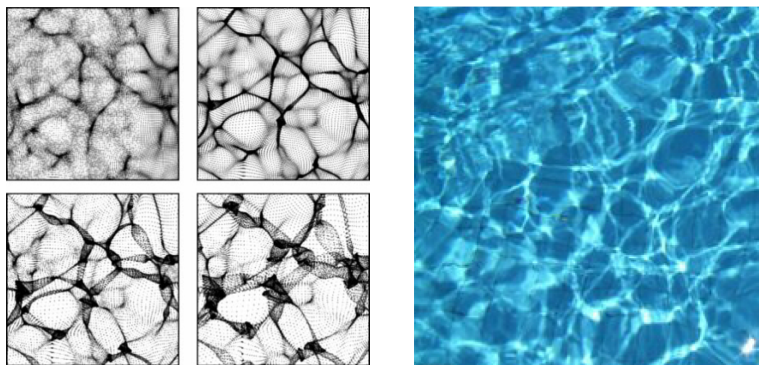
Nella prima parte si affronta il problema della reconstruction in generale, con una panoramica alle meteologie applicate in letteratura. Nella seconda parte ci si addentra nel fenomeno dello shell-crossing nel caso di collisioni unidimensionali tra particelle, lavorando sulle singolarità che possono emergere ed offrendone una classificazione.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Il problema di ricostruzione</b>	<b>6</b>
1.1 Equazioni della fluidodinamica . . . . .	6
1.2 Approssimazione di Zel'dovich . . . . .	8
1.3 Metodi di ricostruzione . . . . .	10
<b>2 Tipi di singolarità nella trattazione Lagrangiana</b>	<b>14</b>
2.1 Setup e scelta delle condizioni iniziali . . . . .	14
2.2 Evoluzione post-Zel'dovich . . . . .	16
2.3 Singolarità nello spazio e nel tempo . . . . .	19
<b>Conclusioni</b>	<b>21</b>

# Introduzione

La presente distribuzione della materia risulta essere altamente disomogenea, organizzata in strutture cosmiche, come i colossali ammassi (*cluster*) di galassie tenuti insieme dalla interazione gravitazionale tra i propri componenti, che raggiungono masse complessive tra  $10^{13}$  e  $10^{16}$  masse solari. Inoltre esistono sovrastrutture ancora più mastodontiche, dette superammassi. I superammassi si presentano come un intricato reticolo di filamenti luminosi di galassie, che delimitano spazi scuri, vuoti. Il fenomeno è noto come *caustiche* e non ha solo applicazione in cosmologia, ma risulta comune a molteplici situazioni naturali. Per esempio, il nome caustica si riferisce anche alla scomposizione della luce sul fondo di una piscina, che effettivamente forma un reticolo analogo alle distribuzioni galattiche.

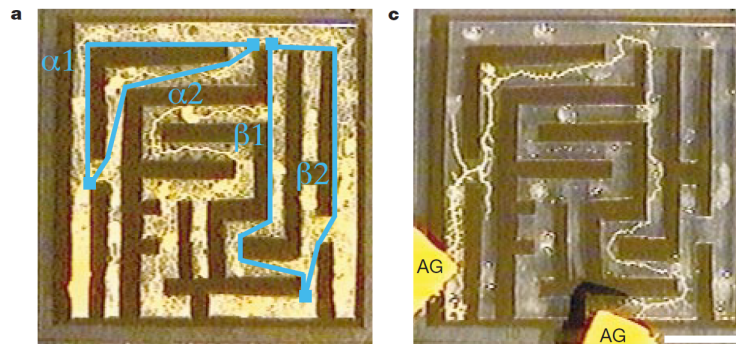


**Figura 1:** A sinistra, simulazione a N corpi bidimensionale fatta in approssimazione di Zel'dovich per crescenti oscillazioni di densità rispetto alla media  $\rho_b$ . A destra, caustica sul fondo di un piscina. Immagine tratta da [6].

Questa distribuzione grumosa della massa si può descrivere con preciso approccio matematico, che sarà discusso nel primo capitolo, e riguarda la teoria del *trasporto ottimo*, che affronta il problema di determinare il processo massimamente efficiente, ovvero con il minimo dispendio, attraverso cui si può trasportare una certa distribuzione di massa iniziale a una finale. La nascita delle teorie sul trasporto ottimo si deve a Gaspard Monge (1746-1818), che per primo formulò il principio variazionale in senso statico. L'idea fu quella di scegliere una funzione costo e impostare la minimizzazione della stessa: per la formalizzazione matematica si può consultare la sezione (1.3). È interessante osservare che Monge arrivò a queste equazioni affrontando il problema di sterro e riporto, ossia quale fosse il metodo più efficace per scavare buche e rinterrare il materiale altrove. Nel manuale di Cedric Villani (1973-presente) la stessa questione viene riformulata nei termini di panetterie e café-bistrot: qual è il modo più efficiente per consegnare le brioches prodotte nei panifici a tutti i punti vendita, note le densità di produzione e di consumo per ciascun punto? Come minimizzare i costi del trasporto?

Quasi due secoli dopo il problema fu ripreso da Leonid Kantorovich (1912-1986), premio Nobel per l'Economia nel 1975, nell'ambito dei suoi studi sulla Programmazione Lineare, teoria derivata dallo studio della pianificazione economica sovietica. Kantorovich si rese conto solamente alcuni anni più tardi di avere generalizzato la discussione di Monge, scrivendone una versione generalizzata, o rilassata, caratterizzata da imposizioni matematiche meno stringenti.

Le equazioni di Monge-Ampere-Kantorovich (MAK) trovano applicazione in una grande varietà di ambiti, in particolare è interessante soffermarsi sulla fisica matematica dei sistemi viventi [3]. Il problema del trasporto del liquido ematico nei mammiferi, finalizzato a trasportare il nutrimento secondo le necessità delle aree locali del corpo, è un problema di trasporto ottimo che si può risolvere con MAK. Solitamente le densità di consumo locali sono note, pertanto è possibile impostare il problema e spiegare in questo modo lo sviluppo della rete arteriosa, che è per natura disposta nel modo più efficiente. Grazie all'impianto variazionale nel corso del Novecento si è quindi intavolato lo studio dei metabolismi animali. Tuttavia le equazioni si prestano non solo alla descrizione dei meccanismi della'alimentazione animale, ma anche al mondo vegetale: è possibile infatti anche descrivere il regime di approvvigionamento di una pianta, o meglio la ramificazione delle sue radici nel sottosuolo. Di recente un gruppo di matematici giapponesi (Tero, Kobayashi e Nakagaki) ha identificato un'applicazione nella dinamica dell'evoluzione di una determinata specie di muffa unicellulare del fango (*Physarium Polycephalum*), guidata dalla via più efficiente per raggiungere fonti di alimentazione ([11]).



**Figura 2:** A sinistra sono raffigurati i possibili percorsi di sviluppo della muffa per raggiungere i fiocchi d'avena, inseriti all'interno di un labirinto edificato su un piano di agar con pareti di pellicola di plastica. A destra è schematizzata la situazione quattro ore dopo l'inserimento del cibo: è evidente che il fungo ha selezionato i due percorsi più brevi. Immagine tratta da [11].

Lo straordinario comportamento della muffa mostra segni di primitiva intelligenza cellulare.

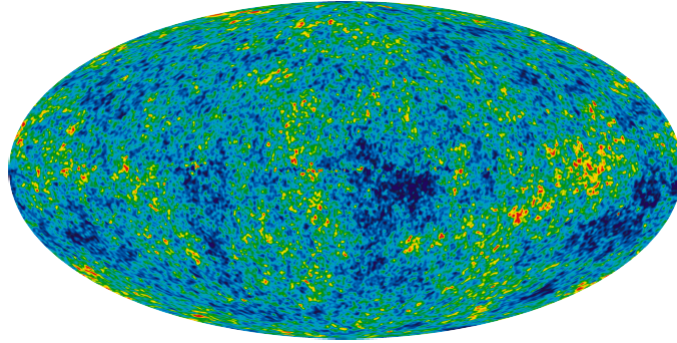
Tornando alla cosmologia, nella prima parte dell'elaborato saranno citate le equazioni MAK tra i metodi di ricostruzione della densità di materia nell'universo, assieme ad altre tecniche. Laddove le equazioni figlie di MAK saltano, lì assisteremo alla formazione delle caustiche, che nella seconda parte di questa tesi verranno analizzate e classificate.

# Capitolo 1

## Il problema di ricostruzione

### 1.1 Equazioni della fluidodinamica

Una delle ipotesi vertice della seguente trattazione è quella secondo cui il plasma primordiale fosse altamente omogeneo. Tale teoria è avallata dallo spettro della CMB (Cosmic Microwave Background), che risulta riprodurre la stessa isotropia, eccezion fatta per deboli fluttuazioni termiche che caratterizzavano lo stesso plasma primordiale.



**Figura 1.1:** Immagine dello spettro della CMB attraverso le misurazioni della sonda spaziale WMAP

Ci muoviamo innanzitutto dal modello cosmologico Einstein-De Sitter, che pone la curvatura dell'universo e la costante cosmologica  $\Lambda$  pari a 0 e prevede uno spazio composto sostanzialmente di materia oscura fredda (CDM). In tale cornice definiamo una mappa Lagrangiana  $\mathbb{M} : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau)$  che connette la posizione iniziale lagrangiana  $\mathbf{q}$  alla posizione corrente euleriana  $\mathbf{x}$  al tempo cosmologico  $\tau \propto t^{\frac{2}{3}}$ . Inoltre le coordinate  $\mathbf{x}$  sono coordinate comoventi legate alle coordinate fisiche  $\mathbf{r}$  dalla relazione  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$ , dove  $a$  rappresenta il fattore cosmico di scala, che corrisponde a  $\tau$  in un universo EdS. Definiamo infine le velocità  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + \mathbf{v}$ .

Per approcciare la dinamica di particelle non collidenti (*polvere*), definiamo una funzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  che corrisponde alla densità degli stati nello spazio delle fasi. E' possibile quindi utilizzare il Teorema di Liouville, che afferma che la densità sopra citata si conserva nell'evoluzione di un sistema conservativo: in effetti l'ipotesi di assenza di collisioni ci permette di soddisfare i requisiti del teorema, e quindi possiamo porre a zero la derivata totale della funzione densità, ricavando l'equazione di Vlasov.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (1.1)$$

L'equazione di Vlasov è molto difficile da risolvere analiticamente: adottiamo quindi un approccio teorico semplificato, cioè la descrizione Newtoniana di fluido: in particolare sposiamo l'ipotesi di entropia costante e di assenza di termini di pressione, in accordo con la trattazione della CDM come una polvere autogravitante e non collidente.

Il set di equazioni adatto all'approccio fluidodinamico è dato da

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{w} = -\nabla_{\mathbf{r}} \Phi \quad (1.3)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.4)$$

dove la (1.2) è l'equazione di continuità che costituisce la conservazione della massa, la (1.3) è l'equazione di Eulero e viene dalla conservazione del momento, mentre la (1.4) rappresenta l'equazione di Poisson relativa al potenziale gravitazionale  $\Phi$ .

Poniamo inoltre  $\rho = \rho_b + \delta\rho$ , dove  $\rho_b$  è la densità media di background e  $\delta\rho$  costituisce una deviazione da tale valore medio.  $\Phi = \Phi_b + \phi'$  invece è la somma di un potenziale di background e un potenziale peculiare  $\phi'$ . Grazie a queste due apposizioni possiamo separare l'equazione di Poisson, ottenendo un'equazione nella sola coordinata comovente  $\mathbf{x}$ . Possiamo riscrivere anche (1.2) e (1.3) nelle coordinate  $\mathbf{x}$ , usando la relazione

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + H(\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \quad (1.5)$$

Si ricava dunque

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = -\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\phi = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \phi' = 4\pi G \delta\rho \quad (1.8)$$

Le equazioni della fluidodinamica rappresentano in effetti uno sviluppo dell'equazione di Vlasov fino al primo ordine. Per spiegare questo passaggio, osserviamo che la densità di massa e la velocità sono associate rispettivamente al momento di aspettazione di ordine zero e di ordine uno della densità nello spazio delle fasi  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ .

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{a^3} \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{a^3} \frac{\int d^3p \cdot \mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} \quad (1.10)$$

Integrando ora l'equazione di Vlasov sul dominio del momento  $\mathbf{p}$ , si trova che l'ultimo termine dell'integrando rappresenta un'integrale di volume della forza  $\partial f / \partial \mathbf{p}$ , che tramite il Teorema di Gauss si può



riscrivere come un integrale su una superficie all'infinito, dove la forza si annulla. Utilizzando poi la definizione (1.9) si ricava

$$\frac{\partial}{\partial t}(a^3 \rho) + \frac{1}{a^2} \nabla_x \int d^3 p \cdot \mathbf{p} f = 0. \quad (1.11)$$

Maneggiando opportunamente quest'ultima e utilizzando anche la (1.10) si arriva esattamente all'equazione di continuità (1.2).

Se invece si moltiplica l'equazione di Vlasov per  $\mathbf{p}$  per poi integrare di nuovo su tale variabile, conviene lavorare sul termine  $i$ -esimo e operare un'integrazione per parti sempre sull'ultimo addendo dell'integrando.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3 p p^i f + \frac{1}{ma^2} \partial^i \int d^3 p p_j p_j f + a^3 \rho \partial^i \phi = 0 \quad (1.12)$$

Manipolando questa espressione e utilizzando l'equazione di continuità, si arriva proprio all'equazione di Eulero (1.3).

Le equazioni della fluidodinamica rappresentano dunque i primi termini dello sviluppo dell'equazione di Vlasov, e perciò costituiscono una via più facilmente percorribile, offrendo la possibilità di giungere a delle soluzioni analitiche altrimenti proibitive.

## 1.2 Approssimazione di Zel'dovich

A questo punto tuttavia conviene operare un ulteriore cambio di variabili sul set di equazioni ottenute (1.6), (1.7) e (1.8). Per farlo si definisce meglio il fattore di scala per mezzo di un'ampiezza  $a_*$  e un tempo caratteristico  $t_*$ , in modo che  $a(t) = a_*(t/t_*)^{2/3}$ . Ricordando inoltre  $\rho = \rho_b + \delta\rho$  e  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$ , facciamo le seguenti sostituzioni

$$\rho \mapsto \eta = \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta \quad (1.13)$$

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{da} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{da} = \frac{\mathbf{v}}{a\dot{a}} \quad (1.14)$$

$$\phi' \mapsto \phi = \frac{3t_*^2}{2a_*^3} \phi' \quad (1.15)$$

Grazie alla mappatura  $(\rho, \mathbf{v}, \phi') \mapsto (\eta, \mathbf{u}, \phi)$ , le equazioni del fluido assumono la nuova forma

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} + \frac{3}{2a} \mathbf{u} = -\frac{3}{2a} \nabla \phi \quad (1.16)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\delta}{a} \quad (1.18)$$

dove la derivata  $D/Da$  si dice *derivata convettiva*. Ora usiamo il fatto che in un universo EdS linearizzato, la soluzione *growing mode* è data complessivamente da  $\delta \propto t^{2/3}$ ,  $\mathbf{v} \propto t^{1/3}$  e  $\phi = \text{const}$ . Con questi andamenti, è evidente che la nuova coordinata di velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/(a\dot{a}) \approx \text{const}$ , dal momento che sia  $\mathbf{v}$  che  $a\dot{a} \propto t^{2/3} \cdot t^{-1/3}$  hanno lo stesso andamento  $t^{1/3}$ .

Ma allora il termine  $Du/Da$  nell'equazione di Eulero si può considerare nullo

$$\frac{Du}{Da} = 0 \quad (1.19)$$

ottenendo così

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi \quad (1.20)$$

che è la soluzione linearizzata, valida per piccole deviazioni dalla densità di background, ovvero per  $\delta < 1$ . L'approssimazione di Zel'dovich sta nel considerare tale risultato legittimo anche oltre il regime di linearità, ossia assumere la validità di (1.19) ovunque. Si può inoltre osservare che in queste condizioni l'equazione di Poisson gravitazionale risulta disaccoppiata dalle altre due ed è utile per applicare le condizioni iniziali. La (1.19) descrive un moto rettilineo uniforme, in cui la particella è soggetta solamente alla propria inerzia senza perturbazioni gravitazionali esterne. Quindi se la posizione iniziale è descritta dalla coordinata lagrangiana  $\mathbf{q}$ , allora per ogni posizione euleriana  $\mathbf{x}$  del moto varrà che

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = \mathbf{u}_0(\mathbf{q}) \quad (1.21)$$

Le traiettorie delle particelle, rettilinee e a velocità costante  $\mathbf{u}$ , sono descritte da

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + a\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) \quad (1.22)$$

Ma usando (1.20) si ricaverà

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} - a\nabla\phi_0 \quad (1.23)$$

Alla fine di questi passaggi si è in grado di identificare la mappa  $\mathbb{M}$  che collega le coordinate lagrangiane iniziali con quelle finali euleriane.

A questo punto saremmo in grado di risolvere l'equazione di Eulero semplicemente come un'equazione a variabili separabili, trovando quindi la forma di  $\eta$ . Tuttavia la via più semplice risulta invece dall'impostare la conservazione della massa dei singoli elementi fluidi.

$$\eta(\mathbf{x}, a)d^3x = \eta_0(\mathbf{q})d^3q \quad (1.24)$$

da cui

$$\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = (1 + \delta_0(\mathbf{q})) \det \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (1.25)$$

Ma supponendo che nella configurazione iniziale la perturbazione di energia sia nulla  $\delta_0 = 0 \quad \forall \mathbf{q}$  e contemporaneamente utilizzando le proprietà del determinante, si potrà scrivere anche

$$\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \left[ \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \right]^{-1} \quad (1.26)$$

E' possibile scrivere la matrice  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$  in componenti, sapendo che  $x_i = q_i - a \frac{\partial \phi_0}{\partial q^i}$ , e derivando ulteriormente

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \delta_j^i - a \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial q_i \partial q^j} = \delta_j^i - a D_j^i(q) \quad (1.27)$$

dove si è definito il tensore di deformazione  $D_j^i$ , connesso al laplaciano del potenziale gravitazionale. Nel sistema di riferimento opportuno tale tensore ha forma diagonale, con i tre autovalori  $\lambda_1(\mathbf{q})$ ,  $\lambda_2(\mathbf{q})$  e  $\lambda_3(\mathbf{q})$ , dipendenti dalle coordinate iniziali. Questi governano la deformazione locale della materia lungo i tre assi ortogonali identificati dagli autovettori. Si può dimostrare che nell'ipotesi in cui il potenziale  $\phi_0$  sia gaussiano come previsto dal meccanismo di inflazione, allora nel 92% dei casi almeno uno dei tre autovalori del tensore di deformazione è positivo. Ora, riscrivendo il rapporto di densità  $\eta$

$$\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \left[ \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \right]^{-1} = [\det (\mathbb{I} - aD)]^{-1} = \frac{1}{(1 - a\lambda_1(\mathbf{q}))(1 - a\lambda_2(\mathbf{q}))(1 - a\lambda_3(\mathbf{q}))} \quad (1.28)$$

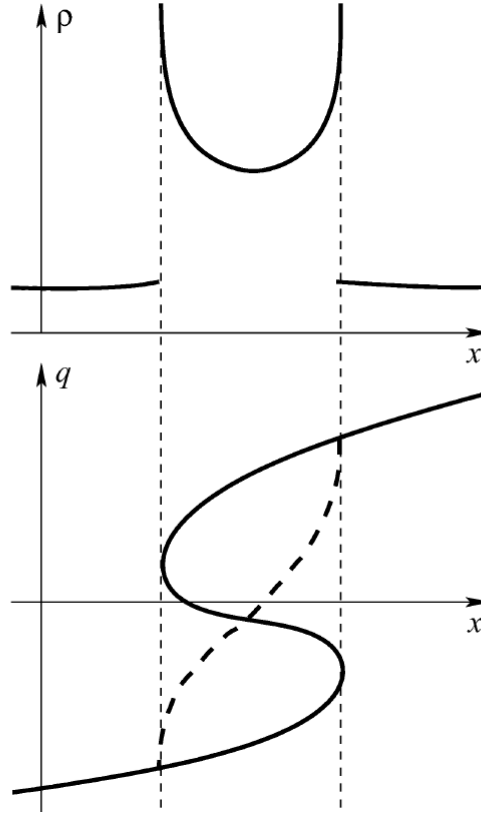
A questo punto, è evidente che, supponendo che  $\lambda_1(\mathbf{q})$  sia l'autovalore maggiore, allora il tempo  $\bar{a} = 1/\lambda_1(\mathbf{q})$  rappresenta la prima criticità, in quanto la quantità  $\eta$  diverge e con essa la densità. Questo tipo di evento è detto *shell-crossing* o *caustica* ed rappresenta il fenomeno che si registra quando due particelle con diverse coordinate lagrangiane iniziali  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  confluiscono nella stessa coordinata di campo  $\mathbf{x}$ , dando luogo a densità infinita. Tale divergenza è racchiusa nella mancata biunivocità della mappa  $\mathbb{M}^{-1}$ , dal momento che a una sola coordinata euleriana possono corrispondere più coordinate iniziali. A causa della mancanza di tale biunivocità, la matrice Jacobiana  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$  risulta essere mal definita. Le caustiche delimitano le zone del cosiddetto *multistreaming*, regioni entro le quali non è più possibile ritracciare le particelle all'indietro, in quanto non sappiamo come si sono comportate negli eventi di shell-crossing. Le strutture di materia che si formano sono dette *pancakes*, strutture oblate che si sviluppano su un piano, nel senso che la grumosità si sviluppa sostanzialmente in una oppure due direzioni. Queste strutture saranno l'opportuna sede della formazione delle galassie.

Nel regime di single-stream l'approssimazione di Zel'dovich è opportuna, in quanto costituisce un modello non accelerato dove le particelle procedono imperturbate lungo una traiettoria rettilinea e a velocità costante. Tuttavia a partire dal primo shell-crossing, ovvero di fronte alle prime collisioni, l'approssimazione perde di validità, in quanto non prevede gli effetti dell'accelerazione gravitazionale esercitata dalle particelle vicine, che modificherebbe in modo sensibile il cammino dell'oggetto in esame.

### 1.3 Metodi di ricostruzione

Come anticipato all'inizio del capitolo, l'alta uniformità della CMB è una prova forte dell'omogeneità dell'Universo primordiale. La grumosità della distribuzione attuale della massa si spiega invece con la formazione di strutture filiformi e oblate come i pancakes. Per poter rendere conto di questa transizione, sono possibili due tipi di atteggiamento: un *forward approach*, che si basa sull'ipotizzare un modello iniziale, presumibilmente a densità costante, ed eseguire una simulazione a N corpi sulle basi della dinamica Newtoniana, e controllare il grado d'accordo statistico tra l'output della simulazione e la distribuzione attuale delle galassie, per poi accettare o eventualmente rigettare il modello cosmologico proposto e formularne un altro. Tale approccio è praticabile solo tramite tecniche numeriche e non permette di formulare analiticamente il problema a causa del numero troppo elevato di gradi di libertà.

Un modo di ottenere soluzioni analitiche invece è seguire un approccio di *reconstruction*, in cui si tenta di fittare in modo esatto la distribuzione di massa attuale dell'universo e di mappare la velocità delle galassie, per poi invertire il problema usando le posizioni attuali come posizioni iniziali e cambiando segno alla velocità. Tuttavia mentre l'approccio forward, pur con il suo alto coefficiente di difficoltà, si può formulare in un ben definito problema di Cauchy che garantisca l'unicità delle soluzioni, la reconstruction non si può formulare allo stesso modo, dato che si è osservato che a causa dello shell-crossing a una coordinata euleriana possono corrispondere più posizioni iniziali. Quindi con la ricostruzione si pone un problema di condizioni al contorno, per cui la sfida consiste nel trovare un algoritmo che garantisca unicità.



**Figura 1.2:** Esempio di ricostruzione senza unicità. La densità nel grafico superiore potrebbe essere stata generata sia dalla mappa lagrangiana in grassetto che da quella tratteggiata. Figura tratta da [2]

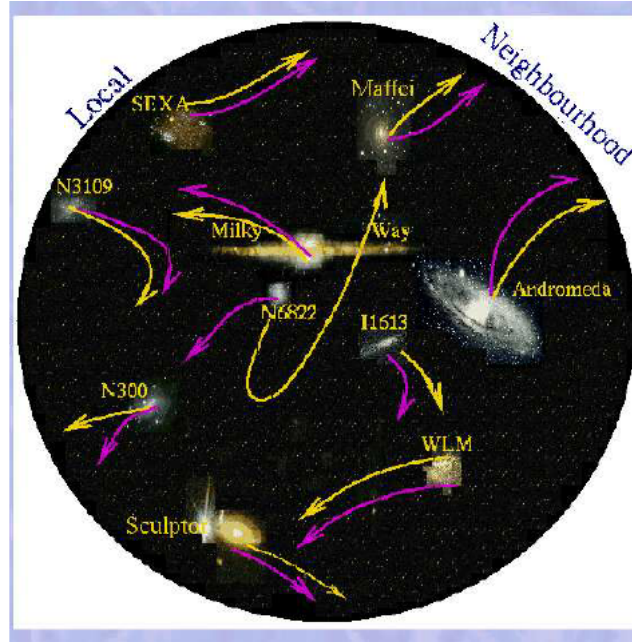
Una via percorribile è rappresentata dal problema variazionale come fu formulato da Peebels in [8]. Anziché risolvere le equazioni del moto, è possibile cercare i punti stazionari della corrispondente azione di Eulero-Lagrange, scritta nelle coordinate comoventi  $\mathbf{x}$  come

$$S = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{m_i a^2 \dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} - \frac{G m_i m_j}{a |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + \frac{2}{3} \pi G \rho_b a^2 m_i \mathbf{x}_i^2 \right] \quad (1.29)$$

dove  $t_0$  rappresenta il tempo attuale,  $\mathbf{x}_i$  è la traiettoria della  $i$ -esima particella e  $\rho_b$  è la densità media di background. Se denotiamo come  $\mathcal{L}$  l'integrando di (1.29), allora è possibile calcolare la variazione di azione e porla uguale a zero per cercare le orbite stazionarie.

$$\delta S = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \delta \mathbf{x}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i \right] = 0 \quad (1.30)$$

Ponendo le opportune condizioni al contorno sarà possibile trovare soluzioni analitiche per  $\mathbf{x}_i$ . In particolare nel suo primo lavoro Peebles considerò solamente i punti di minimo dell'azione: trovò successivamente che considerando anche i punti di sella si trovava un accordo migliore con i parametri osservati nel Gruppo Locale.



**Figura 1.3:** Raffigurazione schematica della ricostruzione di Peebles per il Gruppo Locale. Le orbite rosa corrispondono alla scelta del minimo dell'azione, mentre quelle gialle indicano la selezione del punto di sella. Interessante è il caso della galassia N6822, che offre sia una soluzione in avvicinamento che in allontanamento: l'accordo corretto si trova con l'orbita prevista con il punto di sella. Immagine tratta da [7].

Tuttavia è impresa ardua ripetere gli stessi risultati su altri set di galassie redshiftate, di cui sono sconosciute le velocità, necessarie a porre opportune condizioni al contorno. Non è possibile quindi scegliere l'orbita corretta tra le molte proposte dall'approccio variazionale, per cui si perde l'unicità della soluzione, come accennato in precedenza.

Oltre all'approccio variazionale appena esposto, un'opzione valida è la ricostruzione POTENT, che si basa sul rintracciare il campo potenziale della velocità integrando le componenti radiali della velocità. Questo metodo regge solamente in regime euleriano lineare  $|(\rho - \rho_b)/\rho_b| \leq 1$ , pertanto non recuperano le corrette condizioni iniziali delle regioni di attuale alta densità, in quanto non lineari: in altre parole, è un metodo di ricostruzione che non funziona nelle regioni di multistreaming.

Infine il metodo MAK supera sia il problema della non unicità che affligge la ricostruzione di Peebles, sia i limiti di validità dell'algoritmo POTENT, rimanendo valido anche ben oltre il regime lineare euleriano. Occorre innanzitutto formulare un'equazione di conservazione della massa e prenderla a vincolo, o meglio in virtù di condizione al contorno in sostituzione delle velocità iniziali, che abbiamo detto essere per la maggior parte dei casi sconosciute.

$$\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \rho_0(\mathbf{q})d\mathbf{q} \quad (1.31)$$

dove  $\rho_0(\mathbf{q})$  è la densità iniziale e a  $\rho(\mathbf{x})$  è la densità alla posizione attuale euleriana. Manipolando tale equazione di conservazione otterremo

$$\det \left[ \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{q})} \quad (1.32)$$

dove il membro di destra dovrebbe essere noto: conosciamo infatti la posizione della particella e la densità del campo euleriano, e assumiamo inoltre una densità iniziale costante  $\rho_0(\mathbf{q}) = \rho_0$ , spallaggiati dai dati raccolti sullo spettro della radiazione di fondo. Ipotizzare densità costante corrisponde proprio a richiedere velocità peculiari tendenti a zero procedendo all'indietro nel tempo. Per risolvere

l'equazione, si fa l'ipotesi che la mappa lagrangiana  $\mathbb{M} : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}$  si possa scrivere come il gradiente di un potenziale convesso  $\Phi$ .

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}, t) \quad (1.33)$$

La convessità del potenziale assicura una relazione biunivoca tra coordinata lagrangiana e coordinata euleriana, ossia garantisce l'unicità evitando i fenomeni di multistreaming. Si osserva che nel caso dell'approssimazione di Zel'dovich, con l'equazione (1.23) che esplicita la mappa lagrangiana è possibile costruire il potenziale  $\Phi$ , che sarebbe dato da  $\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q}^2/2 - a\phi_0(\mathbf{q}, t)$ . Tuttavia è evidente che tale potenziale non è convesso ovunque, e proprio per questo l'approssimazione di Zel'dovich non garantisce unicità, in quanto propone una traiettoria rettilinea secondo cui le particelle proseguono dritte nella direzione in cui sono entrate nella zona di shell-crossing, in modo abbastanza irrealistico, dal momento che la traiettoria di una particella che entra in una zona di alta densità viene presumibilmente modificata in modo consistente. Sarà invece possibile identificare un potenziale convesso e recuperare quindi l'unicità solamente con una proposta alternativa all'approssimazione di Zel'dovich, ossia il modello di adesione, che prevede l'aggiunta di termini di interazione gravitazionale. Se  $\Phi$  esiste ed è convesso sarà definita convessa anche la mappa inversa  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  tale caustiche  $\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{x}} \Theta$ . La relazione tra  $\Phi$  e  $\Theta$  è stabilita dalle trasformazioni di Legendre-Fenchel.

$$\Theta(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{q}} \{\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \Phi(\mathbf{q})\} \quad \Phi(\mathbf{q}) = \max_{\mathbf{x}} \{\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - \Theta(\mathbf{x})\} \quad (1.34)$$

A questo punto l'equazione (1.32) diventa l'equazione di Monge-Ampere.

$$\det \left[ \frac{\partial^2 \Theta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right] = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} \quad (1.35)$$

Solo recentemente si è scoperto che la soluzione a tale equazione è equivalente alla soluzione unica di un problema di trasporto ottimo, in particolare il problema di trasporto di massa di Monge-Kantorovich, in cui si cerca quale relazione tra  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{x}$  minimizza la la funzione quadratica di costo  $c(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2$ , o meglio si cerca la minimizzazione del funzionale  $I$ .

$$I = \int_{\mathbf{q}} \rho_0(\mathbf{q}) |\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2 d\mathbf{q} = \int_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) |\mathbf{x} - \mathbf{q}|^2 d\mathbf{x} \quad (1.36)$$

Si trova infatti che per ottenere la condizione  $\delta I = 0$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  deve essere il gradiente di una funzione di  $\mathbf{x}$ . I dettagli della trattazione sono reperibili in [7] e [2]. Per risolvere l'equazione (1.36) la si discretizza e si risolve il relativo problema di assegnazione tramite algoritmi numerici, come quelli presentati in [7], che permettano di preservare l'unicità delle soluzioni.

## Capitolo 2

# Tipi di singolarità nella trattazione Lagrangiana

### 2.1 Setup e scelta delle condizioni iniziali

In cosmologia le caustiche, che nascono da una singolarità nella trattazione di fluido esposta nel precedente capitolo, rappresentano in realtà il processo fondamentale della formazione di strutture a grande scala nell'universo. Al primo shell-crossing le particelle affrontano il *collasso gravitazionale secondario*, per cui il numero di collisioni aumenta sostanzialmente, e la trattazione si fa delicata. ne consegue che la forma oblata del pancake non è l'unica forma che si registra: infatti nel contesto di una trattazione nonlineare della dinamica gravitazionale con l'approssimazione di Zel'dovich si incontrano una serie di strutture scrupolosamente classificate per i casi semplici unidimensionale e bidimensionale in [1].

Tuttavia la varietà di strutture che può emergere a seguito del collasso gravitazionale non possono essere previste da un modello che include l'approssimazione di Zel'dovich, la quale si basa sull'ipotesi di velocità costante. In effetti si è spiegato nel primo capitolo che ZA risulta essere una soluzione esatta solamente nel caso unidimensionale, e in ogni caso valida esclusivamente fino al primo shell-crossing, dove le equazioni del fluido falliscono. È necessario quindi tornare all'equazione di riferimento, ossia all'equazione di Vlasov (1.1), anche limitandosi in prima battuta al caso unidimensionale, dal momento che gli shell-crossing si manifestano, almeno nella loro fase iniziale, come fenomeni unidimensionali.

Inquadriamo l'analisi in un universo EdS, dove  $\tau = a$  come accennato in precedenza, quando abbiamo anche fornito la definizione  $u(x(q, \tau), \tau) = \partial_a x(q, \tau) = \partial_\tau(q, \tau) = \dot{x}(q, \tau)$ . Si riportano le equazioni (1.16) e (1.18).

$$\ddot{x} + \frac{3}{2\tau}\dot{x} = -\frac{3}{2\tau}\nabla_x\phi \quad (2.1)$$

$$\nabla_x^2\phi = \frac{\delta}{\tau} \quad (2.2)$$

dove si ricorda che  $\delta = (\rho - \rho_b)/\rho_b$  rappresenta la deviazione dalla densità media, e sia  $\delta$  che  $\phi$  dipendono da  $x$ . In particolare si può riscrivere

$$\delta(x(q, \tau), \tau) = \int dq' \delta_D[x(q, \tau) - x(q', \tau)] - 1 \quad (2.3)$$

dove  $\delta_D$  è una delta di Dirac che dà contributo quando due particelle partite da diverse posizioni iniziali  $q$  e  $q'$  collidono nella stessa posizione euleriana  $x$ .

Si osserva ora che tale set di equazioni gode di invarianza rispetto a trasformazioni di Galileo della forma  $x \mapsto x + \zeta(\tau)$ : possiamo sfruttare al presenza di questa simmetria per imporre una condizione al centro di massa. Per scriverla definiamo il dislocamento lagrangiano  $\xi(q, \tau) := x(q, \tau) - q$ .

$$\int_{\mathbb{T}} \xi(q', \tau) dq' = 0 \quad (2.4)$$

Se tale condizione non fosse rispettata significherebbe che esiste una certa direzione privilegiata di moto delle particelle, incompatibilmente con l'assenza di forze esterne.

A questo punto si procede prendendo la divergenza di (2.1) e inserendovi (2.2), ottenendo

$$\nabla_x \ddot{x} + \nabla_x \left( \frac{3}{2\tau} \dot{x} \right) = -\frac{3}{2\tau} \nabla_x^2 \phi = -\frac{3\delta(x)}{2\tau^2} \quad (2.5)$$

Sostituendo  $\nabla_x = \partial_x q \nabla_q$ , si ottiene

$$\nabla_q \ddot{x} + \frac{3}{2\tau} \nabla_q \dot{x} = -\frac{3}{2\tau^2} \frac{\partial x}{\partial q} \delta(x(q, \tau)) \quad (2.6)$$

$$\nabla_q \left[ \tau^2 \partial_\tau^2 + \frac{3}{2} \tau \partial_\tau \right] x = -\frac{3}{2} \frac{\partial x}{\partial q} \delta(x(q, \tau)) \quad (2.7)$$

A questo punto definiamo la funzione  $F(x(q, \tau))$  come una forza "efficace" di multistreaming, utilizzando la definizione della densità (2.3). Nel dettaglio,  $F(x(q, \tau)) = (\partial_q x) \int \delta_D[x(q, \tau) - x(q', \tau)] dq' - 1$ . Ma allora il secondo membro della (2.7) si può scrivere come

$$-\frac{3}{2} (\partial_q x) \delta = -\frac{3}{2} (F + 1 - \partial_q x) = -\frac{3}{2} F + \frac{3}{2} (\partial_q x - 1) = -\frac{3}{2} F + \frac{3}{2} \partial_q \xi \quad (2.8)$$

dato che in effetti  $\partial_q \xi = \partial_q (x - q) = \partial_q x - 1$ .

Il primo membro di (2.7) invece contiene un operatore temporale che agisce su  $x$ . Se si scrive  $x(q, \tau) = \xi(q, \tau) + q$  e si nota che  $q$  non dipende dal tempo, è equivalente far agire l'operatore su  $\xi$  anzichè su  $x$ .

$$\partial_q \left[ \tau^2 \partial_\tau^2 + \frac{3}{2} \tau \partial_\tau \right] \xi = -\frac{3}{2} F(x(q, \tau)) + \frac{3}{2} \partial_q \xi \quad (2.9)$$

$$\partial_q \mathcal{R}_\tau \xi = -\frac{3}{2} F(x(q, \tau)) \quad (2.10)$$

dove si è definito l'operatore  $\mathcal{R}_\tau = \tau^2 \partial_\tau^2 + (3\tau/2) \partial_\tau - 3/2$ . Integrando ora la (2.10) sulla coordinata  $q$ , sarà possibile ottenere l'equazione del moto del dislocamento  $\xi$ .

$$\mathcal{R}_\tau [\xi(q, \tau) - \xi_c(\tau)] = -\frac{3}{2} S(x(q, \tau)) \quad (2.11)$$

dove  $S$  è definito come l'integrale della forza generalizzata  $S = \int_0^q F(q', \tau) dq'$  e  $\xi_c$  rappresenta il dislocamento alla coordinata  $q = 0$ . Per potere risolvere l'equazione differenziale espressa nella (2.11) ci occorrono però delle condizioni iniziali per l'istante  $\tau = 0$ .

$$\xi(q, 0) = -q + \frac{q^3}{6} + cq^4 + o(q^4) = \xi_{ZA}^{ini} \quad (2.12)$$

in cui si assume  $c \ll 1$ . Questa condizione iniziale viene dall'applicare un'espansione di Taylor al potenziale gravitazionale, sapendo che quest'ultimo, nell'approssimazione di Zel'dovich, esatta in una dimensione, è collegato alla velocità, come evidente in (1.20), dove si osserva che la velocità non è altro che la derivata del potenziale ([10]). Proviamo dunque a espandere il potenziale



$$\phi(q) = \phi_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + a_5 q^5 + O(q^6) \quad (2.13)$$

$$\phi'(q) = a_1 + 2a_2 q + 3a_3 q^2 + 4a_4 q^3 + 5a_5 q^4 + O(q^5) \quad (2.14)$$

$$\phi''(q) = 2a_2 + 6a_3 q + 12a_4 q^2 + 20a_5 q^3 + O(q^4) \quad (2.15)$$

$$\phi'''(q) = 6a_3 + 24a_4 q + 60a_5 q^2 + O(q^3) \quad (2.16)$$

dove  $a_i = (1/i!) \phi^{(i)}(0)$ . La derivata seconda del potenziale è tuttavia esprimibile tramite gli autovalori  $\lambda(q)$  del tensore di deformazione, come mostrato nel capitolo precedente. Pertanto, nel momento in cui si adotta l'ipotesi di massimo per tale autovalore, cioè si ricerca il primo istante di shell-crossing, poniamo la derivata seconda del potenziale nulla. Si chiede dunque  $\lambda'(q) = 0$ , cioè  $\phi'''(0) = 0$ . Pertanto è automatica la scelta  $a_3 = 0$ , che priva la derivata prima  $\phi'(q)$ , e con essa la velocità, della potenza quadratica. L'espansione proposta in (2.13) è quella proposta in [9] e permette di disporre del termine di quarto grado nella velocità, come espresso in (2.12), mentre in [4] ci si ferma a gradi inferiori.

Finchè non vi sono eventi di collisione, ossia nella regione di single-stream, non si verificano sovrapposizioni tra coordinate euleriane generate da diversi antecedenti lagrangiani, ossia  $x(q) \neq x'(q')$ . Questo rende l'espressione di densità (2.3) nulla, e con essa anche la forza generalizzata  $F(x(q, \tau))$  e il suo integrale  $S(x(q, \tau))$ . Pertanto l'equazione (2.11) si riduce a  $\mathcal{R}_\tau[\xi(q, \tau) - \xi_c(\tau)] = 0$ . Sfruttando inoltre la condizione del centro di massa (2.4), imponiamo  $\xi_c = 0$ , recuperando così la soluzione di Zel'dovich.

$$x_{ZA}(q, \tau) = q + \tau \xi_{ZA}^{ini} \quad (2.17)$$

Sappiamo che tale soluzione risulta valida solamente fino al primo shell-crossing, momento in cui si verifica la condizione  $\partial_q x_{ZA} = 0$ , che causa invece la divergenza della densità prima nulla. Infatti, ricordando la proprietà della delta di Dirac

$$\delta_D(f(x)) = \sum_i \frac{\delta_D(x - a_i)}{f'(a_i)} \quad (2.18)$$

dove  $\{a_i\}$  sono gli zeri di  $f(x)$ , si trova che la (2.3) diventa

$$\delta(x_{ZA}) = \int dq' \delta_D[x(q, \tau) - x(q', \tau)] - 1 = \int dq' \frac{\delta_D(q' - q)}{\partial_q x_{ZA}(q, \tau)} - 1 = \frac{1}{\partial_q x_{ZA}} - 1 \quad (2.19)$$

per cui si è chiarito perché la densità diventa infinita quando  $\partial_q x_{ZA} = 0$ .

Inoltre, grazie alla scelta delle condizioni iniziali, il primo shell crossing avviene a  $\bar{\tau} = 1$ .

## 2.2 Evoluzione post-Zel'dovich

Dopo lo shell-crossing è necessario rinunciare alla soluzione analitica della (2.11) per fare uso invece di un algoritmo iterativo, il cui primo ciclo adotterà come forza generalizzata la  $F(x_{ZA}(q, \tau))$  calcolata sull'ultima  $x_{ZA}$  ricavata dall'approssimazione di Zel'dovich.

$$\mathcal{R}_\tau[\xi_{PZA}(q, \tau) - \xi_c(\tau)] = -\frac{3}{2} S_{ZA}(q, \tau) \quad (2.20)$$

Per determinare  $S_{ZA}(q, \tau)$  occorre cercare le condizioni per cui si cancella l'argomento della delta di Dirac con cui è costruita la forza generalizzata. Svolgendo i calcoli, si trova che l'argomento della delta di Dirac si annulla per tre radici  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , per cui, utilizzando la proprietà (2.18), è possibile riscrivere  $F(x_{ZA}(q, \tau))$  come

$$F(x_{ZA}(q, \tau)) = \partial_q x_{ZA}(q) \left[ \frac{1}{\partial_q x(q_1)} + \frac{1}{\partial_q x(q_2)} + \frac{1}{\partial_q x(q_3)} \right] \quad (2.21)$$

A questo punto ci è possibile calcolare  $S_{ZA}$ : attraverso la teoria delle perturbazioni si ricava, per coefficienti  $c$  piccoli, il seguente risultato.

$$S_{ZA} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \tau \leq \tau_{com} \\ -\text{sign}(q)\sqrt{D(q, \tau, c)} & \tau_{com} \leq \tau \leq \tau_{min} \\ -3q & \tau_{min} \leq \tau \end{cases} \quad (2.22)$$

dove  $D(q, \tau, c) = 24 - 3q^2 - 42/\tau + 24cq(3 - 1^2 - 3/\tau)$ , mentre i due tempi che separano i tre diversi andamenti sono dati da  $\tau_{com} = 8/(8 - q^2 - 5cq^3)$  e  $\tau_{min} = 2/(2 - q^2 - 8cq^3)$ . Tramite questi tempi sono definite le coordinate lagrangiane  $q_{max}$  e  $q_{comax}$ , che sono le coordinate lagrangiane associate alla posizione euleriana massima  $x_{max}$  che delimita l'estremo superiore della zona di multistreaming, e  $q_{min}$  e  $q_{comin}$ , associate all'altro estremo della zona di multistreaming  $x_{min}$ .

$S_{ZA}$  ci è necessaria per il primo ciclo del calcolo iterativo di  $\xi_{PZA}$ , ma occorre anche conoscere il valore della costante di integrazione  $\xi_c(\tau)$ . Per determinarla definiamo  $M(q, \tau) = \mathcal{R}_\tau \xi_c(\tau) - 3/2 S_{ZA}(q, \tau)$ , da cui possiamo scrivere, riordinando la (2.11) e integrando per  $q \in [-\pi, \pi]$ , la seguente.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}_\tau \xi_{PZA}(q', \tau) dq' = \int_{-\pi}^{\pi} M(q', \tau) dq' \quad (2.23)$$

In tale equazione si può far uso della condizione (2.4) per cancellare il membro di sinistra e ottenere quindi che l'integrale di  $M$  deve essere nullo. Questo integrale risulta problematico per via della definizione tratta di  $S_{ZA}$  (2.22), per cui facciamo l'ipotesi forte  $\xi_c = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$  dove le  $\{\xi_i\}$  sono soluzioni individuali delle tre regioni di definizione, cioè le costanti di integrazione di ciascun tratto.

Imporre  $\int_{-\pi}^{\pi} M(q', \tau) dq' = 0$  equivale a chiedere  $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}_\tau \xi_c(q', \tau) dq' = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2} S_{ZA}(q', \tau) dq'$  ma dato che  $\xi_c$  è indipendente da  $q$  la stessa equazione si può riscrivere come

$$\mathcal{R}_\tau \xi_c(\tau) = \left\langle \frac{3}{2} S_{ZA}(q, \tau) \right\rangle \quad (2.24)$$

Questa stessa equazione, ripartita nei vari regimi, si traduce nel seguente gruppo di equazioni

$$\mathcal{R}_\tau \xi_1(\tau) = 0 \quad (2.25)$$

$$\mathcal{R}_\tau \xi_2(\tau) = -\left\langle \frac{3}{2} \text{sign}(q) \sqrt{D(q, \tau, c)} \right\rangle = 18c(1 - \frac{1}{\tau}) \quad (2.26)$$

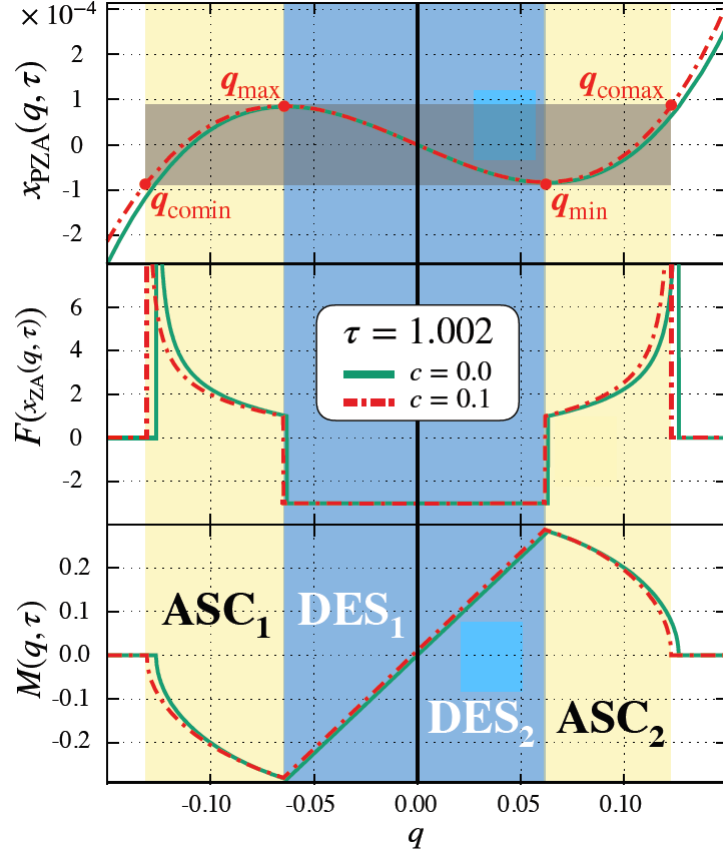
$$\mathcal{R}_\tau \xi_3(\tau) = -\left\langle \frac{9}{2} q \right\rangle = 36c(1 - \frac{1}{\tau}) \quad (2.27)$$

La soluzione della (2.25), nel regime di single stream, è data da  $\xi_1 = 0$ , mentre (2.26) e (2.27) richiedono l'utilizzo delle condizioni iniziali  $\xi(\tau = 1) = 0$  e  $\dot{\xi}(\tau = 1) = 0$ . Si ottengono dunque delle soluzioni valide per  $\xi_i$ , che sommate danno luogo al valore della costante di integrazione  $\xi_c$ .

$$\xi_c(\tau) = -\frac{18c}{5} \left( 10 + 8\tau^{-\frac{2}{3}} - \frac{15}{\tau} - 3\tau \right) \quad (2.28)$$

Si osserva che  $\xi_c$ , che si attiva solamente dopo il primo shell crossing, ossia a  $\tau = 1$ , ossia è interpretato come un boost dipendente dal tempo che non sarebbe prevedibile con l'appoggio della sola approssimazione di Zel'dovich.

In (2.1) è rappresentato il moto della particelle nell'istante  $\tau = 1.002$ , ovvero poco dopo il primo shell-crossing.

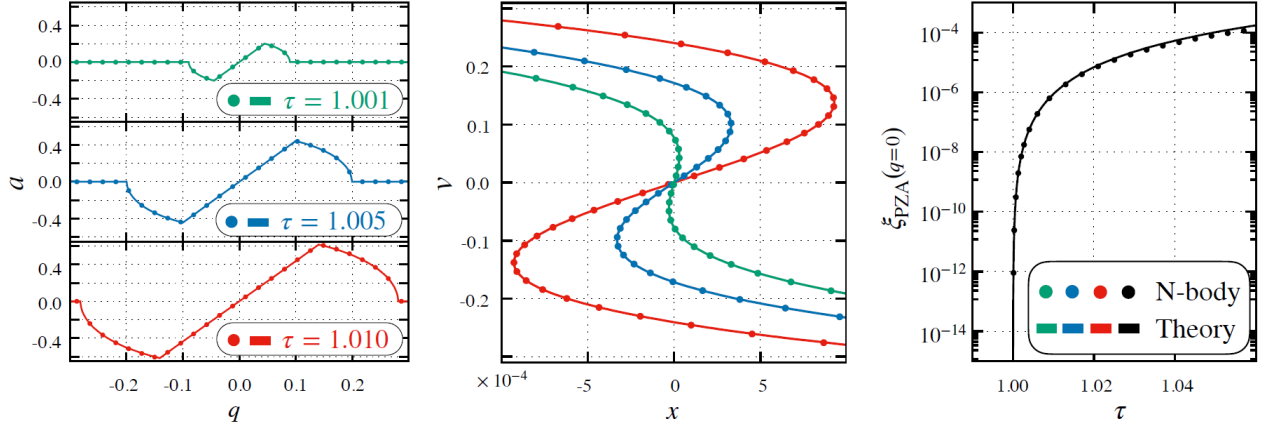


**Figura 2.1:** Nel pannello in alto è raffigurata un'immagine della mappa post-Zeldovich a  $\tau = 1.002$ , nel pannello centrale e quello inferiore sono mappate rispettivamente  $M(q, \tau)$  e  $F(q, \tau)$ . La linea verde rappresenta la soluzione con  $c = 0$ , mentre la linea rossa tratteggiata è la soluzione con  $c = 0.1$ . Nel pannello in alto la zona grigia corrisponde alla zona di multistreaming, dove si vede che a una stessa posizione  $x$  possono corrispondere più posizioni iniziali  $q$ . Inoltre il primo pannello definisce due regioni verticali *ascending* e *descending*. Si osserva inoltre, nel secondo pannello, la presenza di punti con derivata discontinua della forza generalizzata, corrispondenti a effetti di singolarità fisiche. Figura tratta da [9]

Ricavata dunque una soluzione per  $\xi_c$  è possibile tornare all'equazione (2.11) e risolvere per  $\xi_{PZA}$  utilizzando il metodo di variazione delle costanti su  $\xi_{PZA} = \lambda(\tau)\tau + \mu(\tau)\tau^{-3/2}$  adottando le condizioni iniziali  $\xi_{PZA}(\tau = 1) = \xi_{ZA}^{ini}$  e  $\dot{\xi}_{PZA} = \dot{\xi}_{ZA}^{ini}$ . Su queste basi si ricava

$$\xi_{PZA} = \xi_c(\tau) + \begin{cases} \tau \xi_{ZA}^{ini}(q) & 0 \leq \tau \leq \tau_{com} \\ \tau \xi_{ZA}^{ini}(q) + \frac{\text{sign}(q)}{180} \frac{D^{\frac{5}{2}}(q, \tau, c) \tau}{8 - q^2 + cq(48 - 11q^2)} & \tau_{com} \leq \tau \leq \tau_{min} \\ -3q + \frac{4}{5}q\tau - \frac{17}{60}q^3\tau + \frac{48}{5} \sqrt{\frac{2}{2 - q^2}} \frac{q}{8 - q^2} \tau^{-\frac{3}{2}} + cf(q, \tau) & \tau_{min} \leq \tau \end{cases} \quad (2.29)$$

dove la definizione di  $D(q, \tau, c)$  è stata fornita in precedenza, mentre  $f(q, \tau) = \frac{11}{20}q^4\tau - \frac{36}{5}q^4 \left(\frac{2}{2 - q^2}\right)^{3/2} \frac{3q^2 - 4}{(q^2 - 8)^2} \tau^{-\frac{3}{2}}$ . La (2.29) fornisce quindi l'andamento complessivo del dislocamento  $\xi$ . In figura (2.2) è proposto un confronto tra previsione teorica e simulazione a N corpi.



**Figura 2.2:** Confronto tra predizione teorica (linea continua) e simulazione a N corpi (punti). Il pannello di sinistra raffigura l'accelerazione  $\xi_{PZA}$  per  $c=0$ , in cui è possibile visualizzare alcuni punti a derivata discontinua che rivelano le singolarità fisiche, ben riprodotte anche dall'andamento della simulazione. Il pannello centrale raffigura le orbite nello spazio delle fasi  $(x, v)$  sempre con  $c=0$ . Il pannello di destra invece raffigura l'improvviso valore non nullo di  $\xi_{PZA}$  al primo shell-crossing ( $\tau = 1$ ), in conseguenza dell'attivazione della forza di multistreaming all'istante  $\tau = 1$ , costruita con  $c=0.1$ . Figura tratta da [9].

## 2.3 Singolarità nello spazio e nel tempo

Nel precedente capitolo si è ottenuta infine l'equazione del dislocamento  $\xi_{PZA}(q, \tau)$ , definita in tre diverse regioni temporali. Tale equazione (2.29) presenta delle singolarità che è possibile classificare principalmente in due gruppi: singolarità di tipo (a), cioè quelle definite all'interno della regione temporale, e singolarità di tipo (b), che invece emergono quando si cerca di imporre la continuità di  $\xi_{PZA}$  attraverso le regioni di definizione.

Una singolarità di tipo (a) si riscontra all'annullarsi della funzione  $D(q, \tau, c)$ , fatto che si verifica quando  $\tau = \tau_{com}$  e se si sceglie al contempo  $c=0$ . Per investigare tal singolarità diventa necessario sviluppare in espansione di Taylor la funzione  $D$  per piccole deviazioni  $\delta\tau > 0$  intorno a  $\tau_{com}$ . Da tale espansione si troverà che il termine dominante per  $\xi_{PZA}$  è del tipo  $\delta\tau^{5/2}$ . Un ragionamento del tutto analogo si presenta se l'espansione invece si compie su  $q$  fissando l'istante  $\tau$  ed espandendo dunque intorno a  $q_{comax}$  o  $q_{comin}$ : in tal caso si presenterà un termine dominante  $q^{5/2}$ .

Troviamo anche due singolarità di tipo (b): la prima si verifica all'istante  $\tau_{min}$ , cioè quando si incollano le due regioni a cavallo di tale istante, che sono rispettivamente ascending e descending. Per poter realizzare la condizione di continuità, è sufficiente, come prima, porre  $c=0$ . Di nuovo espandendo con Taylor intorno a  $\tau = \tau_{min}$  si trova che la derivata terza di  $\xi_{PZA}$  cambia segno presso tale punto. Pertanto in un intorno di  $\tau_{min}$  il dislocamento deve assomigliare a una funzione  $(\tau - \tau_{min})^3 \theta(\tau - \tau_{min})$ . Anche la derivata terza spaziale risulta essere discontinua. Sia la prima singolarità di tipo (a) che quella di tipo (b) sono rappresentate nel pannello di sinistra della figura (2.2), che riporta una soluzione con  $c=0$ .

Infine è presente anche una terza singolarità, sempre di tipo (b), che viene dalla definizione di  $\xi_c$  in (2.28): infatti si è osservato in precedenza che  $\xi_c$  funge da boost che si attiva al primo shell-crossing entrando nella regione di multistreaming, passando quindi da zero a un valore improvvisamente non nullo. Per questo motivo la particella, che inizialmente procede con velocità costante, acquista bruscamente un'accelerazione non nulla, secondo un andamento non olomorfo (analitico). Questo tipo di singolarità si può osservare nel terzo pannello di (2.2), dove è raffigurato l'andamento di  $\xi_{PZA}$  con  $c=0.1$ .

Sempre in (2.2) è effettuata una comparazione tra i risultati analitici (linea continua) e una simulazione a N corpi della dinamica (punti): il codice usato per la simulazione tratta il caso unidimensionale, è симпlettico e si basa su un algoritmo che determina la forza di multistreaming, partendo da condizioni iniziali stabiliti con l'approssimazione di Zel'dovich, che governa il regime a single-stream, e tramite l'equazione (2.4). Si può osservare che l'accordo tra previsione teorica e dati simulativi è eccellente.

# Conclusioni

Nel presente elaborato si è descritta l'evoluzione della traiettoria di particelle di materia prima del primo shell-crossing, ovvero nell'approssimazione di Zel'dovich, ma anche negli istanti successivi, limitatamente al caso unidimensionale. In particolare si è giunti a scrivere un'espressione per il dislocamento  $\xi(q, \tau) = x(q, \tau) - q$  (e quindi anche per la mappa  $q \mapsto x$ ) sia nel regime di single-stream che in quello di multistreaming. In particolare, la definizione di  $\xi_{PZA}$  in è stata fornita suddivisa in diverse regioni, permettendo così una ben precisa categorizzazione delle singolarità, come esposto in sezione 2.3: si è parlato di due tipi diversi di singolarità che possiamo definire locali, uno interno alle regioni di definizione, uno legato all'imposizione della continuità tra due regioni consecutive. Vi è tuttavia un terzo tipo di singolarità, di tipo globale, e riguarda la scelta della costante di integrazione  $\xi_c(\tau)$  in (2.10).

La determinazione di  $\xi_c(\tau)$  è di fondamentale importanza in quanto tale costante di integrazione rappresenta il boost galileiano che agisce sulle posizioni di tutte le particelle nella fase *descending* del regime di multistreaming.

E' importante ribadire che la trattazione esposta in questo documento e in [9] è tutta nel caso unidimensionale: ad ogni modo, le equazioni di base (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) sono facilmente estendibili anche al caso tridimensionale. Sarà inoltre necessario utilizzare LPT a ordini superiori, con l'accortezza di scegliere opportune condizioni al contorno per lo shell-crossing. Una teoria pienamente sviluppata, basata quindi sull'equazione di Vlasov Poisson (1.1), darebbe accesso ad avanzate predizioni teoriche. In particolare è possibile fornire i cosiddetti *theoretical inputs* per la scrittura di teorie efficaci di uso frequente, spalleggiate da simulazioni a N corpi.

L'equazione di Vlasov-Poisson offre varie applicazioni aldilà dell'utilizzo in cosmologia: difatti ha un ruolo chiave in fisica dei plasmi.

# Bibliografia

- [1] V. Arnold, Sergei Shandarin e Ya Zeldovich. “The Large Scale Structure of the Universe I. General Properties. One-and Two-Dimensional Models”. In: *Geophysical&Astrophysical Fluid Dynamics* 20 (apr. 1982), pp. 111–130.
- [2] Y. Brenier et al. “Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem”. In: *Royal Astronomical Society* (2003).
- [3] Franco Cardin. “Trasporto ottimo, sistemi viventi”. In: *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell’Unione Matematica Italiana* 2.3 (dic. 2017), pp. 327–341.
- [4] Stéphane Colombi. “Vlasov–Poisson in 1D for initially cold systems: post-collapse Lagrangian perturbation theory”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 446.3 (nov. 2014), pp. 2902–2920.
- [5] Uriel Frisch et al. “A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation”. In: *Nature* 417 (giu. 2002), pp. 260–2.
- [6] S. Gurbatov, A. Saichev e Sergei Shandarin. “Large-scale structure of the Universe. The Zeldovich approximation and the adhesion model”. In: *Physics-Uspekhi* 55 (mar. 2012).
- [7] R. Mohayaee et al. “Back to the primordial Universe by a Monge-Ampere-Kantorovich optimization scheme”. In: *Astronomy&Astrophysics* (2003).
- [8] P. J. E. Peebles. “Tracing galaxy orbit back in time”. In: *The Astrophysical journal* 344 (1989).
- [9] Cornelius Rampf, Uriel Frisch e Oliver Hahn. *Unveiling the singular dynamics in the cosmic large-scale structure*. 2019.
- [10] S. F. Shandarin e Ya. B. Zeldovich. “The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium”. In: *Rev. Mod. Phys.* 61 (2 1989), pp. 185–220.
- [11] Hiroyasu Yamada, Agota Toth e Toshiyuki Nakagaki. “Intelligence: Maze-Solving by an Amoeboid Organism”. In: *Nature* 407 (set. 2000), pp. 470–470.