青島大學 QINGDAO UNIVERSITY

本专科课程考试试题
参考答案及评分标准

开课单位： 数学与统计学院 学生所在学院： （2018～2019 年秋季学期 2019.1）

课程编号	C17000104015	学分/学时	5/80	试 卷	■A 卷 □B 卷
课程名称	线性代数与概率统计 I	课程类别	■公共课 □基础课 □专业课		
专业/年级	2017 年级	修读方式	■必修 □选修		
出题教师	代业明	考试方式	■闭卷 □开卷 □其它		

一．CBCCD, CAD 每小题 3 分

二、原式$=\frac{1}{36}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&-1&6&3\\0&0&-1&1\\0&0&14&9\end{vmatrix}=\frac{1}{36}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&-1&6&3\\0&0&-1&1\\0&0&0&23\end{vmatrix}=\frac{23}{36}.$ 6 分

三、

1. 解：设存在三个实数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ （1） 3 分

两边同时左乘矩阵 A 可得 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$，由条件和特征值定义可知 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$，化简可得 $-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ （2） 2 分

（1）－（2）可得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$，而 α_1,α_2 线性无关，故 $k_1=k_3=0$，代入（1）式可得 $k_2\alpha_2=0$，由于 $\alpha_2\neq0$ 可知 $k_2=0$。于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。 2 分

2. 解：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-3)^2$，$A$ 的特征值为 $\lambda_2=\lambda_1=3$，$\lambda_3=2$， 3 分

对应的特征向量分别为 $x_1=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}, x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, x_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 3 分

$P=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$P$ 可逆，且 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}$。 2 分

四、证明：记 A 的特征值为 $k_i,k_i^2=1(i=1,\cdots,n)$, 1 分

存在正交矩阵 Q 使 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}k_1&0&\cdots&0\\0&k_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&k_n\end{pmatrix}=B$， 2 分

$A=QBQ^T,B^2=E$，$AA^T=A^2=QBQ^TQBQ^T=QB^2Q^T=E$，故 A 为正交矩阵. 2 分

五、DCDAB, BDD 每小题 3 分

六、1. 解：(1)因 $F(x)$ 连续 $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}F(x)=1$，故由 $F(\sqrt{2})=1$，得 $2A=1,A=\frac{1}{2}$， 2 分

(2) $P\{0.2<\xi\le2.5\}=F(2.5)-F(0.2)=1-\frac{1}{2}(0.2)^2=0.98$， 2 分

(3) $\varphi(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le\sqrt{2}\\0 & 其它\end{cases}$ (注没有等号也对)。 2 分

2. 解：(ξ,η) 的概率密度为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$，(1) $\varphi_2(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & |y|\le 1\\ 0 & |y|>1\end{cases}$， 4 分

(2) $\varphi(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & |x|\le\sqrt{1-y^2}\\ 0 & |x|>\sqrt{1-y^2}\end{cases}$ 2 分

七、解：(1)由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dxdy=A\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(2x+3y)}dxdy=A\cdot\frac{1}{6}$，故 $A=6$. 4 分

(2) $P\{(\xi,\eta)\in D\}=\int_0^3 dx\int_0^{\frac{6-2x}{3}}6e^{-(2x+3y)}dy=1-7e^{-6}$. 2 分

(3 $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x dx\int_0^y 6e^{-(2x+3y)}dy=(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}) & x\ge 0,y\ge 0\\ 0 & x<0,y<0\end{cases}$ 2 分

八、解：$L(\sigma^2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-a)^2\}$ ， 2 分

$\ln L(\ \sigma^2\ )=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-a)^2=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-a)^2$ ， 2 分

对 σ^2 求导：$\frac{d(\ln L)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^n(x_i-a)^2$，令上式等于 0 得 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-a)^2$. 2 分