Марковская модель потока отказов

Безопасность ПИС

Кабалянц
Петр Степанович

09/02/2021

План

1. Марковское свойство.
2. Конечные цепи А.А. Маркова.
3. Анализ поглощающих цепей.
4. Анализ эргодических цепей.

Конечные цепи Маркова

последовательность случайных событий с конечным числом исходов

марковское свойство:

при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого.

Пример марковского процесса - показания счетчика в такси.

Конечные цепи Маркова

Морфологические анализаторы типа «корчеватель» выпекает «пирожки» (9-8-9-8):

асфальта для ума довольно
на часах семь разделить на
стол выносят чёрный ящик а
он вырос отомстил нашёл

Sergey Brin and Lawrence Page:

The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine (1998)

Цепи Маркова

Определение и способы задания ЦМ

$$\xi : \Omega \times T \to E \subseteq R$$

1) $t = 0, 1, 2, \dots$

2) $X_t = X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$

3) $P\big(X_t = x_j \big| (X_0 = x_m) \dots (X_{t-2} = x_k)(X_{t-1} = x_i)\big) =$

$$= P\big(X_t = x_j \big| X_{t-1} = x_i\big) = p_{ij}^t$$

Однородные ЦМ: $p_{ij}^t = p_{ij}$

Цепи Маркова

Определение и способы задания ЦМ

1) $t = 0, 1, 2, \dots$ $\quad \xi : \Omega \times T \to E \subseteq R$

2) $X_t = X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$

3) $P\big(X_t = x_j \big| (X_0 = x_m)\dots(X_{t-2} = x_k)(X_{t-1} = x_i)\big) =$

$= P\big(X_t = x_j \big| X_{t-1} = x_i\big) = p_{ij}^t$

Матрица перехода ЦМ

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Однородные ЦМ: $p_{ij}^t = p_{ij}$

$$0 \le p_{ij} \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

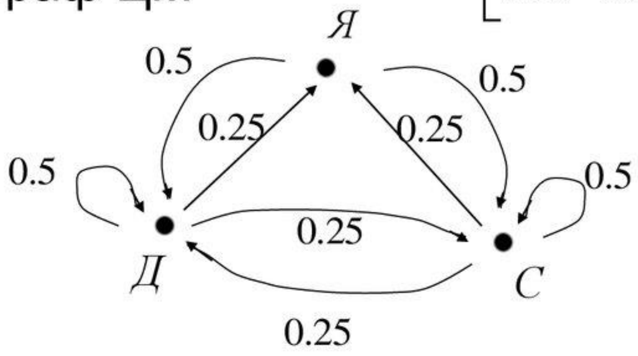
Цепи Маркова

<u>Пример 1</u> **(задача о погоде)** Всем хороша Земля Оз, но только не своей погодой. Здесь никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь или снег. Если сегодня дождь или снег, то с вероятностью 0,5 погода не изменится. Если все же она изменится, то в половине случаев снег заменится дождем или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода.

$$X = \{Я, С, Д\}$$

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Я & С & Д \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Я \\ С \\ Д \end{array}$$

Орграф ЦМ



Многошаговый переход в ЦМ

Какова вероятность за m шагов перейти из состояния x_i в состояние x_j ?

Гипотеза H_k: через s шагов ($s<m$) перешли в состояние x_k

$$p_{ij}(m)=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s)p_{kj}(m-s) \qquad i,j=\overline{1,n}$$

$$\boxed{P(m)=P(s)\cdot P(m-s)}$$

- уравнение Колмогорова-Чепмена

Многошаговый переход в ЦМ

Уравнение Колмогорова-Чепмена

$$\boxed{P(m) = P(s) \cdot P(m-s)}$$

Теорема

$$P(m) = P^m$$

$$P - \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad P^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.375 & 0.375 \\ 0.188 & 0.438 & 0.375 \\ 0.188 & 0.375 & 0.438 \end{bmatrix}$$

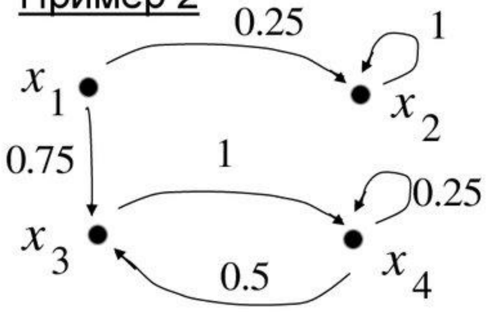
$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.188 & 0.406 & 0.406 \\ 0.203 & 0.406 & 0.391 \\ 0.203 & 0.391 & 0.406 \end{bmatrix} \qquad P^5 = \begin{bmatrix} 0.199 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.399 \\ 0.2 & 0.399 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Следствие

$$R_m^T = R_0^T \cdot P^m \qquad p_j(m) = \sum_{k=1}^{n} p_k(0) p_{kj}(m) \qquad j = \overline{1, n}$$

Классификация состояний ЦМ

Пример 2



Состояние x_j **достижимо** из состояния x_i

$$\exists m: \quad p_{ij}(m) > 0$$

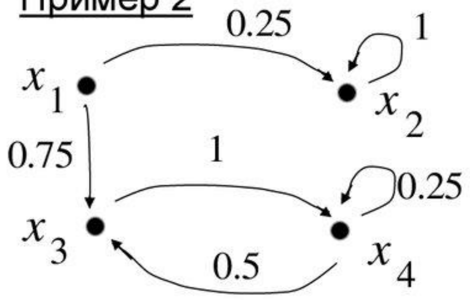
Если состояния взаимодостижимы, то они принадлежат одной сильной компоненте орграфа.

Множество состояний C **замкнуто**, если

$$\forall x_i \in C \text{ и } \forall x_j \notin C \quad p_{ij} = 0$$

Классификация состояний ЦМ

Пример 2



Состояние x_j **поглощающее**, если

$$p_{jk} = 0 \quad \forall k \neq j$$

Состояние x_j **транзитное**, если $\sum_{k \neq j} p_{jk} > 0$

Множество состояний *D* **эргодическое**, если оно замкнуто, но никакое его собственное подмножество не является замкнутым.

В примере 2: x_2 - поглощающее, x_1, x_3, x_4 - транзитные,

Множество $C = \{x_4, x_3\}$ - замкнутое, эргодическое

Поглощающие цепи

Поглощающее состояние — состояние, из которого нельзя попасть ни в какое другое, то есть S_i — поглощающее состояние, если $p_{ii}=1$.

Поглощающей называется марковская цепь, в которой есть хотя бы одно поглощающее состояние и из любого состояния достижимо хотя бы одно поглощающее.

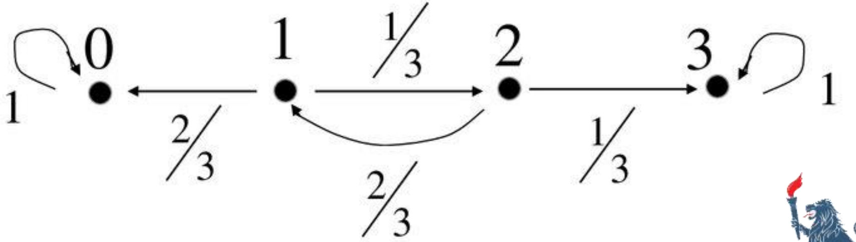
Поглощающие цепи Маркова

<u>Определение.</u> ЦМ – поглощающая, если имеет хотя бы одно поглощающее состояние x_p и для любого непоглощающего состояния x_h

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{hp}(k) > 0$$

<u>Пример 3</u>

Некий игрок, имея не более трех тугриков, начинает игру в наперстки (при угадывании получает тугрик, при ошибке – отдает). Заранее он решает, что прекращает игру, как только его капитал составит три тугрика.



$$X = \{0,1,2,3\}$$

Поглощающие цепи Маркова

Канонический вид матрицы перехода

$\{ x_{1,} x_2, \ldots, x_m \}$ поглощающие состояния ЦМ:

$\{ x_{m+1,} x_{m+2}, \ldots, x_n \}$ непоглощающие состояния

Матрица перехода ЦМ

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$I - (m \times m)$

$O - (m \times (n-m))$

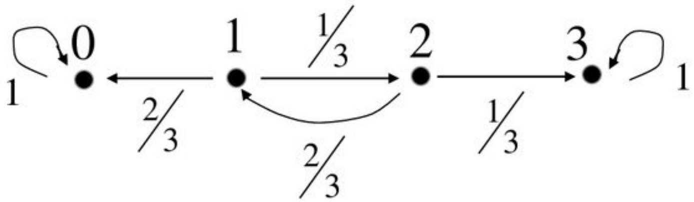
$R - ((n-m) \times m)$

$Q - ((n-m) \times (n-m))$

Поглощающие цепи Маркова

Пример 3

Некий игрок, имея не более трех тугриков, начинает игру в наперстки (при угадывании он получает тугрик, при ошибке – отдает). Заранее он решает, что прекращает игру, как только его капитал составит 3 тугрика.



$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$0 \to x_1 \qquad 3 \to x_2$$

$$1 \to x_3 \qquad 2 \to x_4$$

Матрица перехода

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Канонический вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 1. Для поглощающей ЦМ с матрицей P справедливо

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$a)\ Q^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

б) существует матрица, обратная к матрице ***E-Q***, и ее можно найти по формуле

$$(E-Q)^{-1} = E + Q + Q^2 + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} Q^t$$

Теорема о переходе в эргодическое состояние $\Rightarrow \quad a)$

$$(E-Q)\left(E + Q + Q^2 + \ldots + Q^{t-1}\right) = E - Q^t$$

$$\Rightarrow \quad б)$$

$$\boxed{(E-Q)^{-1} = N}$$

- **фундаментальная** матрица ЦМ

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 2. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i. Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы ***N*** равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

Рассмотрим СВ $Y_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_t = x_j \\ 0, & \text{если } X_t \neq x_j \end{cases}$

$$M\left(\sum_{t=0}^{\infty} Y_j(t) \middle| X_0 = x_i \right) = \sum_{t=0}^{\infty} M\left(Y_j(t) \middle| X_0 = x_i\right) =$$

Поглощающие цепи Маркова

<u>Теорема 2.</u> Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i. Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы ***N*** равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P=\begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E-Q)^{-1}=N$$

Рассмотрим СВ $Y_j(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } X_t=x_j \\ 0, & \text{если } X_t\neq x_j \end{cases}$

$$M\left(\sum_{t=0}^{\infty} Y_j(t) \,\middle|\, X_0=x_i\right)=\sum_{t=0}^{\infty}\left(\left(1-p_{ij}(t)\right)\cdot 0+p_{ij}(t)\cdot 1\right)=$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 2. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i. Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы $\boldsymbol{N}$ равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

$$M\left(\sum_{t=0}^{\infty} Y_j(t) \,\middle|\, X_0 = x_i\right) = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\left(1 - p_{ij}(t)\right)\cdot 0 + p_{ij}(t)\cdot 1\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} p_{ij}(t) = n_{ij} \qquad \text{т.к.} \quad (E - Q)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} Q^t$$

Поглощающие цепи Маркова

<u>Теорема 2.</u> Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i. Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы ***N*** равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

<u>Следствие</u>. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i. Среднее число шагов до поглощения равно сумме элементов ***i***-ой строки матрицы ***N***.

Поглощающие цепи Маркова

Пример 3 (игра в «наперстки»)

$$X = \{0,1,2,3\} \qquad 0 \to x_1 \quad 3 \to x_2 \quad 1 \to x_3 \quad 2 \to x_4$$

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E - Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -2/3 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 9/7 & 3/7 \\ 6/7 & 9/7 \end{bmatrix}$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 3. В поглощающей ЦМ с матрицей перехода (*) вероятность перехода в заданное поглощающее состояние определяется матрицей **B=NR.**

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i . Обозначим b_{ik} - вероятность попасть в *k*-ое поглощающее состояние

В момент времени *t* =1 возможны гипотезы:

$$а)\ X_1 = x_k$$

$$б)\ X_1 = x_l \quad l \neq k \quad 1 \leq l \leq m$$

$$в)\ X_1 = x_r \quad m+1 \leq r \leq n$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 3. В поглощающей ЦМ с матрицей перехода (*) вероятность перехода в заданное поглощающее состояние определяется матрицей ***B=NR.***

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

По формуле полной вероятности

$$b_{ik} = p_{ik} \cdot 1 + p_{il} \cdot 0 + \sum_{r=m+1}^{n} p_{ir} b_{rk} \qquad \overline{k = 1,m \atop i = m+1,n}$$

В матричной форме

$$B = R + Q \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = N \cdot R$$

Поглощающие цепи Маркова

Пример 3 (игра в «наперстки»)

$X = \{0,1,2,3\}$ $0 \to x_1$ $3 \to x_2$ $1 \to x_3$ $2 \to x_4$

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 9/7 & 3/7 \\ 6/7 & 9/7 \end{bmatrix}$$

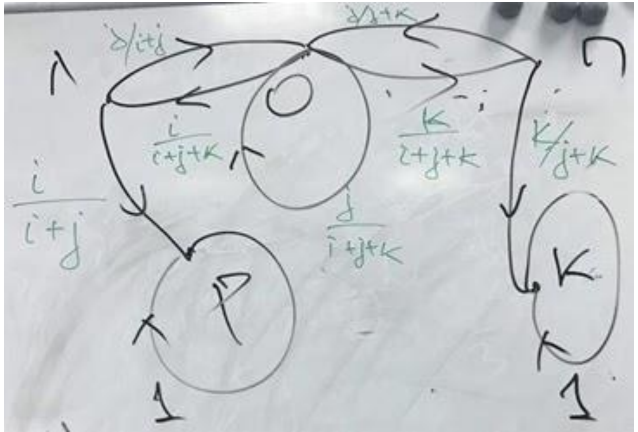
$$R = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$B = N \cdot R = \begin{bmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

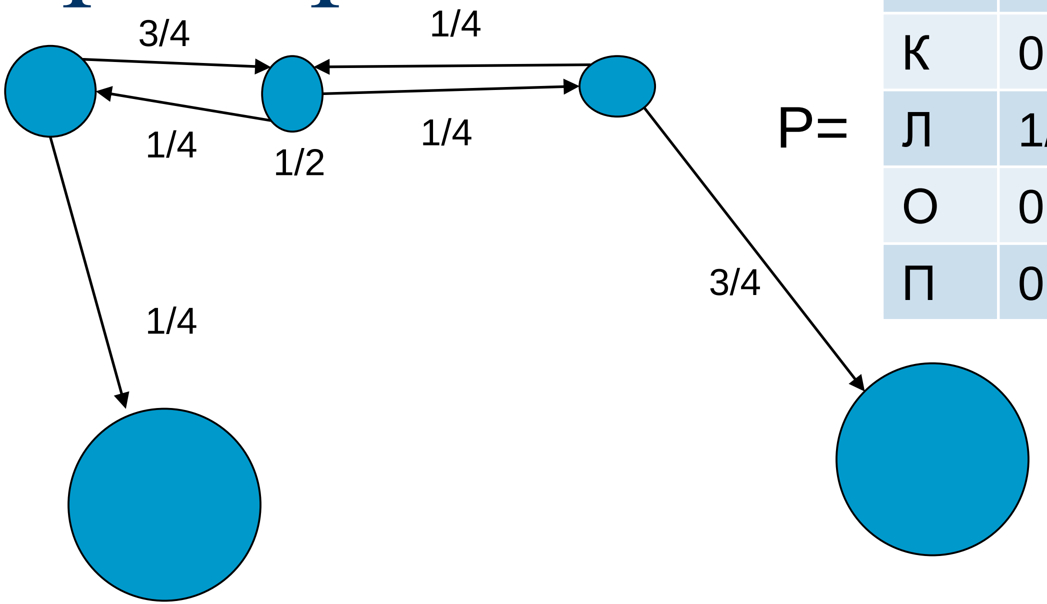
Пьяница на утесе

Пьяница стоит между двумя пропастями, с одной стороны река, с другой копья. В начальный момент времени пьяница стоит на левой ноге. Его поведение задается графом марковского процесса (смотри приложенный рисунок).

1) Необходимо определить среднее время жизни пьяницы и вероятность упасть в реку. 2) Написать программу, которая имитирует поведение пьяницы и выводит среднее количество переходов до падения с утеса и долю падений в реку. 3) Сравнить теоретическую вероятность падению в реку с долей падения в реку критерием сравнения долей.



Пример



P=

	Р	К	Л	О	П
Р	1	0	0	0	0
К	0	1	0	0	0
Л	1/4	0	0	3/4	0
О	0	0	1/4	1/2	1/4
П	0	3/4	0	1/4	0

Q=

	Л	О	П
Л	0	3/4	0
О	1/4	1/2	1/4
П	0	1/4	0

P=

	Р	К	Л	О	П
Р	1	0	0	0	0
К	0	1	0	0	0
Л	1/4	0	0	3/4	0
О	0	0	1/4	1/2	1/4
П	0	3/4	0	1/4	0

E-Q=

	Л	О	П
Л	1	-3/4	0
О	-1/4	1/2	-1/4
П	0	-1/4	1

$N=(E-Q)^{-1}=$

	Л	О	П
Л	1,75	3	0,75
О	1	4	1
П	0,25	1	1,25

N=

	Л	О	П
Л	1,75	3	0,75
О	1	4	1
П	0,25	1	1,25

P=

	Р	К	Л	О	П
Р	1	0	0	0	0
К	0	1	0	0	0
Л	1/4	0	0	3/4	0
О	0	0	1/4	1/2	1/4
П	0	3/4	0	1/4	0

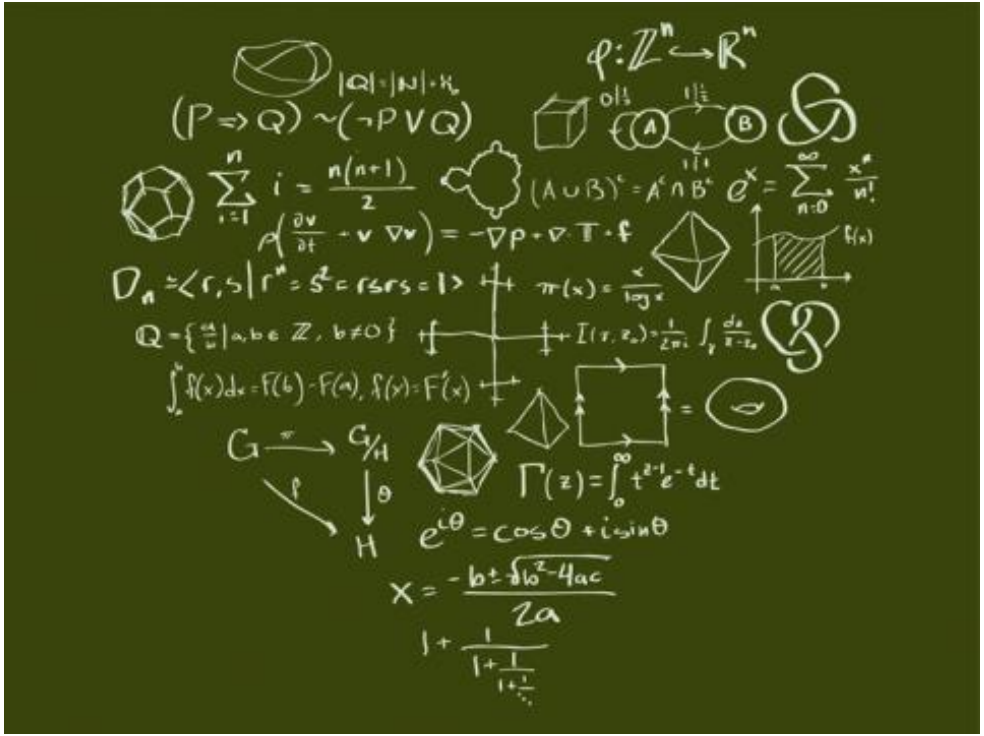
R=

	Р	К
Л	1/4	0
О	0	0
П	0	3/4

B=NR=

	Р	К
Л	7/16	9/16
О	1/4	¾
П	1/16	15/16

Математика поможет:



Спасибо за терпение!