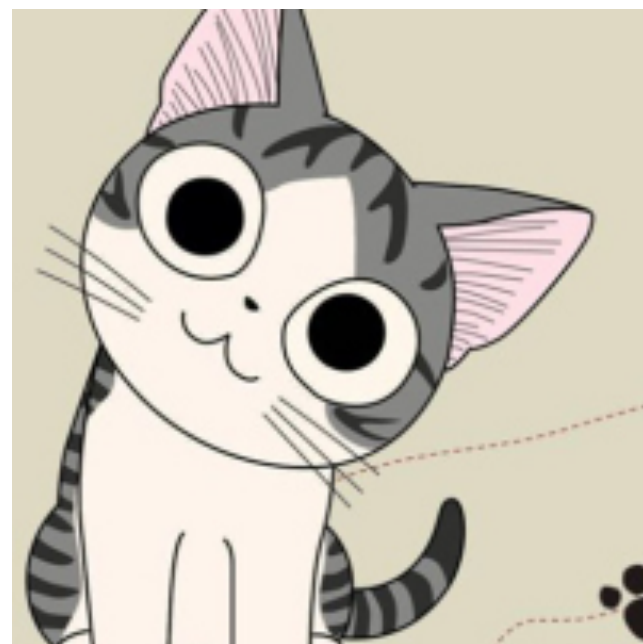


贪心、数学

2019 年 10 月 5 日

黄哲威 hzwer



自我介绍

- 北京大学16级计算机科学方向
- 计算概论 A, 数据结构与算法 A , 算法设计与分析讨论班助教
- NOI银牌, CTSC金牌, ACM区域赛金牌
- 旷视科技(Megvii) 研究员 计算机视觉与强化学习
- hzwer.com

整除

- 假设 m 和 n 是整数，且 m 不是 0，则 m 整除 n 指的是 n 是 m 的倍数，即存在整数 k ，使得 $n = mk$
- 记为 $m \mid n$
- 称 m 是 n 的一个约数

整除

- 证明：如果一个数每一位加起来可以被3整除，那这个数就可以被3整除？

素数

- 如果一个数 x ，没有 1 和 x 以外的数是 x 的约数，称 x 是素数（质数）
- 比如 2, 3, 5, 7, 11 ...

素数

- \sqrt{n} 判断素数
- 素数筛法

素数

- 证明素数有无穷多个？

素数

- 证明素数有无穷多个？

假设素数是有限的，假设素数只有有限的 n 个，最大的一个素数是 p 。

设 q 为所有素数之积加上1，那么， $q = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ 不能被所有素数整除，我们又找到了一个更大的素数

最大公约数

- 两个不同时为 0 的数 a 与 b 的最大公因数是同时整除它们的两个最大的数，记为 $\gcd(a, b)$ 。
- 如果 $\gcd(a, b) = 1$ ，我们称它们互质。
- 比如 $\gcd(16, 24) = 8$

欧几里得算法

- $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$
- 设 $g = \gcd(a, b)$, $r = a \bmod b$, 我们可以知道 $a = kg + r$
- 再根据 g 的最大公因数的性质（也就是同时整除 a 和 b ）就可以知道 g 也整除 r 。
- 同样的，我们也可以证明， g 是同时整除 b 和 r 的最大的整数，这样，这个等式就成立了。

快速幂

- 快速幂 a^b
- 预处理 $a^1 a^2 a^4 \dots a^{(2n)}$, 对 b 做二进制拆分
- 如 $a^{21} = a^{16} * a^4 * a^1$

练习题

CF1209A.Paint the Numbers (900)

- 给 n 个数 $a_1 \sim a_n$ 。要求你把它们分成 k 组，使得每一组中的数，都能被这一组最小值整除。问 k 最小是多少？
- $n \leq 100, a_i \leq 10000$

CF1209A.Paint the Numbers (900)

- 贪心筛法，每次取没被筛掉的最小元素，筛掉它的倍数

CF486A.Calculating Function (1100)

- 计算函数 $f(n) = -1 + 2 - 3 + \dots + (-1)^n \cdot n$
- $n \leq 10^{15}$

CF486A.Calculating Function (1100)

- n 为奇数, 答案是 $-(n+1)/2$
- n 为偶数, 答案是 $n / 2$

CF492B.Vanya and Lanterns (1200)

- 一个长为 L 的街道（左端点是 0 ，右端点是 L ）上有 n 个相同的灯，第 i 个灯放置的位置是 a_i 。
- 问灯的半径至少要是多少，才能使得整个街道都有灯光。
- $n \leq 1000$, $L \leq 10^9$

CF492B.Vanya and Lanterns (1200)

- 排序，求出两两灯之间的距离一半的最大值，再求出两端两个灯距离街道两端尽头的距离

CF570B.Simple Game (1300)

- 给 n , m , 求一个数 a ($1 \leq a \leq n$), 使得当 c 在 1 到 n 的整数中随机取值时, $|c - a| < |c - m|$ 成立的概率最大。
- $n, m \leq 10^9$

CF570B.Simple Game (1300)

- 分 $2m \leq n$ 和 $2m > n$ 讨论

.

CF546B.Soldier and Badges (1300)

- 给 n 个数，每次操作可以将一个数 $+1$ ，要使这 n 个数都不相同，求至少要加多少？
- $n \leq 3000$

CF546B.Soldier and Badges (1300)

- 排序后一个个加
-

CF482A.Diverse Permutation (1300)

- 构造 n 的一个全排列，使其相邻数之间的差值有 K 种，若不存在输出 No
- 例：1 5 4 2 3 的差值序列是 4 1 2 1，有 3 种差值
- $1 \leq n, k \leq 10^5$

CF482A.Diverse Permutation (1300)

- $1 \sim n$ 最多凑出 $n - 1$ 种差值
- 8 1 7 2 6 3 5 4 的差值序列是 7 6 5 4 3 2 1
- 构造 k 项差值为 2 到 k , 其余的差值全为 1 即可

401 C.Team (1400)

- 构造一个 01 序列，包含 n 个 0， m 个 1
- 要求不存在连续 2 个 0，或 3 个 1
- 无解输出 -1
- $1 \leq n, m \leq 10^6$

401 C.Team (1400)

- 判断无解情况后使用 110 和 10 构造

413C.Jeopardy! (1400)

- 给 n 个关卡，每个关卡得分为 a_i ，有 m 次机会可以选择一个关卡通过后不得分，而将现有得分翻倍
- 你可以安排关卡的通过顺序和策略，求最大得分
- $1 \leq n, m \leq 100$

.

413C.Jeopardy! (1400)

- 将可以翻倍关卡放在后面，且按从大到小排序，依次贪心

CF486B.OR in Matrix (1400)

- A, B 都是 $n*m$ 的 01 矩阵，已知 B 矩阵是由 A 矩阵以一种规则生成
- B_{ij} 是由 A 矩阵的第 i 行的所有元素和第 j 列的所有元素进行或运算 得到
- 给定 B 矩阵，求是否存在一个矩阵 A 能生成 B
- $1 \leq n, m \leq 100$

CF486B.OR in Matrix (1400)

- 如果矩阵B的某个值为 0，则 A 矩阵整行整列都是 0
- 如果矩阵B的某个值为 1，那 A 矩阵行或列上至少有 1 个 1
- 先填 0，其余都填 1，最后验证一下

545C.Woodcutters (1500)

- 给 n 棵树在一维数轴上的坐标，以及它们的高度。现在要你砍倒这些树，树可以向左倒也可以向右倒，砍倒的树不能重合、当然也不能覆盖其他的树原来的位置，现在求最大可以砍倒的树的数目。
- $n \leq 10^5$, $x_i, h_i \leq 10^9$

545C.Woodcutters (1500)

- 第一棵树的左边和最后一棵树的右边没树，所以他们向两边倒， 然后对于中间的树来说，首先先向左边倒，然后左边距离如果不 够的话再向右边倒。

CF175C. Geometry Horse (1600)

- 有 n 种数字，第 i 种数字的数量为 k_i ，价值为 c_i
- 依次取走数字，取走某个数字时获得的价值为 $c_i * f$
- 其中 f 表示当前系数，初始为1
- 当取走的数字个数达到 p_i 后， $f += 1$ ， p_i 表示第 i 个素数
- 可以以任意顺序取走数字，求可获得的最大价值和
- $n \leq 100$ ， $k_i \leq 100$

CF175C. Geometry Horse (1600)

- 当前系数 f 单调不降
- 越后取的数字，乘的当前系数 f 越大
- 以数字大小排序所有数字，按价值从小到大取走数字，计算答案

425A.Sereja and Swaps (1600)

- 给一个长为 n 的序列，以及交换次数 k ，每次可以在原先的序列中任意交换两个数
- 交换后找一个最大子串和，输出其可能的最大值。
- $1 \leq n \leq 200, 1 \leq k \leq 10$

425A.Sereja and Swaps (1600)

- 枚举一个子串，将子串内最小的和子串外最大的尝试交换

235A.LCM Challenge (1600)

- 在小于 n 的数中找三个数 a, b, c
- 最大化 $\text{lcm}(a, b, c)$
- $n \leq 10^6$

235A.LCM Challenge (1600)

- 在接近 n 的数内找三个两两互质的，小范围暴力

数学题

- 甲乙2人从相距100m远的A, B两点相向而行, 甲速度3m/s, 乙速度2m/s, 甲带了一条速度为10m/s的狗, 和他一起同向出发
- 狗狗和乙相遇后立即折返跑向甲, 和甲相遇后又折返, 如此往复, 请问直到甲乙二人相遇, 狗狗跑了多少m的路程?

- 一个蘑菇重10kg，含水量99%，经过晾晒后（有部分水分蒸发），含水量下降为98%，求它现在的重量？

- 一张长方形的纸，仅通过折纸，把长边三等分。

1. A、B、C、D 四人玩扑克牌游戏，A、C 两人同盟，B、D 两人同盟。将除去大小王的 52 张牌随机分发给四人（每人获得 13 张牌）后，下面哪种情况的可能性更大一些？

- A. A、C 两人手中都没有梅花
- B. A、C 两人手中囊括了所有的梅花
- C. 上述两种情况的出现概率相同

2. 同时抛掷10枚硬币，出现下面哪种情况的可能性更大一些？

- A. 正面朝上的硬币数量为偶数
- B. 正面朝上的硬币数量为奇数
- C. 上述两种情况的出现概率相同

求证 $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n$, 当n不断增大时, 这个式子趋于无穷大?

假设你结识了1个新朋友，求：他生日和你是同一天的概率？

假设你结识了2个新朋友，求：你们3个生日互不相同的概率？

(不考虑年份，且每年都是365天)