组合计数基础和问题选讲

上海交通大学 方泓杰

一些记号和预备知识

$C(n,m)$或C_n^m或$\binom{n}{m}$表示组合数，且有$C(n,m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

$P(n,m)$或P_n^m或$A(n,m)$或A_n^m表示排列数，且有$P(n,m)=\frac{n!}{(n-m)!}$

~~别用oeis找规律。~~

错排问题

公式：$D(n) = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

~~推导：略~~

Lucas定理

$$\binom{m}{n} = \binom{m \bmod p}{n \bmod p}\binom{m/p}{n/p}$$

可以将n, m比较大的组合数化成小组合数进行计算。

要求p为质数。

广义容斥原理（二项式反演）

若有

$$b_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i$$

那么

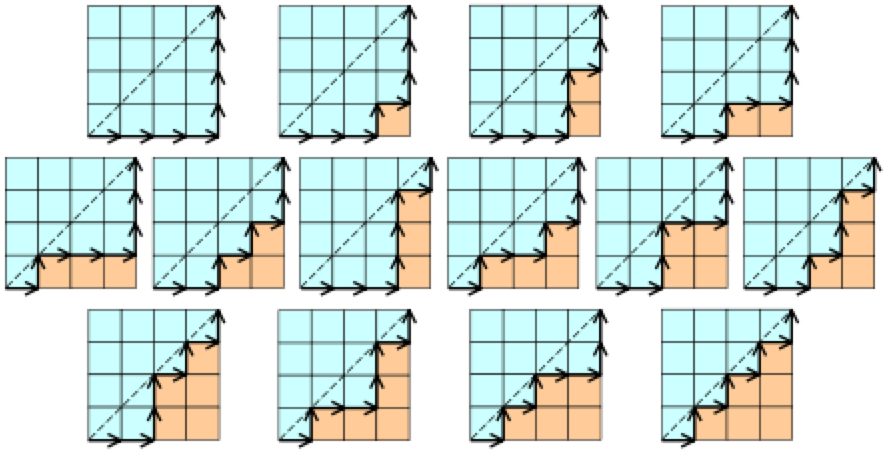
$$a_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} b_i$$

Catalan数

在一个平面直角坐标系中，只能往右或者往上走一个单位长度。

问有多少种不同的路径可以从左下角$(1,1)$走到右上角(n,n)，

且要求路径不能经过$y = x$上方的点。



Catalan数

总方案数是$\binom{2n}{n}$，考虑不合法方案数，那么不合法的路径一定经过了$y = x + 1$。

找到这个路径与$y = x + 1$的第一个交点，然后将后面的路径关于$y = x + 1$对称。

那么每一种不合法方案就对应到了一条$(1,1)$到$(n - 1, n + 1)$的路径。

故不合法的方案数量就是$\binom{2n}{n-1}$。

所以Catalan数列即为：

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

特征项：1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786……

（可以打表找规律~）

其他形式的Catalan数

有多少种不同的长度为n的合法括号序列？

有n个元素（无区别）和一个栈，每次可以将一个元素入栈或弹出栈顶元素。

求有多少种不同的操作序列。

其他形式的Catalan数

有多少种不同的长度为n的合法括号序列？

把左括号看成向右，右括号看成向上。

那么一个合法的括号序列不会超过$y = x$这条线，转化成了Catalan数定义。

有n个元素（无区别）和一个栈，每次可以将一个元素入栈或弹出栈顶元素。

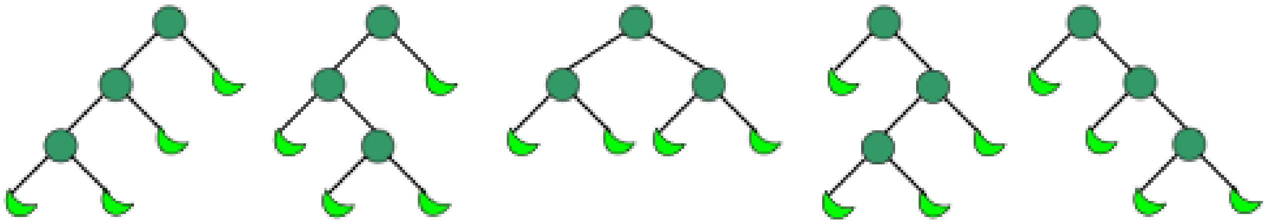
求有多少种不同的操作序列。

进栈看作左括号，出栈看作右括号即可。

其他形式的Catalan数

有多少种不同的n个节点的二叉树？

例如：$n = 3$时一共有5种方案，如下图。



其他形式的Catalan数

定义f_n表示有n个节点的二叉树，那么枚举子树大小可得方程：

$$f_n=\sum_{i=0}^{n-1} f_i f_{n-i-1} \quad (f_0=1)$$

直接计算是$O(n^2)$的。

回想DFS序（带in/out版），把进栈看成左括号，出栈看成右括号即可。

也是一个Catalan数。

那么我们可知，以上递推式对应的数列为Catalan数。

其他例子还有：**多边形进行三角剖分的方案数**（可以列出类似递推式）。

排队问题

有$2n$个人，身高互不相同，要他们排成两排，使得：

1. 每一排从左到右都是从低到高；
2. 第二排的人一定比第一排对应位置的人高。

求排队方案数。带取模。

$1 \le n \le 10^6$

排队问题

把所有人先按照从低到高排序，然后每个人选0或1，0表示站前排，1表示站后排。

要保证从低到高任何时候1的个数不能比0多。即转化为合法括号序列问题。

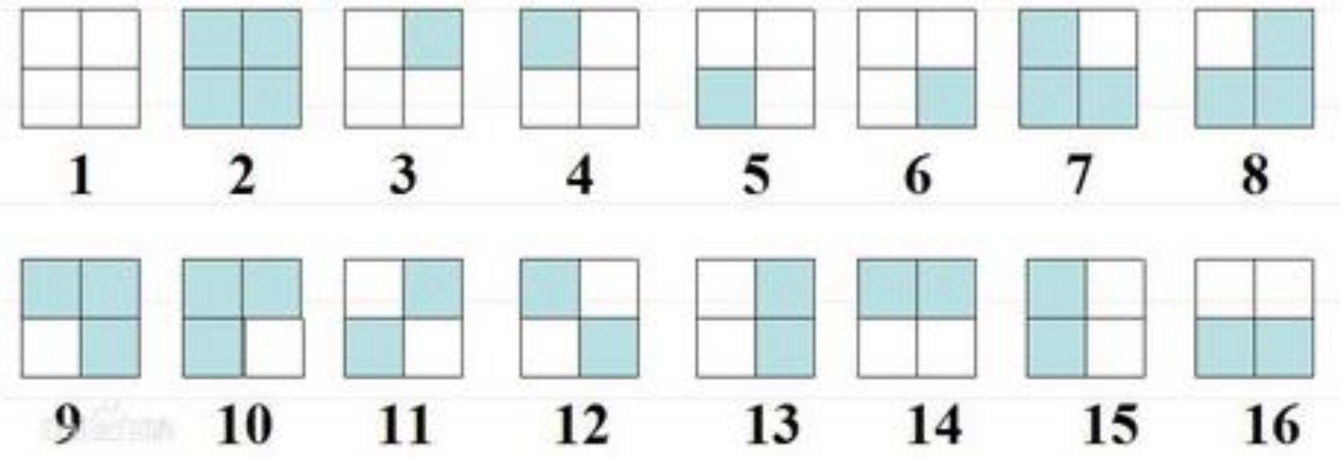
利用Catalan数解决。

类似题目：**BZOJ 1485**

例题：染色1

对2×2的方格用黑白两种颜色涂色，问能得到多少种不同的图像？

经过旋转使之吻合的两种方案，算是同一种方案。



去掉重复之后呢？6种！

群

G是一个集合，$*$为定义在G集合的一个运算。

如果满足以下性质，那么$(G,*)$为一个群。

1. **封闭性**：$\forall a, b \in G$: $a * b \in G$；
2. **结合律**：$\forall a, b, c \in G$: $(a * b) * c = a * (b * c)$；
3. **单位元**：$\exists e \in G, \forall a \in G$: $a * e = e * a = a$；
4. **逆元**：$\forall a \in G, \exists b \in G$: $a * b = b * a = e$。

简单来说，$(R,\times)$就是一个群。

置换

置换：$(a_1 \to b_1, a_2 \to b_2, \ldots, a_n \to b_n)$。一个$[1,n] \to [1,n]$的一一映射。

置换群的元素是置换，运算是置换的连接：

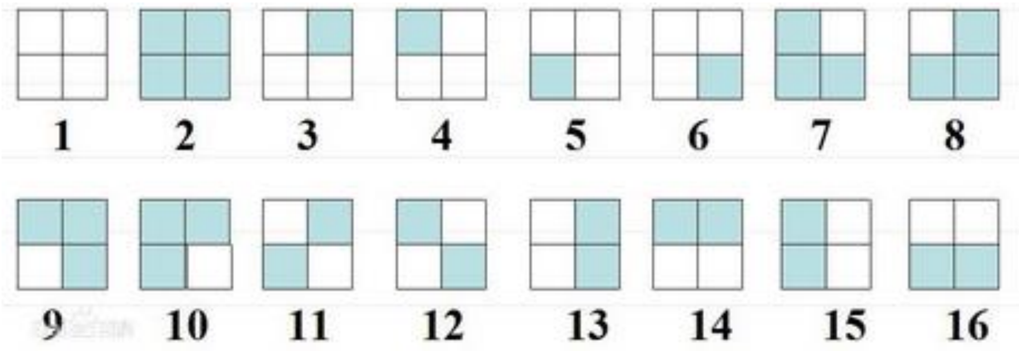
置换的连接 e.g.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

在例题中，置换群$G = \{0°, 90°, 180°, 270°\}$，另记$G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

Z_k（k不动置换类）：$k \in [1, n]$，那么G中使得k保持不变置换的全体为Z_k。

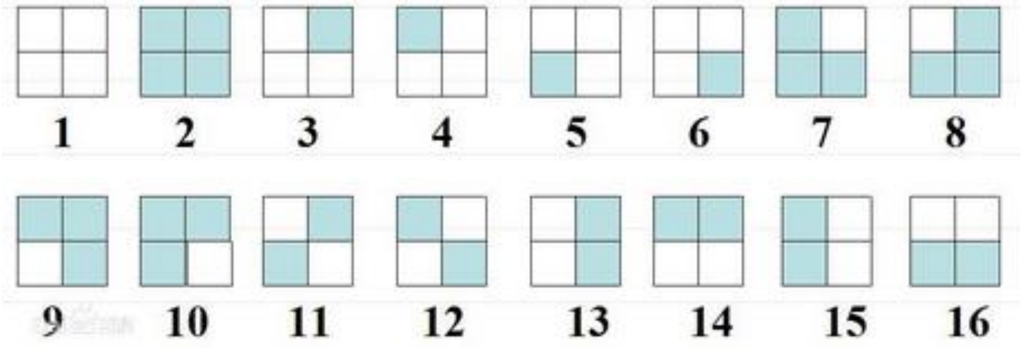
e.g. $Z_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, Z_{11} = \{a_1, a_3\}, Z_3 = \{a_1\}$



置换

E_k（k等价类）：$k \in [1,n]$，k在置换群G作用下的轨迹，即k在G作用下可变为的所有元素的集合，叫做E_k。

e.g. $E_3=\{3,4,5,6\}, E_1=\{1\}, E_{11}=\{11,12\}$



置换

$Z_1=\{a_1,a_2,a_3,a_4\},Z_{11}=\{a_1,a_3\},Z_3=\{a_1\}$

$E_3=\{3,4,5,6\},E_1=\{1\},E_{11}=\{11,12\}$

发现了什么？

$|\boldsymbol{Z_k}||\boldsymbol{E_k}|=4=|\boldsymbol{G}|$！

此处略去证明。

一般情况下，我们还有

$$\sum_{j=1}^{n}|Z_j|=\sum_{i=1}^{|G|}D(a_i)$$

其中，$D(a_i)$表示在置换a_i下的不动点个数。如何证明？列表！

置换

$$\sum_{j=1}^{n} |Z_j| = \sum_{i=1}^{|G|} D(a_i)$$

	1	2	…	15	16	$D(a_i)$
a_1	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	…	$S_{1,15}$	$S_{1,16}$	$D(a_1)$
a_2	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$	…	$S_{2,15}$	$S_{2,16}$	$D(a_2)$
a_3	$S_{3,1}$	$S_{3,2}$	…	$S_{3,15}$	$S_{3,16}$	$D(a_3)$
a_4	$S_{4,1}$	$S_{4,2}$	…	$S_{4,15}$	$S_{4,16}$	$D(a_4)$
$\|Z_j\|$	$\|Z_1\|$	$\|Z_2\|$	…	$\|Z_{15}\|$	$\|Z_{16}\|$	?

$S_{i,j}$表示j在a_i的变化下是否动了。

置换

分析一波：

$$\sum_{j=1}^{n}\left|Z_j\right| = \sum_{i=1}^{|G|} D(a_i)$$

设$N = \{1,2,3,\dots,n\}$中共有L个等价类，$N = E_1 + E_2 + \cdots + E_L$

则当j和k属于同一个等价类时，有：$\left|Z_j\right| = |Z_k|$，所以

$$\sum_{j=1}^{n}\left|Z_j\right| = \sum_{i=1}^{L}\sum_{k\in E_i}|Z_k| = \sum_{i=1}^{L}|E_i||Z_i| = L|G|$$

其中L为互异状态的个数。

Burnside引理

于是我们得到了：

$$L|G| = \sum_{i=1}^{|G|} D(a_i)$$

即

$$\boldsymbol{L = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|} D(a_i)}$$

即Burnside引理。

循环

记$(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$为$n$阶**循环**。

一个置换可以写成若干个互不相交的循环的乘积。

置换的循环节数为上述表示中循环的个数。

e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$

进一步的思考

我们给2×2的方阵标号：

2	1
3	4

构造置换群$G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, |G| = 4$。

令a_i循环节数为$C(a_i)$，那么：

a_1（转0°）$a_1 = (1)(2)(3)(4), C(a_1) = 4$

a_2（转90°）$a_2 = (4\ 3\ 2\ 1), C(a_2) = 1$

a_3（转180°）$a_3 = (1\ 3)(2\ 4), C(a_3) = 2$

a_4（转270°）$a_4 = (1\ 2\ 3\ 4), C(a_4) = 1$

进一步的思考

$a_1 = (1)(2)(3)(4), C(a_1) = 4$

$a_2 = (4\ 3\ 2\ 1), C(a_2) = 1$

$a_3 = (1\ 3)(2\ 4), C(a_3) = 2$

$a_4 = (1\ 2\ 3\ 4), C(a_4) = 1$

$D(a_1) = 16, D(a_2) = 2, D(a_3) = 4, D(a_4) = 2$

发现了什么?

$$D(a_i) = 2^{C(a_i)}$$

更一般地，我们有

$$D(a_i) = m^{C(a_i)}$$

（其中m为染色颜色个数，本题$m = 2$）

Polya定理

$$D(a_i) = m^{C(a_i)}$$

Burnside引理：

$$L = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|} D(a_i)$$

联立得到Polya定理：

$$\boldsymbol{L = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|} m^{C(a_i)}}$$

一些比较 1

Burnside引理

$$L=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|}D(a_i)$$

Polya定理

$$L=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|}m^{C(a_i)}$$

Burnside引理直接计算时间复杂度为$O(nsp)$（n元素个数，s置换个数，p格子数）

Polya定理直接计算时间复杂度为$O(sp)$

优化去了n，在例题中，$n=16$相对于p,s非常大了。

染色2

$n \times n$的方阵，每小格染m种颜色，求旋转操作下本质不同的解的个数。

利用Polya原理解决：

1. 确定置换群：$G = \{0°, 90°, 180°, 270°\}$
2. 计算循环节个数。
3. 利用Polya原理得到答案：

$$L = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|} m^{C(a_i)}$$

深入讨论：染色2

我们深入讨论这个问题，考虑：

$C(a_1) = n^2, C(a_3) = \left[\frac{n^2+1}{2}\right]$

$C(a_2) = C(a_4) = \left[\frac{n^2+3}{4}\right]$

从而，

$$L = \frac{m^{\left[\frac{n^2+3}{4}\right]} + m^{\left[\frac{n^2+3}{4}\right]} + m^{n^2} + m^{\left[\frac{n^2+1}{2}\right]}}{4}$$

加上取模，时间复杂度$O(\log n)$

染色3

有n张牌，给每张染色。要染成A张红色，B张蓝色和C张黄色。

给出m个置换，通过置换相同的方案算一种。问有多少种方案。对p取模。

$m \le 60, \max\{A, B, C\} \le 20, n = A + B + C$

BZOJ 1004 HNOI 2008 Cards

有颜色数量的限制，意味着我们不能用Polya原理了。

考虑利用Burnside引理。

$$L = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|} D(a_i)$$

小细节：我们需要有置换群，给定的置换的集合是否形成了置换群?

不行！因为没有单位元！

因此，$G = \{a_1, a_2, \dots, a_{m'}, e\}$又记作$\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$（这里的$m'$为题目的$m$）

不能用$m^{C(a_i)}$代替，那我们可以利用类似的思想！

BZOJ 1004 HNOI 2008 Cards

$m^{C(a_i)}$告诉我们的另一件事情是：循环节之间独立！

那么我们仍然找到循环节，然后就是一个背包问题了，利用dp即可求出方案数。

一些比较 2

Burnside引理

$$L = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|} D(a_i)$$

Polya定理

$$L = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{|G|} m^{C(a_i)}$$

Polya定理不能直接使用的时候，可以利用其思想来进行解题！

Burnside引理也可以作为出发点来推导。

排列计数

求有多少个长度为n的排列满足：恰好存在m个下标$i_1, i_2, \ldots, i_m$使得$a_{i_j} = i_j (1 \le j \le m)$。

答案对$(10^9 + 7)$取模。多组数据。

$T = 5 \times 10^5, 1 \le n, m \le 10^6$

BZOJ 4517 SDOI 2016 排列计数

从n个数中选出m个使其总在位置上，方案数$\binom{n}{m}$。

那么剩下$(n-m)$个数必须全不在其位置上，即求错排数。

错排公式$f_n=(n-1)(f_{n-1}+f_{n-2})$。

Trees

统计有多少棵二叉搜索树满足有n个节点，并且高度不小于h。

$1 \le n, h \le 35$

CodeForces 9D How many trees?

$f(n,h)$表示有n个节点，高度恰好为h的方案数。

考虑左右子树哪一棵高度为$h-1$进行转移。

$$f(n,h)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{h-1}f(i,h-1)f(n-1-i,j)+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{h-2}f(i,h-1)f(n-1-i,j)$$

直接做时间复杂度是$O(n^4)$的，利用前缀和可以优化到$O(n^3)$。

~~再利用FFT可以优化到$O(n^2\log n)$。~~

反正都能过就对了~

Queue

有n个人等概率随机进入m个房间，一个房间可以有多个人，第i个房间有a_i个水龙头。

在一个房间里的人要排队去装水，他们会使得最长的队尽可能小。

求所有房间中最长队列长度的期望。

$1 \le n, m, a_i \le 50$

CodeForces 28C Bath Queue

我们可以先求出最长队列为l有多少种方案。用$f(i,j,l)$表示已经分配前i个房间和j个人，最长队列长度为l的方案数。

那么转移有两种情况：

1. 当前第i个房间队列长度到达l，前面的房间任意。

2. 前面$i-1$个房间有队列长度到达l，但是当前房间没有达到。

所以转移就是：

$$f(i,j,l)=\sum_{p\in p_i}\sum_{k=0}^{l}\binom{n-(j-p)}{p}f(i-1,j-p,k)+\sum_{k=0}^{\min\{p_i\}-1}\binom{n-(j-k)}{k}f(i-1,j-k,l)$$

p_i表示使第i个房间队列长度为l的数的集合。（枚举）

时间复杂度$O(n^5)$

Combinatorics

有一棵n个节点的树，节点标号从1到n。

除了1号节点至多与另外2个节点连边，其余节点至多与另外3个节点连边。

两个树是相同的，当且仅当每个节点的相邻节点都相同。

求有多少种不同的树，满足其最大匹配为k。

答案对$10^9 + 7$取模。

$1 \leq n \leq 50$

CodeForces 382E Ksenia and Combinatorics

考虑令$f(n, k, 0\ or\ 1)$表示有n个节点的树，最大匹配k且根节点不在 / 在匹配中的方案数。

观察到题目条件是一个二叉树，所以考虑枚举左右子树大小和最大匹配数。

枚举左子树大小为m，则分配节点方案有$\binom{n-1}{m}$种，子树根节点选取有$m(n-1-m)$种。

为了避免重复，我们可以限定左子树大小不超过右子树。

假设根节点在匹配中，那么至少有一个子树的根节点不在匹配中。

假设根节点不在匹配中，那么左右子树的根节点都必须在匹配中（否则不是最大匹配）

再枚举左和右匹配数，进行dp转移即可。

时间复杂度$O(n^4)$

字符串

用n个1和m个0组成字符串，且在组成的字符串中，在任意的前$k(1 \le k \le n+m)$个字符中，1的个数不能少于0的个数。求满足要求的字符串的个数。答案对20100403取模。

$1 \le m \le n \le 10^6$

BZOJ 1856 [SCOI2010] 字符串

将操作看成平面上点移动：

某位放入1：$(x, y) = (x, y) + (1,1)$

某位放入0：$(x, y) = (x, y) + (1, -1)$

要求最终到达$(n + m, n - m)$，且不能经过$(-1, t)$。

设$x(1,1) + y(1, -1) = (n + m, n - m)$，则$x = n, y = m$。

总方案$C(n + m, m)$。

如何扣除经过$(-1, t)$的路径？

BZOJ 1856 [SCOI2010] 字符串

如何扣除经过$(-1, t)$的路径？

将当前路径与$y = -1$交点左边沿着$y = -1$对称！

相当于从$(0, -2)$走到$(n + m, n - m)$。

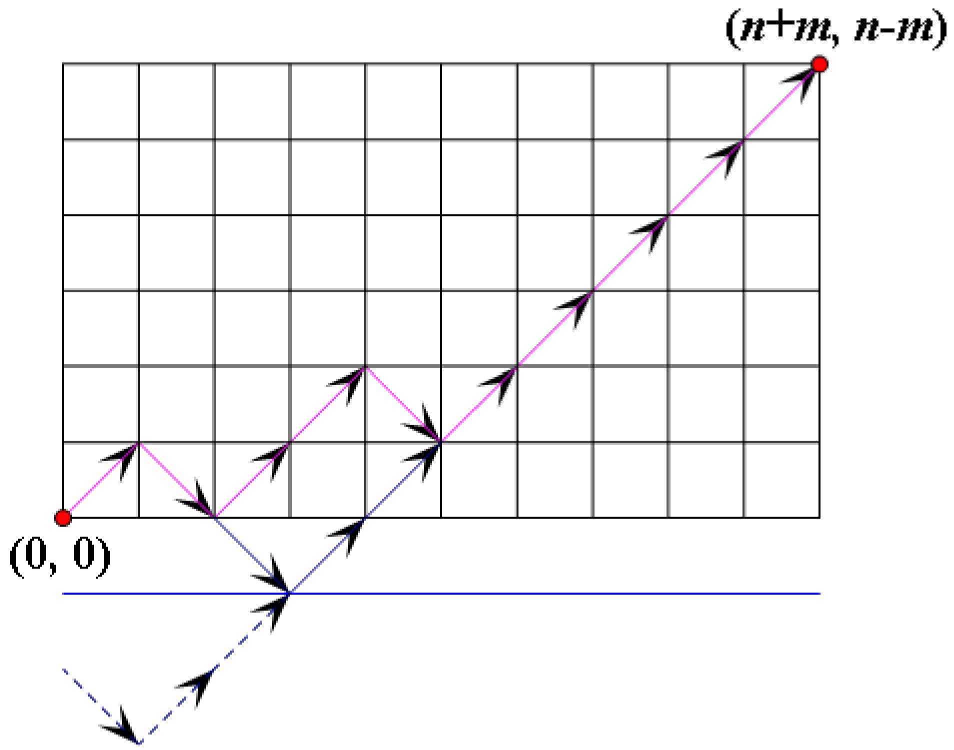
$x(1,1) + y(1, -1) + (0, -2) = (n + m, n - m)$

从而$x = n + 1, y = m - 1$。

不合法方案为$C(n + m, m - 1)$

所以答案为$C(n + m, m) - C(n + m, m - 1)$

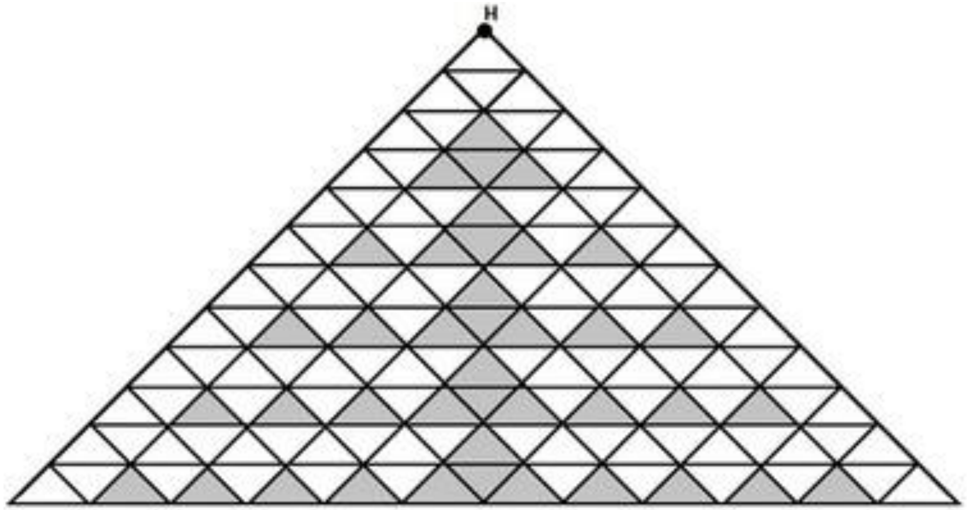
时间复杂度$O(n + m)$



Triangles

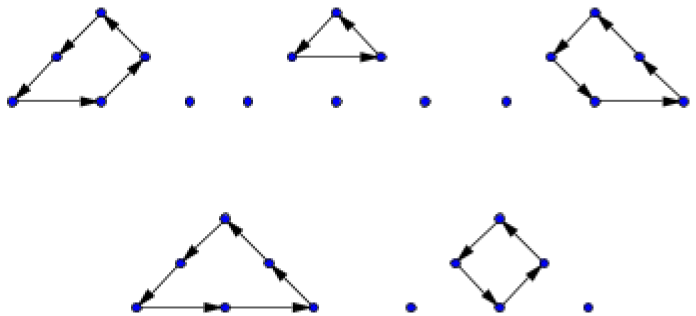
给出一个n层金字塔，黑色的边可以走路径。要求求出包含H点的简单回路，且这个回路围成的部分不包括灰色三角形。求总方案数，对(10^9+9)取模。

$2 \le n \le 10^6, n = 2k(k \in Z)$



CodeForces 15E Triangles

当$n = 2$时，考虑所有方案：



逆时针+顺时针，一共10种。

CodeForces 15E Triangles

发现当$n > 2$的时候，可以由是否通过点E为界，进行分类。

容易发现，顺时针和逆时针的走法个数相同，因此只考虑逆时针的走法。

我们以$n = 2$的走法为基础，考虑这样几种走法：

0. $n = 2$的10种走法

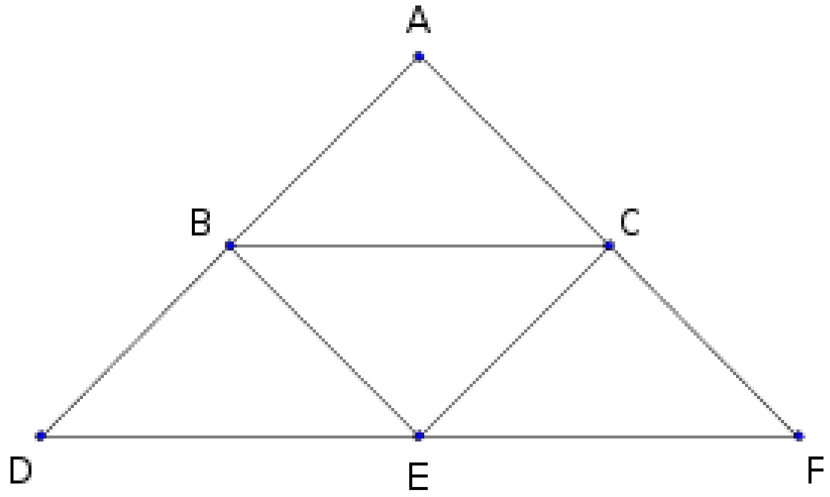
1. $A \to B \to D \to \cdots \to E \to C \to A$

2. $A \to B \to D \to \cdots \to E \to F \to C \to A$

3. $A \to B \to D \to E \to \cdots \to F \to C \to A$

4. $A \to B \to E \to \cdots \to F \to C \to A$

5. $A \to B \to D \to \cdots \to E \to \cdots \to F \to C$



CodeForces 15E Triangles

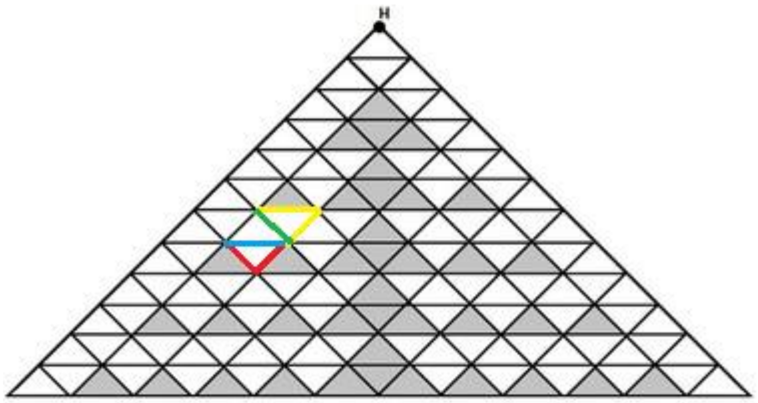
对上页1-4类走法，可以发现实际上就是选择了左边或右边一边往下走。

容易发现，因为对称，往左走和往右走是没有差别的。

用S_k表示$2k$层的金字塔中，往左走有多少方案。

在第$2i$层中的每一个小格都有两种走法（红、蓝）

掉头的时候也有两种走法（黄、绿）



所以如果向里走$j(j>0)$个格子，共有2×2^j种走法。

故第$2i$层共有$1+\sum_{j=1}^{i-2}2^{j+1}=2^i-3$种走法（1是不走进去的那一种走法）。

走到第$2k$层一共有$\prod_{i=2}^{k}\left(2^i-3\right)$种走法。

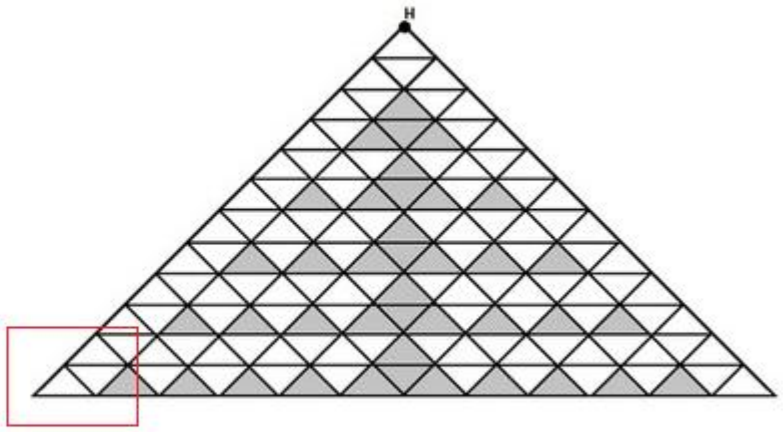
CodeForces 15E Triangles

我们还要考虑一下拐角的情况：

当确定了最多走到第k层的时候，掉头一共有4种情况。

（在图中红圈地方掉头）

所以有：



$$S_k = \sum_{i=2}^{k} 4\left(\prod_{j=2}^{i}\left(2^j - 3\right)\right)$$

那么如果是按照第5种走法，相当于左右都走了一遍，方案数S_k^2。

总方案数：$10 + 8S_k + 2S_k^2$（考虑顺时针/逆时针）

时间复杂度$O(n)$。

Sky Full of Stars

有一个$n \times n$的网格和三种颜色，问有多少种染色方案，使得至少一行或一列颜色一样。

$1 \leq n \leq 10^6$

CodeForces 997C Sky Full of Stars

$$ans=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}[i+j>0](-1)^{i+j+1}\binom{n}{i}\binom{n}{j}3^{(n-i)(n-j)+1}$$

即容斥原理。

把$i=0$和$j=0$的单独考虑，显然可以在$O(n\log n)$时间内得出答案。

那么剩余的式子记为A，则

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j+1}\binom{n}{i}\binom{n}{j}3^{(n-i)(n-j)+1}=3\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j+1}\binom{n}{i}\binom{n}{j}3^{ij}$$

$$\frac{A}{3}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left(-3^{i}\right)^{j}$$

CodeForces 997C Sky Full of Stars

$$\frac{A}{3}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left(-3^{i}\right)^{j}$$

又由

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left(-3^{i}\right)^{j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(-3^{i}\right)^{j}-\left(-3^{i}\right)^{n}=\left(1-3^{i}\right)^{n}-\left(-3^{i}\right)^{n}$$

那么

$$\frac{A}{3}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\left[\left(1-3^{i}\right)^{n}-\left(-3^{i}\right)^{n}\right]$$

即$A=3\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\left[\left(1-3^{i}\right)^{n}-\left(-3^{i}\right)^{n}\right]$

CodeForces 997C Sky Full of Stars

$$A = 3\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\left[\left(1-3^{i}\right)^{n}-\left(-3^{i}\right)^{n}\right]$$

时间复杂度$O(n\log n)$。

KingdomAndCities

求n个点m条边，前k个点的度数均为2的无向连通图个数，无重边自环。

$1 \leq n, m \leq 50, 0 \leq k \leq 2$

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k=0$的情况，就是n个点m条边无向连通图的个数。

为方便，下设$E(i)$表示i个点的无向完全图的边数，那么$E(i)=\frac{i(i-1)}{2}$。

令$f(i,j)$表示i个点j条边无向连通图的个数。

利用~~补集转换~~（容斥原理），则全部方案为$\binom{E(i)}{j}$。

枚举第一个点包含的连通块大小k，以及该联通快内的边数l。

所以一组(k,l)对应的方案数为$\binom{i-1}{k-1}\binom{E(i-k)}{j-l}f(k,l)$

（从1号点以外的i-1个点选出k-1个点，再选择边，不用管其他部分是否连通）

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

所以有

$$f(i,j)=\binom{E(i)}{j}-\sum_{k=1}^{i-1}\binom{i-1}{k-1}\left(\sum_{l=k-1}^{\min(E(k),j)}\binom{E(i-k)}{j-l}f(k,l)\right)$$

于是我们就解决了$k=0$的情况。

下面做一些记号解释：

后文图中，红色边为要删除的，黑色边为本来就有，蓝色边为新加入。

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

我们来思考一下一个**结论**：

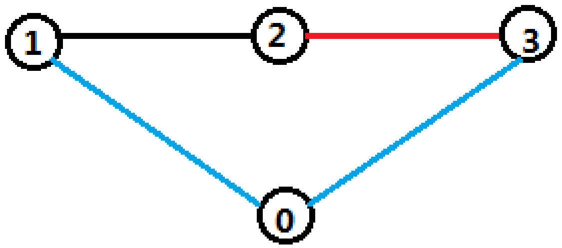
限定度数为2的点只有两种用途:

1. 用来取代一个边从而延长一个链
2. 用来加到一条边两个端点上，形成一个环。

特殊地，当$k = 2$时可以同时加到一个点上，形成三元环。

这是对的吗？

TopCoder SRM548 KingdomAndCities



一开始只有1和2连边，0号点加入，连接1和3。这似乎不属于那三种情况？

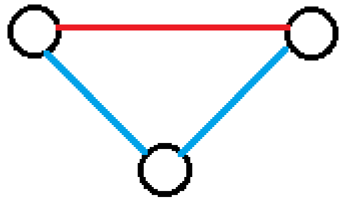
等价于“原来1和3有连边，0加入这条边上延长链”！

同时，原来的不连通图转化成了连通图！

所有不属于这两类的方案都是可以等价的！

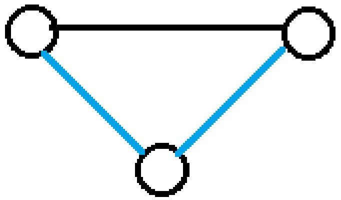
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

有了这个结论，我们考虑$k = 1$：



① 延长链：$(m-1)f(n-1,m-1)$

原连通图有$m-1$条边可以当作对象进行改变。



② 构成环：$(m-2)f(n-1,m-2)$

原连通图有$m-2$条边可以当作对象进行改变。

故$k = 1$时，答案为$(m-1)f(n-1,m-1)+(m-2)f(n-1,m-2)$。

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

① 两个连一起，延长链：$2(m-2)f(n-2, m-2)$

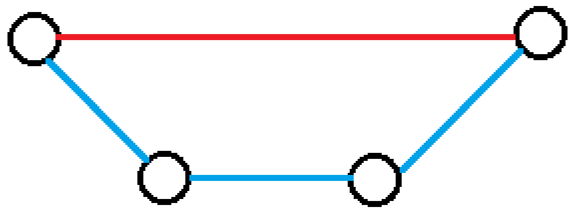
原连通图有$m-2$条边可以当作对象进行改变。

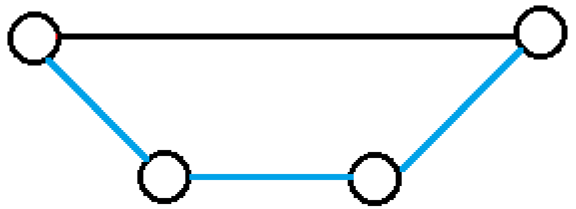
两个点的顺序可以改变，故乘2。

② 两个连一起，构成环：$2(m-3)f(n-2, m-3)$

原连通图有$m-3$条边可以当作对象进行改变。

两个点的顺序可以改变，故乘2。





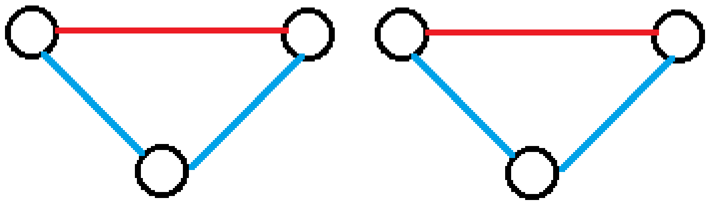
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

③ 两个分别延长链：$C(m-2,2) \times 2 \times f(n-2, m-2)$

原连通图有$C(m-2,2)$个边组可以当作对象进行改变。

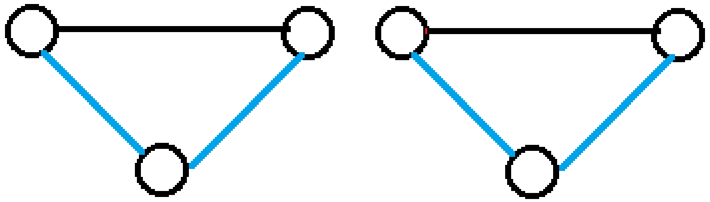
两个点的顺序可以改变，故乘2。



④ 两个分别构成环：$C(m-4,2) \times 2 \times f(n-2, m-4)$

原连通图有$C(m-4,2)$个边组可以当作对象进行改变。

两个点的顺序可以改变，故乘2。



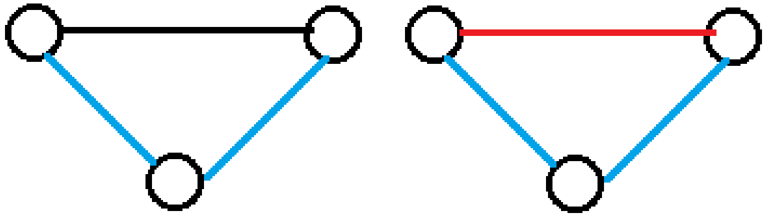
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

⑤ 一个延长链，一个构成环：$C(m-3,2) \times 2^2 \times f(n-2, m-3)$

原连通图有$C(m-3,2)$个边组可以当作对象进行改变。

两个点的顺序可以改变，故乘2，加入方式（链、环）也可以改变，故再乘2。



TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

⑥ 在同一条边上构成两个环：$(m-4)f(n-2,m-4)$

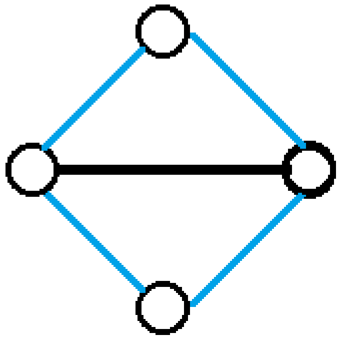
原连通图有$m-4$条边可以当作对象进行改变。

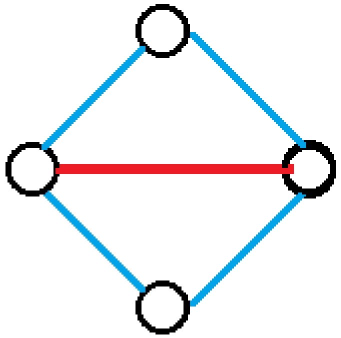
由于对称，不需要乘2。

⑦ 在同一条边上分别延长：$(m-3)f(n-2,m-3)$

原连通图有$m-3$条边可以当作对象进行改变。

由于对称，不需要乘2。





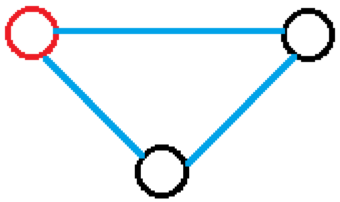
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

⑧ 同一个点上构成环（假设红点本来存在）：$(n-2)f(n-2, m-3)$

原连通图有$n-2$个点可作为成环对象。

由于对称，不需要乘2。



还有吗……？

没了！所以$k = 2$的情况讨论完了。

时间复杂度$O(n^2m^2)$。

苹果树

小C在自己家的花园里种了一棵苹果树，树上每个结点都有恰好两个分支。经过细心的观察，小C发现每一天这棵树都会生长出一个新的结点。

第一天的时候,果树会长出一个根结点，以后每一天，果树会随机选择一个当前树中**没有长出过结点**的分支， 然后在这个分支上长出一个新结点，新结点与分支所属的结点之间连接上一条边。

小C定义一棵果树的不便度为树上两两结点之间的距离之和，两个结点之间的距离定义为从一个点走到另一个点的路径经过的边数。

现在他非常好奇，如果N天之后小G来他家摘苹果，这个不便度的期望E是多少。但是小C讨厌分数，所以他只想知道$E \times N!$对P取模的结果，可以证明这是一个整数。

$1 \le N \le 2000, 1 \le P \le 10^9 + 7$

BZOJ 5305 HAOI 2018 苹果树

由于乘了$N!$，相当于求每种方案任意两点距离之和，即求$\sum_T \sum_x sz_x(n - sz_x)$。

考虑转化问题：求每个点到他父亲这条边的贡献。

枚举点i和其子树大小sz_i，i之后的$(n - i)$个点选出$(sz_i - 1)$个点进入i子树。

1. i的子树内结构数：$sz_i!$

2. 子树外如何构造？先把i和子树看成一个新的点，那么构造到i一共有$i!$种构造方式。

对于后面的点，我们把它添加到除去i的子树的树上，那么第一个点方案$(i - 1)$，第二个点方案i，以此类推……

所以总方案为$(n - sz_i - 1)!\, i(i - 1) sz_i! \binom{n-i}{sz_i-1}$。

时间复杂度$O(n^2)$

集合计数

一个有n个元素的集合有2^n个不同子集（包含空集）。

现在要在这2^n个集合中取出若干集合（至少一个），使得它们的交集的元素个数为k。

求取法的方案数，答案模$10^9 + 7$。

$1 \le n \le 10^6, 0 \le k \le n$

BZOJ 2839 集合计数

设交集大于等于k的方案数为S_k，恰好为k的方案数为T_k。

那么，

$$S_k = \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}, S_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} T_i$$

也就是说，我们先从n个元素中选出k个元素放入交集中，那么我们就在包含这k个元素的2^{n-k}个集合中任选放入。

二项式反演得：

$$T_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} S_i = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{n}{i} 2^{2^{n-i}}$$

即得答案，复杂度$O(n)$。

赛艇

给出两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$，所有数两两不同，问a和b之间有多少种配对方案，使得：

$a_i > b_i$的数对个数比$b_i > a_i$数对个数恰好多k对。

$1 \le k \le n \le 2000$

BZOJ 3622 已经没有什么好害怕的了

即$a_i > b_i$的数对个数为$\frac{n+k}{2}$对，为方便起见，下文的k即指代$\frac{n+k}{2}$。

设b_i为至少有i对$a_i > b_i$的配对方案数量；a_i为恰好有i对$a_i > b_i$的配对方案数量。

那么这样我们如果能算出b_i，经过二项式反演一波就能得到a_i。

我们考虑接下来排序后进行dp：

令$f(i,j)$表示a中前i个数能选出比b大共有j对的方案数。

记$m_i = \sum_{j=1}^{n}[a_i > b_j]$，那么$f(i,j) = f(i-1,j) + (m_i - j + 1)f(i-1,j-1)$。

（前$(i-1)$个已经有j个，和前$(i-1)$个有$(j-1)$个，现在加一个）

那么$b_i = f(n,i) \times (n-i)!$（其他不管随便排），二项式反演即得到$a_i$。

时间复杂度$O(n^2)$

组合数问题

给定四个正整数n, p, k, r，求：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{nk}{ik+r} \bmod p$$

$1 \leq n \leq 10^9, 0 \leq r < k \leq 50, 2 \leq p \leq 2^{30} - 1$

BZOJ 4737 组合数问题

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{nk}{ik+r} \bmod p$$

问题转化：在nk个物品中，选出$\bmod k = r$个物品的方案数。

Dp：$f(i,j)$表示前i件物品，物品数$\bmod k = j$的方案数，那么容易写出转移方程式。

矩阵乘法加速即可。

复杂度$O(k^3 \log nk)$。

骗我呢

求满足以下条件的$n \times m$矩阵的个数对10^9+7取模。

对于矩阵中第i行第j列的元素$x_{i,j}$都有：

1. $x_{i,j} < x_{i,j+1}$

2. $x_{i,j} < x_{i-1,j+1}$

3. $0 \le x_{i,j} \le m$

要求复杂度$O(n)$。

BZOJ 4005 JLOI 2015 骗我呢

每行递增，且一行有m个元素，取值只能在$[0,m]$中选择。

那么该行至多一个位置与后面的元素相差2，其余都只相差1。

$f(i,j)$表示第i行没有出现过的数是j的方案数，那么

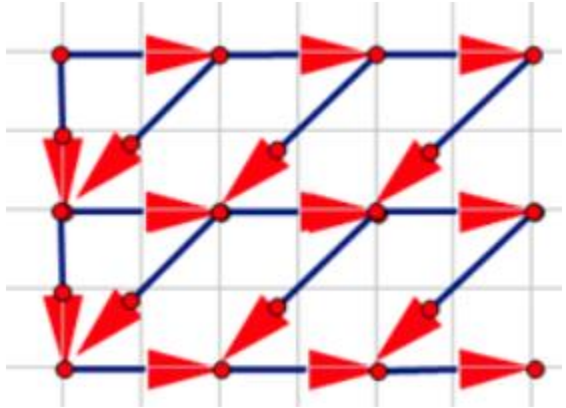
$f(i,j)=\sum_{k=0}^{j+1} f(i-1,k)=f(i-1,j+1)+f(i,j-1)$

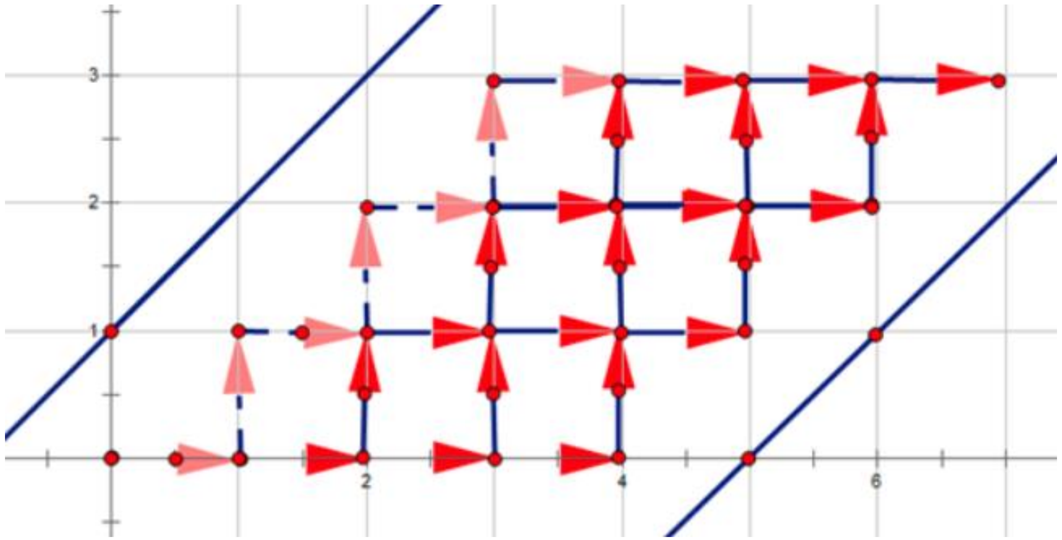
观察形式，考虑转化？

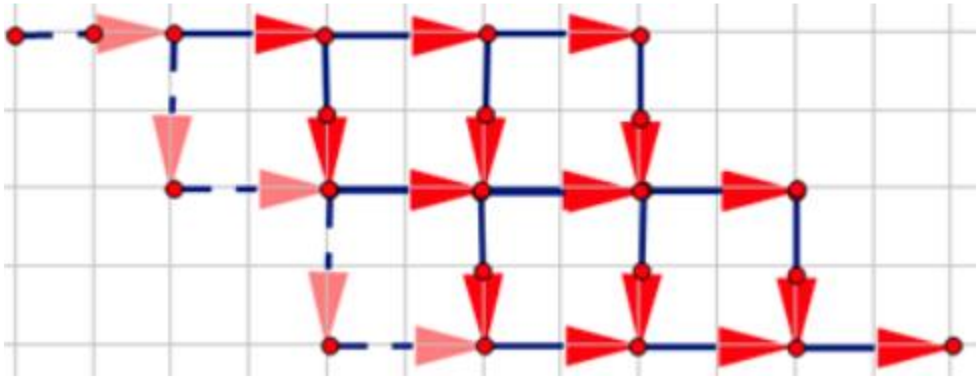
BZOJ 4005 JLOI 2015 骗我呢

转化为坐标！

再稍稍变形下！







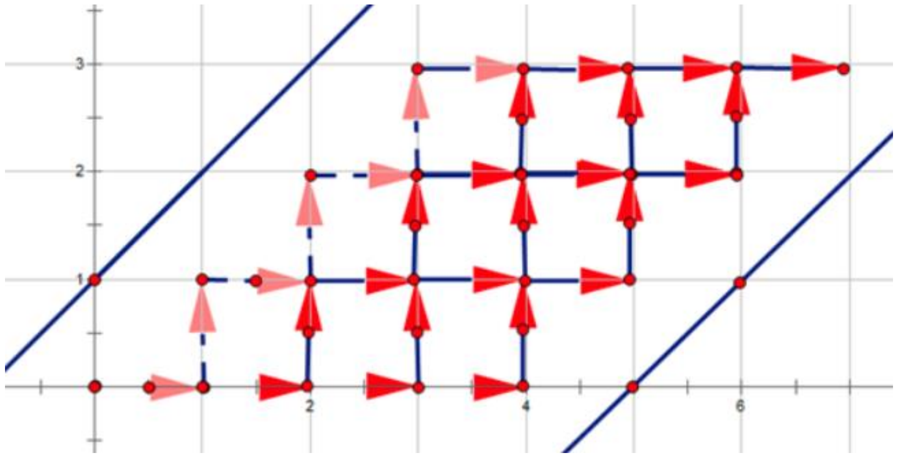
BZOJ 4005 JLOI 2015 骗我呢

转化为：

从原点出发，只能往右或往上走。

不接触直线$y = x + 1, y = x - (m + 2)$

到达点$(n + m - 1, n)$的方案数。



容斥！不考虑限制，到(x, y)的方案数为：$C(x + y, x)$

合法方案=总方案-第一次跨越$y = x + 1$的方案-第一次跨越$y = x - (m + 2)$的方案。

设触碰$y = x + 1$记录一次A，触碰$y = x - (m + 2)$记录一次B。

BZOJ 4005 JLOI 2015 骗我呢

以A开头不合法方案：

A，AB，ABA，ABAB，ABABA，……

容斥，等于以A/AB结尾的方案-以BA/BAB结尾的方案+以ABA/ABAB结尾的方案……

以A/AB结尾的方案相当于把终点利用$y = x + 1$对称得到(x', y')。

再以BA/BAB结尾相当于把(x', y')利用$y = x - (m + 2)$对称到(x'', y'')

就可以得出所有方案了！

对于B开头的不合法方案也统计一次。

时间复杂度$O(n)$。

数列

小T最近在学着买股票，他得到内部消息：F公司的股票将会疯涨。

股票每天的价格已知是正整数，并且由于客观上的原因，最多只能为n。

在疯涨的k天中小T观察到：除第一天外每天的股价都比前一天高，且高出的价格（即当天的股价与前一天的股价之差）不会超过m，m为正整数。并且这些参数满足$m(k-1) < n$。

小T忘记了这k天每天的具体股价了，他现在想知道这k天的股价有多少种可能。

$m, k, p \leq 10^9, n \leq 10^{18}$

BZOJ 3142 HNOI 2013 数列

设相邻两项差值为a_i，那么一个给定的长度为$k-1$的$\{a_i\}$贡献为$n-\sum_{i=1}^{k-1} a_i$

这样的序列a有m^{k-1}种，那么

$ans=\sum_{a_1=1}^{m}\sum_{a_2=1}^{m}\ldots\sum_{a_{k-1}=1}^{m}(n-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1})$

$ans=n\times m^{k-1}-\sum_{a_1=1}^{m}\sum_{a_2=1}^{m}\ldots\sum_{a_{k-1}=1}^{m}(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})$

由于有m^{k-1}种序列，每个数列有$(k-1)$个数，那么总共$m^{k-1}(k-1)$个数。

仔细思考可以发现，总共m个数出现次数是相等的，那么每个数$m^{k-2}(k-1)$次。

那么，1~m每个数都出现这么多次，总共$\frac{m(m+1)}{2}m^{k-2}(k-1)$.

故$ans=n\times m^{k-1}-\frac{m(m+1)}{2}m^{k-2}(k-1)$，快速幂即可。

图的同构

求两两互不同构的含n个点的简单图有多少种。

简单图是无重边、自环的图。

图A与图B被认为是同构的是指顶点经过一定的重新标号以后，顶点集和边集完全对应。

答案对997取模。

$0 \leq n \leq 60$

BZOJ 1488 HNOI 2009 图的同构

我们假设所有边都存在，然后相当于染成两种颜色（黑、白）。

染成白色相当于原图没有，染成黑色相当于原图有这条边。

本题中，同构对应的是边。那么根据Polya原理，答案显然是：

$$\frac{\sum_{i=1}^{|G|} 2^{C(a_i)}}{|G|}$$

考虑对于一个点置换，由于点置换和边置换的一一对应，

能否直接得到这个点置换下对应的边置换？

BZOJ 1488 HNOI 2009 图的同构

对于每条边，无非两种情况：

1. 两点属于点置换同一个循环节中；（处于长度为p的点循环节内部）（不妨p偶数）

首先，循环中相邻连边经过边置换在一个循环；

相隔一个连边经过边置换在一个循环；

相隔两个连边经过边置换也在一个循环……

相隔$\frac{p}{2}$个点连边经过边置换也在一个循环

相隔$\frac{p}{2}+1$个点连边经过边置换和相隔$p-\left(\frac{p}{2}+1\right)$个点连边的边置换后循环相同。

因此，边的循环节个数为$p/2$。

BZOJ 1488 HNOI 2009 图的同构

对于每条边，无非两种情况：

2. 两点处于不同循环节中（分别处于长度为n, m循环节内部）

对于任意一条边(a_i, b_j)，他和$(a_{i+1}, b_{j+1}), (a_{i+2}, b_{j+2})$ ...在同一循环节中。

显然这个过程会枚举$\mathrm{lcm}(n, m)$条边，总边数为nm，那么循环节个数为$\frac{nm}{\mathrm{lcm}(n,m)} = (n, m)$

因此我们可以直接由一个点置换得到边置换的循环节个数，利用Polya原理得解。

但是枚举点置换是$O(n!)$的！

BZOJ 1488 HNOI 2009 图的同构

我们发现，边置换的循环节个数只与点置换循环节长度相关。

因此考虑枚举点置换的循环节长度，即枚举n的一个划分。

钦定有序后从小到大枚举，假设目前枚举了一个划分$l_1, l_2, \dots, l_k$，那么

长度为i的循环节个数为s_i个，则这种划分所代表的点置换个数为？

$$\frac{n!}{l_1 l_2 \dots l_k s_1! \, s_2! \dots s_t!}$$

除以l_i是为了除去循环节内部的圆周排列。除以$s_i!$是为了除去相同大小循环节重复排列。

有了一类点置换，算相关的边置换的循环节长度利用前面的结论即可！

复杂度转化为n的有序整数拆分数相关。在$n = 60$时可以接受。