Graph

T

图论學起 基本概念

路径与环 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树

取近公共但允

图论入门

TA

CST, Tsinghua University

Oct. 2018

Contents

Graph

TA

图论──窥 图论绿起 基本概念

路位与外 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

最短路

连通分量

最小生成树

后记

- 1 图论一窥
 - 图论缘起
 - 基本概念
- 2 路径与环
 - ■基本概念
 - 拓扑排序
 - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

Contents

Graph

TΑ

图论一窥

图论缘起 基本概念

華本城 3 路径与5

基本概念 拓扑排序

欧拉路径 (3

最短路

连通分量

最小生成树

最近公共祖外

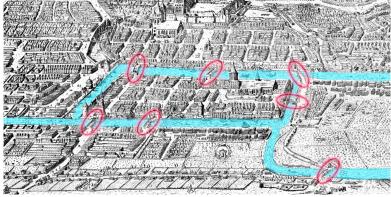
1 图论一窥

- 图论缘起
- 基本概念
- 2 路径与环
 - ■基本概念
 - 拓扑排序
 - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

七桥问题

Graph 图论缘起

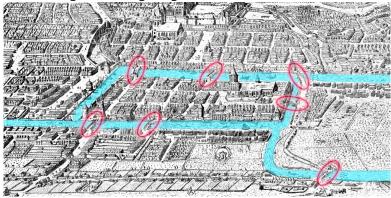
Seven Bridges of Königsberg.



七桥问题

Graph

Seven Bridges of Königsberg.



It's resolved to be negative by Leonhard Euler in 1736.

国际象棋中的马

Graph

TΑ

图论一系 图论缘起 ^{基本概念}

路径与环 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树

最近公共祖先 后记

Knight's tour



国际象棋中的马

Graph

TA

图论一》 图论缘起基本概念

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路 连通分量 最小生成树

后记

Knight's tour



Schwenk proved that for any $m \times n$ board with $m \le n$, a closed knight's tour is always possible unless one or more of these three conditions are met:

- m and n are both odd
- m = 1, 2, or 4
- m = 3 and n = 4, 6, or 8.

点与边

Graph

基本概念

节(结,顶)点(node):图的基本构成元素,一般以小写字母表 示 (u, v, ...).

标号: 大部分图论算法是建立在有标号节点之上的.

点与边

Graph

节 (结, 顶) 点 (node): 图的基本构成元素, 一般以小写字母表示 (u, v, ...).

标号: 大部分图论算法是建立在有标号节点之上的.

边 (edge): 节点对 (u,v). 可分为有向边 (有序节点对) 和无向

边 (无序节点对), 对于有向边, u 称作始点, v 称作终点.

重边: 相同的边

自环: (u, u)

图 (graph): G = (V, E). 其中 V 是点集, E 是可重边集. 各种图:

- 无向图, 有向图, 混合图.
- 简单图 (无重边和自环)
- 完全图 (K_n), 竞赛图

后记

图 (graph): G = (V, E). 其中 V 是点集, E 是可重边集. 各种图:

- 无向图, 有向图, 混合图.
- 简单图 (无重边和自环)
- 完全图 (K_n), 竞赛图

权

■ 边权: $w: E \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$

■ 点权: $w: V \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$

图 (graph): G = (V, E). 其中 V 是点集, E 是可重边集. 各种图:

- 无向图, 有向图, 混合图.
- 简单图 (无重边和自环)
- 完全图 (K_n), 竞赛图

权

- 边权: $w: E \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$
- 点权: w: V → ℝ/N

Q: 无向简单图最多有多少条边? 有向简单图最多有多少条边?

边与点的相遇: 度

Graph

图论一系

基本概念 路径与环 ^{基本概念} 拓扑排序 欧拉路径(环)

最短路

连通分量

最小生成树最近公共祖务

后记

度: $d: V \to \mathbb{N}$, 与某节点相邻的边数.

正(出)度:以某节点为始点的边数.负(入)度:以某节点为终点的边数.

边与点的相遇: 度

Graph

ΤA

劉 论 ── 利图 论 综起基本概念次 公 □ □

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路

最小生成树

后记

度: $d: V \to \mathbb{N}$, 与某节点相邻的边数. 正(出)度: 以某节点为始点的边数.

近(面) 度· 以某节点为始点的边数· 负(入) 度: 以某节点为终点的边数.

度的性质:

- (简单图) $\sum_{v \in V} d_v = 2|E|$
- 度为奇数的节点必为偶数个.
- (竞赛图) $\sum_{v \in V} (d^+(v_i))^2 = \sum_{v \in V} (d^-(v_i))^2$

图的存储

Graph

TA

图论缘起
基本概念
路径与环
基本概念
拓扑排序
欧拉路径(环

最短路

最小生成树最近公共祖外

后记

名称	初始复杂度	构造复杂度
邻接矩阵	$O(V^2)$	<i>O(E)</i>
前向星	O(V)	$O(V + E \log E) / O(V + E)$
邻接表	O(V)	O(E)
十字链表	O(V)	O(E)

图的存储

Graph

ΤA

图论錄起 基本概念 路 径 与 环 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量 最小生成树

后记

名称	初始复杂度	构造复杂度
邻接矩阵	$O(V^2)$	O(E)
前向星	O(V)	$O(V + E \log E) / O(V + E)$
邻接表	O(V)	O(E)
十字链表	O(V)	O(E)

查询指定边信息?

■ 邻接矩阵: O(1)

■ 前向星: *O(E)/O(log E)*

■ 邻接表/十字链表: O(E)/O(log E)

Contents

Graph

TΑ

图论一窥 图论绿起 基本概念

路径与环

基本概念

知介部庁 欧拉路径 (环

具结吸

取应归

连通分量

最小生成树

后记

- 1 图论一窥
 - ■图论缘起
 - ■基本概念
- 2 路径与环
 - 基本概念
 - 拓扑排序
 - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

基本概念: 路径

Graph TA

開始線線 開発線線 基本概念 基本概念 基本概念 超析排降 (平) 最短 (平) 最短 (平) 最短 (中) 最短 (中) 最短 (中) 最短 (中) 最近 (中) 是可 (

有向路径: $P = (e_1, ..., e_n)$, 其中 e_i 的终点是 e_{i+1} 的始点.

初等: 路径经过的边两两不同.

简单: 路径经过的点两两不同 (除路径的始点与终点外).

环: 路径的始点与终点相同.

无向图上的路径:存在一种每一条边分配方向的方案使得其成为一条有向图的路径.

基本概念: 自由树

Graph

TΑ

图论一算 图论绿起 基本概念

路径与环 基本概念 ^{拓扑排序}

最短路

连通分量

最小生成树

最近公共祖先后记

自由树 连通的无环无向图

森林: 树的集合.

基本概念: 自由树

Graph

ТА

图论一窥 图论缘起 基本概念 与环基本概念 版拉路序 版拉路序

最短路

~~~~~ 最小生成树 最近公共祖外 V) 1

自由树: 连通的无环无向图.

森林: 树的集合.

对于一棵自由树而言, 以下 6 条等价:

- 1 G 是一棵自由树.
- 2 G 中任何两顶点由唯一简单路径相连.
- 3 G 是连通的, 但是从图中移除任意一条边得到的图均不 连通.
- 4 G 是连通的, 且 |E| = |V| 1
- **5** G 是无环的, 且 |E| = |V| 1
- **6** G 是无环的,但若向 E 中添加任意一条边,均会造成该图包含恰有一个环。

### 基本概念: 有根树与二叉树

Graph

TA

图论一系 <sub>图论缘起</sub> 基本概念 路径与5

哈住与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

最短路

最近公共祖先

有根树: 自由树 + 根.

节点之间的关系: 父亲与儿子, (真) 祖先与 (真) 后代, 叶节

点.

子树: u 的所有后代的导出子图.

定义在点集上的函数: 度, 深度, 大小.

$$\sum depth(i) + |V| = \sum size(i)$$

## 基本概念: 有根树与二叉树

Graph

TA

图论一颗 图论绿起 基本概念 路径与环 基本概念

基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

最短路

是超力量 最小生成树 最近公共祖先

最近公共祖先 后记 有根树: 自由树 + 根.

节点之间的关系: 父亲与儿子, (真) 祖先与 (真) 后代, 叶节

点

子树: u 的所有后代的导出子图.

定义在点集上的函数: 度, 深度, 大小.

$$\sum depth(i) + |V| = \sum size(i)$$

二叉树: 左子树, 右子树.

# 基本概念: 有根树与二叉树

Graph

图论一窥 图论缘起 基本概念 路径与环 基本概念

拓扑排序 欧拉路径 (环)

连通分量

最近公共

后记

有根树: 自由树 + 根.

节点之间的关系: 父亲与儿子, (真) 祖先与 (真) 后代, 叶节点.

子树: u 的所有后代的导出子图.

定义在点集上的函数: 度, 深度, 大小.

$$\sum depth(i) + |V| = \sum size(i)$$

二叉树: 左子树, 右子树.

#### 一些性质

- 任何非空二叉树中, 度为 2 的节点数比叶节点数少 1.
- n 个节点的二叉树高度至少为 |log n|
- Kraft 不等式: 将二叉树 T 中每个深度为 d 的叶节点赋 予权值  $w(x) = 2^{-d}$ , 则  $\sum w(x) \le 1$ .

# 树的存储

Graph

TΑ

图论缘起基本概念 路径与环基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (基本概念

最短路

连通分量

最小生成树最近公共祖先

可以保存的信息:

- 边信息
- 父亲
- 儿子

大部分题会将树作为一个无向图来读入, 也有的题会告诉你某个点的父亲是谁, 保存哪些信息取决于你的需求.

#### **BFS**

Graph

图论绿起 基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

<sup>殿拉路径(环)</sup> 最短路 连通分量 最小生成树 最近公共祖先 BFS(breadth first search): 求图中两点间最短路径?(路径长度被定义为其拥有的边数) 时间复杂度: O(V+E)

BFS 生成树

Graph

TΑ

图论一算 图论缘起 基本概念

路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

最短路

连通分量

最小生成树

后记

DFS(depth first search): DFS 生成树.

边的分类:

- 树边
- 后向边
- ■前向边
- 横向边

Graph

图论一系 <sub>图论缘起</sub> <sup>基本概念</sup> 路径与3

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路 连通分量 最小生成树 最近公共祖先 DFS(depth first search): DFS 生成树.

边的分类:

- 树边
- 后向边
- 前向边
- ■横向边

DFS 序: DFS 时的时间戳, 具体值无关紧要, 重要的是相对大小. 入栈序  $(v_l)$ , 出栈序  $(v_r)$ .

Graph

图论一系 <sub>图论缘起</sub> 基本概念 路径与现

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路 连通分量 最小生成树 最近公共祖先 DFS(depth first search): DFS 生成树.

边的分类:

- 树边
- 后向边
- 前向边
- 横向边

DFS 序: DFS 时的时间戳, 具体值无关紧要, 重要的是相对大小. 入栈序  $(v_l)$ , 出栈序  $(v_r)$ .

性质:

- 有向图 G 不存在指向 dfs 序更大的点的横向边, 无向图 G 不存在横向边.
- 括号化定理 ([v<sub>l</sub>, v<sub>r</sub>]): 子树与 DFS 序区间的对应性.

Graph

图论一系 <sub>图论缘起</sub> <sup>基本概念</sup> 路径与돼

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (知

连通分量 最小生成树 最近公共祖先 DFS(depth first search): DFS 生成树.

边的分类:

- 树边
- 后向边
- 前向边
- 横向边

DFS 序: DFS 时的时间戳, 具体值无关紧要, 重要的是相对大小. 入栈序  $(v_l)$ , 出栈序  $(v_r)$ .

性质:

- 有向图 G 不存在指向 dfs 序更大的点的横向边, 无向图 G 不存在横向边.
- 括号化定理 ([v<sub>l</sub>, v<sub>r</sub>]): 子树与 DFS 序区间的对应性.

Q: 如何求出一个环?

Q: 对一棵树支持单点修改, 求前缀 (某一节点的所有祖先)

和?



# 基本概念: 连通

Graph TA

连通: 若 (不考虑方向的) 图 G 的任意两点间均存在路径,则称图 G 连通.

子图: 若 G' = (V', E') 满足  $V' \subset V$ ,  $E' \subset E$ , 则称  $G' \in G$  的子图.

导出子图: 若 E' 包含了 V' 在 G 中的所有关联的边,则称 G' 是 G 关于 V' 的导出子图.

(无向图的) 极大连通子图 (连通支): 若 G' 满足不存在 H, 使得 G' 是 H 的子图, H 是 G 的子图, 则称 G' 是 G' 的极大连通子图.

## 基本概念: 连通

Graph TA

连通: 若 (不考虑方向的) 图 G 的任意两点间均存在路径,则称图 G 连通.

子图: 若 G = (V, E) 满足  $V \subset V, E \subset E$ , 则称  $G \in G$  的子图.

导出子图: 若 E' 包含了 V' 在 G 中的所有关联的边,则称 G' 是 G 关于 V' 的导出子图.

(无向图的) 极大连通子图 (连通支): 若 G' 满足不存在 H, 使 得 G' 是 H 的子图, H 是 G 的子图, 则称 G' 是 G 的极大连通子图.

Q: 对于无向图而言, G 连通最少需要多少条边? G 不连通最多可以有多少条边?

# 基本概念: 连通

Graph

基本概念

连通: 若 (不考虑方向的) 图 G 的任意两点间均存在路径,则 称图 G 连诵.

子图: 若 G = (V, E) 满足  $V \subset V, E \subset E$ , 则称  $G \in B$ 子图.

导出子图: 若 E' 包含了 V' 在 G 中的所有关联的边, 则称 G'是 G 关于 V 的导出子图.

(无向图的) 极大连通子图 (连通支): 若 G 满足不存在 H, 使 得 G 是 H 的子图, H 是 G 的子图, 则称 G 是 G 的极大连通 子图.

Q: 对于无向图而言, G 连通最少需要多少条边? G 不连通最 多可以有多少条边?

Q: 对于无向图而言, 如何判定两点间是否可达? 如何判定任 意两点间是否可达?如何求一个图的连通支个数?

Q: 对于有向图而言, 如何判定两点间是否可达? 如何判定任 意两点间是否可达?

## 拓扑排序

Graph

TA

图论一系图论绿起基本概念

路径与环 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树

最近公共祖先后记

在 DAG(Directed Acyclic Graph) 中求一个排列 P, 使得对于每个点 v 而言, 若 (u,v) 存在, 则 u 在 P 中在 v 之前.

### 拓扑排序

Graph

TA

图论缘起
基本概念
路径与环
基本概念
拓扑排序
欧拉路径(环)

连通分量 最小生成树 最近公共祖先 后记 在 DAG(Directed Acyclic Graph) 中求一个排列 P, 使得对于每个点 v 而言, 若 (u, v) 存在, 则 u 在 P 中在 v 之前.

Kahn 算法: 不断寻找入度为 0 的点, 删掉这个点, 修改其他点的入度.

基于 DFS 的算法: 按 v<sub>r</sub> 逆序.

## 拓扑排序

Graph

在 DAG(Directed Acyclic Graph) 中求一个排列 P, 使得对于每个点 v 而言, 若 (u, v) 存在, 则 u 在 P 中在 v 之前.

Kahn 算法: 不断寻找入度为 0 的点, 删掉这个点, 修改其他点的入度.

基于 DFS 的算法: 按 v, 逆序.

Q: 在有边权的 DAG 中求从 u 出发的最短/最长路径.

Q: 计算 DAG 中从每一点出发可以到达的点的数量/可以到达每一点的点的数量.

#### **NOIP2013**

Graph

图论一窥 图论缘起 基本概念 路径与环

拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路

连通分量 最小生成树 最近公共祖先 n 个火车站, 每个车站有一个等级. 现有 m 辆火车. 已知其停靠的车站信息, 若一辆火车停靠了等级为 x 的车站, 则在火车的始发站和终点站之间所有等级不小于 x 的车站都必须停靠. 请问火车站至少被分为了多少个等级? n, m < 1000

#### **NOIP2013**

Graph

图论一窥 图论缘起 基本概念 路径与环 基本概念

拓扑排序 欧拉路径 (环

<sup>取起路</sup> 连通分量 最小生成标

最近公共

n 个火车站, 每个车站有一个等级. 现有 m 辆火车. 已知其停靠的车站信息, 若一辆火车停靠了等级为 x 的车站, 则在火车的始发站和终点站之间所有等级不小于 x 的车站都必须停靠.请问火车站至少被分为了多少个等级?

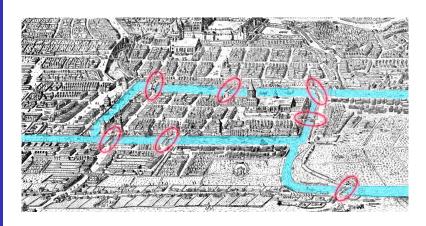
 $n, m \le 1000$ 

在火车站之间建边,答案是最长路.  $O(mn^2)$  为每辆车建两个虚点:表示其经过的车站和没经过的车站. O(mn)

火车站的等级不小于火车的等级,在火车之间建边。 $O(m^2)$ 

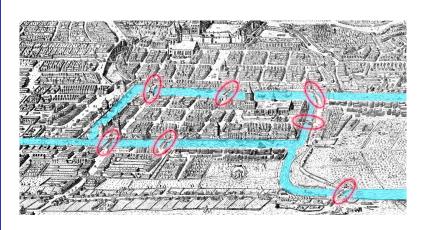
# 再谈七桥问题

Graph 欧拉路径 (环)



#### 再谈七桥问题

Graph 欧拉路径 (环)



欧拉路径: 经过所有边的初等路径. 欧拉回路: 经过所有边的初等环

# 欧拉路径(环)

Graph TA

**图论一系** 图论绿起 基本概念

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

<sup>取起岭</sup> 连通分

最小生成 最近公共

一一 后记

#### 连通无向图:

- 存在欧拉回路 等价于度为奇数的点有 0 个.
- 存在欧拉路径 等价于度为奇数的点有 0 或 2 个.

连通有向图 (边忽略方向后得到的无向图连通):

- 存在欧拉回路 等价于所有点出入度相等.
- 存在欧拉路径 等价于所有点出入度相等 或恰有一个点入度比出度多 1 和恰有 1 个点出度比入度多 1.

如何求出一条欧拉路径?

# 欧拉路径(环)

Graph TA

**图论 — 系** 图论缘起 基本概念

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

连通分

最小生成最近公共

后记

#### 连通无向图:

- 存在欧拉回路 等价于度为奇数的点有 0 个.
- 存在欧拉路径 等价于度为奇数的点有 0 或 2 个.

连通有向图 (边忽略方向后得到的无向图连通):

- 存在欧拉回路 等价于所有点出入度相等.
- 存在欧拉路径 等价于所有点出入度相等 或恰有一个点 入度比出度多 1 和恰有 1 个点出度比入度多 1.

如何求出一条欧拉路径?

Prop. 若 G 中有 k 个度为奇数的点, G 可以划分为  $\frac{k}{2}$  条初等道路.

#### Contents

Graph

TΑ

图论一覧 图论缘起 基本概念

路径与环 <sup>基本概念</sup> <sup>拓扑排序</sup>

欧拉路径(

最短路

見小生武村

最小生成树

后记

- 1 图论一窥
  - ■图论缘起
  - ■基本概念
- 2 路径与坏
  - ■基本概念
  - 拓扑排序
  - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

# 最短路

Graph

TA

最短路

最小生成树最近公共祖先

最短路: 有向边权图或无向非负权图中两点间的所有路径中

最短的一条. $(若不连通, 定义为 \infty)$ 

Review: 无边权? DAG?

变体

■ 单源 (目的地) 最短路径, 单节点对最短路径

■ 所有节点对最短路径

# 最短路

Graph

TA

图论一窥 图论缘起 基本概念 格径与环 基本概念 拓扑排序

**最短路** 连通分量

最小生成树最近公共祖先

后记

最短路: 有向边权图或无向非负权图中两点间的所有路径中

最短的一条 (若不连通, 定义为  $\infty$ )

Review: 无边权? DAG?

变体

■ 单源 (目的地) 最短路径, 单节点对最短路径

■ 所有节点对最短路径

负权边: 负权图的最短路径中可能有无穷多条边.

环路: 最短路径可能包含回路嘛?

松弛操作:  $d(x, v) = \min(d(x, v), d(x, u) + w(u, v))$ 

### 最短路的性质

Graph

TA

图论線起 基本概念 **路径与环** 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树最近公共祖外

三角不等式:  $d(x, v) \leq d(x, u) + w(u, v)$ 

最短路径图:  $\{(u,v) \in E | w(u,v) = d(v) - d(u) \}$ 

最短路径树: 存在性由最短路径图可知.

# Dijkstra

Graph

TA

图论绿起基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树最近公共祖先

算法流程: 维护已经找到最短路的点集 S, 不断地寻找距离 S 最近的点将其加入 S.

仅适用于边权非负的图.

时间复杂度:  $O((V+E)\log(V+E)) / O((V+E)\log V) /$ 

 $O(V \log V + E)$ 

#### Bellman-Ford

```
Graph
TA
```

劉化一规
图论線起
基本概念
格径与环
基本概念
基本概念
拓扑排序

**最短路** 连通分量 最小生成树

最小生成树 最近公共祖先 后记

内层第 i 次循环可以保证求得 BFS 最短路径树前 i 层的最短路径.

时间复杂度: O(VE)

#### Bellman-Ford

```
Graph
TA
论一窥
<sup>全線起</sup>
```

基本概念 **路径与环** 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

**最短路** 连通分量

最小生成树

后记

内层第:次循环可以保证求得 BFS 最短路径树前:层的最短

路径.

时间复杂度: O(VE)

SPFA: deprecated

Hack: 网格图, 次短路条数很多的图.

#### Bellman-Ford

```
Graph
最短路
```

内层第 i 次循环可以保证求得 BFS 最短路径树前 i 层的最短路径。

时间复杂度: O(VE)

SPFA: deprecated

Hack: 网格图, 次短路条数很多的图.

Q: 如何找到负权回路?(在 O(VE) 的时间内)

Q: 求出距离每个点最近的点的距离?(在 O(VE) 的时间内)

### Floyd

```
Graph
TA
```

```
图论線起
基本概念
路径与环
基本概念
拓扑排序
欧拉路径(环)
```

最短路 连通分量 最小生成树 最近公共祖先

可以看作 DP. 同时求出每对点间的最短路. 时间复杂度:  $O(V^3)$ 

# Floyd

```
Graph
TA
```

最短路

最小生成树

后记

可以看作 DP.

同时求出每对点间的最短路.

时间复杂度:  $O(V^3)$ 

Q: 求有向图的最小环? 求无向图的最小环?

#### **Johnson**

Graph

TA

图论線起基本概念
路径与环基本概念
拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树最近公共祖

后记

重新赋予权重:  $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + d(0, u) - d(0, v)$ 

一遍 Bellman-Ford+|V| 遍 Dijkstra.

时间复杂度:  $O(V^2 \log V + VE)$ 

#### 例题: Vijos1754

Graph TA

爾治線起 基本概念 路径与环 基本概念 括計場序 致拉路径 (环) 最短路 连通分量 最小生成树 最近公共祖先 n 个城市间以 m 条有向道路连接, 小 T 从 1 号城市出发, 将要去往 n 号城市.

小 T 观察到一款商品 Z 在不同的城市的价格可能不尽相同, 小 T 想要在旅行中的某一个城市购买一件商品 Z, 在另一个城市卖出. 因为旅途劳顿, 这种买卖小 T 只打算做一次. 请问小 T 能够获得的最大收益是多少?  $n, m < 10^5$ 

#### 例题: Vijos1754

Graph

最短路

n 个城市间以 m 条有向道路连接, 小 T 从 1 号城市出发, 将 要去往 n 号城市.

小 T 观察到一款商品 Z 在不同的城市的价格可能不尽相同, 小 T 想要在旅行中的某一个城市购买一件商品 Z, 在另一个 城市卖出. 因为旅途劳顿, 这种买卖小 T 只打算做一次. 请问小 T 能够获得的最大收益是多少?  $n, m < 10^5$ 

将求最短路改为求最小/最大值.

#### 例题: CodeVS1183

Graph

TA

图论缘起基本概念
路径与环基本概念
拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树

最近公共祖先 后记 一个无向图中, 对于每条道路 i 有长度  $l_i$  和时间  $t_i$ , 请问从 1 号点到 n 号点速度最大是多少?  $n, m < 10^3$ 

Graph

TΔ

图论一窥 图论缘起 基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序 经

最短路

连通分量

最小生成树

后记

一个无向图中, 对于每条道路 i 有长度  $l_i$  和时间  $t_i$ , 请问从 1 号点到 n 号点速度最大是多少?  $n, m < 10^3$ 

分数规划: 二分答案 v.

$$\exists \frac{\sum I_i}{\sum t_i} \ge v$$
  
$$\Leftrightarrow \exists \sum (I_i - t_i v) \ge 0$$

问题转化为求最长路.

时间复杂度:  $O(nm \log A)(A)$  为所需精度要求)

### 应用: 差分约束系统

Graph

TΑ

图论一第 图论缘起 基本概念

路径与环

拓扑排序 欧拉路径(3

最短路

取应陷

迁旭刀里

最小生成树

后沿

#### 求解简单线性不等式组:

$$\begin{cases} x_{i-1} - x_{j-1} \le k_1 \\ \cdots \\ x_{i_m} - x_{j_m} \le k_m \end{cases}$$

### 应用: 差分约束系统

Graph

TA

#### **劉论 ──** 图论線起 基本概念

路径与环 <sup>基本概念</sup> 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树

后记

#### 求解简单线性不等式组:

$$\begin{cases} x_{i-1} - x_{j-1} \le k_1 \\ \cdots \\ x_{i_m} - x_{j_m} \le k_m \end{cases}$$

若  $x = (x_1, \dots, x_n)$  是差分约束系统的一个解,则 x + d 也是 差分约束系统的一个解.

约束图: 新建 0 点,  $w(0,i)(1 \le i \le n)$  为 0;  $w(j_i,i_i)$  为  $k_i$ .

#### Contents

Graph

TΑ

图论一覧 图论缘起 基本概念

路径与环 基本概念 拓扑排序

是短数

连通分量

最小生成树

后记

- 1 图论一窥
  - ■图论缘起
  - ■基本概念
- 2 路径与址
  - ■基本概念
  - 拓扑排序
  - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

### 强连通分量

Graph

TΑ

图论一页 图论缘起 基本概念

路径与环 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树

后记

强连通分量 (SCC, Strongly Connected Component): 有向图的 极大点集  $C \subset V$ , C 中任意两点可达.

### 强连通分量

Graph

TA

图论一窥 <sup>图论缘起</sup> <sup>基本概念</sup>

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

连通分量

最小生成树最近公共祖先

强连通分量 (SCC, Strongly Connected Component): 有向图的 极大点集  $C \subset V$ , C 中任意两点可达.

Kosaraju 算法: 以  $v_r$  逆序对  $G^T = (V, E^T)$  作 DFS, 则每棵 DFS 树会是一个 SCC.

Tarjan 算法: 使用一个栈来维护尚未被分到 SCC 中的节点, 依据一个节点 u 是否能走到其 DFS 树中的祖先 (low(u)), 来取出栈中节点分配成一个新的 SCC.

Gabow 算法: 使用两个栈来取代 *low, S* 表示尚未被分配的节点, *P* 表示尚未被分配 SCC 的节点.

时间复杂度均为 O(V+E)

### 强连通分量

Graph

**图论一窥** <sub>图论缘起</sub>

路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

连通分量

最小生成树最近公共祖先

强连通分量 (SCC, Strongly Connected Component): 有向图的 极大点集  $C \subset V$ , C 中任意两点可达.

Kosaraju 算法: 以  $v_r$  逆序对  $G^T = (V, E^T)$  作 DFS, 则每棵 DFS 树会是一个 SCC.

Tarjan 算法: 使用一个栈来维护尚未被分到 SCC 中的节点, 依据一个节点 u 是否能走到其 DFS 树中的祖先 (low(u)), 来取出栈中节点分配成一个新的 SCC.

Gabow 算法: 使用两个栈来取代 *low*, *S* 表示尚未被分配的节点, *P* 表示尚未被分配 SCC 的节点.

时间复杂度均为 O(V+E)

将 SCC 缩点, 原图变为 DAG.

### 边双连通分量

Graph

**图论 ──窥** 图论缭起 基本概念

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

连通分量

最小生成树 最近公共祖先 桥 (割边): 删掉之后会导致图不连通的边. 边双连通分量 (BCC, biconnected component) 的等价定义

- 极大连通导出子图, 不含桥.
- 极大连通导出子图,使得任意两点间均有两条边不相交路径.
- 极大连通导出子图,使得任意两条边都存在于一个简单 回路中。
- 极大连通导出子图, 任意三点 *a*, *b*, *c*, 存在边不相交的路 径 *a* ↔ *b*, *b* ↔ *c*.
- 极大连通导出子图, 存在一种给边赋向的方案使得其为 SCC.

# 边双连通分量

Graph

图论一窥 图论绿起 基本概念

各径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

连通分量

最小生成树 最近公共祖先

后记

桥 (割边): 删掉之后会导致图不连通的边. 边双连通分量 (BCC, biconnected component) 的等价定义

- 极大连通导出子图, 不含桥.
- 极大连通导出子图,使得任意两点间均有两条边不相交路径。
- 极大连通导出子图,使得任意两条边都存在于一个简单 回路中。
- 极大连通导出子图, 任意三点 *a*, *b*, *c*, 存在边不相交的路 径 *a* ↔ *b*, *b* ↔ *c*.
- 极大连通导出子图, 存在一种给边赋向的方案使得其为 SCC.

判断割边:  $low(u) = u_l$ 

# 边双连通分量

Graph

**图论一窥** <sub>图论缭起</sub>

路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

连通分量

最小生成树 最近公共祖先 桥 (割边): 删掉之后会导致图不连通的边

边双连通分量 (BCC, biconnected component) 的等价定义

- 极大连通导出子图, 不含桥.
- 极大连通导出子图,使得任意两点间均有两条边不相交路径.
- 极大连通导出子图,使得任意两条边都存在于一个简单 回路中。
- 极大连通导出子图, 任意三点 *a*, *b*, *c*, 存在边不相交的路 径 *a* ↔ *b*, *b* ↔ *c*.
- 极大连通导出子图, 存在一种给边赋向的方案使得其为 SCC.

判断割边:  $low(u) = u_l$ 

将 BCC 缩点, 原图变为树.

### 点双连通分量

Graph

图论一覧 图论缘起 基本概念

始任 分析 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(和

最短路

连通分量 最小生成树 最近公共祖先 割点: 删掉之后会导致图不连通的点. 点双连通分量 (块, block) 的等价定义:

- 极大连通导出子图, 删除其中任意一个点不会使其不连通.
- 极大连通导出子图,任意两个点之间有两条点不相交路 径.
- 极大连通导出子图, 任意三点 a, b, c 之间, 两条点不相交路径.

注意到两个块可以有至多一个交点.

### 点双连通分量

Graph

TA

基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环

最短路

连通分量 最小生成树 最近公共祖先 割点: 删掉之后会导致图不连通的点. 点双连通分量 (块, block) 的等价定义:

- 极大连通导出子图,删除其中任意一个点不会使其不连通.
- 极大连通导出子图,任意两个点之间有两条点不相交路 径.
- 极大连通导出子图, 任意三点 a, b, c 之间, 两条点不相交路径.

注意到两个块可以有至多一个交点。

#### 割点的等价条件:

- 根节点是割点当且仅当其 DFS 树至少有两个子树.
- 非根节点是割点当且仅当 low(u) < u<sub>l</sub>.

### 点双连通分量

Graph

图论一窥

路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环

<sub>最短路</sub> 连通分量

量小生成树 最近公共祖先

最近么 后记 割点: 删掉之后会导致图不连通的点. 点双连通分量 (块, block) 的等价定义:

- 极大连通导出子图, 删除其中任意一个点不会使其不连通.
- 极大连通导出子图,任意两个点之间有两条点不相交路 径
- 极大连通导出子图, 任意三点 a, b, c 之间, 两条点不相交 路径.

注意到两个块可以有至多一个交点。

#### 割点的等价条件:

- 根节点是割点当且仅当其 DFS 树至少有两个子树.
- 非根节点是割点当且仅当 low(u) < u<sub>l</sub>.

将 Block 缩成环, 原图变为仙人掌.

#### BZOJ2959

Graph

TΑ

图论一系 图论缘起 基本概念

路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环

最短路

连通分量

最小生成树

后记

#### 维护一个带点权的树, 支持三种操作:

- 加边
- 改变点权
- 求从 u 到 v 经过的所有 BCC 的权值和

 $\textit{n},\textit{m} \leq 10^5$ 

维护一个带点权的树, 支持三种操作:

- 加边
- 改变点权
- 求从 u 到 v 经过的所有 BCC 的权值和

 $n, m \leq 10^5$ 

使用并查集维护每一个 BCC.

将一个 BCC 的权值集中在其 LCA 处,则一条链经过的 BCC 必满足以下两者之一:

- BCC 的 LCA 在链上
- 是 LCA(u,v) 所属的 BCC

使用树状数组维护权值和.

#### Contents

Graph

TΑ

图论一覧 图论缘起基本概念

路径与环基本概念

拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路

---

最小生成树

- 1 图论一窥
  - ■图论缘起
  - ■基本概念
- 2 路径与址
  - ■基本概念
  - 拓扑排序
  - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

# 基本概念: 环与割

Graph

最小生成树

切割: (S, V - S), 对 V 的一个划分.

横跨: (u, v) 一个端点在 S, 另一个端点在 V - S, 则称 (u, v)

横跨割 (S, V – S).

尊重: 边集 A 中不存在横跨割 (S, V - S) 的边, 则称

(S, V – S) 尊重 A.

轻量级边: (u, v) 是横跨 (S, V - S) 的所有边中权重最小的.

## MST 基本定理

Graph

图论一系

图论绿起 基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量 最小生成树

最近公共祖外

对于任意  $A \subset E$ , 存在 G 的最小生成树 T,  $A \subset T$ , 任意  $e = (u, v) \in A$ , 存在尊重 A 的切割 (S, V - S), (u, v) 是 (S, V - S) 的一条轻量级边, 令  $B = A \cup (u, v)$ , 则存在最小生成树 T',  $B \subset T'$ .(这条边被称作安全边)

Graph

TΑ

图论一覧 图论缘起 基本概念

**路位与场** 基本概念 拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树

取近公六位*)* 后记 Prim 算法: 类似于 BFS/Dijkstra, 维护一个连通的 A, 不断寻

找 (A, S - A) 中的轻量级边.

时间复杂度:  $O((V+E)\log V) / O(V\log V+E)$ 

Graph

**图论──窥** 图论绿起 基本概念

基本概念
拓扑排序

最短路

连通分量

最小生成树 最近公共祖先 Prim 算法: 类似于 BFS/Dijkstra, 维护一个连通的 A, 不断寻找 (A, S - A) 中的轻量级边.

时间复杂度:  $O((V+E)\log V) / O(V\log V+E)$ 

Kruskal 算法: 从小到大枚举每条边 (u,v), 若 u 和 v 在 A 中尚不连通, 就将 (u,v) 加入 A.

时间复杂度:  $O(V + E \log E)$ 

Graph

TA

图论一窥 图论缘起 基本概念 路径与环

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路

连通分量 最小生成树

最近公共祖纪

Prim 算法: 类似于 BFS/Dijkstra, 维护一个连通的 A, 不断寻找 (A, S - A) 中的轻量级边.

时间复杂度:  $O((V+E)\log V) / O(V\log V+E)$ 

Kruskal 算法: 从小到大枚举每条边 (u,v), 若 u 和 v 在 A 中尚不连通, 就将 (u,v) 加入 A.

时间复杂度:  $O(V + E \log E)$ 

Borůvka 算法: 找到每个点的最小邻边, 形成了环套树森林, 将每一个环套树缩点.

时间复杂度:  $O((V+E)\log V)$ 

Graph

TA

图论一窥 图论缘起 基本概念 路径与环

基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环

最短路

连通分量 最小生成树

最近公共祖纪

Prim 算法: 类似于 BFS/Dijkstra, 维护一个连通的 A, 不断寻找 (A, S - A) 中的轻量级边.

时间复杂度:  $O((V+E)\log V) / O(V\log V+E)$ 

Kruskal 算法: 从小到大枚举每条边 (u,v), 若 u 和 v 在 A 中尚不连通, 就将 (u,v) 加入 A.

时间复杂度:  $O(V + E \log E)$ 

Borůvka 算法: 找到每个点的最小邻边, 形成了环套树森林, 将每一个环套树缩点.

时间复杂度:  $O((V+E)\log V)$ 

#### MST 的性质

Graph

**图论──**奚 <sub>图论绿起</sub>

路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

最短路

连通分量 最小生成树 最近公共祖分

- 若图 G 的一条边 (u, v) 在某棵最小生成树 T 中,则该条 边是某个切割 (S, V S) 的轻量级边.
- 任意两棵最小生成树的有序边权序列相同.
- 对于非负边权图, MST 等价于权值和最小的边集, 使得 图连通.
- MST 是瓶颈生成树 (最大边权最小的生成树).

#### Contents

Graph

TΑ

图论一员图论绿起

路径与环

欧拉路径 (环

最短路

最近公共祖<u>先</u>

듣뀨

- 1 图论一窥
  - ■图论缘起
  - ■基本概念
- 2 路径与坏
  - ■基本概念
  - 拓扑排序
  - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

Graph

TA

图 化 一 利 图论缘起 基本概念

路径与环 <sup>基本概念</sup> <sup>拓扑排序</sup>

旦行牧

连通分量

最小生成树

最近公共祖先

LCA(Lowest Common Ancestor, 最近公共祖先): LCA(u,v) 定义为 u 和 v 的所有公共祖先中深度最大的那一个.

Graph

TA

**图论──窥** 图论缘起 基本概念

**路径与环** 基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

最短路

~~~~

最小生成网

最近公共祖先 后记 LCA(Lowest Common Ancestor, 最近公共祖先): LCA(u,v) 定义为 u 和 v 的所有公共祖先中深度最大的那一个.

倍增: fa[u][j] 表示从 u 向上跳 2^{j} 步可以到达的点.

时间复杂度: $O(n \log n) - O(\log n)$

Graph TA

最短路 连通公!

最小生成树

最近公共祖先 后记 LCA(Lowest Common Ancestor, 最近公共祖先): LCA(u,v) 定义为 u 和 v 的所有公共祖先中深度最大的那一个.

倍增: fa[u][j] 表示从 u 向上跳 2^{j} 步可以到达的点.

时间复杂度: $O(n \log n) - O(\log n)$

树链剖分: 重儿子是所有儿子中 size 最大的那个.

时间复杂度: $O(n) - O(\log n)$

Graph TA

图论绿起基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径(环)

连通分量

最小生成树 **最近公共祖先**

后记

LCA(Lowest Common Ancestor, 最近公共祖先): LCA(u,v) 定义为 u 和 v 的所有公共祖先中深度最大的那一个.

倍增: fa[u][j] 表示从 u 向上跳 2^{j} 步可以到达的点.

时间复杂度: $O(n \log n) - O(\log n)$

树链剖分: 重儿子是所有儿子中 size 最大的那个.

时间复杂度: $O(n) - O(\log n)$

DFS 序 +ST: 利用 DFS 序的性质将问题转化为求区间最小值, 再使用 Sparse Table 求解.

时间复杂度: $O(n \log n) - O(1)$

Graph

图论一窥 图论缘起 基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路径

最小生成树 **最近公共祖先**

后记

LCA(Lowest Common Ancestor, 最近公共祖先): LCA(u,v) 定义为 u 和 v 的所有公共祖先中深度最大的那一个.

倍增: fa[u][j] 表示从 u 向上跳 2^{j} 步可以到达的点.

时间复杂度: $O(n \log n) - O(\log n)$

树链剖分: 重儿子是所有儿子中 size 最大的那个.

时间复杂度: $O(n) - O(\log n)$

DFS 序 +ST: 利用 DFS 序的性质将问题转化为求区间最小值, 再使用 Sparse Table 求解.

时间复杂度: $O(n \log n) - O(1)$

Tarjan: 离线查询, 使用并查集维护当前栈中节点已经遍历过

的子树.

时间复杂度: O(n+m)

Graph

最近公共祖先

RMQ(Range Minimum/Maximum Query): 查询区间最值.

Graph

TA

劉 化 — 利 图论缘起 基本概念

本概念 基本概念 拓扑排序

欧拉路径 (环

取应呵

是小生成核

最近公共祖先

RMQ(Range Minimum/Maximum Query): 查询区间最值.

静态: $ST(Sparse Table)(O(n \log n) - O(1))$.

动态: 线段树 $(O(n) - O(\log n))$.

Graph

TΑ

图论一系图论缘起基本概念

知 1エーブ・ハ 基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

最短路

最小生成树

最近公共祖先 后记 RMQ(Range Minimum/Maximum Query): 查询区间最值.

静态: $ST(Sparse Table)(O(n \log n) - O(1))$.

动态: 线段树 $(O(n) - O(\log n))$.

从 LCA 到 RMQ: 利用 DFS 序.(特殊的 ±1 RMQ)

从 RMQ 到 LCA: 利用笛卡尔树.

Graph

ΤA

图论一覧 图论缘起 基本概念

哈 任 ラ ふ 基本概念 拓扑排序 欧拉路径 (环)

最短路

最小生成树

最近公共祖先 后记 RMQ(Range Minimum/Maximum Query): 查询区间最值.

静态: $ST(Sparse Table)(O(n \log n) - O(1))$.

动态: 线段树 $(O(n) - O(\log n))$.

从 LCA 到 RMQ: 利用 DFS 序.(特殊的 ± 1 RMQ)

从 RMQ 到 LCA: 利用笛卡尔树.

在线查询的线性做法: 以 $\frac{\log n}{2}$ 为大小分块, 再使用 Sparse Table.

时间复杂度: O(n) - O(1)

Contents

Graph

TΑ

图论一覧 图论缘起 基本概念

路径与环 ^{基本概念} ^{拓扑排序}

欧拉路径 (3

最短路

取小生风例

后记

- 1 图论一窥
 - ■图论缘起
 - ■基本概念
- 2 路径与坏
 - ■基本概念
 - 拓扑排序
 - 欧拉路径 (环)
- 3 最短路
- 4 连通分量
- 5 最小生成树
- 6 最近公共祖先
- 7 后记

参考资料

Graph

17

图论缘起基本概念 路径与环 基本概念 拓扑排序 欧拉路路

连通分量 最小生成棒

后记

- [1] 戴一奇, 胡冠章, 陈卫. 图论与代数结构. 清华大学出版社.
- [2] 刘汝佳. 算法竞赛入门经典. 清华大学出版社.
- [3] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. Introduction to Algorithms(Third Edition). MIT Press.
- [4] https://en.wikipedia.org/
- [5] Lloyd E., Wilson R. Graph Theory. Oxford University Press.
- [6] https://www.zhihu.com/question/292283275
- [7] https://oi-wiki.org/