树状数组

为什么需要树状数组?

当我们需要维护一个数组的前缀和S[i]=A[1]+A[2]+......+A[i]时，如果修改了任意一个A[i]，S[i]都会发生变化。在最坏情况下，会需要O(n)时间，引入树状数组后，修改和求和都是O(logn)，极大提高效率。

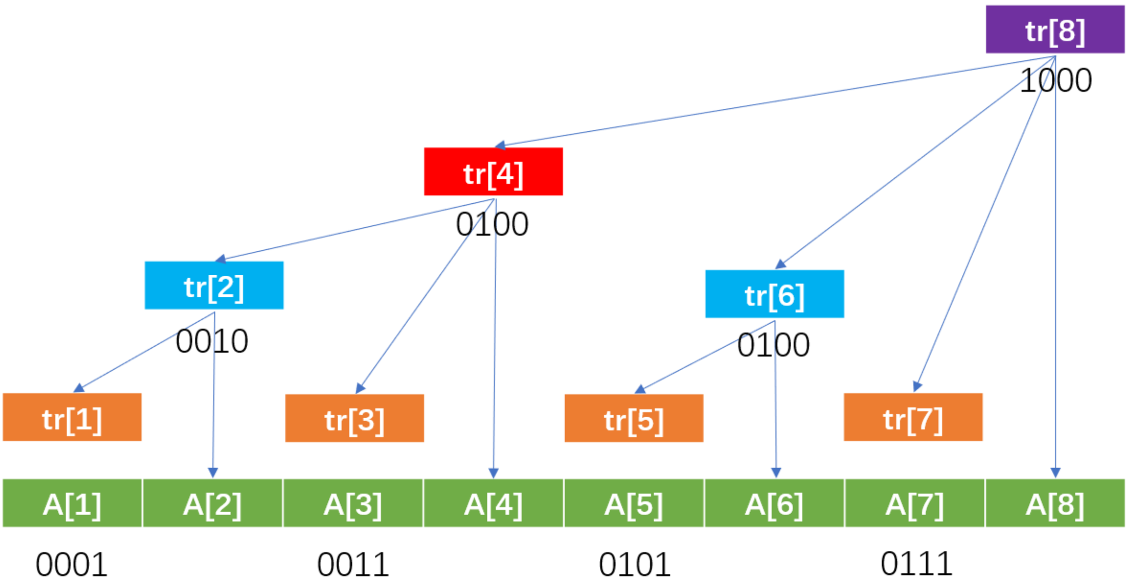
基本思想：根据任意正整数关于2的不重复次幂唯一分解性质，若一个正整数21的二进制表示为10101 = $2^4+2^2+2^0$，因此，区间[1,x]可以分成O(logx)个小区间：

- 长度为2^4的小区间[1, 2^4]，即[1,16]；
- 长度为2^2的小区间[2^4+1, 2^4+2^2]，即[17,20]；
- 长度为2^0的小区间[2^4+2^2+1, $2^4+2^2+2^0$]，即[21,21]。

这些子区间共同特点是：若区间结尾为R，则区间长度就是R的二进制分解下最小的1所在位置2的次幂，设为lowbit(R)。

例如：

- 16=10000，区间长度16=2^4；
- 20=10100，区间长度4=2^2；
- 21=10101，区间长度1=2^0。



- 1=(0001) tr[1]=A[1]
- 2=(0010) tr[2]=A[1]+A[2]
- 3=(0011) tr[3]=A[3]
- 4=(0100) tr[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]
- 5=(0101) tr[5]=A[5]
- 6=(0110) tr[6]=A[5]+A[6]
- 7=(0111) tr[7]=A[7]
- 8=(1000) tr[8]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7]+A[8]

`tr[i]=A[i-`2^k`+1]+A[i-`2^k`+2]+......+A[i]`

单点更新

例如：当前更改A[1]，在A[1]基础之上加t

- 1=(0001) tr[1]+=t `1+lowbit(1)=2(0010)`
- 2=(0010) tr[2]+=t `2+lowbit(2)=4(0100)`
- 4=(0100) tr[4]+=t `4+lowbit(4)=8(1000)`
- 8=(1000) tr[8]+= t `8+lowbit(8)=16(10000)` 由于给定数组长度是8，而16超过8，因此不需要继续计算

```
void update(int x, int t){
    while(x <= n){
        tr[x] += t;
        x += lowbit(x);
    }
}
```

查询前缀和

假定x=7，`sum[7]= A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7]`

- tr[7]=A[7]
- tr[6]=A[5]+A[6]
- tr[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]

```
int sum(int x){
    int res = 0;
    while(x){
        res += tr[x];
        x -= lowbit(x);
    }
    return res;
}
```

快乐刷题

- [P22 树状数组模板-单点修改区间查询]
- [P21 树状数组模板-区间修改查询值]
- [P288 数星星]