一．（共 20 分，每小题 4 分）

1. 12　　2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　3. 3　　4. 4　　5. $a=2$，$b=2$

二．（共 20 分，每小题 4 分）

1. D　　2. B　　3. D　　4. C　　5. C

三.（共 10 分）

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ……3 分

$$A^{2020}=(A^2)^{1010}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ……6 分

$$B^{2020}=(P^{-1}AP)^{2010}=P^{-1}A^{2020}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{2020}-3A^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ ……10 分

四.（共 10 分）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 10 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 17 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ……4 分

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$ ……6 分

最大无关组：α_1，α_2 ……8 分

$\alpha_3=-11\alpha_1+5\alpha$，$\alpha_4=17\alpha_1-7\alpha_2$ ……10 分

注：答案不惟一.

五.（共 10 分）

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ……5 分

基础解系：$(1,-2,1,0)^T$，$(1,-2,0,1)^T$ ……7 分

通解：$c_1(1,-2,1,0)^T+c_2(1,-2,0,1)^T+(-1,1,0,0)^T, c_1,c_2$为任意实数 ……10 分

注：答案不惟一.

六.（共 10 分）

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & t \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-3)^2(\lambda+1),$$

令$|A-\lambda E|=0$得，特征值：-1, 3, 3. ……4 分

当$R(A-3E)=1$时，A能对角化.

$$A-3E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当$t+3=0$，即$t=-3$时，A能对角化.　　　　　　……10 分

七.（共 15 分）

（1）$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$　　　　　　……2 分

（2）$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&5-\lambda&0\\-2&0&5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)$

令$|A-\lambda E|=0$得，特征值：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=6$.

当$\lambda_1=0$时，解$Ax=0$得特征向量$\xi_1=(5,-1,2)^T$；

当$\lambda_2=5$时，解$(A-5E)x=0$得特征向量$\xi_2=(0,2,1)^T$；

当$\lambda_3=6$时，解$(A-6E)x=0$得特征向量$\xi_3=(1,1,-2)^T$

因为A的特征值互不相同，所以ξ_1,ξ_2,ξ_3两两正交.

将ξ_1,ξ_2,ξ_3分别单位化，得 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2)^T$，$p_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)^T$，$p_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$

取$P=(p_1,p_2,p_3)$，则P为正交矩阵. 令$x=Py$，得标准形　$f=5y_2^2+6y_3^2$　　　　　　……12 分

注：P答案不惟一.

（3）因为二次型f的正惯性指数为 2，小于 3，所以f不是正定二次型.

或因为二次型f的特征值不是全大于 0，所以f不是正定二次型.

其它判别方法略.　　　　　　……15 分

八.（共 5 分）

因为A为正交矩阵，所以$A^TA=E$.

$[A\alpha,A\beta]=(A\alpha)^TA\beta=\alpha^TA^TA\beta=\alpha^T\beta=[\alpha,\beta]$.　　　　　　……2 分

因为α,β分别为A的特征值-1, 1 所对应的特征向量，所以$A\alpha=-\alpha,A\beta=\beta$.

$[A\alpha,A\beta]=[-\alpha,\beta]=-[\alpha,\beta]$.　　　　　　……4 分

所以$[\alpha,\beta]=-[\alpha,\beta]$，$[\alpha,\beta]=0$，$\alpha,\beta$正交.　　　　　　……5 分