

计算几何基础知识

delayyy

May 22, 2015

简介

计算几何，主要是用向量来解决几何问题。

由于只关心相对位置关系，可以避免复杂的分类讨论。

比解析几何不知道高明到哪里去了！

向量

向量就是有大小和方向的量。

和点一样，用两个数 x, y 表示，即二维坐标的变化量。

四则运算

向量 + 向量

向量 - 向量

向量 \times 数值

向量 \div 数值

向量 AB 可以由 $B - A$ 得到。

叉积

令 $cj(a, b)$ 表示向量 a, b 的叉积。

$$\begin{aligned}cj(a, b) &= a.x * b.y - a.y * b.x \\ &= |a| * |b| * \sin \angle a, b\end{aligned}$$

叉积

作用

- 三角形的有向面积
- 判点在向量的哪一侧
- 判平行
-

性质

- $cj(a, b) = -cj(b, a)$
- $cj(a, b + c) = cj(a, b) + cj(a, c)$
- $cj(a, b * k) = cj(a, b) * k$

点积

令 $dj(a, b)$ 表示向量 a, b 的点积。

$$\begin{aligned}dj(a, b) &= a.x * b.x + a.y * b.y \\ &= |a| * |b| * \cos < a, b >\end{aligned}$$

点积

作用

- 计算两向量夹角
- 判两向量的同向关系
- 判垂直
-

性质

- $dj(a, b) = dj(b, a)$
- $dj(a, b + c) = dj(a, b) + dj(a, c)$
- $dj(a, b * k) = dj(a, b) * k$

旋转

设 $v = (x, y)$, 则 v 逆时针旋转 α 得到:

$$v' = (\cos\alpha * x - \sin\alpha * y, \sin\alpha * x + \cos\alpha * y)$$

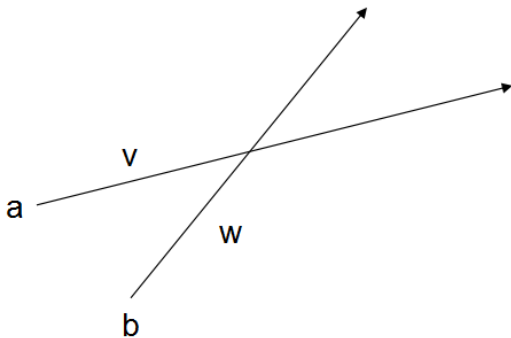
有了上述技能……

大多数基本计算都可以自己推出来。

求两条直线的交点

把直线表示为：(点 , 向量)。

设 $l_1 = (a, v)$, $l_2 = (b, w)$ 。



求两条直线的交点

设交点为 $a + tv$ ，则：

$$cj(a + tv - b, w) = 0$$

$$cj(a - b, w) + cj(tv, w) = 0$$

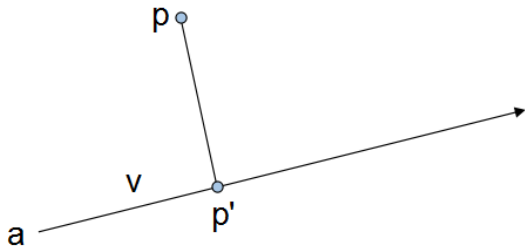
$$t * cj(v, w) = cj(b - a, w)$$

$$t = cj(b - a, w) / cj(v, w)$$

得到 t 后即可算出交点。

求点到直线的垂足

设点 p , 直线 $l = (a, v)$ 。



求点到直线的垂足

设垂足为 $a + tv$, 则:

$$dj(a + tv - p, v) = 0$$

$$dj(a - p, v) + dj(tv, v) = 0$$

$$t * dj(v, v) = dj(p - a, v)$$

$$t = dj(p - a, v) / dj(v, v)$$

其它基本计算:

- 点圆求切
- 线圆求交
- 圆圆求交
-
- 线段相交
- 点到线段的距离
-

都能很容易推出来。

多边形

- 点在多边形内判定: $O(n)$
- 直线与多边形求交: $O(n)$

- 点在凸多边形内判定: $O(\log n)$
- 直线与凸多边形求交: $O(\log n)$
- 点与凸多边形求切: $O(\log n)$

- 有向面积

有关算法或数据结构

- 凸包
- 半平面交
- K-D 树
- 平面图
- Delaunay三角剖分与V图
- 辛普森公式
-

Thanks for listening