MATH1222: Projet 1 - chaînes de Markov en temps discret

Groupe 24: Dario Rinallo, Benoit Lu

25 avril 2022

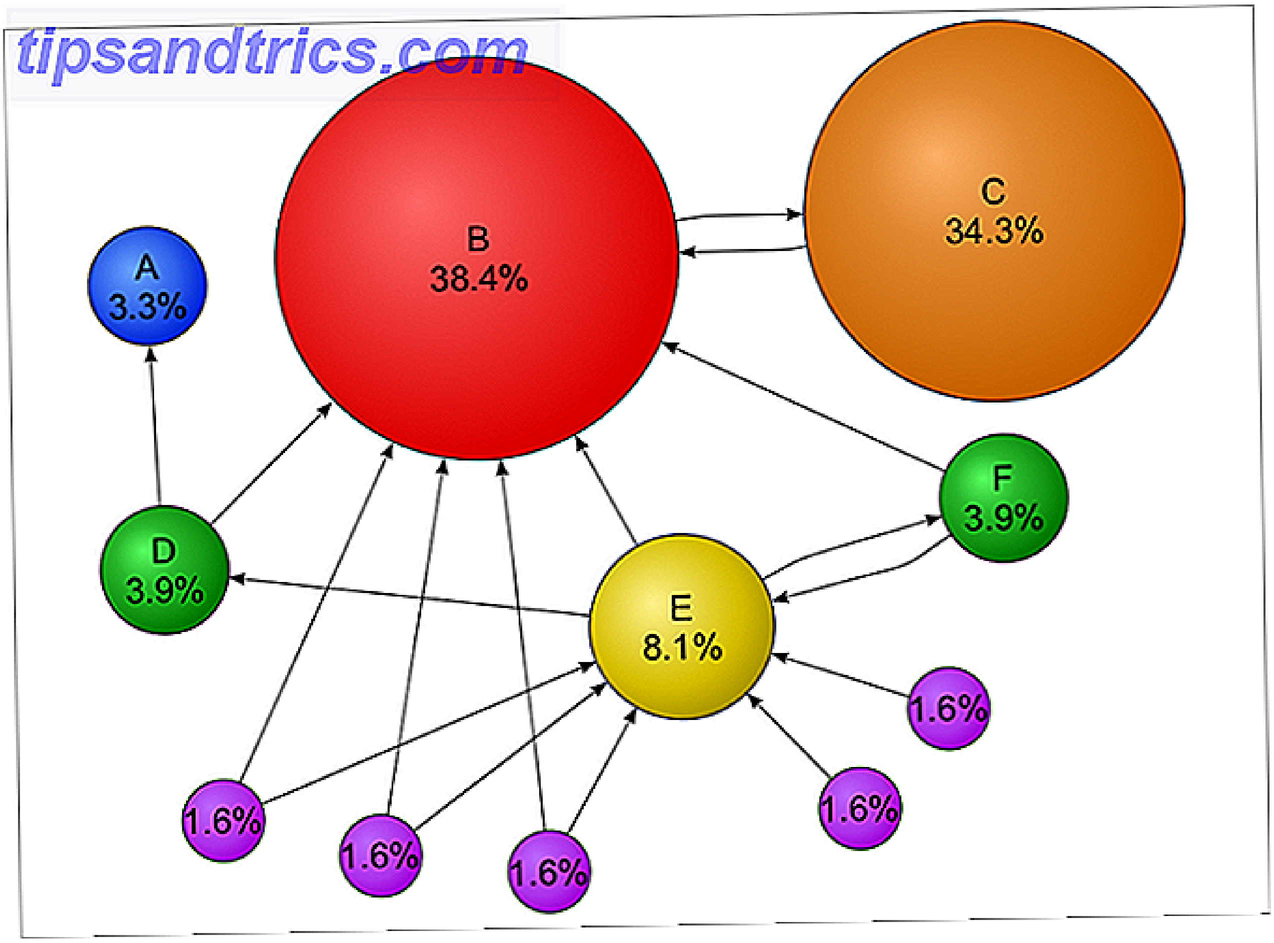

Table des matières

1 Chaînes de Markov

Soient,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Graphe d'état :

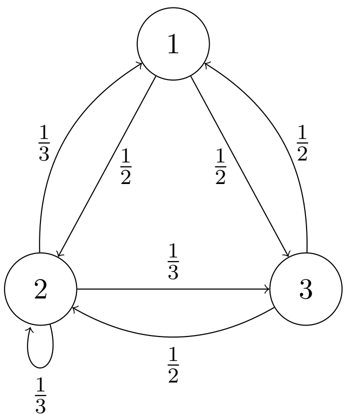

FIGURE 1 – Graphe de P_1

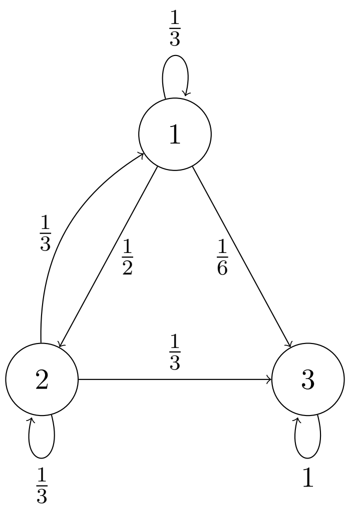

FIGURE 2 – Graphe de P_2

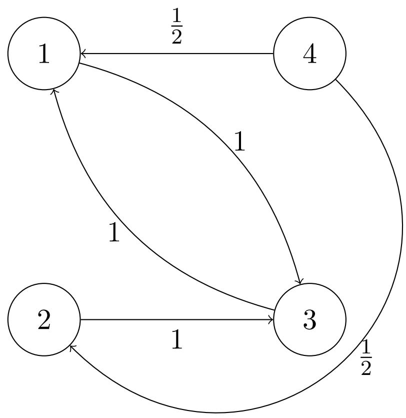

FIGURE 3 – Graphe de P_3

1.2 Réalisation

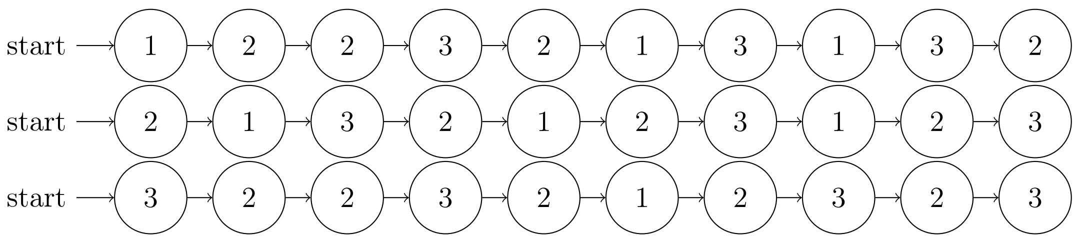

FIGURE 4 – Réalisations de P_1

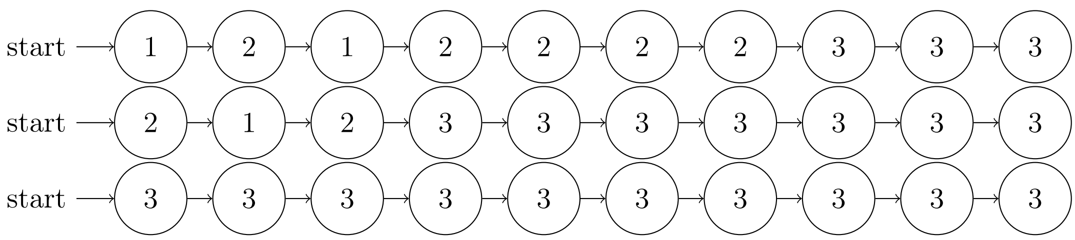

FIGURE 5 – Réalisations P_2

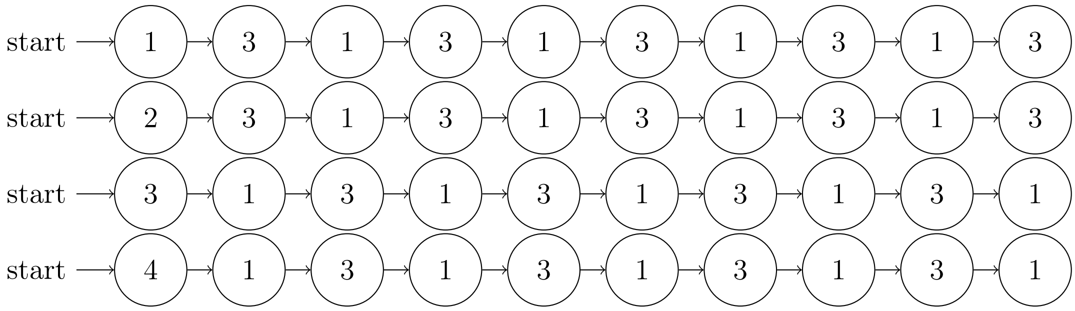

FIGURE 6 – Réalisations de P_3

1.3 Représentation des probabilités pour chaque état en fonction du temps

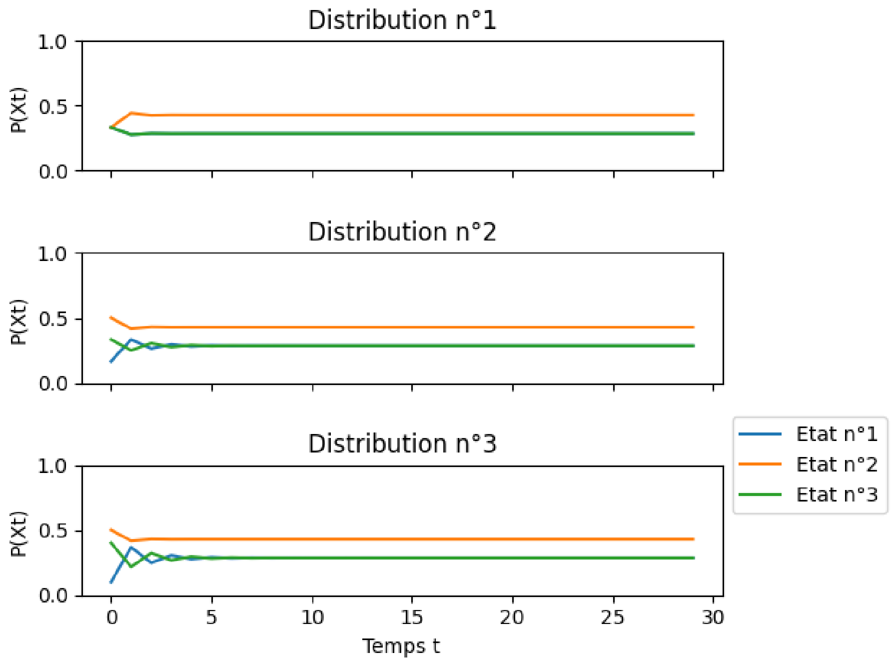

FIGURE 7 – Evolution des probabilités de chaque état de la chaîne associée à P_1.

Distribution initiale n°1 : $\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}^T$
Distribution initiale n°2 : $\begin{pmatrix}1/6 & 1/2 & 1/3\end{pmatrix}^T$
Distribution initiale n°3 : $\begin{pmatrix}1/10 & 5/10 & 2/5\end{pmatrix}^T$

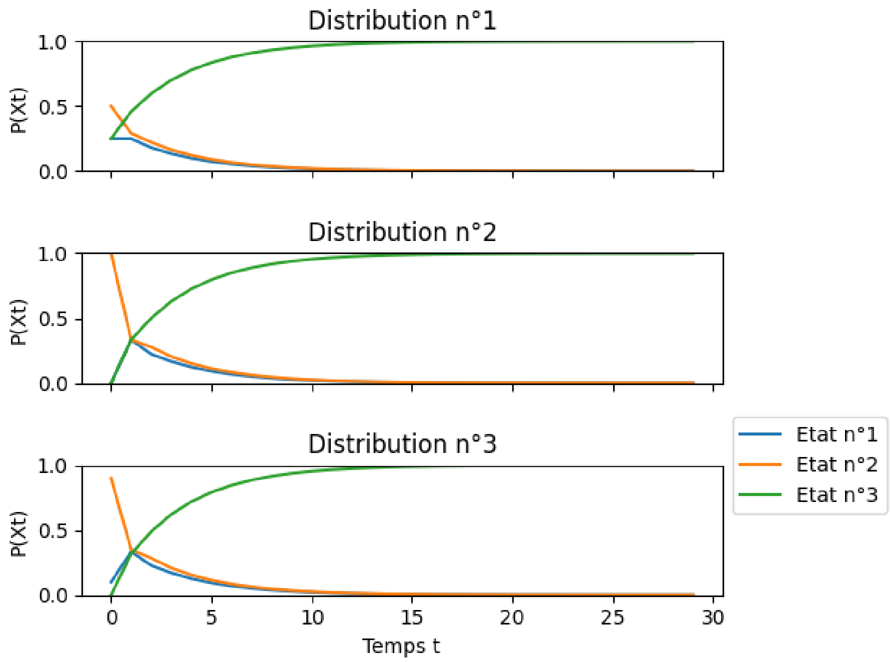

FIGURE 8 – Evolution des probabilités de chaque état de la chaîne associée à P_2.

Distribution initiale n°1 : $\begin{pmatrix}1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}^T$
Distribution initiale n°2 : $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$
Distribution initiale n°3 : $\begin{pmatrix}1/10 & 9/10 & 0\end{pmatrix}^T$

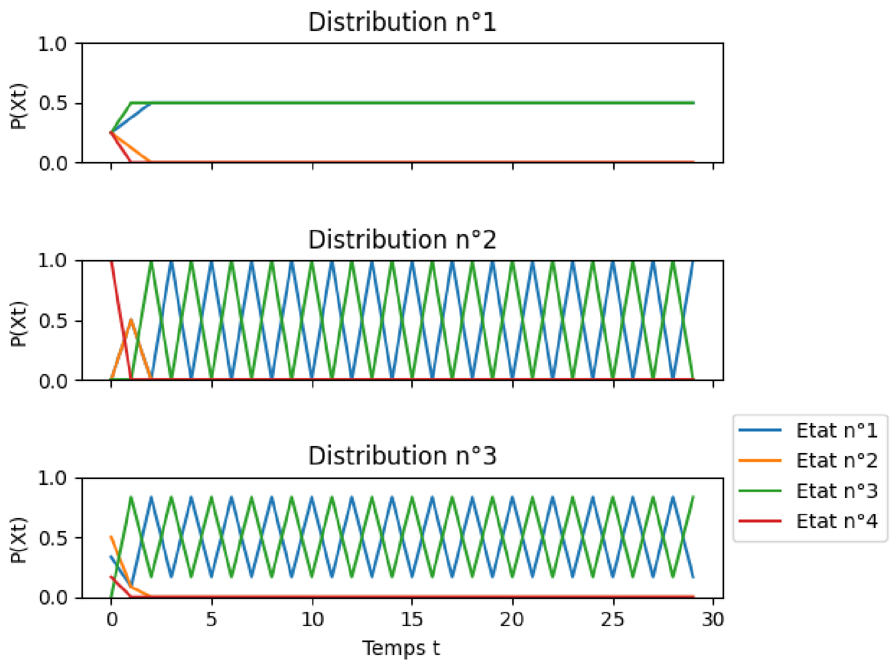

FIGURE 9 – Evolution des probabilités de chaque état de la chaîne associée à P_3.

Distribution initiale n°1 : $\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}^T$
Distribution initiale n°2 : $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$
Distribution initiale n°3 : $\begin{pmatrix}1/3 & 1/2 & 0 & 1/6\end{pmatrix}^T$

• **Impact de la distribution initiale :** On peut observer que la distribution initiale va effectivement influencer le comportement de la distribution globale dans certains cas, notamment pour la matrice P_3 où l'on peut voir que le comportement des courbes va se stabiliser dans le cas ou l'on démarre par exemple à 1/4 et fortement varier dans le cas où l'on démarre par exemple à 0 ou 1. Dans d'autres cas elle influence uniquement le point de départ de la courbe mais pas le comportement asymptotique de la distribution.

1.4 Evolution de la matrice P^t

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 10 – $(P_1)^1$

$$\begin{pmatrix} 0.2222 & 0.4305 & 0.3472 \\ 0.2870 & 0.4259 & 0.2870 \\ 0.3472 & 0.4305 & 0.2222 \end{pmatrix}$$

FIGURE 11 – $(P_1)^3$

$$\begin{pmatrix} 0.2862 & 0.4285 & 0.2852 \\ 0.2857 & 0.4285 & 0.2857 \\ 0.2852 & 0.4285 & 0.2862 \end{pmatrix}$$

FIGURE 12 – $(P_1)^{10}$

$$\begin{pmatrix} 0.3333 & 0.5 & 0.1666 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 13 – $(P_2)^1$

$$\begin{pmatrix} 0.2037 & 0.25 & 0.5462 \\ 0.1666 & 0.2037 & 0.6296 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 14 – $(P_2)^3$

$$\begin{pmatrix} 0.0251 & 0.0308 & 0.9440 \\ 0.0205 & 0.0251 & 0.9543 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 15 – $(P_2)^{10}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 16 – $(P_3)^1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 17 – $(P_3)^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 18 – $(P_3)^{10}$

• **Interprétation :** On trouve les matrices irréductibles, pour lesquelles tous les éléments communiquent, en effet si pour tous $x, y \in E$, il existe n > 0 tel que $P(X_n = y | X_0 = x) = p^n(x, y) > 0$. Alors ces états sont tous récurrents.

Aussi les états $x \in E$ tels que $p^n(x, x) \xrightarrow{n} 0$ sont des états transitoires, en effet la probabilité d'atteinte de x vers x : $\rho(x, x) := \mathbb{P}(T_y < \infty | X_0 = x)$ tend asymptotiquement vers 0, ce qui s'explique par la présence d'états absorbants où $p(x, x) = 1$.

1.5 Distributions invariantes

Pour le calcul des distributions invariantes ou stationnaires, on résoud le système suivant :

$$\Pi^T \cdot P = \Pi^T$$

Pour P_1, on résoud le système

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \text{avec } x+y+z=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0x + 1/3y + 1/2z = x \\ x+y+z=1 \\ 1/2x + 1/3y + 0z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/3y + 1/2z = x \\ x+y+z=1 \\ 1/6y + 1/4z + 1/3y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/3y + 1/2z = x \\ x+y+z=1 \\ 4/6y = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4/6y = x \\ x+y+z=1 \\ 4/6y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4/6y = x \\ 14/6y = 1 \\ 4/6y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

Pour P_2, on résoud le système

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \text{avec } x+y+z=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/3x + 1/3y + 0z = x \\ 1/2x + 1/3y + 0z = y \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/2y = x \\ 3/4x = y \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y \\ z = 1 - x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour P_3, on résoud le système

$$\begin{pmatrix} w & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & x & y & z \end{pmatrix}, \text{avec } w+x+y+z=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0w + 0x + y + 1/2z = w \\ 0w + 0x + 0y + 1/2z = x \\ w + x + 0y + 0z = y \\ w+x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 1/2z = w \\ 1/2z = x \\ z = 0 \\ w = 1-x-y-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = w \\ 0 = x \\ z = 0 \\ w = 1-x-y-z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w = 1/2 \\ x = 0 \\ z = 0 \\ y = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• **Interprétation :** On remarque que l'ensemble des zéros des distributions trouvées correspondent aux comportements asymptotiques des puissances matrices de transition P_1, P_2 et P_3. En effet, prenons π une mesure de probabilité stationnaire pour X. Si $y \in E$ est un état transitoire ou récurrent nul alors $\pi(y) = 0$.

1.6 Moyennes des passages dans chaque état

Pour chaque moyenne, on est parti de chaque état pour ne pas biaiser l'allure de la courbe.

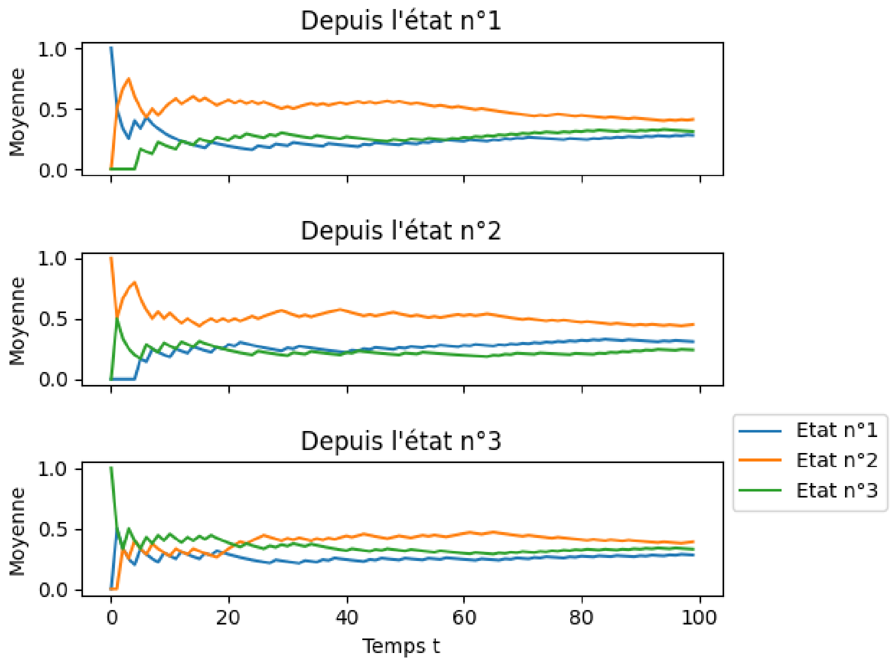

FIGURE 19 – Moyenne des passages dans chaque état de la chaîne associée à P_1.

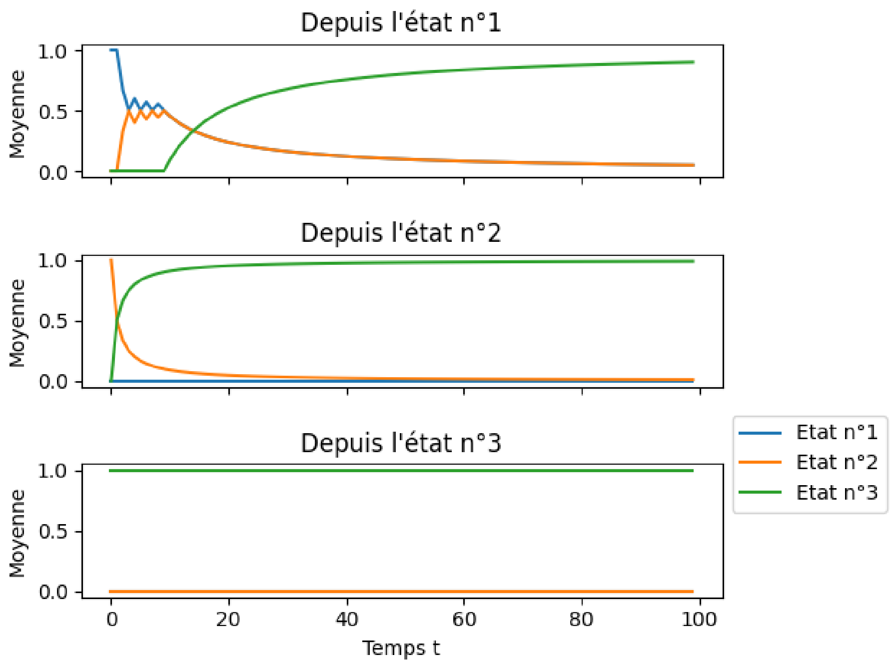

FIGURE 20 – Moyenne des passages dans chaque état de la chaîne associée à P_2.

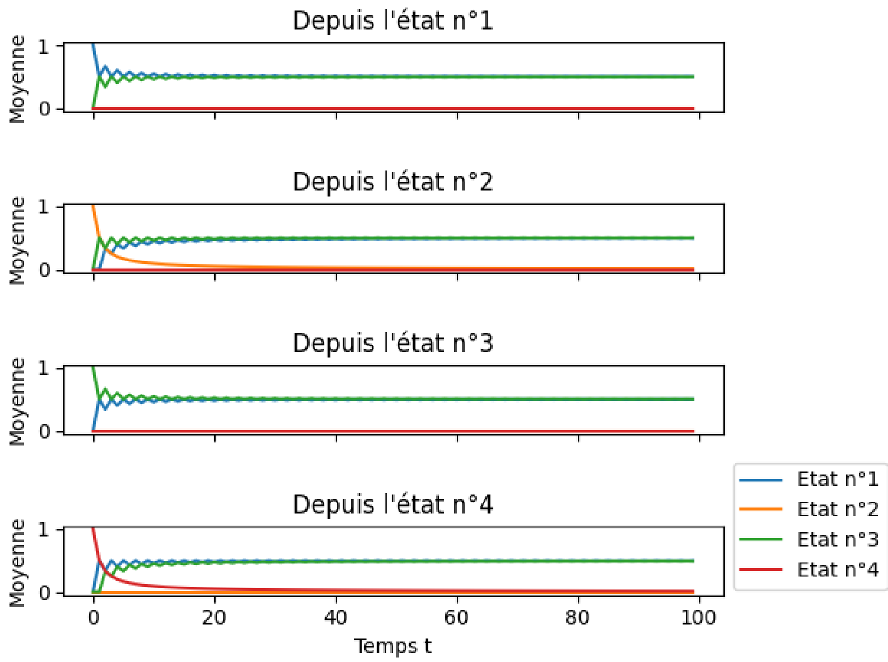

FIGURE 21 – Moyenne des passages dans chaque état de la chaîne associée à P_3.

• **Interprétation :** On remarque qu'asymptotiquement les résultats correspondent aux distributions invariantes trouvées précédemment ou aux moyennes des comportements aperçus pour différentes distributions initiales. Les moyennes de visites tendant vers zéros témoignent d'états transitoires puisque le nombre de visite vers un état $y \in E$ est fini presque sûrement : $\mathbb{E}(N_y|X_0 = x) < \infty$ et donc

$$\pi_y \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0 \text{ où } \pi_y \text{ est la proportion de temps passé dans y}$$

Bien sûr lier la convergence vers 0 à la notion de transience n'a de sens que parce que nous visitons un nombre fini d'états. Autrement il faudrait traiter la possibilité d'une récurrence nulle.

1.7 Temps moyen pour passer de l'état 1 à 3 avec P_2

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons d'abord qu'il y a 1/6 de chance de passer de l'état 1 à 3. On remarque que depuis l'état 3 on a 100% de chance de rester dans l'état 3, c'est donc un état absorbant et donc récurrent. Aussi l'ensemble des éléments communiquent, dès lors on arrive en un nombre fini d'étapes vers l'état 3. On remarque cette convergence vers l'état 3 à la figure 20.

- **Moyenne de temps (discret) :** 4.149

2 Monopoly

2.1 Modélisation des déplacement des pions à l'aide d'une chaine de Markov

Les déplacements des pions seront modélisés par une chaine de Markov de 43 états, un état pour chaque case du plateau de jeu sauf pour la case prison qui sera modélisée par 4 états consécutifs (la visite et 3 états d'emprisonnement). Pour les états d'emprisonnement, les 2 premiers états se comportent de la manière suivante : si le lancé donne un double (une probabilité de 6/36), on transitionne vers les états suivant la prison. Si le lancé ne donne pas un double, on a 100% de chance de se trouver dans le prochain état de prison . Lorsqu'on considère les transitions vers les états de chance et de chancellerie, on doit pondérer par la probabilité d'y rester (13/16 pour chancellerie et 10/16 pour chance) et la probabilité de se déplacer autre part (3/16 pour chancellerie et 6/16 pour chance), ce qu'on doit distribue uniformément (càd 1/16) sur chaque état (voir les cartes). La chaine sera presqu'un cycle, l'exception étant l'état 33 (càd la case "En prison !") qui ne sera jamais atteint car si on devait se trouver dans cette état, on ferait immédiatement la transition vers l'état de prison.

2.2 Matrice de transition

La construction de la matrice de transition s'est faite par force brute. On boucle sur l'ensemble des lancés de dés possibles qu'on pondère par 1/36è sur chaque état. On tient en même temps compte de la case sur laquelle on tombe : c'est-à-dire qu'on multiplie ce 1/36 par la probabilité d'être transporté vers un autre état (voir 2.1). On repète ce processus autant de fois qu'il y a d'états bien sûr.

2.3 Caractérisation de la chaine de Markov

Cette chaine de Markov est irréductible si on ignore l'état 33 (càd la case *En Prison !*) dans lequel on ne rentre jamais. Puisque la chaine n'est pas irréductible, elle n'est pas non plus régulière mais encore une fois, si l'on ne prend pas en compte l'état 33 la matrice serait aussi régulière car si l'on prend un certain nombre de déplacement, on peut transitionner d'un état depuis n'importe quel autre. Elle n'est par contre ni pérodique ni apériodique en considérant l'état 33, autrement, la chaine serait apériodique car il existe une multitude de chemins différents et de longueurs différentes pour revenir à un état (notamment dû aux cartes de chance/chancellerie qui déplace le pion un peu partout). Si l'on prend le pgcd de toutes ces longueurs, on aurait comme résultat 1.

2.4 Observation sur la chaine de Markov représentant le monopoly

- **Évolution des probabilités $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t = \mathbf{i})$:**

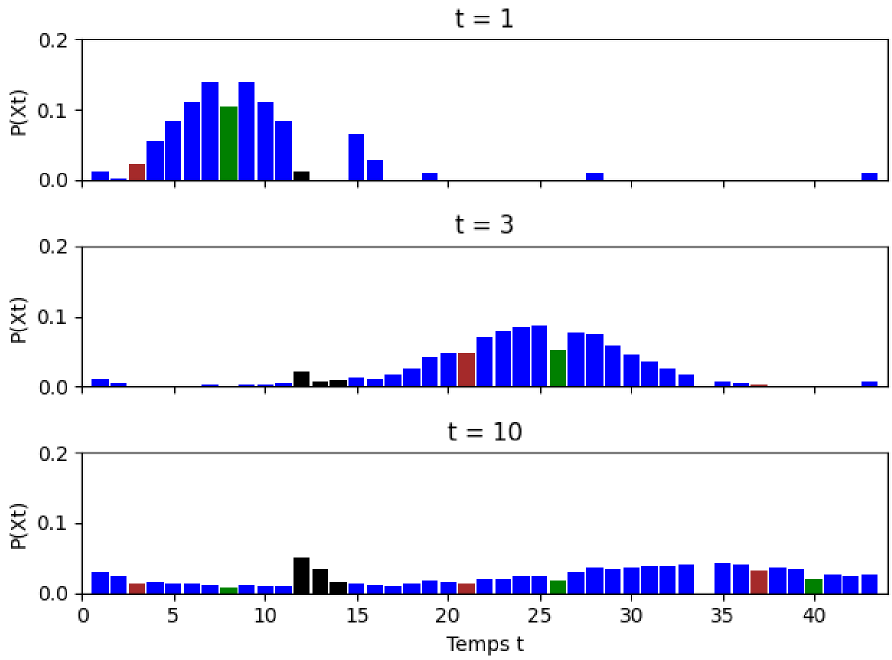

FIGURE 22 – Evolution des probabilités d'être dans chaque état.

En bleu les états de propriété, en noir les états de prison hors visite (3 états pour 3 tours possibles en prison), en brun les états de chancellerie et vert les états de chance.

Les valeurs de $P(X_t)$ évoluent comme une vague qui finit par se tasser. On remarque que l'état 34 (càd la case *En prison !*) n'est jamais traversée. En effet un pion se déplaçant dans la case correspondante est automatiquement transporté à la prison, si bien que toute probabilité d'arriver à l'état 34 profite à la probabilité d'arriver en prison.

• **Temps moyen passés dans chaque case**

1. Start 0.029084
2. Louvain Rue de Diest 0.024738
3. Chancellerie 0.016798
4. Malines Rue St Catherine 0.021178
5. Impôt sur le revenu 0.021403
6. Gare du Nord 0.021793
7. Tournai Rue Royale 0.022330
8. Chance 0.014148
9. Dinant Rue Grande 0.022542
10. Mons Grand'Rue 0.022093
11. a) Prison 0.088180
    b) Prison (visite) 0.021710
12. Namur Avenue de la Gare 0.025125
13. Centrales électriques 0.023376
14. Charleroi Rue de Marcinelle 0.022049
15. Knokke Avenue du Littoral 0.024517

16. Gare Centrale 0.028431
17. Bruges Rue des Pierres 0.026823
18. Chancellerie 0.021368
19. Ostende Rue Adolphe Buyl 0.028116
20. Coutrai Rue de Lille 0.026186
21. Parking 0.027909
22. Spa Place du Monument 0.025977
23. Chance 0.017272
24. Arlon Grand'Rue 0.025498
25. Hasselt Grand'Place 0.029886
26. Tramways Vicinaux 0.025523
27. Liège Place St. Lambert 0.025562
28. Bruxelles Rue de Laeken 0.025469
29. Cie. Intercommunale des Eaux 0.025216
30. Gand Rue des Champs 0.025017
31. En Prison ! 0.000000
32. Namur Rue de l'Ange 0.025462
33. Verviers Place Verte 0.024742
34. Chancellerie 0.019532
35. Hasselt Rue du Démer 0.023378
36. Gare du midi 0.022567
37. Chance 0.013427
38. Anvers Place de Meir 0.020346
39. Impôt Supplémentaire 0.020411
40. Bruxelles Rue Neuve 0.024819

- **Rue/gare à acheter en priorité :** La case "Hasselt Grand'Place"
- **Temps moyen avant d'être envoyé en prison :** 28.912
- **Temps moyen entre 2 passages en prison :** 27.678

Note : Les temps moyens ont été calculés par force brute en lançant des réalisations au hasard puis moyennés sur 1000 trajectoires. Précisons qu'on qualifie une unité de "temps" la transition d'un état à un autre, il ne s'agit pas de seconde.

2.5 Chaine de Markov qui prend en compte la règle 4

La règle 4 indique qu'on transitionne en prison après 3 tours consécutifs de lancé de double. Dans sa première forme la chaine de markov associe un état à une case, la règle 4 applique donc une dépendence aux **deux** tours précédents. En effet, l'invariance dans une chaine de markov de premier ordre demande à ce qu'un état t ne dépende que de l'état précédent *t-1*. Pour pouvoir prendre en compte cette règle, il faut utiliser 3 états par cases (au total, 129 états au lieu de 43). Pour chaque triplet d'états ceux-ci indiquent : aucun, un ou deux doubles réalisés précédemment. On passe directement en prison une fois qu'on est dans le troisième "état copie".

2.6 Application de la chaine modifiée

- Proportion moyenne du temps en prison : 0.1816488550751291
- Temps moyen jusqu'à la prison : 13.421
- Temps moyen entre deux allers en prison : 13.489