网络流问题选讲

北京大学 周尚彦

Dec. 7^{th}

目录

- Part I 最大流建模
- Part II 最小割建模
- Part III 费用流建模
- Part IV Specialties

最大流建模

- 单纯的最大流
- 直接运用
- 加入时间维度的问题

单纯的最大流

给定一个网络图，求最大流。

不用多说。

直接运用

利用自动的流量分配解决一类关于分配某种物资的问题。

网络流二十四题 圆桌问题

来自 n 个国家的代表开会，每个国家代表数为 c_i，会场有 m 张圆桌, 每张桌子可容纳 m_i 人，同一个国家的代表不能在一张桌子上就餐，设计一个合法方案。

利用代表和桌子构成的二分图建模，满流即有解。

判断每条边是否有流提取出合法方案。

K-完备匹配

给定一个有 n 个点的二分图，问是否存在 K 个不相交的完备匹配。

K-完备匹配

给定一个有 n 个点的二分图，问是否存在 K 个不相交的完备匹配。

直接求 K 次二分图匹配?

Theorem

(Hall 定理) 若一个二分图是 K– 正则二分图, 则该图存在 K 个不相交的完备匹配。

Definition

(K– 正则二分图) 每个点的度数均为 K。

从 S 向 Part I 中的点连容量为 K 的弧，从 Part II 中的点向 T 连容量为 T 的弧，满流即有解。

如何求方案?

Theorem

(Hall 定理) 若一个二分图是 K– 正则二分图, 则该图存在 K 个不相交的完备匹配。

Definition

(K– 正则二分图) 每个点的度数均为 K。

从 S 向 Part I 中的点连容量为 K 的弧，从 Part II 中的点向 T 连容量为 T 的弧，满流即有解。

如何求方案?

提取出 K– 正则二分图，再求 K 次二分图匹配。

混合图的欧拉回路

Definition

(欧拉回路) 每条边经过且仅经过一次的回路。

给出一个既存在有向边，又存在无向边的图，问是否存在欧拉回路。

欧拉回路的判断方法：

- 每个点的入度等于出度
- 连通

先给无向边任意定向，再利用流量分配修正之前的定向。

令每个点的入度 $-$ 出度为它的度差。

对于每条无向边 u<—>v，先定向为 u—>v。

考虑变更它的方向，会使得 u 的度差 $+2$, v 的度差 -2。

故对于点 u，若度差为奇数则没有欧拉回路，否则若度差为负，从 S 向 u 连容量为度差 $/-2$ 的弧，若度差为正，从 u 向 T 连容量为度差 $/2$ 的弧。

对于每条无向边 u<—>v，从 u 向 v 连容量为 1 的弧。

满流即存在欧拉回路。

SCOI 2012 奇怪的游戏

给出一个 $N \times M$ 的, 每个格子上有一个数

可以给相邻的两个数同时 $+1$, 相邻指有公共边

求最少多少次操作可以将棋盘上的数变为同一个数

如果不可能, 则输出 -1

SCOI 2012 奇怪的游戏

给出一个 $N \times M$ 的, 每个格子上有一个数

可以给相邻的两个数同时 $+1$, 相邻指有公共边

求最少多少次操作可以将棋盘上的数变为同一个数

如果不可能, 则输出 -1

假设知道最后需要统一变成 D, 怎么做?

一般来说看到可以确定是网络流的有关矩阵的问题，都可以考虑二分染色。

确定 D 后，直接进行二分图建模，利用流量分配来求解。

一般来说看到可以确定是网络流的有关矩阵的问题，都可以考虑二分染色。

确定 D 后，直接进行二分图建模，利用流量分配来求解。

回到原题。

若 $N \times M$ 为奇数，黑格子比白格子多一个，可以利用黑白格子中数字之和算出 D。

若 $N \times M$ 为偶数，二分答案。

POJ 2699 Strong Kings

n 个队伍，两两有比赛，知道每支队伍的获胜场数。

求最多有多少支队伍，他们战胜了所有获胜场数比自己多的队伍。

POJ 2699 Strong Kings

n 个队伍，两两有比赛，知道每支队伍的获胜场数。

求最多有多少支队伍，他们战胜了所有获胜场数比自己多的队伍。

猜个结论：一定存在一种情况，使得题目所求的队伍是获胜场数最多的那些队伍。

二分答案判断是否有解，利用二分图建模。

matrix

给出一个 $n \times m$ 的 0/1 矩阵 A，一个长度为 n 的向量 V，一个长度为 m 的向量 U。

要求构造一个整数矩阵 B，满足：

$$\forall x \le n, \sum_{i=1}^{m} A_{xi} \times B_{xi} = V_x$$

$$\forall x \le m, \sum_{i=1}^{n} A_{ix} \times B_{ix} = U_x$$

注意到 A 是 0/1 矩阵。

分别把行和列都看做点进行二分图建模。

若 A_{ij} 为 1 则在行 i 和列 j 之间连边。

TopCoder SRM 575 TheTilesDivOne

给定一个 $N \times M$ 的黑白棋盘，某些格子上有棋子。

每次可以取出一个以黑点为拐点的 L 型，问最多能取多少次。

每次只取最小的 L，每个这样的东西包含一个黑格，一个在奇数行的白格和一个在偶数行的白格。

建立奇白 $\longrightarrow$ 黑 $\longrightarrow$ 偶白的三层模型，拆点限流跑最大流。

加入时间维度的问题

网络流的流有速度（例如一个单位时间走一条边），或是在某个时刻加入流量限制。

通常通过拆点来解决。

HNOI 2007 紧急疏散

发生了火警，所有人员需要紧急疏散！假设每个房间是一个 $N \times M$ 的矩形区域。每个格子如果是'.', 那么表示这是一块空地；如果是'X'，那么表示这是一面墙，如果是'D'，那么表示这是一扇门，人们可以从这儿撤出房间。已知门一定在房间的边界上，并且边界上不会有空地。

最初，每块空地上都有一个人, 在疏散的时候, 每一秒钟每个人都可以向上下左右四个方向移动一格, 当然他也可以站着不动。疏散开始后, 每块空地上就没有人数限制了 (也就是说每块空地可以同时站无数个人)。但是，由于门径窄，每一秒钟只能有一个人移动到门的位置，一旦移动到门的位置，就表示他已经安全撤离了。现在的问题是: 如果希望所有的人安全撤离, 最短需要多少时间？或者告知根本不可能。

二分答案 T，判断可行性。

将每个点拆成 T 个点，(x, i) 点表示这是第 i 时刻的 x 点。

根据原图建网络图跑最大流，满流即可行。

二分答案 T，判断可行性。

将每个点拆成 T 个点，(x, i) 点表示这是第 i 时刻的 x 点。

根据原图建网络图跑最大流，满流即可行。

也可以不用二分答案，从第一个时刻开始，每次保留原来的网络，新添加节点即可。

CTSC 1999 家园

地球和月球之间有 n 个太空站，每个太空站可以容纳任意多人。

有 m 艘太空飞船，第 i 艘按照 $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{ik})$ 的周期经过第 $a_{i1}, a_{i2} \ldots$ 号太空站, 每天由当前所在的太空站出发前往下一个, 最多能载 c_i 个人。

现在地球上有 s 个人要到月球去，问最快需要多少天。

将地球, 月球分别看做 0 号，$n+1$ 号太空站。

与上一题相同的方法。

太空船的人数限制通过拆点限流解决。

The end of Part I.

最小割建模

- 直接使用定义
- 两个集合的矛盾关系
- 最大权闭合子图

综述

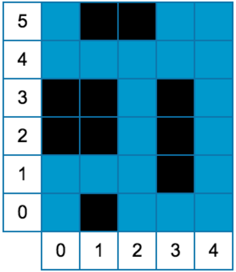
给定一张网络图，求其最小割。

Google Code Jam 2014 Round2C

一个 $N \times M$ 的水域，有 k 个矩形障碍。

求水的最大流速。

$N \le 10^3, M \le 10^8, K \le 2 \times 10^3$



最大流 $\Longleftrightarrow$ 最小割 $\Longleftrightarrow$ 平面图最短路。

NOI 2010 海拔

$n \times n$ 的网格图，每条边双向都有流量。已知 $h_(1,1) = 0, h(n,n) = 1$，你需要设定其他点的海拔 $h_{x,y}$，使代价最小。

每条边的代价为流量 $\times \max(0, h_y - h_x)$。

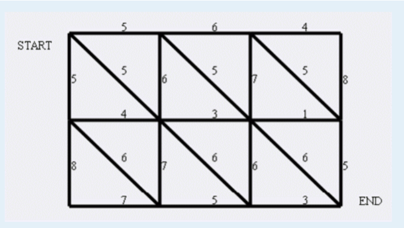
$n \leq 500$

显然最优策略一定是所有点海拔都为 0/1，且所有 0 连通，所有 1 连通。

所以只需求最小割。

数据量大，转为求平面图最短路。

Beijing 2006 狼抓兔子



给定一张形如上图的 $N \times M$ 的网格图，求其最小割。

$N, M \leq 1000$

经典题，平面图最小割转对偶图最短路。

清华集训 最小生成树

给定一个带权无向图，并新增一条边 (u, v, w)。

问至少删除多少边使得新增的边既可能在图的最小生成树上，有可能在最大生成树上。

考虑 kruskal，若 $< w$ 的边形成的子图中 u, v 不连通，则新增的边可能在最小生成树上。

求最小割即可。

最大生成树同理。

两个割显然不会相交，相加即为答案。

Ski Resort

$N \times M$ 的矩阵，每个点有高度。

可以花 1 的代价将某点的高度提高 1。

每个点可以到相邻的不比它高的点。

求最小代价使 A 不能到 B。

最优方案显然是选择一个四连通的圈将 B 围起来，使得圈外不能进来。

点向高度连出边，高度 x 向高度 $x-1$ 连容量为 1 的边，高度向点连出边。

求最小割。

两个集合的矛盾关系

一类处理两个集合的矛盾关系的问题。

建立二分图模型，将矛盾抽象为无穷大边，利用最小割来求最大收益（最小花费）。

给定一张 n 个点的无向图，每条边边权为端点点权的异或。

有些点已经标上了点权，确定其他点点权使边权和最小。

按位计算。

把点权为 0 的连向源，点权为 1 的连向汇。（连无穷大边）

原图中的边容量赋为 1。

割完之后最小割即最小边权，连向源的点点权为 0，否则为 1。

按位计算。

把点权为 0 的连向源，点权为 1 的连向汇。（连无穷大边）

原图中的边容量赋为 1。

割完之后最小割即最小边权，连向源的点点权为 0，否则为 1。

不与源汇连通的部分？

汽车展览会

$N \times M$ 的矩形停车场，要举办一个展览会。

(i, j) 可以停 a_{ij} 辆车，边相邻的格子不能同时放车。

求最多能停多少车。

先假设停满了，然后去掉不合法的。

将矩阵黑白染色，黑点连向源，白点连向汇，容量为 a_{ij}。

在相邻格子之间连无穷大边。

求最小割之后会将不合法的都割掉。

常考的经典模型。

物品之间有依赖关系的最大收益（最小花费）问题。

同样是集合之间的矛盾关系，只是更为复杂。

最大权闭合子图

Definition

(闭合子图) 有向图 $G = (V, E)$ 的子图 V', 满足 V' 中所有出边指向的点仍属于 V'。

每个点有点权，求权值和最大的闭合子图。

点权为正连向源，点权为负连向汇，原图中的边容量均为无穷大。

求完最小割之后与源相连的点即为最大权闭合子图。

CEOI 2008 Order

有 N 个工作，M 个机器，每种机器可以按次数租用或是买过来，每个工作需要使用一些机器，完成后可以获得收益。

求最大获利。

如果没有租用，就是一个裸的最大权闭合子图，而且还是二分图。

租用相当于一个违反代价：物品 A 可以不依赖于物品 B，但需要付出一定代价。

将机器于任务之间连的边容量设为租用代价即可。

Codeforces #181 Div.1 E Biologist

n 个已经有初值的 0/1 变量，改变一个变量需要 v_i 的花费。

有 m 个需求，要求某个集合的变量均为 0/1，满足需求得到 w_i 的收益。

求最大收益。

最大权闭合子图的变种。

同样是将 0 与 S 相连，将 1 与 T 相连。

将每个需求拆为两个需求（全为 0/1）。利用只有这个集合全与 S 或 T 相连才能不割去收益建点和边。

例：对于一个要求全为 0 的需求，新建点 p，从 S 向点 p 连一条容量为收益的边，p 向集合中的点连无穷大边。

TopCoder SRM 558 Surrounding Game

$N \times M$ 的矩阵，每个点有选择代价和控制收益。

一个点被控制当且仅当它被选择或者它的邻居都被选择。

考虑到最大权闭合子图不方便处理或的条件，将被控制的条件分成两个条件：

- 该点被选择。
- 该点未被选择且四周的点均被选择。

将棋盘黑白染色之后发现与上题相同。

TopCoder SRM 578 BoardPainting

$N \times M$ 的棋盘，有些格子有棋子。

每次可以拿走同行或同列中若干连续的棋子。

求至少多少次操作可以拿走所有棋子。

考虑每个点是横着拿还是竖着拿。

假设把棋子一个个拿光需要棋子数的花费。

若上下相邻两个棋子都是竖着拿，得到 1 的收益，若左右相邻两个棋子都是横着拿，得到 1 的收益。

最大权闭合子图模型。

The end of Part II.

费用流建模

- 必选问题
- 费用不为一次函数的问题
- 带下界的最小费用可行流问题
- 线性规划问题

单纯的费用流

给定一张网络图，求最小费用最大流。

不多说。

必选问题

有些题目中有某个节点必须经过几次，或是某个东西必须要选的限制。

通常通过满流或是带下界的网络流来控制下界，拆点限流来控制上界。

不排除还有一些其他的奇技淫巧。

SDOI 2010 星际竞速

N 个星球 M 条带权边，每条边只能从编号小的到编号大的，要求经过所有点仅一次。

同时可以瞬移，从任意点瞬移到第 i 点的时间为 A_i，求完成比赛的最小时间。

一开始可以瞬移到任一点上。

对于每个点仅经过一次的限制采用拆点限流的方法。

每次瞬移后的行动可以看做一条路径。

从 S 向每个 u 连费用为瞬移费用的弧，从每个节点 u 向 T 连费用为 0 的边。

根据原图路径建网络图。

ZJOI 2011 营救皮卡丘

N 个点 M 条边，一共有 K 个人。

人可以在边上移动，并在经过点时能瞬间摧毁该点。可以经过被摧毁的点。

在摧毁 $x-1$ 号点以前，x 点无法通过。

求摧毁所有点，所有人走过总路径长度的最小值。

可以事先计算最短路，将无向图变成有向图。

（Floyd 动态加点，求出只经过 $1 \sim x$ 的从 v 到 x 的最短路。）

利用下界确保每个点都通过，利用容量限制确保 K 个人。

Codeforces #170 Div1 E

平面上有 N 个点，每个点可以向比它纵坐标小的点连边，要求连成一颗二叉树，使得边长总和最小。

同样拆点限流即可。

费用不为一次函数的问题

一般的费用流问题的费用只与流量有关。

有些问题中的费用函数却稍显复杂。

NOI 2012 美食节

有 n 种菜品，m 位厨师。每种菜品有 c_i 份需要烹饪，每位厨师做不同的菜品需要不同的时间。

每份菜品的等待时间定义为从最开始到制作该份菜品的厨师完成这份菜品。

要求每一份菜品的等待时间之和最小。

很明显的二分图模型，将厨师与菜品配对。

考虑到每个厨师做的倒数第 x 份菜品对答案的贡献为制作花费的时间 $\times x$。

对厨师进行拆点，表示厨师做的的 x 道菜。

LA5095 Transportation

某国有 n 座城市，由 m 条单向道路相连。

你希望从城市 1 将 k 个单位的货物运送到城市 n。

道路很不安全，如果一次携带 x 个单位的货物，需要花费 $a_i \times x^2$ 的费用，每条道路还有容量限制。并且货物必须以整数为单位携带。

求最小花费。

注意到货物必须以整数为单位携带。（不然就没法做了）

可以利用差分拆边，将费用改成按一次函数计算。

JSOI 2009

在一个赛季里有 n 支球队，对于每个球队给定已赢场数 w_i，已输场数 l_i，和两个参数 $C_i, D_i (0 \leq D_i \leq C_i \leq 10)$。

若一支球队在整个赛季胜 x 场，败 y 场，那么收益为 $c_i * x^2 + d_i * y^2$。

接下来还有 m 场比赛，你可以控制比赛的输赢，求最小收益和。

先假设接下来的 m 场比赛双方全输，计算总收益，在考虑每个球队每赢一场的增量。

同样利用差分拆边。

WC 2007 石头剪刀布

n 个点的完全图，有些边方向已确定，确定其他边的方向使得三元环尽量多。

令 u 点的入度为 d_u。

三个点不形成三元环的充要条件是其导出子图中有且仅有一个点入度为 2。

故三元环的个数为

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{3} - \sum \binom{d_i}{2} \\
= &\binom{n}{3} + \frac{1}{2}(\sum d_i - \sum {d_i}^2)
\end{aligned}
$$

即与上题相同。

带下界的最小费用可行流

给定一个网络图，无源无汇，求可行的流量方案。其中某些边有流量下界。

通用的解法有两种，新建虚拟源汇法和负无穷大法。

带下界的最小费用可行流

给定一个网络图，无源无汇，求可行的流量方案。其中某些边有流量下界。

通用的解法有两种，新建虚拟源汇法和负无穷大法。

普通的网络图也可以转化成无源无汇的模型。

TCO09 Championship Round D1L2 ArrayTransformations

给定序列 a_n。

每次操作可以花费 len 的代价将一个长度为 len 的区间减 1。

在操作次数不超过 k，操作代价不超过 m 的前提下，求最大元素最小值。

二分答案转为判定性问题。

每次操作是一个从 a_l 到 a_r 的流。

给每个点设立下界，最小费用可行流即可。

LA 2197 Paint the Roads

n 个点 m 条边的图。

要求选择一些边组成一些没有公共边的回路，使得每个点恰好在 k 条回路上。

最小化选择的边长和。

拆点限流。

利用带下界的最小费用可行流模型求解。

World Final 2011 Chips Challenge

有一个芯片，芯片上有 $N \times N$ 个插槽。

有些槽不能能装零件，有些已经装好了，其他槽随意。

要求装最多的零件使得：

- 第 i 行零件和第 i 列零件一样多。
- 第 i 行的零件个数不超过总数的 a/b。

对行和列进行二分图建模。

对任何一个可以放零件的位置，从行向列连容量为 1 的弧。必须放零件的位置设置下界为 1。

列 i 向列 j 连容量为正无穷的弧。

这样跑出来的可行流显然是满足条件 1 的。

枚举 T 使得总零件数至少 T。

对于列向行连的边设置上界为 $T \times a/b$。

这样跑出来的流在零件数至少为 T 的情况下满足第二个条件。

此时的目的是最大化放置零件数。

可以在边上加负权以达到这一条件。注意此时会出现负圈，采用一定的手段消掉它。

若放置零件数之和大于等于 T，则这组解是每行最多放 $T/a*b$ 时的最优可行解。

线性规划问题

某些线性规划问题可以用最小费用最大流来求解。

难点在于网络的构建。

给出 m 个区间，选择第 i 个区间会带来 v_i 的收益。

数轴上每个点最多只能被 k 个区间覆盖。

要求选出一些区间，使收益和最大。

令 $p_i = 0/1$，表示第 i 个区间是否被选。

对于任意点 x，有

$$\sum p_{xi} \le k$$

xi 为所有覆盖了 i 的区间

添加辅助变量 b_x，将不等式变为等式:

$$\sum p_{xi} + b_x = k$$

将等式进行差分：

$$\sum p_{1i} + b_1 = k \tag{1}$$

$$\sum p_{2i} - \sum p_{1i} + b_2 - b_1 = 0 \tag{2}$$

$$\cdots$$

$$\sum p_{ni} - \sum p_{(n-1)i} + b_n - b_{n-1} = 0 \tag{3}$$

$$-\sum p_{ni} - b_n = -k \tag{4}$$

每个变量恰好在等式中出现两次，系数分别为 $1/-1$。

利用流量平衡对等式建模。

将每个等式看成一个节点。

每个变量从为系数负的等式流向系数为正的等式。

常数连向源汇。

跑最小费用流。

一个小坑，我一开始做课件的时候把等式差分成了这样。为什么不行？

$$\sum p_{1i} - \sum p_{ni} + b_1 - b_n = 0 \tag{5}$$

$$\sum p_{2i} - \sum p_{1i} + b_2 - b_1 = 0 \tag{6}$$

$$\cdots$$

$$\sum p_{ni} - \sum p_{(n-1)i} + b_n - b_{n-1} = 0 \tag{7}$$

NOI 2008 志愿者招募

奥运会，需要进行 n 天，第 i 天需要至少 a_i 位志愿者。

有 m 种志愿者类型，每种可以从 s_i 天服务至 t_i 天，每位志愿者需要 c_i 的费用。

求满足条件的最小费用。

同样的建模过程。

The end of Part III.

Specialties

- 1st
- 2nd
- 3rd

HNOI 2013 切糕

$N \times M \times K$ 的立方体，每个点有权值 v_{ijk}，对于每条竖轴 (x, y)，确定 $f(x, y)$ 使得 $\sum v_{xyf(x,y)}$ 最小。

需要满足相邻的竖轴之间 $f(x, y)$ 的差的绝对值小于给定的常数 D。

实际上是求最小割，但对于割边给出了限制。

添加无穷大边 $f(x,y,z) \longrightarrow f(x',y',z-D)$ 使得 $f(x',y') \geq f(x,y)$。

如果将限制改为相邻两竖轴之间 $f(x, y)$ 的和大与给定的常数 D 怎么办?

如果将限制改为相邻两竖轴之间 $f(x, y)$ 的和大与给定的常数 D 怎么办？

将限制转化为 $f(x', y') \geq -f(x, y) + D$，黑白染色后将黑点的建模反过来即可（从大到小）。

CTSC 2009 移民站选址

平面上有 N 个点，还有 M 个尚未确定位置的点。

N 个点与 M 个点之间有流量 A_{ij}，M 个点的点与点之间有流量 B_{ij}。

每单位流量传输费用为两点之间的曼哈顿距离。

确定 M 个点的坐标使得总费用最小。

曼哈顿距离的二维坐标互不影响，可以分开考虑。

M 个点中的点取任一个值 v 时与 N 个点之间流量造成的花费可以预处理为 $f(x, v)$。

与切糕模型相似。

$(x, v) \xleftrightarrow{B_{xy}} (y, v)$ 处理 M 个点之间费用。

PA 2014 Muzeum

二维平面上有 N 个警卫，M 个物品。

警卫的目光全都看向 y 轴正方向，并且有相同大小的视角（视角的正切值给定）。

贿赂一个警卫的花费为 a_i，偷走一个物品的收益为 b_i，求最大收益。

$N, M \leq 10^5$

不考虑数据范围就是裸的最大权闭合子图，然而这个数据范围显然跑不了网络流。

考虑坐标变换，将所有警卫的视角变成直角且让视角两边平行与坐标轴。

最小割 $\Longleftrightarrow$ 最大流。目的是要流出尽量多的流量。

将所有 element 按照 x 坐标排序，每碰到一个物品时就将其加入平衡树，碰到一个警卫就尽量往 y 坐标大于等于它且最小的物品流流量。

Codeforces #172 D k-Maximum Subsequence Sum

给定一个长度为 n 的序列，q 次操作，每次修改一个点的值或是查询一个区间的最大 k-子段和。

$n, q \leq 10^5, k \leq 20$。要求 $O(q \times k \log n)$

显然可以建立费用流模型。

每次增广要么是选择一个与之前区间不相交的区间，要么是在已有区间中挖掉一段。但都会新增一个子段。

每次选择一个最大和区间，然后取负。

NOI 2009 变换序列

给定一个距离序列 $D_0, D_1, \ldots, D_n - 1$，求一个字典序最小的排列 p_n 使得 (i, p_i) 的环上距离等于 D_i。

求最小字典序的二分图完美匹配。

先求出任意一组完美匹配，再考虑修正。

采用匈牙利算法，依次对 x 点考虑匹配最小的点，若增广成功，则固定这组匹配。

注意在增广过程中不能修改之前已经固定的匹配。

时间复杂度为 $O(N^2)$

TopCoder SRM 459 TheContest

一个 $N \times M$ 的棋盘，在所有各自中填入 $1 \sim \max(N, M)$。

每个值每行每列最多出现一次，且恰好出现 $\min(N, M)$ 次。

要求字典序最小。

$N \le M$ 时，做 N 次字典序最小的完美匹配即可。

$N > M$ 时，匹配进行到第 i 轮时，如果第 j 个数字的剩余使用次数 $r_i \ge n - i$ 的话，这个数字在这一轮中是必选的。

如何保证必选？

$N \leq M$ 时，做 N 次字典序最小的完美匹配即可。

$N > M$ 时，匹配进行到第 i 轮时，如果第 j 个数字的剩余使用次数 $r_i \geq n - i$ 的话，这个数字在这一轮中是必选的。

如何保证必选？

填加无用点向且仅向不必选的点连边。

The end of Part IV.

The End.

Thanks.