

第 2 页, 共 6 页

得分	
----	--

### 三、解答题（共 10 分）

设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ , 求一正交矩阵  $Q$  使  $Q^T A Q$  为对角矩阵, 并写出所得对角矩阵。

得分	
----	--

#### 四、证明题（共6分）

设  $A$  是  $m \times n (m > n)$  实矩阵, 证明  $A^T A$  正定的充分必要条件是矩阵  $A$  的秩  $r(A) = n$ .

得分	
----	--

### 五、选择题（每小题 3 分共 24 分）

1. 如果  $A, B$  为任意事件, 下列命题正确的是( )。
- A. 如果  $A, B$  互不相容, 则  $\bar{A}, \bar{B}$  也互不相容; B. 如果  $A, B$  相互独立, 则  $\bar{A}, \bar{B}$  也相互独立;  
C. 如果  $A, B$  相容, 则  $\bar{A}, \bar{B}$  也相容; D.  $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
2. 设任意两个随机变量  $X$  和  $Y$  适合  $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ 。则下述肯定正确的是( )
- A.  $D(XY) = D(X) \cdot D(Y)$  B.  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$  C.  $X$  与  $Y$  相互独立 D.  $X$  与  $Y$  不独立.
3.  $DX = 4, DY = 1, \rho_{XY} = 0.6$ , 则  $D(3X - 2Y) = ( )$ 。
- A. 40 B. 34 C. 25.6 D. 17.6
4. 设随机变量  $X, Y$  独立同分布, 记  $\xi = X + Y, \eta = X - Y$ , 则随机变量  $\xi$  与  $\eta$  之间的关系必然是( )。
- A、不独立 B、独立 C、相关系数等于 0 D、相关系数不为 0
5. 设随机变量  $X$  服从正态分布,  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则  $P\{X > x\} = ( )$ 。
- A.  $\Phi(x)$  B.  $1 - \Phi(x)$  C.  $\Phi(\frac{x - \mu}{\sigma})$  D.  $1 - \Phi(\frac{x - \mu}{\sigma})$
6. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ , 则  $T = X / \sqrt{Y/n}$  服从( )。
- A. 正态分布 B. 自由度为  $n$  的  $t$  分布 C.  $\chi^2$  分布 D.  $F$  分布
7. 设随机变量  $X$  的数学期望  $E(X) = \mu$ , 方差  $D(X) = \sigma^2$ , 试利用切比雪夫不等式估计。
- $P\{|X - \mu| < 4\sigma\} \geq ( )$ 。 A.  $\frac{8}{9}$  B.  $\frac{15}{16}$  C.  $\frac{9}{10}$  D.  $\frac{1}{10}$
8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 记  $\bar{X}$  为样本均值, 则下列结论中( )是错误的。
- A.  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$  B.  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$   
C.  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n-1)$  D.  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}} \sim t(n)$

得分	
----	--

六、计算题（共 12 分每小题 6 分）

1. 设随机变量  $X$  的分布律为  
求  $Y = -X - 1$  的分布律。

$X$	- 3	- 2	0	1	2
$P$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. 设概机变量  $X$  和  $Y$  相互独立，概率密度都为  $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ ，求期望  $E(XY)$ 。

得分	
----	--

七、解答题（共 8 分）

设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $\varphi(x, y) = \begin{cases} 6x^2y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。试求:

- (1)  $\frac{Y}{X}$  的数学期望;
- (2)  $\frac{Y}{X}$  的方差。

得分	
----	--

八、证明题（共 6 分）

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为泊松分布  $P(\lambda)$  的一个样本，证明：对于任一  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ ,  $\alpha \overline{X} + (1 - \alpha) S^2$  是  $\lambda$  的无偏估计。其中  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ ,  $\overline{X}$  为样本平均值。