Оглавление

[Лекция 1 Тема “Теория информации и кодирования” 05.02.2020 2](#_Toc31793438)

# Лекция 1 Тема “Теория информации и кодирования” 05.02.2020

**Теория информации и кодирования - это раздел математической теории связи.** Он рассматривает три основные проблемы:

1) Количественная оценка, создаваемой и передоваимой информации; анализ количественных информационных характеристик, источников информации и каналов связи

2) Методы кодирования для экономного(оптимального) представления сообщений, порождаемых

источниками информации.

3) Методы кодирования для надежной(безотказной) передачи сообщений по каналу связи с помехами(шумом).

1948 г. – статья математического теория связи, Клод Шенон.

**Схема передачи информации**

**Источник инфо. ---> Кодер источника(оптимальное кодирования) ---> Кодер канала связи(Помехо устойчивое кодирования) ---> Канал связи(Помехи) ---> Декодер канала связи(декодироются) ---> Декодер источника(Операция обратная второму блоку) ---> Приёмник сообщений.**

Рассмотрим задачу:

Имеется множество чисел (0,1,2,3,4,5,6,7)

Алиса задумала одно из них;

Боб хочет узнать узнать это число он имеет право задавать Алисе вопросы на которые можно ответить только Да или Нет;

Какое минимальное число вопросов нужно задать чтобы гарантировано получить задуманное число?

Пусть задуманно число 5.

Первый вопрос ‘Число большо 4?’ Алиса – Да

Второй вопрос ‘Число большо 6?’ Алиса – Нет

Третий вопрос ‘Число равно 5?’ Алиса – Да или ‘Число равно 6?’ Алиса – Нет но при любом ответе он назовет задуманное число 5.

При количестве объектов 8 = 2^3 вопросов нужно было 3, а 3 равно log2(8)

Каждый ответ несет одну единицу информации обозначяют ответы можно и в форме 0/1 для каждого набора решения задачи будет протоколом битов.

Ход решения задачи можно описать набором битов.

Для того что бы устранить неопределенность в выборе объекта, количество вопросов и ответов то есть количество битов информации должно равняться log2(8) этот результат можно связать с теорией вероятность пусть задуманное число выбирается на удачу. Тогда вопрос звучит так число равно k? Вероятность получить правильный ответ равна 1/8 и тогда число равно -log2(1/8).

**Хартли вел понятие количество информации, которое содержится в множестве состоящем из n объектов как число равное k=log2(n).**

Это понятие можно перенести и на случай когда речь идет о количестве информации содержащийся в одном сообщении о состоянии системы если этих состояний r согласно Хартли это равно -log2( вероятние всего что это заметил не Хартли а Шенон который связал количество информации не с количеством состояний системы, а с вероятностью нахождения системы в том или ином состоянии.

Теории информации оперирует термином сообщения.

По Шенону количество информации содержашийся в сообщений s о состоянии системы равно J(s)=-log2(p(s)).

Эта формула гораздо лучше соответствует интуитивному представлению о ценности полученной информации.

Согласно Шенон чем мение вероятно событие тем большо информации несет соощения о том что это событие произошло.

Все изложенное можно представить в виде математической модели источника сообщений.

Опр.: Дискретным источником сообщения называет устройство которое через определенные равные интервалы времени выдает «Детерминорованым или случайным образом» очередной символ принадлижайщий заданому конечному альфавиту A = (a1,a2,…ai)

Математическая модель источника задана если для каждого символа задана вероятность его появления, а это модель случайной величины.

A |a1,a2,…ai|

P |p1,p2,…pi|

i=1 0<=pi<=1

J(A=a) = -log2(p(A=a))=-log2(pi)

J(ai) = -log2(ai)

Теория вероятности для каждой случайной величины можно вычислить её математическое ожидания или средние значение.

Введем случайную величину равную количиству информации в полученном сообщений.

Математическое ожидания количества информации называется энтропии случайной величины H(A) = -

Свойства энтропии:

1.Энтропия 0<=H(A)

H(A)=0 если Vpi=0 при этом 0log2(0) = 0

Оценка энтропии H(A) = log2n

H(A) – энтропия по Шенону

Vpi=1/n – энтропия по Хартли

Если все сообщения равновероятны то энтропия максимальна.

Энтропия это мера неопределенности

# Лекция 2 Тема “” 11.02.2020

Двумерный случайный вектор и его информационные характеристики

Пусть данно вероятностное пространсто Омего = (Омего1,Омего2,...Омегоn) каждому элем сопостваляется некоторое число.

X = f(w)

Y = psi(w)

Случайном вектором называется упорядочная пара двух случайных величин опеределеных на одном и том же вероятносном пространсте Омего(Б). Если пространсто Омего состоит из Н(Б) элементарных исходов то оно называется дискретным точечным. И тогда каждая случайная величина принимает значения x = x1x2xm y = y1y2yn.

P|X = xi, Y = yj| = pij i=1…m y=1…n.

0 <= pij <= 1

SymSym(pij)=1

Из законов распределения вектора может получить распределения каждого элемента.

Для случайного вектора определяется понятия условной вероятности Y = yj при условия что произошло события X = xi обозначается p{Y = yi/X = xi} = pij/pi, pi = p{X=xi}>0

p{Y = yi/X = xi} = pij/pj, pi = p{Y=yi}>0

Опр.Компоненты X и Y дискретного случайного вектора {XY} независимы если для всех I,j (X = xi \*Y = yj) очевидно что в этом случаи условная вероятность равна безусловной.

p{Y = yi/X = xi} = pij/pi =pi\*pj/pi = pj(Независимое)

Информационные характеристики случайного вектора

Напомним что для одной дискретной случайной величины X = x1 … xn с вероятностиями P = p1 … pn

J(X = x)= -logpi

H

Опр.

Собственое количество информации или собственной информации содеражащийся в событии (X = x Y = y) Называется число J(x,y)=-log(X=x,Y=y)=-log(pij)

Количество условной информации(условной информации) содеражашийся в сообщинии о событии (X = xi при условия реализовоного события Y = yj называется число:

О(xi/yj)=J(X=xi/Y=yj)=-logP(X=xi/Y=yj)=-logP(xi/yi) =-logpij/qj

Свойства условной информации

1.Условная информация неотрицательна

2.Свойства адептивности

J(xi/yj)=-log2(pij/qj)=-log2(pij)-(-log2(qj)=J(xi;yj)-J(qj)

J(xi/yj)=-log2(pij/qj)=-log2(pij)-(-log2(qj)=J(xi;yj)-J(qj)

J(xi;yj)=J(yi)+J(xi/yj) = J(xi)+J(yj/xi)

3.Условная информация равно и только тогда когда события xi и yj независимое

Опр.

Количеством взаимной информации между событаями(сообщениями) X=xi и Y = yj называется число ?J(xiyj)=J(x)-J(x/y)=-log2(pi)-(-log2(pij/qj)=log2(pij/piqj)

Взаимная информация симмтрична

2.J(xy) = 0 x и y – независимы

3.Связь взаимной и собственной связи

?J(xy) = J(x) – J(x/y)

Доказать самостоятельно

Энтропия случайного вектора

Опр Совместной энтропией компанент x,y случайного вектора называется число H(x;y)=-Symi(Symj(pijlog2(pij)

qj>0 условной энтропиеё случайное величины x при условии реализации события Y=y называется число

H(=-Symi(p(x/y)log2(p(xi/yj)))

Условной Энтропией компонетны х при условии компоненты у называется число

H(x/y)=-Symi(Symj(pijlog2(xi/yj)))

Свойства

Адептивность

H(X,Y) = H(X)+H(y/x)=H(Y)+H(x/y)

Если компоненты х и у независимы то H(X,Y)=H(X)

3.H(x/y)<=H(X) – равенство имеет место тогда и только тогда когда компоненты х и у независимы.

4.Средней взаимной энтропией называется число ?H(X,Y)=H(x)-H(x/y)=H(y)-H(y/x)=H(x)+H(y)-H(x.y)

Количеством взаимной информации между собитиями может быть и большо равно нулю

А вот среднея взаимная информация неотрицательна так как H(x/y)>=H(X)

Канальная матрица пусть есть источник А – Алиса и приемник Б.

Источник генерирует символы ai и передает их по каналу связи приемнику Б в силу помех Б примет вместо ai какой то символ bj из того же альфавита.Так вот эта схема такой же таблицой как и для двумерного случайного вектора.

# Лекция 3 Тема “Оптимальное кодирование” 25.02.2020

Излогаемые методы кодирования обслуживают участок источник кода источника.

Пусть имеются два конечных множества А={a1,…an} – алфавит источника, и имеется множество

B = {b1…bn} алфавит кодера

B\*=UB^k где B^k={b1b1,b1b2,b2b3…} декартово произведения

Количество элементов множества называется его мощностью или модулем

|B|=D

|B^k |=D^k

B\* есть множество всех конечных последовательностей в символах алфавита B.

Определения алфавитном( по буквеным) двеичном кодированием называется отображения A->B\* Обозначается phi(ai) это образ ai из алфавита A и оно является очивидно какимно набором символа алфавита B.

Называется кодовым словом или результатом кодирования.

Опр. Количество символов алфавита B в кодовом слове phi(ai) называется длиной кодового слова и обозначается len phi(ai).

Набор phi(a1) phi(an) – называется d-ичным кодом для алфавита А и обозначается phi(A) c B\*

Если все кодовые слова имеют одинаковую длину то код называется равномерным иначе неравнемерным.

Пусть A\* =U(k>=1)A^k – множество всех слов в алфавите источника

Phi\* :A\*->B\* называется продолжением отоброжения phi на A\* которая получается по правилу сцепления(присоединения).

a1…an -phi\*-> phi(a1) … phi(an)

Паралелньно с задачей кодирования рассматривается задача декодирования.

Отображения phi однозначно декодируемое если любая кодовая последовательность phi\*(ai1…ai) однозначным образом распадается в набор кодовых слов phi(a1)phi

Тоесть вы можете phi(ai1) phi(a2) и тд определяются однозначно.

Алфавитное кодирования называется префиксным(суффиксным) если никакое кодовое слово phi(ai) неявляется началом окончанием другого кодового слова phi(aj),где j!=i.

Если алфавитное кодирования является префиксным или суффиксным то оно однозначно декодируемое обратное утверждения вообще говоря неверное код может не быть префиксным и не быть суффиксным но быть однозначно декодируемым.

В дальнейшем мы рассматриваемыем дискретный источник без памяти в каждый момент времени он генерирует символ алфавита A причем p{ai/aj}=pi независит от того какой был преведуший символ

P{ai} = p

Sum(pi) = 1

Li = len phi(ai)

Опр Средние значения длины Sum(pi\*len phi(ai)) =lphi

Средней длиной кода phi

опр. Алфавитное кодирования phi называется оптимальным если оно однозначно декодируемое и число lphi является наименьшим среди всех однозначно декодируемых кодов.

Теорема оптимальное кодирования существует.

Существуют оценки для средний длины а имено

Теорема Средния длина оптимального алфавитного кодирования удолетвораятся отношению H(B)/log2D<=lphi <1+H(~p)/log2(d)

H(~p) = H(A) = sum(pilog2pi)

Для оптим существует оценки средний длины но уже одностароний

Теорема

Если код phi однозначно декодируемый то lphi>=H(~p)/log2D

Если все вероятности положительны то существует такое прификсное кодирования что lphi<1+H(B)/log2D

Если D = 2 B = {0,1} то для оптимального кода H(~p)<lphi<1+H(~p)

## Алгоритм Шеннона-Фано

Он не оптимальный но близок к оптимальному

Пусть D = 2, |A| = m

Разположим вероятности в порядки их не возростания и будем считать что символы занумерованы в этом порядке.

//Дальше плавления пошло

Выберем их так что бы число было минимальным

То выбираем I при котором меньше

Далее поступаем с множеством a0 и множеством a1 поступаем точно таким же способом и тд

Так как на каждом этапе количество элементов множеств A уменьшается хотя бы на единицу то рано или поздно кодирование закончится.

Не какое кодовое слово не является началом другого

//Вроде норм

Код Хофмана

Код хафмана стороить дерева листьями которого является символы алфавита А.

1.Символы алфавита упорядочны также как при кодирование по шеннону фано.

2.Первый шаг обьединиям в один символ два последних символа с обьединеной вероетностью

(Верхнее ребро 0 нижние 1)

Количество символов алфавита сократилос на один.

Распологаем их также в порядке не возростания и повторяем приведуший шаг

Сопоставлянем набор меток ребер на пути к символу

//Опять плавления

Составляем все пары символов их количество m^2

Так как источник без памяти то вероятность в каждой паре есть произведению вероятностей участвуйщих символов

Число lphi нужно разделить на два так как размерность в бит на один символ