DP入门

TA

CST, Tsinghua University

Oct. 2018

Contents

Graph

TA

SP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 对形 DP 状压 DP

- 1 DP 入门
- 2 线性 DP
- 3 区间 DP
- 5 树形 DP
- 6 状压 DP
- 7 背包问题
- 8 后记

Contents

Graph

DP 入门

1 DP 入门

2 线性 DP

3 区间 DP

5 树形 DP

6 状压 DP

7 背包问题

8 后记

Graph

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 想要回答"什么是动态规划"这种问题从来是很困难的,动态规划有着广阔的内涵,我们或许可以这样概括:

求解一类最优化问题, 将原问题划分成子问题, 子问题有非常工整的结构.

Graph

IA

SE DE ATT DE A

状压 DP 背包问题 想要回答"什么是动态规划"这种问题从来是很困难的,动态规划有着广阔的内涵,我们或许可以这样概括:

求解一类最优化问题, 将原问题划分成子问题, 子问题有非常工整的结构.

DP 术语: 状态, 状态转移方程.

子问题图: 以状态为点, 以状态之间的转移为边.

子问题图是一个 DAG.

Graph

TA

SET OF ACT OF

树形 DP 状压 DP 背包问题 想要回答"什么是动态规划"这种问题从来是很困难的,动态规划有着广阔的内涵,我们或许可以这样概括:

求解一类最优化问题,将原问题划分成子问题,子问题有非常工整的结构。

DP 术语: 状态, 状态转移方程.

子问题图: 以状态为点, 以状态之间的转移为边.

子问题图是一个 DAG.

DP 的顺序:

- 递推 (bottom-up method)
- 记忆化搜索 (top-down with memoziation)

Graph

TA

树形 DP 状压 DP 背包问题 想要回答"什么是动态规划"这种问题从来是很困难的,动态规划有着广阔的内涵,我们或许可以这样概括:

求解一类最优化问题,将原问题划分成子问题,子问题有非常工整的结构.

DP 术语: 状态, 状态转移方程.

子问题图: 以状态为点, 以状态之间的转移为边.

子问题图是一个 DAG.

DP 的顺序:

- 递推 (bottom-up method)
- 记忆化搜索 (top-down with memoziation)

问题的内涵: 最值, 方案, 方案数.

Contents

Graph

T.

DP VI

线性 DP

区间 DP

环形 DP

树形 DP

壮田 DP

北白问明

后记

1 DP 入门

2 线性 DP

3 区间 DP

5 树形 DP

6 状压 DP

7 背包问题

8 后记

一般思路

Graph

- 17

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 状压 DP

一般 dp 形式为前 i 个元素, 通过考虑对于最后一个元素的选择来转移.

Graph

• • •

线性 DP

区间 DI 环形 DI

树形 DF

状压 DI

背包问题

后记

已知 {a_n}, 求

$$\max_{1 \leq l \leq r \leq n} \{ \sum_{i=l}^r a_i \}$$

 $\mathit{n} \leq 10^7$

Graph TA

BP 入门 **线性 DP** 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 状压 DP

解法一: 考虑最短负前缀, 要么是最大子段和是其前缀, 要么与最大子段和无交.

TA
DP 入门 **线性 DP**区间 DP
环形 DP
树形 DP
状压 DP

Graph

解法一: 考虑最短负前缀, 要么是最大子段和是其前缀, 要么与最大子段和无交.

解法二: DP, f_i 表示以 i 为结尾的最大子段和 (可能为空), $f_i = \max(f_{i-1}, 0) + a_i$.

TA
DP 入门
线性 DP
区间 DP
环形 DP
树形 DP

Graph

解法一: 考虑最短负前缀, 要么是最大子段和是其前缀, 要么与最大子段和无交.

解法二: DP, f_i 表示以 i 为结尾的最大子段和 (可能为空), $f_i = \max(f_{i-1}, 0) + a_i$.

解法三: 考虑前缀和, 问题变成求

$$\max_{0 \leq i < j \leq n} \{s_j - s_i\} = \max_{1 \leq j \leq n} \{s_j - \min_{0 \leq i < j} \{s_i\}\}$$

动态最大子段和

Graph

线性 DP

维护一个序列, 支持

- 单点修改
- 查询区间最大子段和

 $n, m \le 3 * 10^5$

动态最大子段和

Graph TA

DP 入门 **线性 DP**

球形 DI 树形 DI 壮田 DI

状座 DF 背包问題 后记 维护一个序列, 支持

- 单点修改
- 查询区间最大子段和

 $\mathit{n},\mathit{m} \leq 3*10^5$

使用线段树, 每个区间维护:

- 包含左端点的最大子段和
- 包含右端点的最大子段和
- 最大子段和
- 区间和

TA
DP 入门 **线性 DP**区间 DP
环形 DP
树形 DP
状压 DP

Graph

一个长度为 s 的上升子序列 P 被定义为 $P=(i_1,\cdots,i_s),1< i_1<\cdots< i_s,a_{i_1}< a_{i_2}<\cdots< a_{i_s},$ 求最长的上升子序列的长度是多少? $n\leq 10^6$

Graph

TA

DP 入门 线性 DP

区间 DP

外形 DI

状压 DF

后记

解法一: f(i) 表示以 i 结尾的最长上升子序列.

$$f(i) = \max_{1 \le j < i} \{f(j)\}$$

使用树状数组求前缀 max.

Q: 为什么在这个题中树状数组可以求前缀 max?

Graph

TA

DP 入门 线性 DP

区间 DP 环形 DP

树形 DF 状压 DF

が 計包 问 記

解法一: f(i) 表示以 i 结尾的最长上升子序列.

$$f(i) = \max_{1 \le j < i} \{f(j)\}$$

使用树状数组求前缀 max.

Q: 为什么在这个题中树状数组可以求前缀 max?

解法二: 按 j 从小到大的顺序求 f(j), 对于每一个 k, 使用一个数组 g 维护 $\min\{a_i\}$, f(i)=k.

Graph

TA

DP 入门 线性 DP

区间 DP 环形 DP

状压 DF

背包问 后记 解法一: f(i) 表示以 i 结尾的最长上升子序列.

$$f(i) = \max_{1 \le j < i} \{f(j)\}$$

使用树状数组求前缀 max.

Q: 为什么在这个题中树状数组可以求前缀 max?

解法二: 按 j 从小到大的顺序求 f(j), 对于每一个 k, 使用一个数组 g 维护 $\min\{a_i\}$, f(i)=k.

Q: 如何统计最长子序列的方案数?

Graph

TA

DP 入门 线性 DP

区间 DF

环形 DI

状压 DF

背包问题

解法一: f(i) 表示以 i 结尾的最长上升子序列.

$$f(i) = \max_{1 \le j < i} \{f(j)\}$$

使用树状数组求前缀 max.

Q: 为什么在这个题中树状数组可以求前缀 max?

解法二: 按 j 从小到大的顺序求 f(j), 对于每一个 k, 使用一个数组 g 维护 $\min\{a_i\}$, f(i)=k.

Q: 如何统计最长子序列的方案数?

在 g 中套一个 vector, vector 每个元素记录历史权值大小和方案数的前缀和.

最长公共子序列

Graph

DP 入门 **线性 DP** 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题

已知两个整数序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 求它们的最长公共子序列. 长度为 s 的公共子序列定义为 (i_1, i_2, \dots, i_s) , $i_1 < i_2 < \dots < i_s$, $a_{i_1} = b_{i_1}$,

$$(n_1, i_2, \dots, i_s), n < i_2 < \dots < a_{i_2} = b_{i_2}, \dots, a_{i_n} = b_{i_n}.$$
 $n < 5000$

已知两个整数序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 求它们的最长公共子序列. 长度为 s 的公共子序列定义为

$$(i_1, i_2, \cdots, i_s), i_1 < i_2 < \cdots < i_s, \ a_{i_1} = b_{i_1}, \ a_{i_2} = b_{i_2}, \cdots, a_{i_n} = b_{i_n}. \ n \le 5000$$

f(i,j) 表示 a_{1-i} , b_{1-j} 的最长公共子序列.

$$f(i,j) = \min \begin{cases} f(i-1,j-1) &, a_i = b_j \\ f(i,j-1) & f(i-1,j) \end{cases}$$

最优矩阵链乘

n < 5000

Graph TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题

有 n 个矩阵 A_1,A_2,\cdots,A_n , 每个矩阵的大小是 $p_i\times q_i$, 求计 算 $\prod_{i=1}^n A_i$ 最少需要多少次整数乘法? 有多少种方案来计算 这个乘积?

4D > 4@ > 4 E > 4 E > 9 Q (^

最优矩阵链乘

Graph

DP 入门 **线性 DP 线性 DP** 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包记

有 n 个矩阵 A_1, A_2, \dots, A_n , 每个矩阵的大小是 $p_i \times q_i$, 求计 算 $\prod_{i=1}^n A_i$ 最少需要多少次整数乘法? 有多少种方案来计算 这个乘积?

 $n \le 5000$

f(l,r) 表示把 [l,r] 的矩阵乘起来的最少需要的整数乘法次数.

$$f(l,r) = \min_{1 \le i < r} \{ f(l,i) + f(i+1,r) + q_i p_{i+1} \}$$

方案数: Catlan 数

Contents

Graph

TA

DP 入门 线性 DP

区间 DP

环形 DP

状压 DP

背包问题

后记

- 1 DP 入门
- 2 线性 DP
- 3 区间 DP
- 5 树形 DP
- 6 状压 DP
- 7 背包问题
- 8 后记

一般思路

TA
DP 入门
线性 DP
区间 DP
环形 DP
树形 DP
状压 DP

Graph

状态为区间.

常见的有两种转移方法:

- 考虑区间端点处的选择.
- 考虑区间的划分.

后者复杂度可能较高,可以通过四边形不等式优化。

关路灯

TA
DP 入门
线性 DP
区间 DP
环形 DP
树形 DP
材法 DP
状色 DD

一条马路上有 n 盏路灯, 第 i 盏路灯在位置 a_i , 每秒钟会消耗 w_i 的能源. 现在你在位置 x 处, 每秒钟可以移动一个单位距 离. 当你走到路灯所在的位置后你可以把路灯关掉, 现在你需要把所有的路灯都关掉, 此时消耗的最少能源是多少? n < 5000

关路灯

Graph
TA
DP 入门
线性 DP
区间 DP
环形 DP
树形 DP
材状压 DP

一条马路上有 n 盏路灯, 第 i 盏路灯在位置 a_i , 每秒钟会消耗 w_i 的能源. 现在你在位置 x 处, 每秒钟可以移动一个单位距 离. 当你走到路灯所在的位置后你可以把路灯关掉, 现在你需要把所有的路灯都关掉, 此时消耗的最少能源是多少? n < 5000

关掉的路灯必然是一个区间.

f(l, r, 0/1) 表示关掉第 l 到第 r 个路灯,都关上之后在左/右边的方案数.

$$f(I, r, 0) = \min \begin{cases} f(I+1, r, 0) + a_{I+1} - a_{I} \\ f(I+1, r, 1) + a_{r} - a_{I} \end{cases}$$

$$f(l, r, 1) = \min \begin{cases} f(l, r - 1, 0) + a_r - a_l \\ f(l, r - 1, 1) + a_r - a_{r-1} \end{cases}$$

石子合并

Graph

דוג פו

线性 DP **区间 DP** 环形 DP 树形 DP 状压 问题

有 n 堆石子排成一排, 第 i 堆石子的重量为 a_i, 你可以把相邻的两堆石子合并成一堆, 合并的代价是石子重量和. 最小化把这 n 堆石子合并成一堆的方案数.

 $n \le 400$

 $n \le 5000$

石子合并: 区间 DP

Graph TA

BP 入门 线性 DP **区间 DP** 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题

令 f(l,r) 表示将第 | 堆到第 r 堆石子合并的最小代价.

$$f(l,r) = \min_{l \le i < r} \{ f(l,i) + f(i+1,r) \} + \sum_{i=1}^{r} a_i$$

石子合并: 四边形不等式

TA

DP 入门
线性 DP **区间 DP**环形 DP

树形 DP

状压 DP

背包问题

Graph

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$, 则称 f 满足四边形不等式.

石子合并: 四边形不等式

TA

DP 入门

线性 DP

区间 DP

环形 DP

材形 DP

状形 DP

状色问题

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$,则称 f 满足四边形不等式.

一个重要的观察: 问题是左右对称的.

石子合并: 四边形不等式

Graph
TA

DP 入门
线性 DP
区间 DP

环形 DP
树形 DP
状压 DP
特包问题

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$,则称 f 满足四边形不等式.

一个重要的观察: 问题是左右对称的.

Q: 这一定义是否与 $\forall I, r, f_{l,r} + f_{l+1,r+1} \leq f_{l,r+1} + f_{l+1,r}$ 等价?

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$,则称 f 满足四边形不等式.

一个重要的观察: 问题是左右对称的.

Q: 这一定义是否与 $\forall I, r, f_{l,r} + f_{l+1,r+1} \leq f_{l,r+1} + f_{l+1,r}$ 等价? A: 对 b-a 利用数学归纳法证明.

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$, 则称 f 满足四边形不等式.

一个重要的观察: 问题是左右对称的.

Q: 这一定义是否与 $\forall l, r, f_{l,r} + f_{l+1,r+1} \leq f_{l,r+1} + f_{l+1,r}$ 等价? A: 对 b-a 利用数学归纳法证明.

优化定理: 若 f 满足四边形不等式, 令 $g_{l,r}$ 表示 f 取到最优解时 i 的取值, 则 $g_{l,r-1} \leq g_{l,r} \leq g_{l+1,r}$.

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$, 则称 f 满足四边形不等式.

一个重要的观察: 问题是左右对称的.

Q: 这一定义是否与 $\forall I, r, f_{l,r} + f_{l+1,r+1} \leq f_{l,r+1} + f_{l+1,r}$ 等价? A: 对 b-a 利用数学归纳法证明.

优化定理: 若 f 满足四边形不等式, 令 $g_{l,r}$ 表示 f 取到最优解时 i 的取值, 则 $g_{l,r-1} < g_{l,r} < g_{l+1,r}$.

证明: 只需证明

$$\forall I < k < g_{I,r}, (f_{I+1,g_{I,r}} + f_{g_{I,r}+1,r}) - (f_{I+1,k} + f_{k+1,r}) \le (f_{I,g_{I,r}} + f_{g_{I,r}+1,r}) - (f_{I,k} + f_{k+1,r})$$

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$, 则称 f 满足四边形不等式.

一个重要的观察: 问题是左右对称的.

Q: 这一定义是否与 $\forall I, r, f_{l,r} + f_{l+1,r+1} \leq f_{l,r+1} + f_{l+1,r}$ 等价? A: 对 b-a 利用数学归纳法证明.

优化定理: 若 f 满足四边形不等式, 令 $g_{l,r}$ 表示 f 取到最优解 时 i 的取值, 则 $g_{l,r-1} < g_{l,r} < g_{l+1,r}$.

证明: 只需证明

$$\forall I < k < g_{l,r}, (f_{l+1,g_{l,r}} + f_{g_{l,r}+1,r}) - (f_{l+1,k} + f_{k+1,r}) \le (f_{l,g_{l,r}} + f_{g_{l,r}+1,r}) - (f_{l,k} + f_{k+1,r})$$

四边形不等式定理: 若 w 满足四边形不等式,则 f 满足四边形不等式.

对于形如 $f_{l,r} = \min_{l \leq i < r} \{ f_{l,i} + f_{i+1,r} \} + w_{l,r}$ 的状态转移方程,若 $\forall a \leq b \leq c \leq d$, $f_{a,c} + f_{b,d} \leq f_{a,d} + f_{b,c}$, 则称 f 满足四边形不等式.

一个重要的观察: 问题是左右对称的.

Q: 这一定义是否与 $\forall I, r, f_{l,r} + f_{l+1,r+1} \leq f_{l,r+1} + f_{l+1,r}$ 等价? A: 对 b-a 利用数学归纳法证明.

优化定理: 若 f 满足四边形不等式, 令 $g_{l,r}$ 表示 f 取到最优解时 i 的取值, 则 $g_{l,r-1} \le g_{l,r} \le g_{l+1,r}$.

证明: 只需证明

$$\forall I < k < g_{l,r}, (f_{l+1,g_{l,r}} + f_{g_{l,r}+1,r}) - (f_{l+1,k} + f_{k+1,r}) \le (f_{l,g_{l,r}} + f_{g_{l,r}+1,r}) - (f_{l,k} + f_{k+1,r})$$

四边形不等式定理: 若 w 满足四边形不等式,则 f 满足四边形不等式.

证明: 对区间长度归纳证明.

最优二叉搜索树

Graph TA

DP 入门 线性 DP **区间 DP** 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题

有 1-n 这 n 个数, 对于 i 而言有 a_i 的概率会询问 i, 对其建立一个最优二叉搜索树使得查询的期望深度最小.

 $n \le 500$

 $n \le 2000$

最优二叉搜索树

Graph

DP 入门 线性 DP **区间 DP** 环形 DP 树形 DP 状压 DP

有 1-n 这 n 个数, 对于 i 而言有 ai 的概率会询问 i, 对其建立一个最优二叉搜索树使得查询的期望深度最小.

$$n \le 500$$

$$n \le 2000$$

$$f_{l,r} = \min_{l < i < r} \{ f_{l,i-1} + f_{i+1,r} \} + \sum_{i=1}^{r} a_i$$

Q: f 是否满足四边形不等式?

Contents

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP

<mark>环形 DP</mark> 树形 DP

状压 DP

背包问

1 DP 入门

2 线性 DP

3 区间 DP

4 环形 DP

5 树形 DP

6 状压 DP

7 背包问题

8 后记

TA
DP 入门
线性 DP
区间 DP
环形 DP
树形 DP
状压 DP

Graph

一般处理环有两种方法:

- 将环倍长,将环的条件改对区间长度的限制条件
- 枚举环中的一点, 破环为链

环形最大子段和

Graph TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP

在大小为 n 的环 (环上每个元素是一个正数) 上选一个子段 (不能有重复元素), 使得子段和最大. $n < 10^7$

环形最大子段和

Graph ⊤∆

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP

在大小为 n 的环 (环上每个元素是一个正数) 上选一个子段 (不能有重复元素), 使得子段和最大. $n < 10^7$

将环倍长, DP 不再适用, 但前缀和的方法依然可行.

$$\max_{0 \le l < r \le 2n \land r - l \le n} \{s_r - s_l\}$$

需要使用单调队列优化.

环形 LIS

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP

在大小为 n 的环上求 LIS. $n \le 10000$

环形 LIS

Graph TA

数性 DP 线性 DP 区间 DP **环形 DP** 树形 DP 状压 DP

在大小为 n 的环上求 LIS.

 $n \le 10000$

将 f 相同的元素连起来, 形成若干条不上升链.

需要支持: 在首端删除一个元素, 在末端添加一个元素.

环上最大带权独立集

Graph

DP 入门 线性 DP 区间 DP **环形 DP** 树形 DP 状压 DP 背包问题

在大小为 n 的环上选择若干个不相邻的数, 使得其和最大. $n \leq 10^7$

环上最大带权独立集

Graph TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题

在大小为 n 的环上选择若干个不相邻的数, 使得其和最大. $n \leq 10^7$

枚举第一个数选或者不选, 即可破环为链.

Contents

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP

树形 DP

八正 ロト

有吧吧

1 DP 入门

2 线性 DP

3 区间 DP

5 树形 DP

6 状压 DP

7 背包问题

8 后记

Graph

ΤA

DP 入门 线性 DP 区间 DP

ー.ラー: 环形 DI

树形 DP

状压 D

后记

往往在 LCA 处统计信息: 链, 连通点集, 子树...

Graph

17

SE DP AII 线性 DP 区间 DP

树形 DP 状压 DP

状压 DI 背包问题

后记

往往在 LCA 处统计信息: 链, 连通点集, 子树...

LCA 的性质:

$$LCA(a, b) = LCA(b, a)$$

$$LCA(LCA(a, b), c) = LCA(a, LCA(b, c)$$

所以我们可以定义 $LCA(A), A \subset V$.

Graph

DP 入门 线性 DF

区间 DP 环形 DP 树形 DP

状压 DI 背包问题

后记

往往在 LCA 处统计信息: 链, 连通点集, 子树...

LCA 的性质:

$$LCA(a, b) = LCA(b, a)$$

$$LCA(LCA(a, b), c) = LCA(a, LCA(b, c)$$

所以我们可以定义 $LCA(A), A \subset V$.

Q: 树上连通点集的 LCA 是否一定属于这个连通点集?

树的直径

Graph

树形 DP

求一棵 n 个节点有边权的树的直径 (距离最远的点对的距离), (不) 保证树的边权非负? $n < 4 * 10^6$

树的直径

TA
DP 入门
线性 DP
区间 DP
环形 DP
FF DP

求一棵 n 个节点有边权的树的直径 (距离最远的点对的距离), (\mathbf{A}) 保证树的边权非负? $n < 4 * 10^6$

权值非负: 贪心.

从任意一个点 \times 出发, 找到距离 \times 最远的点 u, 再找到距离 u 最远的点 v, u 和 v 之间的距离便是直径.

求一棵 n 个节点有边权的树的直径 (距离最远的点对的距离), (不) 保证树的边权非负?

$$n \le 4 * 10^6$$

权值非负: 贪心.

从任意一个点 \times 出发, 找到距离 \times 最远的点 u, 再找到距离 u 最远的点 v, u 和 v 之间的距离便是直径.

权值可以为负: DP. 令 f_i 表示从 i 往下走的最远距离.

$$f_i = \max_{j \in child_i} \{f_j + w(i, j)\}$$

$$ans = \max_{i} \max_{j \neq k \in child_i} \{ f_j + w(i, j) + f_k + w(i, k) \}$$

在每个节点求一个最大值和次大值.

树上最远距离

Graph

TA

DP 入门 线性 DF

区间 DI

树形 DP

状压 DP 背包问题 求树中距离每个点最远的点的距离. $n < 4 * 10^6$

求树中距离每个点最远的点的距离.

$$n \le 4 * 10^6$$

先 dp 出上一道题的 f, 再以 g_i 表示 i 往上走的最远距离.

$$g_i = \max \left\{ egin{array}{ll} g_{ extit{parent}_i} & j \in sibling_i \end{array}
ight. + w_{i, extit{parent}_i} \end{array}
ight.$$

$$extit{ans} = \max_i \left\{ egin{array}{ll} f_j + \textit{w}(i,j) + f_k + \textit{w}(i,k) & j
eq k \in \textit{child}_i \\ \textit{g}_i \end{array}
ight.$$

树上最大独立集

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP

区间 DP 环形 DP

树形 DP 状压 DP 背包问题

后记

在树上选出最多的点使得它们两两不相邻。 有/无点权. $n < 10^7$

树上最大独立集

Service of the servi

在树上选出最多的点使得它们两两不相邻. 有/无点权. $n < 10^7$

无点权: 贪心.

不断地选叶节点,删掉与之相邻的节点。

树上最大独立集

Graph

TA

A门

数性 DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP **树形 DP** 状压 DP 在树上选出最多的点使得它们两两不相邻。 有/无点权. $n < 10^7$

无点权: 贪心.

不断地选叶节点, 删掉与之相邻的节点.

带点权: DP. $f_{i,0/1}$ 表示以 i 为根的子树, i 不选/选的答案.

$$f_{i,1} = \sum_{j \in child_i} f_{j,0}$$

$$f_{i,0} = \sum_{j \in child_i} \max\{f_{j,0}, f_{j,1}\}$$

$$ans = \max\{f_{root,0}, f_{root,1}\}$$

环套树上的 DP

Graph TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题

环套树的定义: 有且仅有一个环的连通图 (若为有向图则是指 其底环连通).

其实就是树形 DP+ 区间 DP.

环套树上最大独立集

Graph

树形 DP

在带点权的环套树上求最大独立集. $n < 3 * 10^6$

环套树上最大独立集

Graph

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 材形 DP

在带点权的环套树上求最大独立集

 $n \le 3*10^6$

枚举环上一点选/不选,将环套树破成树做即可.

环套树的直径

Graph

DP 入门 线性 DP

区间 DP

树形 DP 状压 DP 有边权的环套树上求两点间最小距离的最大值. $n \le 3*10^6$

环套树的直径

Graph TA

SE DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 材形 DP 有边权的环套树上求两点间最小距离的最大值. $n < 3 * 10^6$

直径分为两种情况: 经过环的和不经过环的. 处理出环上每一棵树中的直径 g_i 和最大带权深度 f_i . 将环倍长 (环长为 m, 设其节点编号为 1-m(倍长之后是 1-2m), a_i 为 i-1 号节点和 i 号节点之间的距离, $s_i = \sum_{j=2}^i a_j$).

$$\mathit{ans} = \max \left\{ \begin{array}{cl} \mathit{s_r} - \mathit{s_l} + \mathit{f_l} + \mathit{f_r} & \mathit{r-l} < \mathit{m} \land 0 < \mathit{l} < \mathit{r} \leq 2\mathit{m} \\ \mathit{g_i} \end{array} \right.$$

需要使用单调队列优化.

Contents

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP STR DP

树形 DF

状压 DP

后记

- 1 DP 入门
- 2 线性 DP
- 3 区间 DP
- 4 **环形** DP
- 5 树形 DP
- 6 状压 DP
- 7 背包问题
- 8 后记

一般思路

TA P 入门 性 DP 间 DP 形 DP 形 DP

状压 DP

Graph

DP 状态是一个集合 S.

常见转移:

- 枚举某一个元素选/不选.
- ■枚举子集

Q: 如何枚举子集?

子集和

Graph TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 你有 n 个数, 在其中选出若干个数, 求出每个选数方案中选出的数的和. n < 20

子集和

Graph

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题

你有 n 个数, 在其中选出若干个数, 求出每个选数方案中选出的数的和.

 $n \le 20$

子集和卷积: f(i, S) 表示在 S 中, 前 i 个数是子集和, 其余的数的选择确定的方案数.

$$f(i,S) = \begin{cases} f(i-1,S) & i \notin S \\ f(i-1,S) + f(i-1,S-\{i\}) & i \in S \end{cases}$$

可以使用滚动数组优化空间.

又见 LIS

Graph

TA

OP 入门 线性 DP X间 DP

区间 DI 环形 DI

树形 DI

状压 DP

后记

1-n 的排列中有多少个满足 LIS 的长度为 k?

 $n \le 14$

 $\mathit{n} \leq 16$

又见 LIS

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题 1-n 的排列中有多少个满足 LIS 的长度为 k?

 $n \le 14$

 $n \le 16$

解法一: 观察到输入的所有可能并不多, 可以尝试搜索 + 打表. O(n!)

又见 LIS

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP 树形 DP 状压 DP 背包问题 1-n 的排列中有多少个满足 LIS 的长度为 k? $n \le 14$

n < 16

 $n \le 16$

解法一: 观察到输入的所有可能并不多, 可以尝试搜索 + 打表. O(n!)

解法二: 我们从一个空排列开始考虑,不断地把每一个数加入排列,这时对于每一个数有三种情况:

- 已在排列中, 但不是 LIS 某一个链的末尾.
- 已在排列中, 且是 LIS 某一个链的末尾.
- 尚未在排列中.

我们需要使用三进制来表示状态。

$$O(3^n + 2^n n)$$

Contents

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP

树形 DF

背包问题

后记

1 DP 入门

2 线性 DP

3 区间 DP

4 环形 DP

5 树形 DP

6 状压 DP

7 背包问题

8 后记

一般思路

Graph

TΑ

线性 DP 区间 DP 环形 DP

树形 DF

背包问题

后记

一般思路就不讲了吧, 大家应该都会.

大容量的背包

Graph

TA

DP 入门 线性 DF 区间 DF

区间 DP 环形 DP

状压□

背包问题 后记 n 个物品,每个物品有体积 v_i ,价值 w_i ,背包容量为 V,最大化价值总和.

 $n \le 40, V \le 10^9$

大容量的背包

Graph

DP 入门 线性 DP K间 DP

环形 DP 树形 DP 状压 DP

背包问题 后记 n 个物品,每个物品有体积 v_i ,价值 w_i ,背包容量为 V,最大化价值总和.

 $n \le 40, V \le 10^9$

meet-in-middle: 把物品分成两半 A 和 B, 每一半枚举出其 2ⁿ 种情况. 将 A 中的子集按体积排序. 枚举 B 中的所有情况, 在 A 中寻找加起来体积不超过 V, 且价值最大者. 可以在 A 中二分, 或者将 B 也按体积排序, 扫描 B 时最优的 A 即会是单调的.

背包问题

n 个物品, 每个物品有体积 v_i , 价值 w_i , 背包容量为 V, 最大化价值总和.

$$n \le 40, V \le 10^9$$

meet-in-middle: 把物品分成两半 A 和 B, 每一半枚举出其 2ⁿ 种情况. 将 A 中的子集按体积排序. 枚举 B 中的所有情况, 在 A 中寻找加起来体积不超过 V, 且价值最大者. 可以在 A 中二分, 或者将 B 也按体积排序, 扫描 B 时最优的 A 即会是单调的.

$$n \le 500, V \le 10^9, w_i \le 500$$

n 个物品,每个物品有体积 v_i ,价值 w_i ,背包容量为 V,最大化价值总和.

$$n \le 40, V \le 10^9$$

meet-in-middle: 把物品分成两半 A 和 B, 每一半枚举出其 2ⁿ 种情况. 将 A 中的子集按体积排序. 枚举 B 中的所有情况, 在 A 中寻找加起来体积不超过 V, 且价值最大者. 可以在 A 中二分, 或者将 B 也按体积排序, 扫描 B 时最优的 A 即会是单调的.

$$n \le 500, V \le 10^9, w_i \le 500$$

改为求 f(i,j) 表示前 i 个物品, 总价值为 j, 体积最小是多少.

多重背包

Graph

DP 入门 线性 DP 区间 DP 不形 DP 对形 DP 状压 DP

背包问题

n 个物品, 每个物品有体积 v_i , 价值 w_i , 可以选至多 p_i 次, 背包容量为 V, 最大化价值总和.

 $n, V \le 1000$

 $n, V \le 5000$

多重背包

Graph

背包问题

n 个物品, 每个物品有体积 v_i , 价值 w_i , 可以选至多 p_i 次, 背 包容量为 V. 最大化价值总和.

 $n, V \le 1000$ $n, V \le 5000$

二进制拆分: 把每个物品拆成其 $2^{0}, 2^{1}, \cdots, 2^{\lfloor \log_{2} p_{i} \rfloor - 1}, p_{i} - 2^{\lfloor \log_{2} p_{i} \rfloor} + 1$ 倍. n 个物品, 每个物品有体积 v_i , 价值 w_i , 可以选至多 p_i 次, 背包容量为 V, 最大化价值总和.

 $n, V \le 1000$ $n, V \le 5000$

二进制拆分: 把每个物品拆成其 $2^0, 2^1, \cdots, 2^{\lfloor log_2p_i \rfloor - 1}, p_i - 2^{\lfloor log_2p_i \rfloor} + 1$ 倍.

单调队列优化

$$f(i,j) = \max_{0 < k \le p_i \land k v_i \le j} \{ f(i-1, j-kv_i) + kw_i \}$$

Contents

Graph

TA

DP 入门 线性 DP 区间 DP 环形 DP

状压 DP

后记

1 DP 入门

2 线性 DP

3 区间 DP

5 树形 DP

6 状压 DP

7 背包问题

8 后记

参考资料

TA PP 入门 线性 DP 系形 DP 形形 DP 状压 DP

后记

Graph

- [1] 刘汝佳 算法竞赛入门经典 清华大学出版社.
- [2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. Introduction to Algorithms(Third Edition). MIT Press.
- [3] https://en.wikipedia.org/
- [7] https://oi-wiki.org/