Марковская эргодическая модель потока отказов

Безопасность ПИС

Кабалянц
Петр Степанович

16/02/2021

План

1. Марковское свойство.
2. Конечные цепи А.А. Маркова.
3. Анализ поглощающих цепей.
4. **Анализ эргодических цепей.**

Эргодические марковские цепи

- Эргодические марковские цепи описываются сильно связным графом. Это означает, что в такой системе возможен переход из любого состояния S_i в любое состояние S_j за конечное число шагов.
- Существует единственная неподвижная точка: $uP=u$. Вектор-строка *u* определяет предельное распределение.

Эргодические цепи Маркова

Эргодическая ЦМ: нет поглощающих состояний и из любого состояния можно попасть в любое другое.
Орграф эргодической ЦМ сильносвязен.

Стационарный режим ЦМ:
при достаточно больших t вероятность нахождения в состоянии x_i не зависит от того, каким было начальное состояние системы.

Достаточное условие существования стационарного режима – регулярность.

ЦМ называется **регулярной**, если

$$\exists k : \quad p_{ij}(k) > 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n}$$

22

Эргодические цепи Маркова

Теорема Если ЦМ с матрицей перехода P регулярна, то

а) $P^t \xrightarrow[t\to\infty]{} W$, где все строки матрицы W одинаковы

$$w_{ij} = u_j \quad j,i = \overline{1,n}$$

б) существует единственный вектор

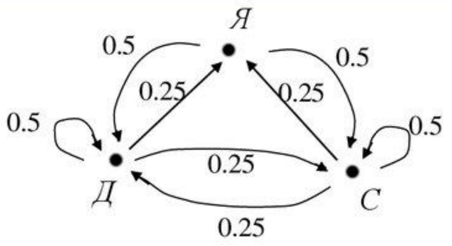
$$u^T = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$$

такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = 1 \quad \text{и} \quad u^T P = u^T$$

Эргодические цепи Маркова

<u>Пример 1</u> (задача о погоде)



$$u^T = (u_1, u_2, u_3)^T$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = 1 \quad \text{и} \quad u^T P = u^T$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0.25u_2 + 0.25u_3 \\ u_2 = 0.5u_1 + 0.5u_2 + 0.25u_3 \\ u_3 = 0.5u_1 + 0.25u_2 + 0.5u_3 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1 \end{cases}$$

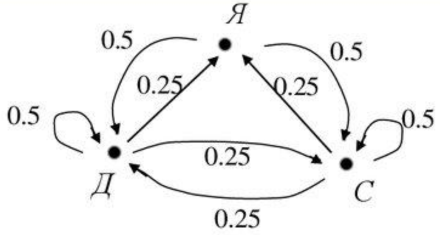
$$\begin{cases} 4u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = 1/5 \\ u_2 = 2/5 \\ u_3 = 2/5 \end{cases}$$

$$u^T = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)^T$$

Эргодические цепи Маркова

Пример 1 (задача о погоде)



$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.375 & 0.375 \\ 0.188 & 0.438 & 0.375 \\ 0.188 & 0.375 & 0.438 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

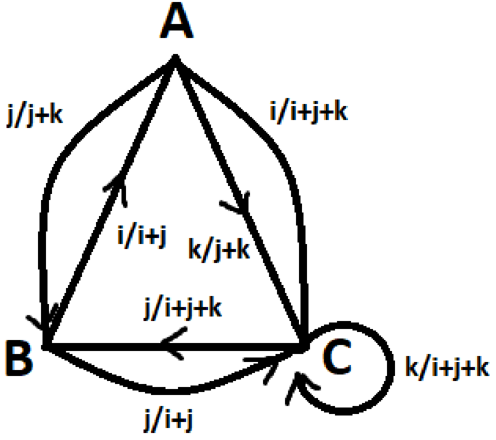
$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.199 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.399 \\ 0.2 & 0.399 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$u^T = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)^T$$

Муха в треугольнике

Имеется треугольник с вершинами A, B, C. В начальный момент времени муха находится в вершине A. Каждую секунду муха перелетает в другую вершину или остается на месте. Ее поведение задается графом марковского процесса (смотри приложенный рисунок). 1) Необходимо определить среднее время, через которое муха вернётся в вершину A. 2) Написать программу, которая имитирует поведение мухи и выводит среднее количество переходов до первого возвращения в точку A. Сравните результаты.



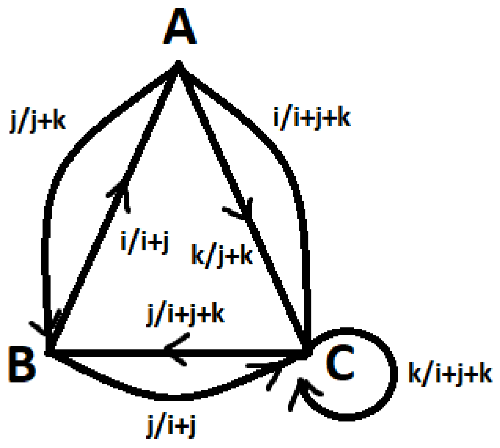
Муха в треугольнике

tP=t
t=(x,y,z)

1/2 * y +1/2 * z = x
1/2 *x +1/2 * z = y
1/2 * x +1/2 * y = z
x+y+z=1

y=1/4 *y +1/4 *z +1/2 *z
y=z
x=y=z
x=y=z=1/3

	A	B	C
A	0	1/2	½
B	1/2	0	½
C	1/2	1/2	0



Муха в треугольнике

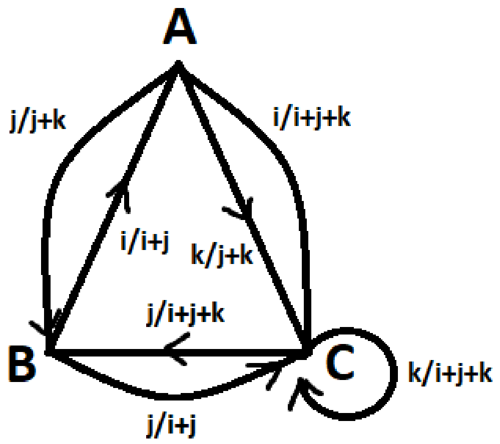
u=(x,y,z)
0+y/2+z/2=x
x/2+z/4=y
x/2+y/2+z/4=z
x+y+z=1

y/4 + z/4 +z/4 =y
y=2z/3
x=z/3+z/2=5z/6

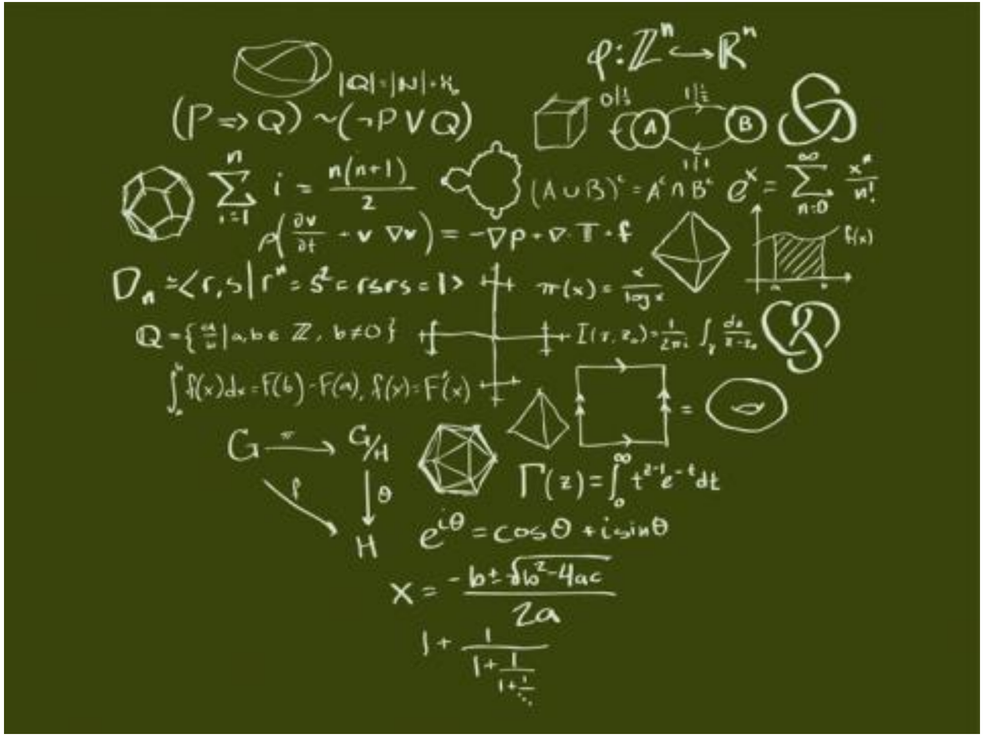
(5/6+2/3+1)z=1

z=2/5
y=4/15
x=1/3

	A	B	C
A	0	1/2	½
B	½	0	½
C	1/2	1/4	1/4



Математика поможет:



Спасибо за терпение!