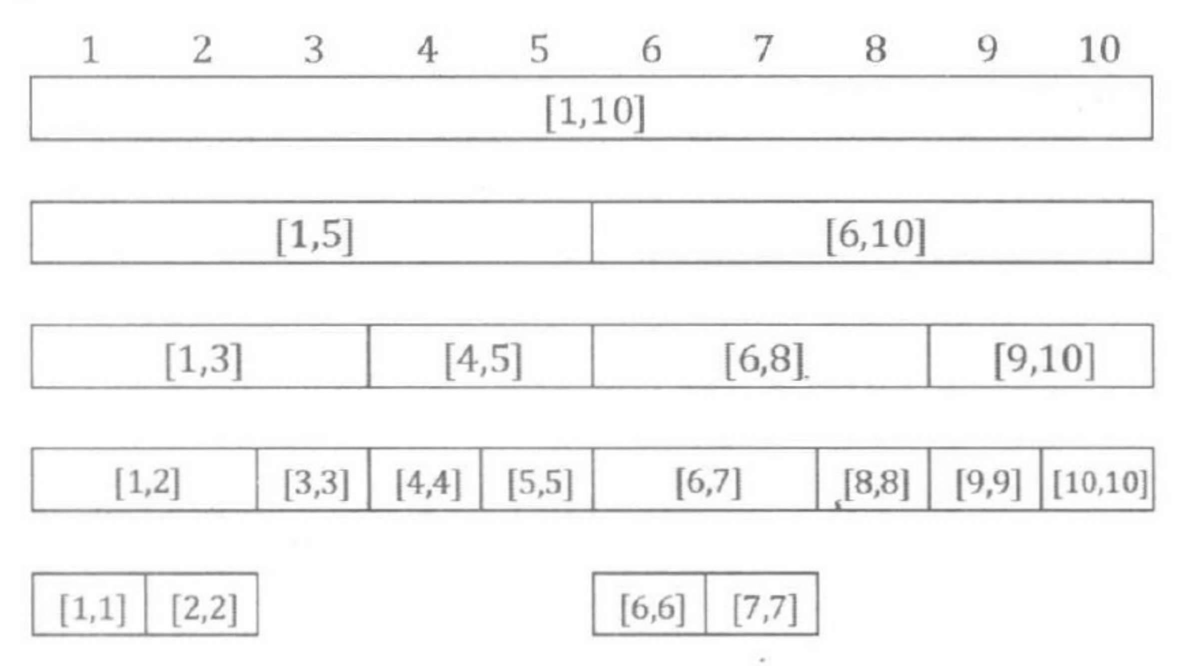
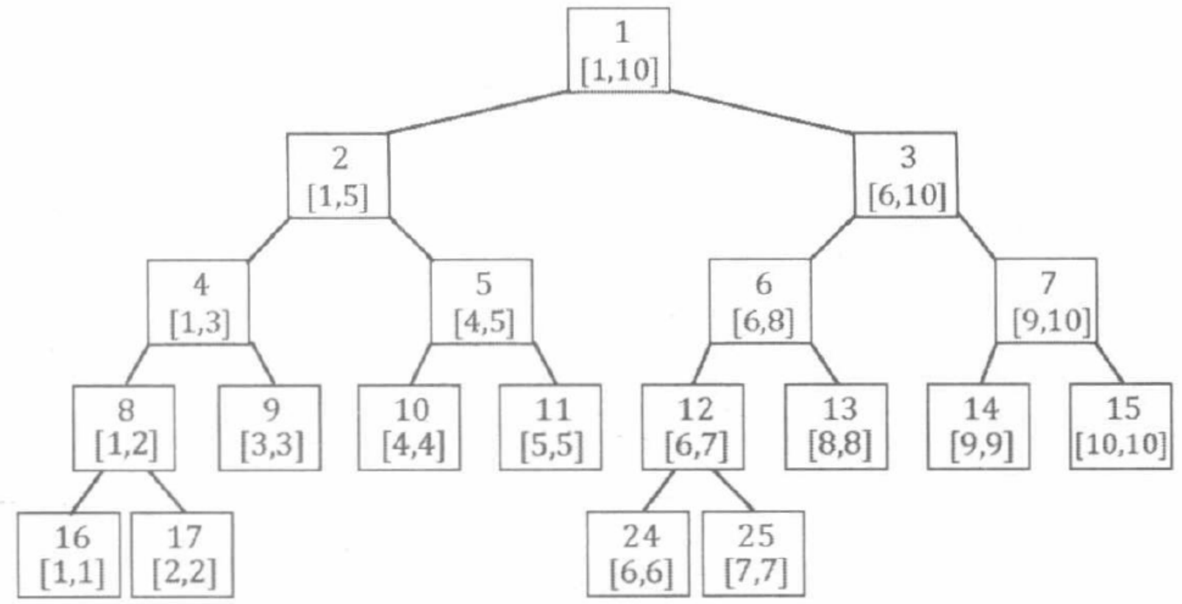
线段树

什么是线段树?

线段树（Segment Tree）是一种`基于分治思想的二叉树结构`，用于在区间上进行信息统计。与树状数组相比，线段树是一种`更加通用`的数据结构。

1. 线段树每个节点都代表一个区间。
2. 线段树具有唯一的根节点，代表的区间是整个统计范围，如[1,N]。
3. 线段树每个叶节点都代表一个长度为1的区间[x,x]。
4. 对于每个内部节点[L,R]，左子节点[L,mid]，右子节点[mid+1,R]，其中mid=L+R>>1。





线段树数据结构设计

由于线段树是二叉树结构，最终要线性存储在内存当中，需要创建一块连续的空间用于存储线段树结构体。

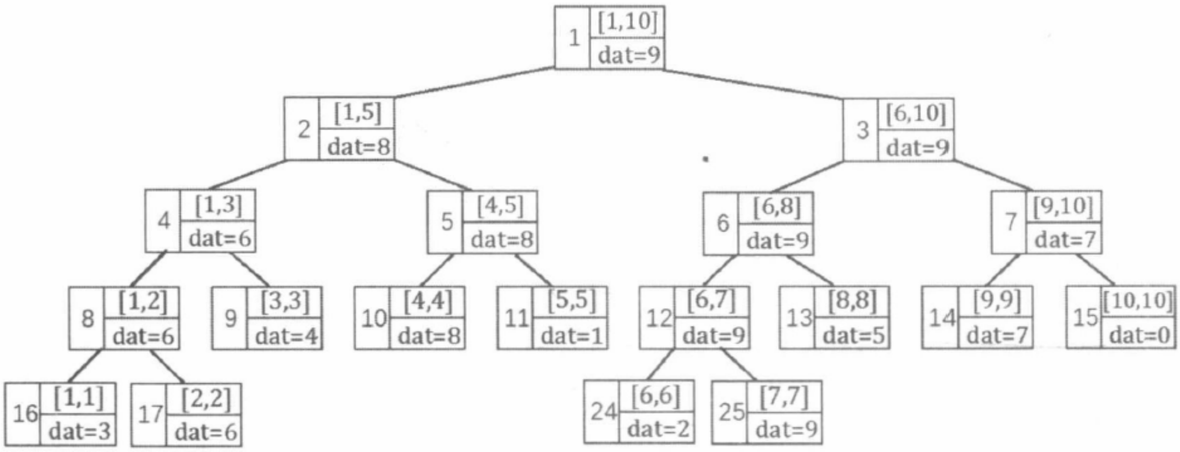
如图所示：倒第二层数节点数量≤n，那么倒数第二层之前所有节点数量≤n-1，最后一层不论是否存满，都需要开2n空间。因此，至少要开n + n - 1 + 2n = 4n - 1空间，`线段树数组tr[4 * N]`。

线段树结构体设计，至少包括区间L, R，再根据实际情况确定其他信息，比如区间求最值，那么就再增加一个数据代表区间最值。这是树状数组无实现法的功能。

```
struct Node{
    int L, R, dat;  // dat 代表最大值
}tr[N * 4];
```

建树操作

给定一个长度是N的序列A，在区间[1,N]上建立一颗线段树，每个叶节点[i,i]保存 A[i]的值。线段树的二叉树结构很方便从上到下传递信息。以区间最大值为例，A={3,6,4,8,1,2,9,5,7,0}，下标从1开始。




```
// 建树 调用 build(1, 1, N)
void build(int u, int L, int R){
    tr[u] = {L, R};

    // 返回条件 到叶子节点
    if(L == R) return;

    int mid = tr[u].L + tr[u].R >> 1;

    // 分治建立左子树、右子树
    build(u << 1, L, mid), build(u << 1 | 1, mid + 1, R);
}
```

建树调用build(1, 1, n)，u = 1代表从根节点开始建树（即线段树节点编号），1代表区间左边端点，n代表n个数据，即区间右边端点

单点更新

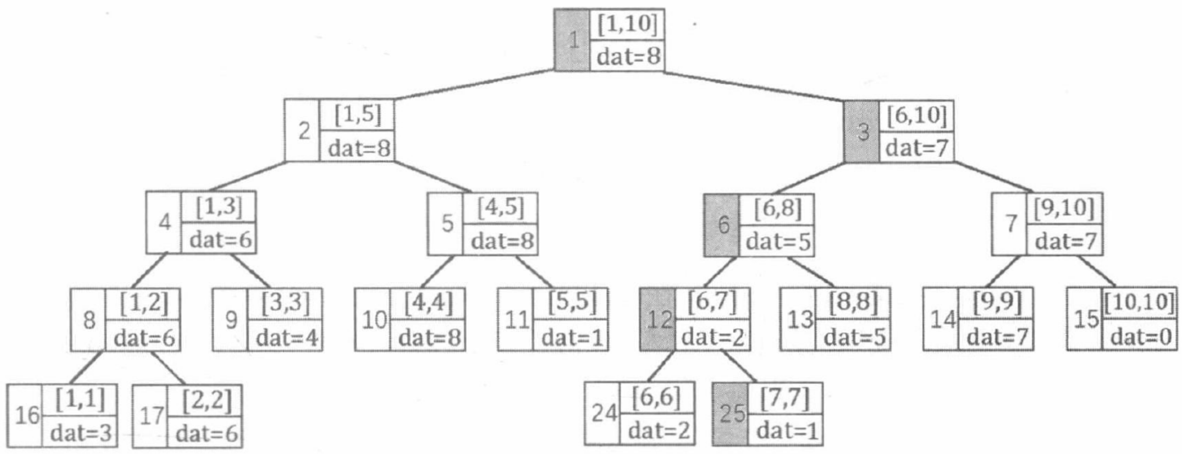
在线段树中，根节点即编号是1的节点是执行各种程序的入口。需要从根节点出发，递归找到代表区间[x,x]的叶节点，然后从下往上更新[x,x]以及其所有祖先节点上保存的信息，时间复杂度O(logN)。

```
void pushup(int u){
    tr[u].dat = max(tr[u << 1].dat, tr[u << 1 | 1].dat);
}
```

```
// 单点更新，将x位置数据更新为dat，调用build(1, 7, 1)
void update(int u, int x, int dat){
    // 只有到叶子节点[x,x]，才可以修改
    if(tr[u].L == x && tr[u].R == x){
                tr[u].dat = dat;
                return;
        }

    int mid = tr[u].L + tr[u].R >> 1;
    if(x <= mid) update(u << 1, x, dat);
    else update(u << 1 | 1, x, dat);

    pushup(u);
}
```



由于将线段树[7,7]区间里面的dat从之前的9更新为1，而父节点是左右孩子区间数据的最大值，所以要执行pushup操作，向上将相应祖先节点数据进行更新。

区间查询

query(1, 2, 8) = max{6, 4, 8, 5} = 8

```
// 区间查询 调用 query(1, 2, 8)
int query(int u, int L, int R){
    // 如果线段树节点左右区间完全包含在被询问区间[L, R]
    if(tr[u].L >= L && tr[u].R <= R) return tr[u].dat;

    int mid = tr[u].L + tr[u].R >> 1;

    int res = 0;
    if(L <= mid) res = query(u << 1, L, R);
    if(R > mid) res = max(res, query(u << 1 | 1, L, R));

    return res;
}
```

延迟标记

延迟标记用于区间修改，在之前的单点修改指令中，时间复杂度为O(logN)，但是区间修改最坏情况，即所有叶子节点都被修改，时间复杂度变成O(N)。

然而，如果一次修改操作中，节点u所代表的区间[tr[u].L，tr[u].R]被 修改区间[L,R]完全覆盖，并且逐一更新了u子树中所有节点，之后的查询指令 中却并没有用到[L,R]的子区间作为候选答案，那么更新节点u的整颗子树 就是多余的操作。

因此，当我们在执行修改指令时，同样可以在L≤tr[u].L≤tr[u].R≤R的情况下 立即返回，只不过在回溯之前向节点u增加一个标记add，代表"该节点曾经被修改，但 其子节点尚未更新"。

如果在后续的指令中，需要从节点u向下递归，再检查u是否具有add 标记，如果有add标记，就根据标记信息更新u的两个子节点，同时为u的两个子节点增加add标记，最后清除u的add标记。

快乐刷题

- P28 最高分是多少？
- P29 区间查询
- P15 最大数
- P3 你回答能这些问题吗
- P2 一个简单的整数问题
- P4 Interval GCD