拟阵选讲

董宏华

dhh1995@163.com

IIIS, Tsinghua University

时间安排

前两节课会讲基础一些的东西，第三节课后半节会略有提升。

- 预备知识、拟阵定义、拟阵类型
- 拟阵类型、基础操作、组合优化
- 部分例题、拟阵交与拟阵分割

希望大家积极回答问题，前几位发言的同学还能获得精美礼品！

向量空间 (vector space)

定义 $(F, V, +, \bullet)$ 为向量空间（也称线性空间），其中 F 为域，V 为集合，V 中元素称为向量，$+$ 为向量加法，$\bullet$ 为数乘运算，且运算满足 8 条公理。

线性无关 (linearly independent)

向量空间中，对于 V 上一组 n 个向量 x_i，若存在不全为 0 的数 $k_i \in F$，使得 $\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = 0$，则称这 n 个向量线性相关，否则称为线性无关。

线性表出 (linearly representative)

向量空间中，对于 V 上一组 n 个向量 x_i 及一个向量 y，若存在不全为 0 的数 $k_i \in F$，使得 $\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = y$，则称 y 可被 x_i 线性表出。

一组向量线性相关 $\iff$ 存在向量可被其他向量线性表出。

基 (basis)

在向量空间中，一个极大线性无关组称为一组基。基的大小就是向量空间的维数。

独立集 (independent set)

一个有限拟阵 (matroid) 是一个满足下列条件的二元组 $M = (E, \mathcal{I})$ ，其中 E 是有限集，称为基础集 (ground set)，$\mathcal{I}$ 是由 E 的一些子集（称为独立集 (independent sets) ）组成的有限非空集。

独立集

- $\emptyset \in \mathcal{I}$

独立集

- $\emptyset \in \mathcal{I}$
- 遗传性 (hereditary property)：$\forall A' \subset A \subset E$, if $A \in \mathcal{I}$ then $A' \in \mathcal{I}$

独立集

- $\emptyset \in \mathcal{I}$
- 遗传性 (hereditary property)： $\forall A' \subset A \subset E$, if $A \in \mathcal{I}$ then $A' \in \mathcal{I}$
- 增广性 (augmentation property) 或独立集交换性 (independent set exchange property)： $A, B \in \mathcal{I}, |A| > |B|$ then $\exists x \in A \setminus B$ s.t. $B \cup \{x\} \in \mathcal{I}$

拟阵举例

$E = \{1,2,3\}, \mathcal{I} = \{\mathit{size} \leq 2 \text{ 的子集}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

基与回路 (bases and circuits)

- 极大的独立集称为拟阵的基 (basis)。

基与回路 (bases and circuits)

- 极大的独立集称为拟阵的基 (basis)。
- 极小的不独立集称为拟阵中的回路 (circuit)。

基与回路 (bases and circuits)

- 极大的独立集称为拟阵的基 (basis)。
- 极小的不独立集称为拟阵中的回路 (circuit)。
- 用 $\mathcal{B}$ 表示基的集合，则 $\mathcal{B}$ 非空，且满足基交换性 (basis exchange property)，即如果 $A, B \in \mathcal{B}, A \neq B, a \in A \setminus B$，则 $\exists b \in B \setminus A \ s.t. \ A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}$。

秩函数 (rank functions)

- 由交换性可证明所有基的大小相同。

秩函数 (rank functions)

- 由交换性可证明所有基的大小相同。
- 就像矩阵的秩，拟阵的秩就是基的大小。

组合拟阵 (uniform matroids)

如上一节的例子

$E = \{1,2,3\}, \mathcal{I} = \{\mathit{size} \leq 2 \text{ 的子集}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

像这样集合 E 中有 n 个元素，

$\mathcal{I} = \{\mathit{size} \leq r \text{ 的子集}\}$ 的拟阵，称为组合拟阵 (uniform matroids)，记为 $U_{r,n}$。

上例即是 $U_{2,3}$。

分割拟阵 (partition matroids)

如果把若干个组合拟阵拼在一起，就得到了分割拟阵 (partition matroids)。

向量拟阵 (vector matroids)

- 设 E 为一个向量空间中的有限子集，$\mathcal{I} = \{E$ 中线性无关集$\}$。那么称 $M = (E, \mathcal{I})$ 为向量拟阵。

向量拟阵 (vector matroids)

- 设 E 为一个向量空间中的有限子集，$\mathcal{I} = \{E$ 中线性无关集$\}$。那么称 $M = (E, \mathcal{I})$ 为向量拟阵。
- $|A| > |B| \Rightarrow dim\ A > dim\ B$，则 A 中必有 B 中向量组无法线性表出的向量 $x \in A \setminus B$，将其加入 B 中，$B \cup \{x\}$ 仍线性无关。

向量拟阵 (vector matroids)

- 设 E 为一个向量空间中的有限子集，$\mathcal{I} = \{E$ 中线性无关集$\}$。那么称 $M = (E, \mathcal{I})$ 为向量拟阵。
- $|A| > |B| \Rightarrow dim\ A > dim\ B$，则 A 中必有 B 中向量组无法线性表出的向量 $x \in A \setminus B$，将其加入 B 中，$B \cup \{x\}$ 仍线性无关。
- 如果拟阵可以用这种方式定义，那我们说 E 代表了拟阵 M。

列拟阵 (column matroids)

用矩阵 A 的列来表示上述向量空间 E 中的向量，那么 A 称为列拟阵，我们可以说 A 代表了拟阵 M 。

环拟阵 (cycle matroids)

有限图 $G(V,E)$ 中，将 E 边集作为基础集，所有森林为独立集，则 $M(G)$ 为拟阵，称为环拟阵。

环拟阵的基为树，回路为环，这也是回路 (circuit) 的称呼来源。

Q：为何是拟阵？

图拟阵 (graphic matroids)

像环拟阵那样从图中获得的拟阵称为图拟阵。
将每条边视为一个向量，只有边两端的点对应的值是 1，其余为 0（自环均视为 0 向量）。
则图拟阵可视为一种特殊的向量拟阵。

匹配拟阵 (transversal matroids)

二分图 $G = (U, V, E)$ 中，定义 U 的子集 I 是独立集当且仅当 I 能与 V 完美匹配，则 $M = (U, \mathcal{I})$ 称为匹配拟阵。

Q: 如何证明？

考虑交错

对偶 (Duality)

$M=(E,\mathcal{I})$，$\mathcal{B}$ 为基的集合，定义 $\mathcal{B}^*=\{E-B|B\in\mathcal{B}\}$ 为 M 的对偶拟阵 M^* 的基的集合。

即 $M^*=(E,\mathcal{I}^*)=\{E-I \mid r_M(I)=r_M(E)\}$

秩函数为 $r^*(S)=|S|-r(M)+r(E\setminus S)$.

$(M^*)^*=M$，$(U_{r,n})^*$ 同构于 $U_{n-r,n}$

其他操作

除了对偶之外，还有两个拟阵操作，deletion 和 contraction，反映在图拟阵上，deletion 是删边，而 contraction 是缩边。

有兴趣的可以参阅参考文献 [2]。

并 (Unions)

求若干个拟阵的并可以得到更大的拟阵。

$M_i = (S_i, \mathcal{I}_i)$ 为拟阵，拟阵并为

$$M = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_k = (\cup_{i=1}^k S_i, \mathcal{I} = \{\cup_{i=1}^k I_i | I_i \in \mathcal{I}\})$$

M 仍为拟阵，且 M 的秩函数为

$$r_M(U) = \min_{T \subseteq U} \left[|U \setminus T| + \sum_{i=1}^{k} r_{M_i}(T \cap S_i) \right]$$

证明详见 [6]

带权拟阵 (weighted matroid)

带权拟阵 (weighted matroid) 是给拟阵中的元素赋予一个非负实数作为权值。子集的权值定义为集合内元素权值之和。

贪心算法

运用贪心算法，可以在带权拟阵中找出权值最大的基。

贪心算法就是先对元素按权值从大到小排序然后依次考虑每个元素，若加入当前集合后仍线性无关，则加入，否则不加入。最后得到的就是权值最大的基。

贪心算法证明

证明每一步得到的都是某个最优解的子集。初始为空集，满足条件。

设 A 为当前得到的最优解的子集，若 A 无法扩展，则 A 为最优解。

否则由贪心算法， x 为能使 A 扩展权值最大的元素，则 $A \cup \{x\}$ 仍为最优解的子集。

贪心算法证明

反证，设 T 为包含 A 的最优解，构造 $T' = A'$，不断利用交换性以及 $|T| > |T'|$ 增广 T'，直到 $|T| = |T'|$，此时 $T' = T - \{y\} + [\{x\}$，y 在 T 时并没有被加入 T' 中，故 $w(y) \leq w(x)$，从而 $w(T') = w(T) - w(y) + w(x) \geq w(T)$。

【例 1】最小生成树

- 最小生成树就是在带权的环拟阵上找权值最小的基。

【例 1】最小生成树

- 最小生成树就是在带权的环拟阵上找权值最小的基。
- 取负，加常数！

【例 1】最小生成树

- 最小生成树就是在带权的环拟阵上找权值最小的基。
- 取负，加常数！
- 如何判断仍为独立集？是否成环，并查集维护。

【例 1】最小生成树

- 最小生成树就是在带权的环拟阵上找权值最小的基。
- 取负，加常数！
- 如何判断仍为独立集？是否成环，并查集维护。
- 这就是著名的 Kruskal 算法。

【例 1】最小生成树

- 最小生成树就是在带权的环拟阵上找权值最小的基。
- 取负，加常数！
- 如何判断仍为独立集？是否成环，并查集维护。
- 这就是著名的 Kruskal 算法。
- Minimum Spanning Trees?

【例 1】最小生成树

- 最小生成树就是在带权的环拟阵上找权值最小的基。
- 取负，加常数！
- 如何判断仍为独立集？是否成环，并查集维护。
- 这就是著名的 Kruskal 算法。
- Minimum Spanning Trees?
- 判是否为独立集方法见参考资料 [5]。

【例 2】任务调度问题

那些 miss deadline 的任务最后做也无所谓，关键是其他的能否都在 deadline 前完成。

可以发现拟阵结构 $M = (E, \mathcal{I})$，其中 I 是独立集当且仅当存在一种时间分配使 I 中任务都能在 deadline 前完成。

Q: 如何证明？

【例 3】Nikifor (ural 1041)

- 带权向量拟阵中的权值最小的基。

【例 3】Nikifor (ural 1041)

- 带权向量拟阵中的权值最小的基。
- 如何判断向量组线性无关？

【例 3】Nikifor (ural 1041)

- 带权向量拟阵中的权值最小的基。
- 如何判断向量组线性无关？
- 列奇次线性方程组，高斯消元求矩阵的秩。

【例 4】新 Nim 游戏 (cqoi2013)

首先利用 Nim 游戏结论，不能留下异或和为 0 的组合。

一位的异或操作可以看作是 $GF(2)$ 下的加法操作，一般异或可以看作在 $GF(2^k)$ 下的加法，其中 k 为位数。异或的线性无关就等同于在那个有限域中加法的线性无关。

因此就是在带权向量拟阵中求一组权值最大的基。

拟阵交 (Matroid intersection)

$M_1 = (S, \mathcal{I}_1), M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ 是两个在基础集 S 上的拟阵。那么 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ 中的元素在两个拟阵内均为独立集。如何在 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ 内找出最大的独立集？如何找出权值最大的独立集？

【例 5】二分图匹配 (Bipartite Matching)

$$\mathcal{I}_1 = \{E' \subseteq E \mid |\delta(v) \cap E'| \leq 1, v \in A\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{E' \subseteq E \mid |\delta(v) \cap E'| \leq 1, v \in B\}$$

其中 $\delta(v)$ 表示一端为 v 的边的集合，这两个拟阵都是分割拟阵。

这两个拟阵条件分别保证了二分图两侧每个点都最多只在一条边上，其交集保证了选出的是匹配。

拟阵交算法描述

二分图匹配？匈牙利算法，增广路。

就像匈牙利算法，我们需要一个过程，输入 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$，输出 $J \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ 使得 $|J| = |I| + 1$。或找到一个 U 说明 $|I| = r_1(U) + r_2(S \setminus U)$， I 已经是最大的了。

拟阵交算法描述

Algorithm 1 Algorithm for Maximum Cardinality Independent Set in Intersection of Two Matroids

procedure MAXINDEPSET($M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$)
  $I \leftarrow \emptyset$
  repeat
    Construct $D_{M_1,M_2}(I)$
    $X_1 \leftarrow \{z \in S \backslash I \mid I + z \in \mathcal{I}_1\}$
    $X_2 \leftarrow \{z \in S \backslash I \mid I + z \in \mathcal{I}_2\}$
    Let P be a shortest $X_1 - X_2$ path in $D_{M_1,M_2}(I)$
    if P is not empty **then**
      $I \leftarrow I \Delta V(P)$ ▷ $I' = (I \backslash \{y_1, \ldots, y_t\}) \cup \{z_0, z_1, \ldots, z_t\}$
    end if ▷ Else P is empty and I is maximal
  until I is maximal
end procedure

【例 6】Coin Collecting(SWERC 11B)

【题目大意】from [4]

你是一个硬币收藏家，你收集了很多国家的硬币。你的朋友也是一个硬币收藏家，然后她看上了你的收藏，打算和你玩一个游戏。

赢家可以拿走输家的全部或部分收藏。虽然你有多年辛苦毁于一旦的风险，但是你也看上了她的收藏，所以打算玩一玩。

【例 6】Coin Collecting(SWERC 11B)

【题目大意】from [4]

她准备了 $r(r \leq 300)$ 对信封，每个信封里面有两个不同国家的硬币。你可以在每对信封中选择一个或者不选。

当你选择结束后，如果她可以选出你选的信封的一个非空子集，使得所有国家的硬币都出现偶数次，那么她赢得游戏，拿走你的全部收藏。否则你获胜，拿走你选的所有信封中的硬币。

请问你最多可以拿走多少枚硬币。

【例 6】Coin Collecting(SWERC 11B)

- 将每个信封 (a, b) 表为无向边 (a, b)。一个非空信封集合，使得所有国家的硬币出现偶数次，即为一个环。

【例 6】Coin Collecting(SWERC 11B)

- 将每个信封 (a, b) 表为无向边 (a, b)。一个非空信封集合，使得所有国家的硬币出现偶数次，即为一个环。
- 转化：给定 r 对无向边，每对中最多选出一条，使得构成的图中没有环。你需要使边集大小最大。

【例 6】Coin Collecting(SWERC 11B)

- 将每个信封 (a, b) 表为无向边 (a, b)。一个非空信封集合，使得所有国家的硬币出现偶数次，即为一个环。
- 转化：给定 r 对无向边，每对中最多选出一条，使得构成的图中没有环。你需要使边集大小最大。
- 两个拟阵：边集的分割拟阵以及图上的环拟阵

【例 6】Coin Collecting(SWERC 11B)

- 将每个信封 (a, b) 表为无向边 (a, b)。一个非空信封集合，使得所有国家的硬币出现偶数次，即为一个环。
- 转化：给定 r 对无向边，每对中最多选出一条，使得构成的图中没有环。你需要使边集大小最大。
- 两个拟阵：边集的分割拟阵以及图上的环拟阵
- 具体实现上参考 [4]

Shannon Switching Game

【题目大意】from [5]

无向图，两个特定点 A 和 B，每条边可被染色或者删除。两个玩家，代号分别为 Short Player 和 Cut Player，轮流操作。Short 每次可以选择一条边染色，Cut 每次可以删除一条尚未染色的边。如果最终 A 和 B 不再连通，Cut 获胜；如果最终从 A 到 B 有一条已经被染色的路径，Short 获胜。

Shannon Switching Game

结论为 Short Player 有必胜策略，当且仅当图中存在一个连接 A 和 B 的子图，子图中存在两棵边不相交的生成树。

如何求 k 棵边不相交的生成树详见 [5]。

这也是拟阵分割 (Matroid partitioning) 的一个特殊情况，拟阵分割的一般情况为在拟阵并中找独立集。

Shannon Switching Game

下面先说明存在两棵边不相交的生成树（即两个不相交的基）时 Short Player 的必胜策略，设两个基为 B_1, B_2 。

不妨让 Cut Player 先手，若他删了不是 B_1 也不是 B_2 的边，对结果无影响。不妨设 Cut Player 删了 B_1 上的边 x ，由基交换性，$\exists y \in B_2\ s.t.\ B_1 - \{x\} + \{y\} \in \mathcal{B}$ ，Short Player 选 y 。随后缩边（因为 y 被强制连通了），$B_1 - \{x\}, B_2 - \{y\}$ 在缩边后的拟阵中仍为不相交的基。

Shannon Switching Game

记 M^k 为 k 个拟阵 M 的并，由拟阵并的秩函数推出 M 中存在 k 个不相交的基

$\iff \forall T \subseteq E, |E \setminus T| \geq k(r(E) - r(T))$。

不存在两个不相交的基时，Cut Player 先手可胜。由上可得 $\exists T \subseteq E, |E \setminus T| < 2(r(E) - r(T))$，在 $S \setminus T$ 中 Short Player 最多只能选中少于 $r(E) - r(T)$ 的边，从而所有 Short Player 选中的边的秩少于

$r_M(T) + (r(E) - r(T)) = r(E)$，即无法选出一个基。

参考文献

- Matroid wikipedia
- Oxley J. What is a matroid[J]. Cubo Matemática Educacional, 2003, 5(3): 179-218.
- 《对拟阵的初步研究》，刘雨辰，07 年集训队论文
- 《NEERC 11-13 题目选讲》，杜宇飞，WC2014
- 《图连通性若干拓展问题探讨》，李煜东，WC2014

参考文献

- Advanced Combinatorial Optimization Lecture 12, Michel X. Goemans, 2009
- Advanced Combinatorial Optimization Lecture 13, Michel X. Goemans, 2009
- Advanced Combinatorial Optimization Lecture 14, Michel X. Goemans, 2009
- Combinatorial Optimization Lecture 17, Chandra Chekuri, 2010

祝大家冬令营顺利！