



CQU-ACM-ICPC  
[Sundes@foxmail.com](mailto:Sundes@foxmail.com)  
2019/9/2

## 目录

博弈论 .....	1
基础博弈.....	1
Bash Game .....	1
Nim Game .....	1
Anti-nim Game .....	3
Fib Game .....	4
Wythoff Game .....	5
Imitate Game.....	6
Euclid Game .....	7
杂题.....	8
SG 定理 .....	14
SJ 定理 .....	14
SG Game.....	14
Multi-SG Game.....	18
Every-SG Game.....	18
Game on tree .....	18
树上删边.....	18
Fusion Principle .....	19
无向图删边.....	19
Coins Game .....	21

# 博弈论

## 基础博弈

### Bash Game

一堆石子共  $n$  个, 两个玩家轮流拿, 每次至少 1 个最多  $m$  个, 问先手是否必胜.  
如果  $n = (m+1)*k$  则先手必败, 否则先手必胜

### Nim Game

给你  $n$  堆石子, 每次可以从任意一堆拿出除 0 外任意个数的石子, 问先手是否必胜.  
其实可以看作是组合游戏的特殊情况. $\text{mex}(n)=n$

所以只要所有堆石子数异或和为 0 则先手必败.

```
1.  // #include "bits/stdc++.h"
2.  #include "iostream"
3.  #include "cstdio"
4.  using namespace std;
5.  typedef long long ll;
6.
7.  int n, res;
8.
9.  int main()
10. {
11.     ios::sync_with_stdio(false);
12.     cin.tie(0);
13.     cout.tie(0);
14.
15.     while (cin >> n)
16.     {
17.         res = 0;
18.         for (int i = 1, u; i <= n; i++)
19.         {
20.             cin >> u;
21.             res ^= u;
22.         }
23.
24.         if (res == 0)
25.             cout << "No" << endl;
```

```
26.         else
27.             cout<<"Yes"<<endl;
28.     }
29.
30.     return 0;
31. }
```

Poj2975 问 nim 游戏开局有多少种取法可以获胜.

假设  $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \dots = S$  那么 将任意一项变为  $S \oplus a_i$  异或和就变为  $S \oplus a_i \oplus (S \oplus a_i) == 0$

但是需要判断  $S \oplus a_i$  的值要小于  $a_i$  (因为你不能添加石头)

```
1.  // #include "bits/stdc++.h"
2.  #include "iostream"
3.  #include "cstdio"
4.  using namespace std;
5.  typedef long long ll;
6.
7.  int n, a[105000];
8.
9.  int main()
10. {
11.     ios::sync_with_stdio(false);
12.     cin.tie(0);
13.     cout.tie(0);
14.
15.     while(cin >> n && n)
16.     {
17.         ll res = 0;
18.         for(int i = 1; i <= n; i++)
19.         {
20.             cin >> a[i];
21.             res ^= a[i];
22.         }
23.
24.         if(res == 0)
25.             cout << 0 << endl;
26.         else
27.         {
28.             int cnt = 0;
29.             for(int i = 1; i <= n; i++)
30.                 if((a[i] ^ res) < a[i])
31.                     cnt++;
32.             cout << cnt << endl;
33.         }
```

```

34.     }
35.
36.     return 0;
37. }

```

## Anti-nim Game

Nim 游戏的变种，只是失败的认定方式改变一下，谁拿到最后一个石子则输。  
可以使用 SJ 定理.可以看这篇论文:[2019IOI 集训队论文-贾志豪](#)

先手胜当且仅当

(1) 所有堆石子数都为 1 且游戏的 SG 值为 0，(2) 存在某堆石子数大于 1 且游戏的 SG 值不为 0

证明：

(1) 若所有堆石子数都为 1 且 SG 值为 0，则共有偶数堆石子，故先手胜。

(2)

i) 只有一堆石子数大于 1 时，我们总可以对该堆石子操作，使操作后石子堆数为奇数且所有堆得石子数均为 1

ii) 有超过一堆石子数大于 1 时，先手将 SG 值变为 0 即可，且总还存在某堆石子数大于 1  
(来源 hzw 博客)

POJ-3480 给 n 堆石，轮流选择一堆拿至少一个，拿到最后一个的败。模板题

```

1. #include "iostream"
2. #include "cstdio"
3. #include "cstring"
4. using namespace std;
5.
6. int t,n,ret,cnt;
7.
8. int main()
9. {
10.     ios::sync_with_stdio(false);
11.     cin.tie(0);
12.     cout.tie(0);
13.
14.     cin>>t;
15.     while(t--)
16.     {
17.         cnt=ret=0;
18.
19.         cin>>n;
20.         for(int i=1,u;i<=n;i++)
21.         {

```

```
22.         cin>>u;
23.         ret^=u;
24.         if(u==1)cnt++;
25.     }
26.
27.     if((cnt==n && ret==0) || (cnt!=n && ret!=0))
28.         cout<<"John"<<endl;
29.     else cout<<"Brother"<<endl;
30. }
31.
32. return 0;
33. }
```

## Fib Game

一堆或多堆石子，每次仅能取出斐波那契数列中元素个石子，先取完失败。  
根据 sg 函数 sg 定理，随便搞搞就好了。

Hdu1848 三堆石子

```
1. #include "bits/stdc++.h"
2. using namespace std;
3. typedef long long ll;
4.
5. int vis[1050],mex[1050],fib[100];
6. int n,m,p;
7.
8. int main()
9. {
10.     ios::sync_with_stdio(false);
11.     cin.tie(0);
12.     cout.tie(0);
13.
14.     fib[0]=fib[1]=1;
15.     for(int i=2;i<=15;i++)
16.         fib[i]=fib[i-1]+fib[i-2];
17.
18.     mex[0]=0;
19.     for(int i=1;i<=1000;i++)
20.     {
21.         memset(vis,0,sizeof(vis));
22.         for(int j=1;j<=15 && fib[j]<=i;j++)
```

```

23.         vis[mex[i-fib[j]]]=1;
24.
25.         for(int j=0;j<=1000;j++)
26.             if(!vis[j])
27.             {
28.                 mex[i]=j;
29.                 break;
30.             }
31.     }
32.
33.     while(cin>>n>>m>>p)
34.     {
35.         if(n==0 && m==0 && p==0)return 0;
36.         if((mex[n]^mex[m]^mex[p])==0)
37.             cout<<"Nacci"<<endl;
38.         else
39.             cout<<"Fibo"<<endl;
40.     }
41.
42.     return 0;
43. }

```

## Wythoff Game

Poj 1067 给两堆石子, 分别有  $a$ 、 $b$  颗石子, 两人轮流游戏, A 先手, 可以从一堆拿任意非 0 颗, 或者从两堆都拿任意非 0 颗, 拿走最后一颗获胜, 问能否先手必赢。

黄金分割比值:  $0.6180339887\ 4989484820\ 458683436565$

```

1. int Wythoff(ll a,ll b)//威佐夫博弈
2. {
3.     if(a<b)swap(a,b);
4.     ll c=(ll)((a-b)*(sqrt(5.0)+1)/2);
5.     if(b==c)return 1;//如果拿完最后一颗获胜, 则返回 1 表示先手必胜
6.     return 0;
7. }

```

高精度的威佐夫博弈:

```

1.  const ll mod=1e9;
2.
3.  int Wythoff(ll a,ll b)//高精度威佐夫
4.  {
5.      static ll ratio[3]={618033988,749894848,204586834};
6.      if(a<b)swap(a,b);
7.      ll tmp=a-b;
8.      ll loword=tmp%mod,hiword=tmp/mod;
9.
10.     ll sum=loword*ratio[2];
11.     sum=hiword*ratio[2]+loword*ratio[1]+sum/mod;
12.     sum=hiword*ratio[1]+loword*ratio[0]+sum/mod;
13.     sum=tmp+hiword*ratio[0]+sum/mod;
14.     if(sum==b)
15.         return 1;
16.     return 0;
17. }

```

## Imitate Game

对称游戏

Poj2484 n 个棋子围成一圈，两人轮流从中取走一或两个棋子，不过取两个时必须是连续的棋子。棋子取走之后留下空位，相隔空位的棋子不连续。

当  $n>3$  时先手必败，无论 A 第一次怎么选择，B 都可以选择一个对称的位置拿走一个或者两个，将妻子变成两对称的部分。之后只要一直模仿 A 的选择，一定能保证自己拿走最后一个。

```

1.  //include "bits/stdc++.h"
2.  #include "iostream"
3.  #include "cmath"
4.  #include "cstdio"
5.  using namespace std;
6.  typedef long long ll;
7.  ll n;
8.  int main()
9.  {
10.     ios::sync_with_stdio(false);
11.     cin.tie(0);
12.     cout.tie(0);
13.
14.     while(cin>>n&& n)
15.     {
16.         if(n==1 || n==2)

```

```

17.     {
18.         cout<<"Alice"<<endl;
19.         continue;
20.     }
21.     cout<<"Bob"<<endl;
22. }
23. return 0;
24. }

```

## Euclid Game

Poj 2348 两堆石子，两人轮流操作，每次只能从较大的那一堆中拿去较小那一堆石子的倍数个。

不妨设  $a > b$

1. 若  $a - b < b$  那么只有这一种拿的可能 拿完后状态变为  $(a - b, b)$ ，若  $(a - b, b)$  必败则  $(a, b)$  必胜，而若  $(a - b, b)$  必胜，则  $(a, b)$  必败
2. 若  $a - b > b$  此时假设可以从  $a$  中拿走  $x$  个  $b$ ，若  $(a - xb, b)$  必败，我们只需要拿走  $x$  个  $b$  即可，否则若  $(a - xb, b)$  必胜，我们只需要拿走  $(x - 1)$  个  $b$ ，这样就可以把必败态丢给对方。

综上，若  $a - b > b$  或  $a \% b == 0$  则先手必胜，否则胜负与  $(a - b, b)$  相反。

```

3.  // #include "bits/stdc++.h"
4.  #include "iostream"
5.  #include "cstdio"
6.  using namespace std;
7.  typedef long long ll;
8.
9.  ll a, b, res;
10.
11. int main()
12. {
13.     ios::sync_with_stdio(false);
14.     cin.tie(0);
15.     cout.tie(0);
16.
17.     while(cin >> a >> b && a + b)
18.     {
19.         res = 1;
20.         if(b > a) swap(a, b);
21.         while(b != 0)

```



```
22.     {
23.         if(a%b==0 || a-b>b)break;
24.         a=a-b;
25.         if(b>a)swap(a,b);
26.         res^=1;
27.     }
28.     if(res)cout<<"Stan wins\n";
29.     else cout<<"Ollie wins\n";
30. }
31. return 0;
32. }
```

## 杂题

ZOJ-3057 三堆石头, 两人轮流, 每次可以从一堆中拿任意非 0 个, 或者从任意两堆中同时拿任意非 0 个.  $N \leq 300$

只需要考虑必胜态和必败态. 三堆同时为 0 时是必败态, 能转移到必败态的状态全为必胜态. 因此 DP 即可.

```
1.  // #include "bits/stdc++.h"
2.  #include "iostream"
3.  #include "cmath"
4.  #include "cstdio"
5.  using namespace std;
6.  typedef long long ll;
7.
8.  bool f[301][301][301];
9.  int a,b,c;
10.
11. int main()
12. {
13.     ios::sync_with_stdio(false);
14.     cin.tie(0);
15.     cout.tie(0);
16.
17.     f[0][0][0]=0;
18.
19.     for(int i=0;i<=300;i++)
20.         for(int j=0;j<=300;j++)
21.             for(int k=0;k<=300;k++)
```

```

22.         if(!f[i][j][k])
23.         {
24.             for(int d=1;i+d<=300 && j+d<=300;d++)
25.                 f[i+d][j+d][k]=1;
26.             for(int d=1;i+d<=300 && k+d<=300;d++)
27.                 f[i+d][j][k+d]=1;
28.             for(int d=1;j+d<=300 && k+d<=300;d++)
29.                 f[i][j+d][k+d]=1;
30.
31.             for(int d=1;i+d<=300;d++)
32.                 f[i+d][j][k]=1;
33.             for(int d=1;j+d<=300;d++)
34.                 f[i][j+d][k]=1;
35.             for(int d=1;k+d<=300;d++)
36.                 f[i][j][k+d]=1;
37.         }
38.
39.     while(cin>>a>>b>>c)
40.         cout<<f[a][b][c]<<'\n';
41.     return 0;
42. }

```

Hdu-4388 给你  $n$  堆石子, 每次操作可以从任意一堆  $a$  个中拿走一部分剩下  $k$  个, 使得  $k < a$  且  $a^k < a$ . 然后再加入有  $a^k$  个石子新堆, (就是把  $a$  分成  $k$  和  $a^k$  两堆, 且  $k < a$ ,  $a^k < a$ )

首先如果一堆石头数量是  $2^i$  肯定是无法操作的, 因为找不到一个数  $k$  使得  $k < 2^i$  且  $k^{2^i} < 2^i$ . 题解里说, 如果一堆石子个数为  $a$ , 那么每次操作本质是从  $a$  中分离出二进制中的 1. 假设  $a$  有  $s$  个 1, 那么  $a$  最多操作  $s-1$  次. 所以答案和 所有石子堆中石子数的二进制中 1 的个数减去 1 之和有关..

这样确实可以 A 这道题. 但是我还有一个没想清楚的点. 假设一堆石子是 10001000 个, 拿走一部分使得剩余 00001100 个,  $10001000^{00001100} = 10000100$  满足  $k < a, k^a < a$  但是这样操作可操作次数不仅仅是  $s-1$ . 姑且先放在这. 下次想通了再改.

```

1.  // #include "bits/stdc++.h"
2.  #include "iostream"
3.  #include "cstdio"
4.  using namespace std;
5.  typedef long long ll;
6.
7.  ll res, n, cas, t;
8.
9.  int main()
10. {

```

```

11.    ios::sync_with_stdio(false);
12.    cin.tie(0);
13.    cout.tie(0);
14.
15.    cin>>t;
16.    while(t-- )
17.    {
18.        res=0;
19.        cin>>n;
20.        for(int i=1,u;i<=n;i++)
21.        {
22.            cin>>u;
23.            res+= __builtin_popcount(u)-1;
24.        }
25.
26.        cout<<"Case "<<cas<<": ";
27.        if(!(res&1))cout<<"No\n";
28.        else cout<<"Yes\n";
29.    }
30.
31.    return 0;
32. }

```

Poj-1740 n 堆石子，每次你可以选择在一堆中取至少一颗石子，之后可以选择（也可以不选择）将剩下的石子放到其他堆里面，不能取输。

观察规律：

n=1 时先手必胜

n=2 时，若两组相同，先手任何操作均可模仿，故必败，若不同可以变成相同，故必胜。

n=3 时，先手选择较多那组，一定可以去掉较多组，并且使最少组数量变为和次小组相同，故回到了情况 2 相同局势，则先手必胜

n=4 时，若两两相同，则可以看作是两组 2 情况的游戏的组合，后者模仿之故必败，若两两不相同，则选择最大那一组，一定能将 4 组推平，故先手必胜。

N=5...

结论：

1.当 n 为奇数的时候，先手必胜。

2.当 n 为偶数的时候，如石子堆两两相等，则先手必败，反之先手必胜。

```

1. #include "iostream"
2. #include "algorithm"
3. #include "cstring"
4. #include "vector"
5. using namespace std;

```

```

6.
7.  int n,a[100];
8.
9.  int main()
10. {
11.     ios::sync_with_stdio(false);
12.     cin.tie(0);
13.     cout.tie(0);
14.
15.     while(cin>>n && n)
16.     {
17.         for(int i=1;i<=n;i++)
18.             cin>>a[i];
19.         if(n%2)cout<<1<<endl;
20.         else
21.         {
22.             sort(a+1,a+n+1);
23.             bool f=1;
24.             for(int i=1;i<n;i+=2)
25.                 if(a[i]!=a[i+1])
26.                 {
27.                     f=0;
28.                     cout<<1<<endl;
29.                     break;
30.                 }
31.             if(f)cout<<0<<endl;
32.         }
33.     }
34.     return 0;
35. }

```

Poj-2068 有  $s$  个石子,  $2n$  个人,  $1\ 3\ 5\ \dots\ 2n-1$  是我们的人  $2\ 4\ 6\ \dots\ 2n$  是对方的, 每个人有一个自己能拿的石子个数上限. 1 号拿完 2 号拿..以此类推.. 现在从 1 号开始. 问有没有必胜策略.

由于每个人能拿的个数是不一样的. 显然是个不公平博弈. 因此只能考虑搜索状态来解决. 由于  $n \leq 20$  /  $s \leq 8000$  这里我们尝试记忆化搜索构建博弈树, 直接搜索得到结果.

```

1. #include "iostream"
2. #include "algorithm"
3. #include "cstring"
4. #include "vector"
5. using namespace std;
6.
7. int dp[25][10000], n, a[25], s;

```

```

8.
9.  int dfs(int u,int res)
10. {
11.     if(u==n+1)u=1;
12.     if(dp[u][res]!=-1)return dp[u][res];
13.     if(res==1)return 0;
14.     if(res<=a[u])return 1;
15.
16.     for(int i=1;i<=min(res,a[u]);i++)
17.         if(!dfs(u+1,res-i))
18.             return dp[u][res]=1;
19.     return dp[u][res]=0;
20. }
21.
22. int main()
23. {
24.     ios::sync_with_stdio(false);
25.     cin.tie(0);
26.     cout.tie(0);
27.
28.     while(cin>>n && n)
29.     {
30.         memset(dp,-1,sizeof(dp));
31.         cin>>s;
32.         n<<=1;
33.         for(int i=1;i<=n;i++)
34.             cin>>a[i];
35.         if(dfs(1,s))
36.             cout<<1<<endl;
37.         else
38.             cout<<0<<endl;
39.     }
40.
41.     return 0;
42. }

```

**POJ-1704 阶梯博弈** 给你一个  $1 \times N$  的棋盘，上面有一些棋子，每次可以选择一个棋子向左走至少一步，但是不能跨过其他棋子，谁先无法行动败。

考虑从右往左，将棋子两两看成一个取石子游戏，若为奇数个，则第一个棋子与原点  $0$  视为一个游戏，所有棋子即组成经典的 **nim** 游戏，为什么能当作取石子游戏？首先假设对手移动一对棋子中的后一个，间隔可以视作石子，移动则可以视为取走一定数量的石子，而若对方移动前一个棋子，则我们一定可以移动后一个棋子相同长度，则将原本的局面又还给了对方，

那么必然存在一个情况无法再移动前棋子，所以必然可以看作取石子游戏，同时这也说明，一对的前棋子与上一对的后棋子之间的间隔其实对游戏并没有影响。

```
1. #include "iostream"
2. #include "algorithm"
3. #include "cstring"
4. #include "vector"
5. using namespace std;
6.
7. int a[1050],t,n;
8.
9. int main()
10. {
11.     ios::sync_with_stdio(false);
12.     cin.tie(0);
13.     cout.tie(0);
14.
15.     cin>>t;
16.     while(t-->0)
17.     {
18.         int ret=0;
19.         cin>>n;
20.         for(int i=1;i<=n;i++)
21.             cin>>a[i];
22.         sort(a+1,a+n+1);
23.         for(int i=n;i>=1;i-=2)
24.             ret^=(a[i]-a[i-1]-1);
25.         if(ret)cout<<"Georgia will win"<<endl;
26.         else cout<<"Bob will win"<<endl;
27.     }
28.     return 0;
29. }
```

POJ-2505 乘数博弈 一开始  $p=1$  给出  $n$ ，两个人轮流可以选择使  $p$  乘  $[2,9]$  中的一个数字，如果乘完后大于等于  $n$  则获胜。

分析一下

$n=0\sim9$  先手必胜  
 $n=10\sim18$  后手必胜  
 $n=19\sim162$  先手必胜..

可以观察发现分界线。

```
1. #include "iostream"
2. #include "cstdio"
3. #include "vector"
4. using namespace std;
5. typedef long long ll;
6.
7. double n;
8.
9. int main()
10. {
11.     ios::sync_with_stdio(false);
12.     cin.tie(0);
13.     cout.tie(0);
14.
15.     while(cin>>n)
16.     {
17.         while(n>18)n/=18;
18.         if(n>9)cout<<"Ollie wins."<<endl;
19.         else cout<<"Stan wins."<<endl;
20.     }
21.
22.     return 0;
23. }
```

## SG 定理

决策空间为空则败的多个游戏组合一起的  $sg$  值为各个游戏单独  $sg$  值的  $xor$  和; 先手必败当且仅当  $sg$  值为 0. 否则均为先手必胜.

## SJ 定理

Anti-SG 游戏规定, 决策集合为空的游戏者胜, Anti-SG 其他规则与 SG 游戏相同.

对于任意一个 Anti-SG 游戏, 如果我们规定当局面中所有的单一游戏的 SG 值为 0 时, 游戏结束, 则先手必胜当且仅当:

- (1) 游戏的 SG 函数不为 0, 且游戏中某个单一游戏的 SG 函数大于 1
- (2) 游戏的 SG 函数为 0, 且游戏中没有单一游戏的 SG 函数值大于 1.

## SG Game

POJ2960 给你  $n$  堆石子, 每次只能取给定的  $k$  个数个石子, 问能先手的情况.

先搜出单堆石子的 mex 值, 根据 SG 定理, 组合游戏的结果取决于各堆的 xor-sum, 若为 0 则先手必败, 否则先手必胜.

```
1.  // #include "bits/stdc++.h"
2.  #include "iostream"
3.  #include "cmath"
4.  #include "cstdio"
5.  #include "vector"
6.  #include "queue"
7.  #include "algorithm"
8.  #include "cstring"
9.  using namespace std;
10. typedef long long ll;
11.
12. vector<int>pb;
13.
14. int mex[10500], vis[10500];
15. int k, m;
16.
17. int main()
18. {
19.     ios::sync_with_stdio(false);
20.     cin.tie(0);
21.     cout.tie(0);
22.
23.     while(cin >> k && k)
24.     {
25.         pb.clear();
26.         for(int i=1, u; i<=k; i++)
27.         {
28.             cin >> u;
29.             pb.push_back(u);
30.         }
31.
32.         sort(pb.begin(), pb.end());
33.
34.         mex[0]=0;
35.         for(int i=1; i<=10000; i++)
36.         {
37.             memset(vis, 0, sizeof(vis));
38.             for(int j=0; j<k && pb[j]<=i; j++)
39.                 vis[mex[i-pb[j]]]=1;
40.             for(int j=0; j<=10000; j++)
41.                 if(!vis[j])
```



```

42.         {
43.             mex[i]=j;
44.             break;
45.         }
46.     }
47.
48.     cin>>m;
49.     for(int i=1,u,v,res;i<=m;i++)
50.     {
51.         cin>>u;
52.         res=0;
53.         for(int j=1;j<=u;j++)
54.         {
55.             cin>>v;
56.             res^=mex[v];
57.         }
58.
59.         if(res==0)
60.             cout<<'L';
61.         else
62.             cout<<'W';
63.     }
64.     cout<<'\n';
65. }
66.
67. return 0;
68. }

```

POJ-2425 给你一棵有向树，很多节点上有棋子，一个节点上可能有多个棋子，棋子每次可以沿着边任意移动，谁不能移动谁输。

棋子的移动可以看作取石子过程，多个棋子其实就是标准的 SG 组合游戏。记忆化搜索一下 sg 函数值即可。

```

1. #include "iostream"
2. #include "cstdio"
3. #include "vector"
4. using namespace std;
5. typedef long long ll;
6.
7. int sg[1050],vis[1050][1050],n,t;
8. vector<int>g[1050];
9.
10. int get_sg(int u)
11. {

```

```
12.     if(sg[u]!=-1)return sg[u];
13.
14.     for(int i=0;i<(int)g[u].size();i++)
15.     {
16.         int v=g[u][i];
17.         vis[u][get_sg(v)]=1;
18.     }
19.
20.     for(int i=0;i<=1000;i++)
21.         if(!vis[u][i])
22.             return sg[u]=i;
23. }
24.
25. int main()
26. {
27.     ios::sync_with_stdio(false);
28.     cin.tie(0);
29.     cout.tie(0);
30.
31.     while(cin>>n && n)
32.     {
33.         for(int i=0;i<n;i++)
34.         {
35.             g[i].clear();
36.             sg[i]=-1;
37.             for(int j=0;j<=1000;j++)
38.                 vis[i][j]=0;
39.         }
40.
41.         for(int i=0,u,v;i<n;i++)
42.         {
43.             cin>>u;
44.             for(int j=1;j<=u;j++)
45.             {
46.                 cin>>v;
47.                 g[i].push_back(v);
48.             }
49.         }
50.
51.         while(cin>>t && t)
52.         {
53.             int ret=0;
54.             for(int i=1,u;i<=t;i++)
55.             {
```

```

56.         cin>>u;
57.         ret^=get_sg(u);
58.     }
59.
60.     if(ret)cout<<"WIN"<<endl;
61.     else cout<<"LOSE"<<endl;
62. }
63. }
64. return 0;
65. }

```

## Multi-SG Game

Multi-SG 游戏规定, 在符合拓扑原则下, 一个单一游戏的后继可能是多个单一游戏. 其他规则与 SG 游戏一致, 与 SG 游戏一样, Multi-SG 游戏同样可以使用 SG 函数对局面进行判断.

## Every-SG Game

定义: Every-SG 游戏规定, 对于还没有结束的单一游戏, 游戏者必须对该游戏进行一步决策, 其他规则与 SG 游戏相同.

在通过拓扑关系计算某一个状态点的 SG 函数时 (事实上, 我们只需要计算该状态点的 SG 值是否为 0), 对于 SG 值为 0 的点, 我们需要知道最快几步能将游戏带入终止状态, 对于 SG 值不为 0 的点, 我们需要知道最慢几步游戏会被带入终止状态, 我们用 **step** 函数来表示这个值。

$$\text{step}(v) = \begin{cases} 0 & v \text{ 为终止状态} \\ \max(\text{step}(u)) + 1 & \text{SG}(v) > 0 \wedge u \text{ 为 } v \text{ 的后继状态} \wedge \text{SG}(u) = 0 \\ \min(\text{step}(u)) + 1 & \text{SG}(v) = 0 \wedge u \text{ 为 } v \text{ 的后继状态} \end{cases}$$

定理: 对于 Every-SG 游戏先手必胜当且仅当单一游戏中最大的 **step** 为奇数.

## Game on tree

### 树上删边

给出一个有  $n$  个点的树, 有一个节点作为树的根, 游戏者轮流从树中删除边, 删去一条

边后, 不与根节点相连的部分将被移走, 谁无法移动谁输.

结论: 叶子节点的 **sg** 值为 0; 中间节点的 **SG** 值为它的所有子节点的 **sg** 值加 1 后的异或和. 可以使用数学归纳法证明. 参考: [自为风月马前卒博客](#)

一棵树的状态可以由根节点的 **mex** 值表示. 组合游戏则是多个树的 **mex** 值异或和.

而如果这棵树变为仙人掌(某些叶子节点处会挂着一个环, 每个节点最多参与一个环, 每个环最多只有一个节点与主树相连)

## Fusion Principle

Fusion Principle:

我们可以对无向图做如下改动: 将图中的任意一个偶环缩成一个新点, 任意一个奇环缩成一个新点加一个新边; 所有连到原先环上的边全部改为与新点相连. 这样的改动不会影响图的 **SG** 值.

## 无向图删边

仙人掌删边:

Poj 3710 给你一些树, 每棵树只可能在叶子节点有一些环, 这些环保证只有一个节点与树相连接, 且每个节点最多只参与一个环. 游戏开始, Sally 先手, 双方可以选择图上的一些边删除, 删除边后未与根节点相连的部分都会消失, 轮流操作, 无法操作的人输.

```

1. #include "iostream"
2. #include "cstring"
3. #include "cstdio"
4. #include "vector"
5. using namespace std;
6.
7. int mp[105][105], vis[105];
8. int dfn[105], low[105], id;
9. int s[105], top;
10. vector<int> g[105];
11. //int ins[105];
12.
13. void tarjan(int u, int pre)
14. {
15.     //cout<<"#"<<u<<" "<<pre<<endl;
16.     dfn[u]=low[u]=++id;
17.     s[top++]=u;
18.
19.     for(int i=0; i<(int)g[u].size(); i++)
20.     {
21.         int v=g[u][i];

```

```
22.     if(v==pre)
23.     {
24.         if(mp[u][v]%2==0)vis[u]=1;
25.         continue;
26.     }
27.
28.     if(!dfn[v])
29.     {
30.         tarjan(v,u);
31.         low[u]=min(low[u],low[v]);
32.     }
33.     else
34.         low[u]=min(low[u],dfn[v]);
35. }
36.
37. if(dfn[u]==low[u])
38. {
39.     int cnt=1;top--;
40.     while(s[top]!=u)
41.     {
42.         vis[s[top--]]=1;
43.         cnt++;
44.     }
45.
46.     if(cnt&1)vis[s[top+1]]=0;
47. }
48. }
49.
50. int get_sg(int u,int pre)
51. {
52.     int ret=0;
53.     for(int i=0;i<(int)g[u].size();i++)
54.     {
55.         int v=g[u][i];
56.         if(v==pre || vis[v])continue;
57.         ret^=(get_sg(v,u)+1);
58.     }
59.     return ret;
60. }
61.
62. int main()
63. {
64.     ios::sync_with_stdio(false);
65.     cin.tie(0);
```

```

66.     cout.tie(0);
67.
68.     int n,m,k;
69.     while(cin>>n)
70.     {
71.         int ret=0;
72.         while(n--)
73.         {
74.             cin>>k>>m;
75.             memset(vis,0,sizeof(vis));
76.             memset(mp,0,sizeof(mp));
77.             memset(dfn,0,sizeof(dfn));
78.             memset(low,0,sizeof(low));
79.             for(int i=0;i<=k;i++)g[i].clear();
80.             //memset(ins,0,sizeof(ins));
81.             for(int i=1,u,v;i<=m;i++)
82.             {
83.                 cin>>u>>v;
84.
85.                 mp[u][v]++;
86.                 mp[v][u]++;
87.                 g[u].push_back(v);
88.                 g[v].push_back(u);
89.             }
90.             tarjan(1,0);//cout<<"OK"<<endl;
91.             ret^=get_sg(1,0);
92.         }
93.         //cout<<"#"<<ret<<endl;
94.         cout<<(ret?"Sally":"Harry")<<endl;
95.     }
96.     return 0;
97. }

```

## Coins Game

$N$  枚硬币排一排, 编号  $1 \sim N$ , 游戏者根据某些约束翻硬币, 但所有翻动中最左或最右或中间某一位置必须是从正面翻至反面, 谁不能翻谁败.

结论: 局面的 SG 值为局面中每个正面朝上的棋子单一存在时的 SG 值的异或和

$$\begin{array}{cccccc} \text{反} & \text{正} & \text{正} & \text{反} & \text{反} & \text{正} \\ = & \text{反} & \text{正} & & & \\ \wedge & \text{反} & \text{反} & \text{正} & & \\ \wedge & \text{反} & \text{反} & \text{反} & \text{反} & \text{反} & \text{正} \end{array}$$