1. Из следствия неравенства Маркова: $\mathbb{P}(|X| > t) \leqslant \frac{\mathbb{E}\,|X|}{t}$, если $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. При этом случайная величина X^2 принимает только положительные значения. Соответственно, можем применить в этом задании формулу, эквивалентную формуле из следствия неравенства Маркова:

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{t}$$

Получить $\mathbb{E}(X^2)$ можно из формулы дисперсии X:

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2$$

Теперь можем получить верхнюю границу для искомой вероятности:

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100} = 0.1$$

Ответ: A [0;0.1] (нижнюю границу точнее установить невозможно, поэтому берём 0).

2. Аналогично первой задаче $\mathbb{E}[\xi^2]$ получаем из формулы для дисперсии X:

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \operatorname{Var}(\xi) + [\mathbb{E}(\xi)^2]$$

При этом известно, что для распределения Пуассона: $\mathbb{E}(\xi) = \operatorname{Var}(\xi) = \lambda$

Тогда:

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda + 1)$$

Ответ: E

3. Известно, что

$$Corr(X+Y, Y) = \frac{Cov(X+Y, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X+Y)\operatorname{Var}(Y)}}$$

Найдём неизвестную по условию ковариацию $X + Y$ и Y (помним, что $Cov(Y, Y) = \operatorname{Var}(Y)$):

$$Cov(X+Y, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Y, Y) = -3 + 9 = 6$$

Теперь найдём дисперсию $X + Y$:

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2cov(X, Y) = 4 + 9 + 2 \cdot (-3) = 7$$

Подставляем найденные значения в формулу корреляции случайных величин и получаем ответ:

$$corr(X+Y, Y) = \frac{6}{\sqrt{7 \cdot 9}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Ответ: C

4. У случайной величины со стандартным нормальным распределением $\sigma = 1$ и $\mu = 0$. При этом для любой случайной величины с нормальным распределением характерна следующая функция плотности:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Подставляя $\sigma = 1$ и $\mu = 0$ в интеграл, получаем:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Ответ: B

5. Поскольку двумерная случайная величина распределена равномерно в треугольнике, то значение её функции плотности в любой точке внутри треугольника равна:

$$f(x, y) = \frac{1}{S}$$

где S - площадь треугольника

Из уравнений, задающих стороны треугольника получаем, что они пересекают оси координат в точках $(0, 0)$, $(0, 4)$ и $(2, 0)$. Площадь такого треугольника равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

Тогда функция плотности равна $\frac{1}{4} = 0,25$

Ответ: A

6. По определению A, B и C независимы в совокупности, если:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

при условии, что также выполняются следующие равенства:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

Про эти 3 равенства ничего не сказано в вариантах ответов, но они предполагаются, поэтому правильным является тот ответ, где указано:

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

Ответ: B

7. Если построить график функции плотности для распределения ξ, то получим прямоугольник, на оси x от 0 до 4 расположена одна из сторон которого, а другая сторона равна $\frac{1}{4}$ (значение функции плотности на отрезке $[0; 4]$).

При этом за пределами отрезка $[0, 4]$ значение функции плотности ξ равно 0.

Тогда получаем ответ через площадь указанного прямоугольника (учитывая, что из отрезка $[3; 6]$ только часть $[3; 4]$ с длиной 1 попадает в отрезок $[0; 4]$, где функция плотности не равна 0):

$$\mathbb{P}(\xi \in [3;6]) = \mathbb{P}(\xi \in [3;4]) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ответ: B

8. Случайная величина X может принимать 11 значений. Значит, вероятность каждого равна $\frac{1}{11}$ (т.к. сказано, что случайная величина принимает эти значения равновероятно). Аналогично для случайной величины Y вероятность каждого значения равна $\frac{1}{3}$.

   Далее для поиска искомой вероятности $\mathbb{P}(X + Y^2 = 2)$ проще всего перебрать все возможные сочетания подходящих значений X и Y, а затем просто сложить вероятности всех таких случаев.

   Подходящие значения:

$$\left[\begin{array}{l} Y = -1, X = 1 \\ Y = 0, X = 2 \\ Y = 1, X = 1 \end{array}\right.$$

   При этом из условия известно, что случайные величины X и Y независимы, а значит, вероятность одного сочетания равна произведению вероятностей попадания каждой из случайных величин в соответствующее значение:

$$\mathbb{P}(Y = 0, X = 2) = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{33}$$

   Всего таких случаев 3, при этом их вероятности равны. Поэтому можем просто умножить найденную вероятность на 3, чтобы получить искомую:

$$\mathbb{P}(X + Y^2 = 2) = \frac{1}{33} \cdot 3 = \frac{1}{11}$$

   Ответ: C

9. Как известно, $\frac{\pi}{3} = 60°$. Тогда доля каждого сектора равна $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$. Поскольку все точки круга равновероятны, то вероятность попадания в конкретный сектор равна доле этого сектора.

   Соответственно, вероятность попадания в красный сектор (он один) равна:

$$\mathbb{P}(\text{красный сектор}) = \frac{1}{6}$$

   Ответ: E

10.
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

   Выражаем из этого тождества $\mathbb{P}(B)$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

   Подставляем значения из условия и получаем:

$$\mathbb{P}(B) = 0.6 - 0.3 + 0.2 = 0.5$$

   Ответ: B

11.
$$\operatorname{Var}(2X - Y + 1) = \operatorname{Var}(2X - Y) = 4\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 4)\operatorname{Cov}(X, Y) = 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot (-3) = 37$$

   Ответ: B

12. Согласно ЗБЧ указанная величина сходится по вероятности к $\mathbb{E}(X^2)$. Тогда получаем:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + \mathbb{E}^2(X) = 1 + 0 = 1$$

Ответ: B

13.

$$f\Big(x|y = \frac{1}{2}\Big) = \frac{f(x, \frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})}$$

В числителе справа стоит совместная функция плотности, в которую необходимо подставить значение $y = \frac{1}{2}$. Найдём функцию плотности случайной величины Y из совместной функции плотности:

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_{0}^{1} 6xy^2\,dx = 3y^2$$

Подставляем в формулу найденную ранее и находим ответ:

$$f\Big(x|y = \frac{1}{2}\Big) = \frac{6x^2 \cdot \frac{1}{4}}{3 \cdot \frac{1}{4}} = 2x$$

Ответ: C

14. В условиях задачи согласно ЦПТ $\overline{X}$ сходится к нормальному распределению с параметрами $\mathbb{E}(X_i)$ и $\frac{\operatorname{Var}(X_i)}{n}$. То есть асимптотически выполняется следующее:

$$\overline{X} \sim \mathbb{N}\Big(4, \frac{100}{100}\Big)$$

Тогда с помощью стандартизации случайной величины получаем:

$$\mathbb{P}(\overline{X} \leqslant 5) = \mathbb{P}(\frac{\overline{X} - 4}{\sqrt{1}} \leqslant \frac{5-4}{1}) = \mathbb{P}(Z \leqslant 1) = 0.8413$$

Ответ: C

15.

$$\begin{gathered}\operatorname{Cov}(X + 2Y, 2X + 3) = \operatorname{Cov}(X + 2Y, 2X) = \operatorname{Cov}(X, 2X) + \operatorname{Cov}(2Y, 2X) = \\ = 2\operatorname{Var}(X) + 4\operatorname{Cov}(X, Y) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -4\end{gathered}$$

Ответ: A

16.

$$\mathbb{E}((X-1)Y) = \mathbb{E}(XY - Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y) = \operatorname{Cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y) = -3 + (-1) \cdot 2 - 2 = -7$$

Ответ: B

17. Случайная величина X_i имеет распределение Бернулли:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{6} \\ 0, & \frac{5}{6} \end{cases}$$

Чтобы определить распределение X_1 при условии $X_1 + X_2 = 1$ необходимо сначала вычислить вероятность этого условия. Проще всего это сделать, если определить какие значения случайных величин подходят для выполнения условий, а затем сложить вероятности подходящих случаев. Для начала найдём такие случаи:

$$\begin{cases} X_1 = 1 \text{ и } X_2 = 0, & p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \\ X_1 = 0 \text{ и } X_2 = 1, & p = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \end{cases}$$

Тогда вероятность события из условия равна:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2) = \frac{5}{36} \cdot 2$$

Для определения условного распределения X_1 осталось только определить условные вероятности значений этой случайной величины:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 | X_1 + X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_1 + X_2 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Аналогично для значения 1:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_1 + X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

Поскольку получили вероятности по $\frac{1}{2}$ для каждого из двух значений случайной величины, то можем утверждать, что условное распределение X_1 при заданном условии совпадает с распределением Бернулли с $p = \frac{1}{2}$.

Ответ: B

18. Случайная величина $X + Y$ имеет нормальное распределение с параметрами $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 + 1 = 3$ и $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 3 + 4 = 7$ (дисперсия суммы равна сумме дисперсий, поскольку случайные величины независимые). Стандартизируя эту случайную величину, получаем ответ:

$$\mathbb{P}(X + Y < 3) = \mathbb{P}(\frac{X + Y - 3}{\sqrt{7}} < \frac{3 - 3}{\sqrt{7}}) = \mathbb{P}(Z < 0) = 0.5$$

Ответ: C

19. В задаче необходимо найти условную вероятность по следующей формуле:

$$\mathbb{P}(\text{"честный кубик"} | \text{"6"}) = \frac{\mathbb{P}(\text{"честный кубик"} \cap \text{"6"})}{\mathbb{P}(\text{"6"})}$$

Значение числителя находим через перемножение вероятностей для каждого из множеств:

$$\mathbb{P}(\text{"честный кубик"} \cap \text{"6"}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

По формуле полной вероятности найдём значение знаменателя:

$$\mathbb{P}(\text{"6"}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{11}{50}$$

Подставляем полученные значения в первую формулу и получаем ответ:

$$\mathbb{P}(\text{"честный кубик"} | \text{"6"}) = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{11}{50}} = \frac{5}{11}$$

Ответ: C

20. На первом шаге методом исключения отбрасываем вариант D, поскольку дисперсия не может быть отрицательной, а в этой матрице на главной диагонали есть отрицательное число. Затем отбрасываем матрицу E, поскольку она не является симметричной (на побочной диагонали стоят разные числа).

    Далее из оставшихся матриц выбираем нужную после подсчёта определителя (у ковариационной матрицы определитель должен быть положительным):

$$\det A = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$$

$$\det B = 1 \cdot 9 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$$

$$\det C = 9 \cdot 6 - 7 \cdot 7 = 5 > 0$$

    Ответ: C

21. $$\mathbb{E}(aX + (1-a)Y) = a\,\mathbb{E}(X) + (1-a)\,\mathbb{E}(Y)$$

    Подставляем значения из условия, чтобы получить уравнение с a:

$$-a + 2(1-a) = 0$$

$$2 - 3a = 0$$

$$a = \frac{2}{3}$$

    Ответ: A

22. Формула вероятности для случайной величины с биномиальным распределением имеет следующий вид:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = p^k (1-p)^{n-k} k \in 0, 1, 2, \ldots$$

    Тогда искомая вероятность равна:

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^{2-0} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

    Ответ: B

23. Пусть X - количество сбоев системы за сутки. Для случайной величины с распределением Пуассона верно следующее:

$$\mathbb{P}(X = k) = \lambda^k \cdot \frac{\exp^{-\lambda}}{k!} \text{ при } k \in 0, 1, 2, \ldots$$

    Тогда искомая вероятность равна:

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-4}$$

    Ответ: C

24.

$$\xi = \begin{cases} 1, \, p \\ 0, \, 1-p \end{cases}$$

Из формулы дисперсии следует:

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + \mathbb{E}(\xi)^2$$

При этом, как известно, у случайных величин с распределением Бернулли:

$$\mathbb{E}(\xi) = p, \mathrm{Var}(\xi) = p(1-p)$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = p(1-p) + p^2 = p$$

Ответ: B

25.

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \mathrm{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: A

26. Методом исключения отбираем правильный вариант ответа.

События A и B не образуют полную группу событий, поскольку два сектора, которые они характеризуют, не покрывают всю площадь круга, в которую может попасть Вася. Вероятности этих событий (каждого) равны $\frac{2}{6}$. Соответственно, неверны пункты B и D. Наконец, эти события не являются независимыми, т.к., например, попадание в красный сектор (событие A) означает невозможность попадания в синий сектор (событие B). Остаётся вариант про несовместность этих событий, который и является верным.

Ответ: E

27.

$$\mathbb{E}(XY) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xy \cdot 6xy^2 \, dxdy = \int\limits_0^1 2x^3y^3 \, dy = \frac{2y^4}{4} = \frac{1}{2}$$

Ответ: A

28.

$$\mathrm{Var}(aX + (1-a)Y) = a^2 \,\mathrm{Var}(X) + (1-a)^2 \,\mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \cdot a(1-a) =$$
$$= 4a^2 + 9(1-a)^2 - 6a(1-a) = 4a^2 + 9 - 18a + 9a^2 - 6a + 6a^2 = 19a^2 - 24a + 9$$

Получаем уравнение, задающее параболу ветвями вверх. Его необходимо минимизировать, для этого достаточно найти координату вершины этой параболы: она гарантированно будет минимумом.

$$a = -\frac{-24}{2 \cdot 19} = \frac{12}{19}$$

Ответ: правильного ответа среди вариантов не было (в таком случае был бы засчитан любой ответ)

29. Чтобы можно было ориентироваться в финальной формуле, запишем сначала всё, что известно из условия в более удобном формате:

$$\mathbb{P}(\text{без багажа}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{с рюкзаком}|\text{без багажа}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\text{с рюкзаком}|\text{с багажом}) = \frac{55}{150}$$

Теперь, используя формулу полной вероятности, получим искомый ответ:

$$\mathbb{P}(\text{без рюкзака}) = \mathbb{P}(\text{без рюкзака}|\text{без багажа}) \cdot \mathbb{P}(\text{без багажа}) + \mathbb{P}(\text{без рюкзака}|\text{с багажом}) \cdot \mathbb{P}(\text{с багажом}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{95}{150} \cdot \frac{3}{4} = 0.6$$

Ответ: A

30. Искомая вероятность похожа на неравенство Чебышёва, однако внутри скобки знак "меньше", а в неравенстве Чебышёва знак "больше".

Запишем неравенство Чебышёва, как оно могло бы выглядеть в условиях этой задачи:

$$\mathbb{P}(|X-2| \geqslant 10) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{100}$$

Теперь можем вычислить искомую вероятность, используя это неравенство:

$$\mathbb{P}(|2-X| \leqslant 10) = \mathbb{P}(|X-2| \leqslant 10) \geqslant 1 - \mathbb{P}(|X-2| \geqslant 10) = 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{100} = 1 - \frac{6}{100} = 0.94$$

Ответ: C