博弈论与SG函数

上海交通大学 方泓杰

Weird Game

两个长度为$2n$的01串，两个人轮流开始取数字。

每次只能取两个人之前都没取过的位置的数字。

n次后两个人就得到了两个长度为n的数字，谁的数字大谁赢。

两个人足够机智，问是先手必胜还是后手必胜还是平局。

$1 \le n \le 10^6$

CodeForces 299C Weird Game

贪心。显然先用自己的1来使得对方拿不到1最优。

时间复杂度$O(n)$。

必胜点和必败点

必胜点和必败点的概念：

- P点：必败点，换而言之，就是谁处于此位置，则在双方操作正确的情况下必败。
- N点：必胜点，处于此情况下，双方操作均正确的情况下必胜。

必胜点和必败点的性质：

- 所有终结点是必败点P。
- 从任何必胜点N操作，至少有一种方式可以进入必败点 P。
- 无论如何操作，必败点P都只能进入必胜点N。

Good Luck in CET-4 Everybody!

Kiki和Cici打牌的规则是这样的：

- 总共n张牌；
- 双方轮流抓牌；
- 每人每次抓牌的个数只能是2的非负整数幂次；
- 抓完牌，胜负结果也出来了：最后抓完牌的人为胜者；

假设Kiki和Cici都是足够聪明，并且每次都是Kiki先抓牌，请问谁能赢呢？

$1 \le n \le 1000$

HDU 1847 Good Luck in CET-4 Everybody!

冷静分析一波：

n	0	1	2	3	4	5	6
P/N	P	N	N	P	N	N	P

n	7	8	9	10	11	12	13
P/N	N	N	P	N	N	P	N

举个例子：$n = 5$，可以先拿2张牌变为$n = 3$必败点，则$n = 5$必胜点。

规律很明显了。实际上，我们可以归纳证明所有3的倍数的点都是P点，其余为N点。

Kiki’s game

有一个$n \times m$的棋盘，一开始有一个硬币在$(1, m)$。

每轮每个人可以向左、向下、向左下移动硬币。

不能移动硬币的人就输了。

Kiki要和zz玩这个游戏，kiki先手，判断在双方操作最优的情况下谁赢。

$0 < n, m \leq 2000$

HDU 2147 Kiki’s game

n/m	1	2	3	4	5	6
1	P	N	P	N	P	N
2	N	N	N	N	N	N
3	P	N	P	N	P	N
4	N	N	N	N	N	N
5	P	N	P	N	P	N
6	N	N	N	N	N	N

在填写表格的时候，我们也可以发现一定规律：

比如$(x, y) = P$当且仅当$(x-1, y) = (x, y-1) = (x-1, y-1) = N$。

归纳易得规律。

A simple stone game

一堆石子有n个，首先第一个人开始可以去1~$(n-1)$个，接下来两人轮流取石子。

每个人可取的石子数必须是一个不超过上一次被取的石子的k倍的整数。

$2 \le n \le 10^8, 1 \le k \le 10^5$

HDU 2486 A simple stone game

“k倍动态减法游戏”

考虑$k = 1$，分析：

n	2	3	4	5	6	7	8
P/N	P	N	P	N	N	N	P

观察后归纳推理容易得到，所有必败状态为2^i。

我们可以把n分解为二进制，例如$n = 13$，二进制表示为1101，考虑为何必胜。

我们可以先手去掉最后一个1，即变为$n = 12(1100)$那么后手不能一次去掉更高位的1。

如果$n = 2^i$，那么先手无法一次取完，后手则一定可以按照之前策略取而必胜。

HDU 2486 A simple stone game

考虑$k=2$：利用和1中相同的策略，我们可以发现必败态是Fibonacci数列。

将一个数利用fibonacci分解有这样一个特殊的性质：一定不存在相邻的1。

那么就利用$k=1$完全相同的策略即可解决$k=2$的问题。

那么接下来我们就得想办法构造数列，将n写成数列中一些项的和。

使这些被取到的项的相邻两个倍数差$>k$，那么仍然利用$k=1$方法即可解决。

设这个数列已经构造了i项，$a_1,a_2,\dots,a_i$，前i项可以完美对$1\dots b_i$编码：

完美编码意为：存在一个$a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_s}$的组合使得$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_s}=n$且$\frac{a_{i_{j+1}}}{a_{i_j}}>k.$

那么$a_{i+1}=b_i+1,b_{i+1}=b_t+a_{i+1}$，其中t为满足$\frac{a_{i+1}}{a_t}>k$的t。

HDU 2486 A simple stone game

设这个数列已经构造了i项，$a_1, a_2, \dots, a_i$，前i项可以完美对$1 \dots b_i$编码：

完美编码意为：存在一个$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$的组合使得$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_s} = n$且$\frac{a_{i_{j+1}}}{a_{i_j}} > k.$

那么$a_{i+1} = b_i + 1, b_{i+1} = b_t + a_{i+1}$，其中t为满足$\frac{a_{i+1}}{a_t} > k$的t。

我们只需要判断n是否在这个数列中即可。

时间复杂度和这个数列有关系，~~仔细分析~~（试验）可以发现足够通过所有数据。

NIM游戏

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿）”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

Bouton’s Theorem

对于一个nim游戏的局面$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，它是P点当且仅当：

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$$

【证明】

1. 终结点只有一种，就是$(0,0, \ldots, 0)$，显然符合异或后为0，为P点。

2. 对于$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$且$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$，经一次移动后必然到达$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$，其中

$$b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n \neq 0$$

从而到达N点。

3. 对于$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$且$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$，必存在移动方法可以到达P点。

Bouton’s Theorem

我们设$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = k$，那么设$k$二进制表示下最高位的1为第$p$位。

那么，$a_1, a_2, \dots, a_n$中必定存在至少一个a_i使得a_i二进制表示下第p位为1。

从而，将第i堆石头取$a_i - a_i \oplus k$个石头即可保证一定到达P点。

首先，由于$a_i \oplus k$第p位为0，所以$a_i \oplus k < a_i$，从而$a_i - a_i \oplus k > 0$，符合游戏规则。

并且，取$a_i - a_i \oplus k$个石头后，第i堆石头变为$a_i \oplus k$，对于新局面$(a_1, a_2, \dots, a_i \oplus k, \dots a_n)$：

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus (a_i \oplus k) \oplus \dots \oplus a_n = k \oplus k = 0$$

从而一定为P点。

有向图移动游戏

有向图移动游戏可以看作所有*Impartial Combinatorial Games*的抽象模型。

NIM游戏就是*Impartial Combinatorial Games*其中的一种。

也就是说，所有ICG游戏都可以看成：

给定一个*DAG*及一个点上的一个棋子，两名选手交替将棋子沿边移动，无法移动判负。

我们把NIM游戏的每一个状态看成一个点，把这个状态和其可以转移到的下一个状态连边。

那么NIM游戏也被抽象成了一个有向图移动游戏！

SG函数

定义$\operatorname{mex}(S)=k$：k为最小的不属于集合S的非负整数。

SG函数的定义：对于任意一个状态x，都定义一个SG函数。

我们先给出定义式，再具体说明意义。

对于任意状态x，设x的后继状态集合为S，则：

$$sg(x)=\operatorname{mex}(S)$$

如果一个状态为终结点，则$S=\emptyset$，从而$sg(x)=0$。

有向图移动游戏

事实上，如果把所有ICG游戏抽象成有向图移动游戏，那么sg函数就是：

$$sg(x) = \mathrm{mex}\{sg(y) \mid (x \rightarrow y)\}$$

我们有这样的结论：

$$\begin{cases} sg(x) = 0 \Leftrightarrow x\text{为必败点}(P\text{点}) \\ sg(x) \neq 0 \Leftrightarrow x\text{为必胜点}(N\text{点}) \end{cases}$$

这个结论的正确性显然：

对于$sg(x) = 0$的节点，显然根据定义，x的后继中一定不存在$sg(y) = 0$的节点y！

同时，对于$sg(x) \neq 0$的节点，根据定义，一定存在一个x的后继y使$sg(y) = 0$！

取石子问题

两个人取石子，每个人可以取1,3,4个石子。

共有n个石子，求是先手必胜还是后手必胜。

$$sg(0) = 0, sg(i) = \text{mex}\{sg(i-1), sg(i-3), sg(i-4)\}$$

加上SG定理的版本：**BZOJ 1874 BeiJing2009 WinterCamp 取石子游戏**

SG定理

假设一个游戏可以分成若干个子游戏，这些子游戏的sg函数值为$s_1, s_2, \ldots, s_k$，则：

整个游戏的sg函数为：

$$sg(All) = s_1 \text{ xor } s_2 \text{ xor } \ldots \text{ xor } s_k$$

证明？

SG定理

我们设$sg(x) = a$，那么也就是说x的后继节点y能取遍$1,2,\ldots,a-1$。

那么我们选取后继，事实上可以看成“取石子”的过程。

这样想的话，就可以利用**Bouton’s Theorem**的证明来理解SG定理了。

这只是一个简单的感性推导，用于加深理解，严谨的证明可以参考这里。

Fibonacci again and again

今天，又一个关于Fibonacci的题目出现了，它是一个小游戏，定义如下：

- 这是一个二人游戏，两人轮流走；
- 一共有3堆石子，数量分别是m, n, p个；
- 每走一步可以选择任意一堆石子，然后取走f个；
- f只能是菲波那契数列中的元素；
- 最先取光所有石子的人为胜者。

假设双方都使用最优策略，请判断先手的人会赢还是后手的人会赢。

$0 \le n, m, p \le 1000$

HDU 1848 Fibonacci again and again

分成三个子游戏，分别求出每个子游戏的sg函数，异或得总游戏sg函数即可。

是一个sg函数和sg定理的简单应用。

Bob and Ben

给出一片森林。

每棵树有两个参数，节点数n和特殊参数k，其中k意义为：

第i个节点的父亲为第$\max\left(1,\left\lfloor\frac{i}{k}\right\rfloor\right)$个节点。

两人进行游戏，每次可以删除一棵树（该数必须存在非叶子）或树中一个叶子。

其中，叶子定义为度数为1的点。

无法操作的人输。询问先手是否必胜。

Hackerrank Bob and Ben

考虑一棵大小为n的树。

当$n = 1$时，$sg(1) = 1$。

当$n = 2$时，$sg(2) = 0$。

当$n \ge 3$时，一定存在非叶子节点，$sg(n) = \text{mex}\{sg(n-1), 0\}$

归纳知$n \ge 3$时，$sg(2k) = 2, sg(2k+1) = 1$。

利用SG定理合并即可。

（事实上，我们发现此题中k并没有作用）

分裂游戏

聪聪和睿睿最近迷上了一款叫做分裂的游戏。该游戏的规则是：

- 共有n个瓶子，标号为$0,1,2 \ldots \ldots n-1$,第i个瓶子中装有p_i颗巧克力豆，两个人轮流取豆子；
- 每一轮每人选择3个瓶子。标号为i,j,k,并要保证$i<j,j \le k$且第i个瓶子中至少要有1颗巧克力豆；
- 随后这个人从第i个瓶子中拿走一颗豆子并在j,k中各放入一粒豆子（j可能等于k）。
- 如果轮到某人而他无法按规则取豆子，那么他将输掉比赛。

两人最后决定由聪聪先取豆子，

聪聪希望你帮他判断是否能赢得比赛。

如果能赢得比赛，输出第一步要怎么取（字典序最小），并输出第一步的取法数量。

$1<n \le 21, 0 \le p_i \le 10000$

BZOJ 1188 HNOI 2007 分裂游戏

终结状态一定是所有豆子在n号瓶子中。

这样的话，我们可以把每一个豆子看成一个子游戏。

目标是把这个豆子移动到n号瓶子中。

那么，如果两个豆子在同一个瓶子中，胜负关系不改变（模仿移动即可）。

所以，可以把所有瓶子内豆子对2取模得到一个等价的游戏。

下面就要求sg函数啦！一个状态i会延伸出2个游戏（j, k两个瓶子），所以根据SG定理：

$$sg(i) = \mathrm{mex}\{sg(j) \text{ xor } sg(k)\}$$

后面两问，因为n不大，直接暴力模拟第一步所有走法判断sg值即可。

移动了一次的sg值不需要重新算，把原sg值异或$sg(i), sg(j), sg(k)$即可。思考含义。

棋盘游戏

有一个$100\times\ 100$的棋盘，其中左下角的编号为$(0,0)$，右上角编号为$(99,99)$。

棋盘上有n个Queen，最开始第i个Queen的位置为(x_i,y_i)。

两个玩家依次操作，每次一个玩家可选一个Queen，将它跳到(x_i-k,y_i)或(x_i,y_i-k)或(x_i-k,y_i-k)，其中$k>0$。

注意在游戏的过程中，一个格子里面可能出现多个Queen。

如果谁先将任意一个Queen移动到$(0,0)$，谁就获胜。问先手必胜还是后手必胜？

多组数据。

$1\le T\le 10,1\le n\le 1000$

BZOJ 1457 棋盘游戏

首先显然Queen之间互不影响，利用SG定理，看成n个子游戏。

原来的题目都是全部移完/取完胜利，本题是有一个移动到(1,1)即胜利。

如何转化？

首先，我们定义集合N为能一步走到(1,1)的点，M为一步只能走到N集合的点。

如果有Queen在集合N中的点上，先手必胜显然；

那么我们把所有的M集合中的点的sg值设为0，意为先手必败。

如果Queen在此处，那么先手无论怎么移动，后手都可以一步移动到(1,1)。

然后我们求出每个点的sg函数值，就得到每个子游戏的sg值，异或即得总sg值。

江南乐

给定一个数F，有n堆石子每堆初始a_i个，小A和对手轮流操作，其中小A为后手。

操作者先选定一个正整数$M(M \geq 2)$，然后将任意一堆数量不少于F的石子分为M堆。

并满足：这M堆石子中石子数最多的一堆比最少的一堆至多多1。

（这样相当于尽量平均，容易证明给定F, M后分法唯一）

当一个玩家不能操作时，即每堆石子数量都严格小于F时，输掉该游戏。

求在双方操作都正确的情况下，谁会取胜。一共有T组数据。

$1 \leq T \leq 100, 1 \leq n \leq 100, 1 \leq F, a_i \leq 10^5$

BZOJ 3576 HNOI 2014 江南乐

首先，如果给定了m，那么根据SG定理：

$$sg(a)=\left(\oplus_{i=1}^{a-\left[\frac{a}{m}\right]} sg\left(\left[\frac{a}{m}\right]\right)\right)\oplus\left(\oplus_{i=1}^{a \bmod m} sg\left(\left[\frac{a}{m}\right]+1\right)\right)$$

如果这样的话，由于只要考虑奇偶性，那么复杂度是$O(F^2)$级别的。

利用分块枚举除法来优化：

设当前数字x，块数m，令$u=\left[\frac{x}{m}\right], r=x \bmod m$，那么随着$m$每次+1，余数变化为减少$u$。

那么对于u相同的，m变化偶数次，余数奇偶性不发生改变。

于是就可以进行分块枚举除法，u的值最多$\sqrt{F}$个，每次只需计算$sg\left(\left[\frac{x}{u}\right]\right)$和$sg\left(\left[\frac{x}{u}\right]+1\right)$即可。

用记忆化搜索进行实现。

Game on Tree

以1为根的树，两人轮流操作，每次切掉一个子树。

切掉的子树不能包含节点1。

不能操作者输。

$2 \le n \le 10^5$

AGC017d Game on Tree

问题变成求树上的sg值。

如果根有$k(k>1)$个儿子，那么可以拆成k个游戏，然后用sg定理合并即可。

如果根只有一个儿子，那么我们给出这样一个定理。

【定理】$sg(T)=sg(T')+1$，其中T'为树T去掉根节点后的树。

这个定理可以通过归纳假设证明。

那么有了这个定理，我们通过一遍dfs即可求出整棵树的sg值，从而知道答案。

时间复杂度$O(n)$

Anti-NIM

除了规则改为谁先取完谁失败，其他规则不变。即：

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿）”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判胜。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

结论

必胜条件：

1. 所有堆的石子数均等于1，且有偶数堆石子；

2. 至少有一个堆的石子数大于1，且石子堆的异或和不为0。

证明

设石子数异或和为p，那么：

1. 当所有堆石子数均为1时：
   - A) $p = 0$即偶数堆，先手必胜；
   - B) $p = 1$即奇数堆，后手必胜。
2. 当有一堆石子数大于1时：那么显然$p \neq 0$。
   - A) 总共有奇数堆石子，那么把大于1的那堆取到1个石子，转化为1B，从而先手必胜；
   - B) 总共有偶数堆石子，那么把大于1的那堆取完，转化为1B，从而先手必胜。

证明

3. 当有两堆及以上石子数大于1时：
   - A) $p = 0$，那么先手可以转化为以下两个子状态：
     - ① 至少两堆及以上的石子数大于1且$p \neq 0$，转化为3B；
     - ② 只有一堆石子数大于1，由2A/2B可知必败。
   - B) $p \neq 0$，则参考Bouton Theorem 证明，总有一种方法能转化为3A状态。

我们知道了什么？

3B总能把3A状态扔给对方，而3A状态只能转化回3B状态或直接转化为2A/2B状态。

而2A/2B状态必胜，所以3B状态总占先机。从而将2和3B状态合并得到结论中的2.

结论中的1显然。

Anti-SG 与 SJ定理

决策集合为空的操作者胜利，其余规则与一般SG游戏相同。

【SJ定理】

对于任意一个Anti-SG游戏，如果定义所有子游戏SG值为0时游戏结束，先手必胜条件：

1. 游戏的SG值为0且所有子游戏的SG值均不超过1；
2. 游戏的SG值不为0且至少一个子游戏的SG值超过1。

证明可以感性参考Anti-NIM必胜态的证明。

小约翰的游戏

桌子上有n堆石子，小约翰和他的哥哥轮流取石子。

每个人取的时候，可以随意选择一堆石子，在这堆石子中取走任意多的石子。

我们规定取到最后一粒石子的人算输。

小约翰先取，请你预测一下谁将获得游戏的胜利。

多组数据。

$1 \le n \le 50, 1 \le T \le 500$，每堆石子数不超过5000。

小约翰的游戏

可以求出每堆石子的sg值。（事实上，$sg(i) = i$，i为石子数量）

然后用SJ定理解决本题。

总结

SG函数解题一般套路：先用暴力求出SG函数。

然后考虑是否可以优化SG函数的求解过程，从而使复杂度降低。

如果没有什么特别的思路，一个非常有效的方法就是打表。

我们可以打出sg函数的表，观察规律。

有时候，题目中不是所有的sg值都要求出来，只要求出部分sg值情况，利用记忆化搜索！

这样可以减少很多不必要的运算！

（如后文的 Arpa and a game with Mojtaba）

Triangulation

一个平面上有n个点组成了凸多边形，每次可以连接一个平面上的两个点。

要求连线之间不能相交，现在总共有m个平面，每个平面都有一个多边形。

两个人轮流连边，谁不能连边就输了。问先手是否必胜。

$1 \leq m \leq 10^6, 1 \leq n \leq 10^9$

Triangulation

显然每个平面的游戏独立，所以利用SG定理，我们只需要知道每个子游戏的sg值。

令$sg(x)$表示平面上有x个点时这个游戏的sg值，那么连一条线相当于又分成了两个平面。

（因为连线之间不能相交）

$$sg(x) = \mathrm{mex}\{sg(i) \oplus sg(x-i-2)\}$$

现在大家可以写一下这道题目，打一个表看能找出什么规律吧！

HDU 4664 Triangulation

显然每个平面的游戏独立，所以利用SG定理，我们只需要知道每个子游戏的sg值。

令$sg(x)$表示平面上有x个点时这个游戏的sg值，那么连一条线相当于又分成了两个平面。（因为连线之间不能相交）

$$sg(x) = \mathrm{mex}\{sg(i) \oplus sg(x-i-2)\}$$

打表后找规律发现，当x较大时，呈现出一个长度为34的循环。

因此，对于x小的部分暴力，x大的部分可以直接根据循环得出结果。

A simple Nim

有n堆石子，每堆a_i个。

每个人可以在一堆内取走任意多个石子，或者将其分成3个非空的堆。

不能取的人输。求先手必胜或后手必胜。

$1 \le n \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^9$

试试自己写一下这题。

HDU 5795 A simple Nim

有n堆石子，每堆a_i个。

每个人可以在一堆内取走任意多个石子，或者将其分成3个非空的堆。

不能取的人输。求先手必胜或后手必胜。

$1 \le n \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^9$

试试自己写一下这题。

其实打表出来，规律非常明显啦！

综合博弈题

Stone

两个人在玩游戏，他们轮流写一个数字。

设上一轮写的数字为y（若本轮为第一轮则$y = 0$），本轮写的数字为x，那么需要满足：

$$1 \leq x - y \leq k$$

谁写的数x先满足$x \geq n$则输。

多组数据。

$0 < n \leq 10^8, 0 < k \leq 100$

HDU 4764 Stone

转化：如果某人在$n-1$处，那么必败；

转化：有$n-1$个石子，每个人可以取$1,2,3,\dots,k$个石子，谁先拿完谁赢。

那么很显然判断条件为$(n-1) \bmod (k+1) = 0$.

Coin game

给你n个硬币排成一圈，编号$1,2,3,\ldots,n$。

两个人玩游戏，轮流操作。

每人每次只能翻转连续的$1\sim k$个的硬币。

翻最后一枚硬币者赢。硬币不能翻过去后再翻回来。

问先手必胜还是后手必胜。

多组数据。

$3 \le n \le 10^9, 1 \le k \le 10, T \le 1000$

HDU 3951 Coin game

若$k = 1$，那么很容易通过奇数和偶数来判断出胜负。

当$k > 1$时，如果$k \geq n$显然先手可以一步把所有硬币翻转完，必胜。

否则后手必胜。

证明：无论先手翻多少个硬币，由于不能翻完，他一定会把环拆成链。

后手只需要把剩下的分成完全相同的两个部分即可，称为①和②。

先手翻①的部分，后手对应翻②的部分即可必胜。

Game of Stones

有n堆石子，每堆石子开始有s_i个。两人轮流取石子。

每次可以在一堆石子中任意数量（不能为0个）的石子。不能取的人输。

由于这个游戏太简单了，所以下面是这个游戏的加强版。

不能在同一堆石子中取两次相同数量的石子。

在双方策略最优的情况下，先手必胜还是后手必胜？

$1 \le n \le 10^6, 1 \le s_i \le 60$

CodeForces 768E Game of Stones

对于普通的游戏，可以归纳得$sg(x) = x$，然后运用SG定理即得答案。

我们可以推算一下新游戏得sg值，找找规律。

$sg(0) = 0, sg(1) = \text{mex}\{sg(0)\} = 1, sg(2) = \text{mex}\{sg(1')\} = 1$

（由于2若转移到1，那么就出现了重复的移动）

$sg(3) = \text{mex}\{sg(0), sg(1), sg(2')\} = 2$

$sg(4) = \text{mex}\{sg(0), sg(1), sg(3')\}$，其中$sg(3')$为3个石子但是不能取1个石子的sg值。

$sg(3') = \text{mex}\{sg(0)\} = 1$，故$sg(4) = 2$。

继续打表可知：$sg(5) = 2, sg(6) = 3, sg(7) = 3$……

~~容易发现~~，$sg(x)$表示使得$\sum_{i=1}^{n} i \le x$的最大n。利用SG定理即得答案。

CodeForces 768E Game of Stones

sg函数博弈题常用步骤：打表找规律。

该题题解解法为dp+优化，明显利用sg函数打表找出规律效率更高。

原题解：http://codeforces.com/blog/entry/50550

Arpa and a game with Mojtaba

两个玩家玩游戏，这个游戏一开始有n个数，两个玩家轮流操作。

每一个玩家操作时，他可以选择一个质数p和正整数k使得p^k至少整除这n个数的一个。

对于每一个能被p^k整除的数x，将x替换成$\frac{x}{p^k}$。

无法操作的玩家输。

求双方操作最优的情况下，先手还是后手会赢。

$1 \leq n \leq 100, 1 \leq a_i \leq 10^9$

CodeForces 850C Arpa and a game with Mojtaba

因为p只能是素数，所以我们将$a_1, a_2, \dots, a_n$分解质因数后，对于每一个质数分开考虑。

接下来就相当于对单个质数求sg值。

我们需要把状态存下来，假设当前有五个数为：2 4 6 12 32，当前$p = 2$，那么我们转化为

1 2 1 2 5

我们发现，对于每次操作，相同的数一定是同时操作的，所以实际上可以压缩成1 2 5

我们用二进制压位来存储这个状态，由于状态量可能很大，用记忆化搜索+map实现。

假设当前状态为s，可以枚举正整数k，那么下一个状态就是：

$$(s \gg k) | \left(s \& (1 \ll (k-1) - 1)\right)$$

利用sg函数定义即可求得每个质数（子游戏）的sg值，用SG定理合并即得总sg值。

Lieges of Legendre

有n堆石子，第i堆石子初始有a_i个。每次可以对一堆石子进行操作.

如果当前石子是偶数，那么可以选择将这$2x$个石子分成k堆石子数为x的石子堆。

还有一种没有前提的操作是取走当前堆的一个石子。

问先手有必胜策略还是后手有必胜策略。

$1 \le n \le 10^5, 1 \le k, a_i \le 10^9$

CodeForces 603C Lieges of Legendre

容易知道可以把每一堆看成一个子游戏。

那么如果k为偶数，则对于偶数个石子的堆，

$sg(2x) \to sg(x) \oplus sg(x) \dots \oplus sg(x) = 0$

看成分成了k个一样的子游戏，利用SG定理得原一堆石子的sg值。

当然，$sg(2x) \to sg(2x-1)$。

初始状态$sg(0) = 0, sg(1) = 1$，所以找规律发现：$sg(2x) = 0$。

对于奇数个石子堆，sg值显然是1，由于只能一步走到偶数石子堆。

如果k为奇数？

CodeForces 603C Lieges of Legendre

同理可知，当k为奇数时，对于偶数堆石子：

$sg(2x) \to sg(x) \oplus sg(x) \dots \oplus sg(x) = sg(x)$

可以递归求得结果，同时可以知道：$sg(2x) \to sg(2x-1)$

同理确定$sg(0) = 0, sg(1) = 1$，找规律知当$x \geq 2$时$sg(2x+1) = 0$。

递归求偶数石子的sg值即可。

时间复杂度$O(n \log a_i)$。

Gameia

有一颗n个节点的树，每个节点初始没有颜色。A和B玩游戏，A先手。

B有k次小动作，可在任意时刻用且一次性可以用多次，每次小动作他会选择切掉一条树边。

两人轮流操作，A每次将一个无色点染白，B每次将一个无色点染黑并将相连点染黑。

即使相连点已经被A染白，也可以再染回黑色。

当不能操作后，如果存在被染白的点，A胜，否则B胜。问谁有必胜策略。

多组数据。

$T \le 100, 1 \le n \le 500, 0 \le k \le 500$

HDU 6105 Gameia

只有<u>这棵树存在完美匹配，且B有足够的小动作数能将这棵树分成若干组点对</u>时B胜利。

其他情况均为A胜利。

- 如果不存在完美匹配，那么A从树叶开始，每次都染树叶父节点，那么B就被迫染叶子。因为B染叶子不会改变局势，且图不存在完美匹配，总存在一个时刻，A染到了一个周围已被染色的孤立点。这时候B就输了。
- 如果存在完美匹配，但是B小动作不足以将这个树分成点对，那么：
  - 如果一个节点有多于一个叶子，那么B显然已经输了。
  - 否则，找到一个叶子，其父节点只有一个儿子，A染色之。
  - 这时候，B会被迫染这个父节点，但是这个父节点有连带影响，使得未染色点为奇数。
  - 当未染色点为奇数时，即不存在完美匹配，B必须通过小动作切断树边阻止这样的影响。
  - 当B的小动作不够时，B就输了。

Game

Alice和Bob在玩游戏。初始Alice有A元，Bob有B元。

有n件商品，每件价格为c_i元。Alice和Bob要轮流买一些商品（不能不买）。

当且仅当有人买了第i件商品，才能第$i+1$件商品。每件商品只能被买一次。

不能操作的人输。Alice先手，求谁必胜。

$1 \le n \le 10^6, 0 \le A, B, c_i \le 10^9$

HDU 4701 Game

两人的初始总钱数固定，为$(A+B)$。

在买若干件商品后，一部分钱已花在了买商品上面，另一部分钱分别留在两个人的手中。

若我们知道当前买完了某件商品后其中一个人剩多少钱，那我们可推另一个人有多少钱。

$f(i)$表示在买第i件商品时，只要先手的人钱数不少于$f(i)$就有必胜策略。

对于最后的商品，$f(n)=c_n$（只要买一件最后一个商品即可）

如何递推？

HDU 4701 Game

从i到$i-1$，分两种情况：

1. 第$i-1$种商品和第i种商品同一个人购买，说明在购买第$i-1$件商品就有必胜策略。

此时手里最少还要剩余$f(i)+c_{i-1}$；

2. 第$i-1$种商品和第i种商品不是同一个人购买，那么：

前一个人在购买第$i-1$个商品后留必败态给下一个人购买第i件商品。

从而我们知道对于第i种商品，必败态为钱数不足$f(i)$。

我们又知道考虑完前$i-2$商品后，两人总钱数剩余$A+B-\sum_{j=1}^{i-2} c_j$。

从而如果先手至少又$A+B-\sum_{j=1}^{i-2} c_j - f(i) + 1$元钱则必胜。

故$f(i-1)=\min\left(A+B-\sum_{j=1}^{i-2} c_j - f(i) + 1, f(i)+c_{i-1}\right)$. 时间复杂度$O(n)$。

Black and White Tree

两个人轮流给一个有n个节点的树上的节点染色。先手染白色，后手染黑色。

如果最后树上存在一个白色点，与之相连没有黑色点，先手胜，否则后手胜。

求先手必胜还是后手必胜。

$2 \leq n \leq 10^5$

AGC014d Black and White Tree

结论：<u>后手赢⇔这棵树要有完美匹配。</u>

证明：如果有完美匹配，后手显然必赢（把先手染色的点的匹配点染色即可）

下面证明必要性：若后手赢，这棵树有完美匹配。

证明逆否命题：若这棵树没有完美匹配，后手必败。

首先找到一个未匹配点，提到根，其余贪心匹配。

和上一题一样的，如果有一个点有多于一个个叶子，那么先手染这个点肯定赢了。

否则，找到一个叶子节点，其父亲只有一个儿子，染父亲，那么后手只能染这个叶子。

于是这两个点就可以删掉了，最后全匹配完，根周围一定都是先手染过色的。

先手染根就赢了。所以若这棵树没有完美匹配，后手必败。

Decrementing

有一个n个数的正整数数列，初始所有数的最大公约数为1。

每次选择一个大于1的正整数，将其减1，然后设$d=(a_1,a_2,\dots,a_n)$，将所有数除以d。

不能操作的人输。

$1\le n\le 10^5, 1\le a_i\le 10^9$

AGC010d Decrementing

首先，题目保证了一开始至少有一个奇数。

如果有奇数个偶数，那么先手必胜。

先手先操作一个偶数，现在就出现了至少两个奇数，且有偶数个偶数。

后手如果将一个奇数变成偶数，先手可以再把这个偶数变成奇数；

后手如果把一个偶数变为奇数，先手可以把另一个偶数变成奇数。

中途如果进行了除法，那么很显然除数不会是偶数，因此不改变奇偶性。

操作到最后显然先手必胜。

如果有偶数个偶数，那么怎么办呢？

AGC010d Decrementing

<u>如果有偶数个偶数，那么后手必胜？</u>

按照上面的分析，似乎很有道理？

不对！如果有偶数个偶数，但是只有一个奇数，怎么办？

先手肯定只能操作这个奇数，不然根据前面的分析必败。

操作这个奇数后局面就变得复杂了，那么……我们可以递归判断！

Candy Piles

有n堆石子，第i堆初始有a_i个石子，两个人游戏。

每次一个人可以选择从所有堆中都取掉1个石子，或是取走含有最多个石子的一整堆。

无法操作者输，求先手必胜或后手必胜。

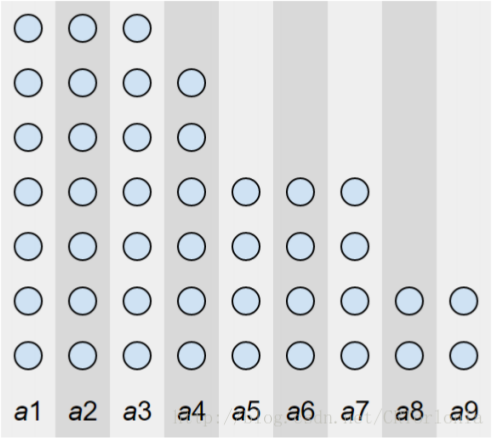
$1 \le n \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^9$

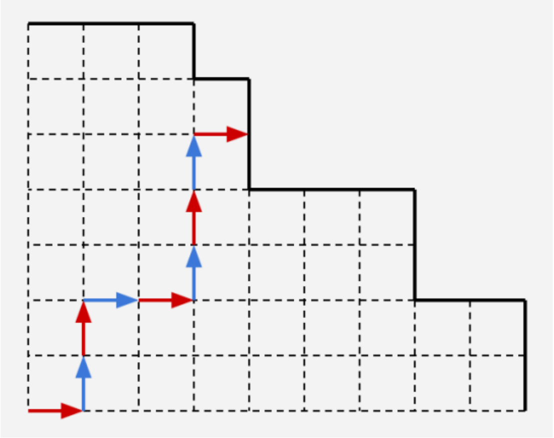
AGC002e Candy Piles

转化模型：把一堆石子看成石子个数 × 1的矩形，按照石子从多到少排列。

每次相当于删除下面一行或者左边一列。

假设有一个点在(1,1)，看成每次往上移动或者往右移动，不能移动的输。





AGC002e Candy Piles

用SG函数容易算出每一个点是必胜还是必败，但是复杂度过大，考虑**找规律**。

观察得知，**除了边界线上外，对角线的状态是一样的。**

证明：

1. 如果$(x+1,y+1)$在边界线内且必败，则$(x+1,y)$和$(x,y+1)$均必胜，从而(x,y)必败；
2. 如果$(x+1,y+1)$在边界线内且必胜，则$(x+1,y+2)$和$(x+2,y+1)$至少有一个必败；

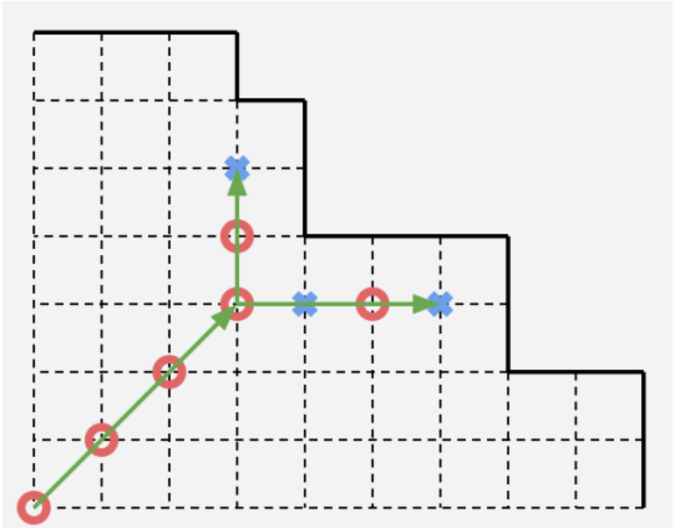
利用1知$(x,y+1)$和$(x+1,y)$至少有一个必败，故(x,y)必胜。

AGC002e Candy Piles

有了这个结论，我们从(1,1)不断向斜上方走，不要碰到边界线。

然后计算该点向右和向上离边界线距离，如果均为奇数，则必败；否则，必胜。

博弈论有时需要<u>适当的模型转化</u>！



Games on DAG

给出一个n个点m条边的DAG，记为G。

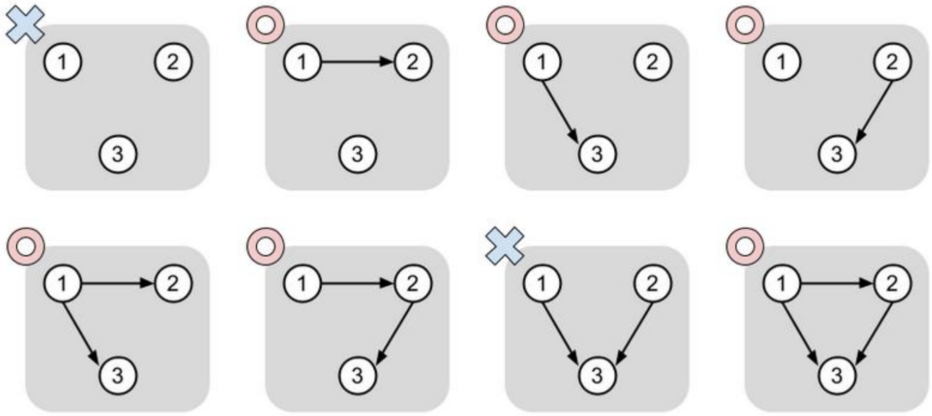
可以删掉若干条边成为G'，显然有2^m种不同的G'。

连边保证：若有$(x_i \to y_i)$边，则$x_i < y_i$。

初始点1和点2有一个标记，Alice和Bob玩游戏，每次可以将任意一个标记沿边移动。

不能移动者输，求这2^m张图有多少先手必胜。对$(10^9 + 7)$取模。

$2 \le n \le 15$



AGC016f Games on DAG

首先两个标记可以分开考虑，当作两个不同的子游戏。

那么利用SG定理我们知道，只有当1点和2点sg值不同时，先手必胜。

利用补集转换，我们求有多少种图使1点和2点sg值相同。

发现n很小，考虑状压。令$f(S)$表示只考虑S这个点集的方案数。

枚举S的子集T，设$U = S - T$。

那么我们令U点集为sg值为0的点的集合，S点集为sg值不为0的点的集合。

那么，怎么进行计算呢？

AGC016f Games on DAG

令U点集为sg值为0的点的集合，T点集为sg值不为0的点的集合

1. U之间点不能互相连边；
2. T中每一个点至少向U连一条边；
3. U中每个点向T随便连边；
4. T中点的连边方案数就是$f(T)$！（把$f(T)$任意一个方案所有sg值加1即可）

通过预处理可以使得复杂度为$O(n3^n)$，其中3^n为枚举子集。

Harlequin

给定n堆石子，每堆开始有a_i个。

两个人玩游戏，每一次可以选择任意多堆石子（不能为0堆），从选出的每堆拿一个石子。

不能操作的玩家输。求先手必胜还是后手必胜。

$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$

Atcoder CADDi2018b Harlequin

结论：<u>存在一堆石子有奇数个石子，则先手获胜；否则如果全为偶数，则后手获胜。</u>

设有奇数个石子状态S，均为偶数个石子状态T。

则S一定可以转化成T，而T只能转化为S。

考虑最终所有获胜状态，均存在奇数个石子，故S为必胜态，T为必败态。