МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Курсовая работа

Нетранзитивные наборы финансовых стратегий на фондовом рынке

Выполнил:

Студент 5 курса 531 группы
Ковальчук А.А.

Научный руководитель:

Доцент кафедры теории
веротностей Лебедев А.В.

Москва, 2022 г.

Оглавление

Глава 1

Введенеие

Фондовый рынок - это неотёемлемая часть экономического сектора уже многие столетия. Область активно развивается и вовлекает все больше и больше людей с каждым годом. Безусловно, для анализа и прогнозирования поведения активов используют методы математического моделирования. В этой работе будет разобрано одно из свойств стратегий, которые могут быть применены для торговли активами на фондовом рынке. Перейдем к проблематике.

1.1 Проблематика

В статье Токарева Сергея Степановича "Нетранзитивный лохотрон на фондовом рынке" утверждается существование нетранзитивных наборов финансовых стратегий[1]. Одна стратегия считается лучше другой, если она чаще дает больший результат. Автор утверждает, что существует пример стратегий, при котором первая стратегия лучше второй (в смысле описанном выше), вторая стратегия лучше третьей, но неверно, что первая стратегия лучше стратегии три, то есть:

$$(s_1 \succ s_2) \bigwedge (s_2 \succ s_3) \nRightarrow s_1 \succ s_3$$

1.2 Описание стратегий

Будем рассматривать 3 стратегии:

1. стратегия s_1(первая): продажа акций производится в самом начале торгового дня по текущей биржевой цене (чистая прибыль всегда равна нулю).

2. стратегия s_2 (вторая): продажа акций производится в тот момент, когда их цена впервые снизится более чем на $a\%$, либо поднимется более чем на $b\%$ от их стоимости на начало торгового дня. Если же цена за весь день ни разу не достигнет ни одного из указанных уровней, то продажа производится в конце торгов по текущей цене.

3. стратегия s_3 (третья): продажа акций производится в тот момент, когда их цена впервые снизится более чем на $c\%$, либо поднимется более чем на $d\%$ от их стоимости на начало торгового дня. Если опять же цена ни разу за весь день не достигнет ни одного из указанных критических уровней, то продажа производится в конце торгов по текущей цене.

1.3 Постановка задачи

Необходимо дать более точное математическое обоснование данного вопроса, изучить зависимость вероятностей от пороговых значений, разобраться, когда нетранзитивность в этой системе должна проявляться в большей степени, а когда в меньшей. Помимо этого важной задачей будет произвести численный эксперимент на реальных данных и проверить, выполняться ли теоритические выводы на практике.

Глава 2

Теоретическое обоснование

Эта глава будет посвещена теоретическому исследованию вопроса нетранзитивности. Будет произведен расчет необходимых вероятностей и исследование силы нетранзитивности полученных соотношений.

2.1 Причина отсутствия транзитивности

Приведем обоснование при $a = 0.6\%$, $b = 0.3\%$, $c = 0.3\%$, $d = 0.6\%$. Здесь a, b, c, d аналогичны тем, что были введены в предыдущей главе.

Вероятность того, что при работе с одними и теми же акциями на одном и том же временном интервале вторая стратегия приведет к реализации бумаг по более высокой цене, чем первая, равна приблизительно $\frac{2}{3}$ или 66.7%. Это следует из того, что ожидаемая вероятность изменения на 0.6% должна быть в два раза меньше, чем на 0.3%. Таким образом, вторая стратегия в указанном смысле оказывается лучше первой, то есть доминирует над ней.

С другой стороны, вероятность того, что при аналогичных условиях третья стратегия позволит продать бумаги дороже, в сравнении со второй, также превышает 50%. Это следует из того, что на росте акции мы с большей вероятностью зафиксируем большую прибыль, а на падении меньший убыток. То есть третья стратегия, в свою очередь, доминирует над второй.

Предполагая транзитивность определенного нами отношения доминирования, можно подумать, что третья стратегия является самой предпочтительной из всех трех. Однако эта гипотеза не будет соответствовать действительности, так как на самом деле первая стратегия обеспечивает более высокую цену продажи по сравнению с третьей опять же с вероятностью примерно 66.7%. Далее мы подтвердим это строго.

2.2 Расчет вероятностей

Введем случайные величины, соответствующие прибыли для каждой из трёх стратегий. Введем их для удобства вычислений следующим образом:

$$X_1 \equiv 0,\ X_2 = \begin{cases} -a, & \text{с вер. } p_-(a,b) \\ b, & \text{с вер. } p_+(a,b) \end{cases},\ X_3 = \begin{cases} -c, & \text{с вер. } p_-(c,d) \\ d, & \text{с вер. } p_+(c,d) \end{cases}$$

Тогда будет верно, что $P(X_1 < X_2) = p_+(a,b)$, $P(X_2 < X_1) = p_-(a,b)$. Аналогично $P(X_1 < X_3) = p_+(c,d)$, $P(X_3 < X_1) = p_-(c,d)$. Вычислим $p_+(a,b), p_-(a,b)$, вероятности $p_+(c,d), p_-(c,d)$ будут после этого определены автоматически.

Пусть S_0 - это стоимость акции в начале торгового дня. Пусть $A = \frac{a}{100\%}$, $B = \frac{b}{100\%}$, $p_+(a,b) := p_+$, $p_-(a,b) := p_-$.

Будем использовать теорему Дуба об остановке[2]. Тогда имеем, что:

$$\begin{gathered} S_0 = p_+S_0(1+B) + p_-S_0(1-A) \\ 1 = p_+(1+B) + (1-p_+)(1-A) \\ p_+ = \frac{A}{A+B} = \frac{a}{a+b}, p_- = \frac{b}{a+b} \end{gathered}$$

Тогда в примере, который мы описывали в предыдущей главе, будем иметь, что $p_+(0.6, 0.3) = \frac{2}{3}, p_-(0.6, 0.3) = \frac{1}{3}$.

Итого имеем, что:

$$p_+(a,b) = \frac{a}{a+b}, p_-(a,b) = \frac{b}{a+b}, p_+(c,d) = \frac{c}{c+d}, p_-(c,d) = \frac{d}{c+d}$$

Теперь приступим к нахождению $P(X_2 < X_3)$. Сразу отметим, что случайные величины X_2 и X_3 зависимы, поэтому заполним таблицу вероятностей изменения цены акций ниже (не теряя общности будем считать, что $c < a$, $b < d$):

X_3 \ X_2	$-a$	b
$-c$	p_{--}	p_{+-}
d	p_{-+}	p_{++}

Тогда будет верно, что $P(X_2 < X_3) = p_{--} + p_{-+} + p_{++}$.

Верно, что $p_{--} = p_-(a,b) = \frac{b}{a+b}$. Расчитывая вероятность таким образом, мы уверены, что цена акции не выйдет за полосу равную b (а значит и d) и автоматически пересечет полосу $-c$.

Далее рассмотрим p_{-+}. Эта вероятность равна нулю, так как если $X_2 = -a$, то $X_3 = -c$, так как $c < a$. С другой стороны, если $X_3 = d$, то $X_2 = b$, так как $b < d$.

Наконец рассмотрим p_{++}. Аналогично рассуждению для p_{--} будем иметь, что $p_{++} = p_+(c,d) = \frac{c}{c+d}$. Имеем следующее:

$$P(X_2 < X_3) = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d}$$

Тогда получаем, что условие нетранзитивности можно записать в следующем виде:

$$P(X_1 < X_2) > \tfrac{1}{2}, P(X_2 < X_3) > \tfrac{1}{2}, P(X_3 < X_1) > \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{a}{a+b} > \tfrac{1}{2}, \tfrac{b}{a+b} + \tfrac{c}{c+d} > \tfrac{1}{2}, \tfrac{d}{c+d} > \tfrac{1}{2}$$

Еще раз проверим условие нетранзитивности для $a = 0.6$, $b = 0.3$, $c = 0.3$, $d = 0.6$.

$$\tfrac{a}{a+b} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2}, \tfrac{b}{a+b} + \tfrac{c}{c+d} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2}, \tfrac{d}{c+d} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2}$$

Нетранзитивность доказана. Уделим внимание еще одному моменту. Докажем, что сумма вероятностей в таблице будет равна 1. Для этого сначала вычислим p_{+-}.

Необходимо рассмотреть два случая. Первый: стоимость сначала опускается до $-c$, а потом поднимается до b. Второй: стоимость сначала поднимается на b, а потом опускается на $-c$. Первая вероятность может быть вычислена так: $\frac{b}{b+c} * \frac{a-c}{a+b}$. Вторая вероятность вычисляется так: $\frac{c}{b+c} * \frac{d-b}{d+c}$. Итого получаем, что $p_{+-} = \frac{b(a-c)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c(d-b)}{(b+c)(d+c)}$. Перейдем к проверке:

$$p_{--} + p_{-+} + p_{+-} + p_{++} = \tfrac{b}{a+b} + \tfrac{b(a-c)}{(a+b)(b+c)} + \tfrac{c(d-b)}{(b+c)(d+c)} + \tfrac{c}{c+d} =$$
$$\tfrac{b(b+a)}{(a+b)(b+c)} + \tfrac{c(d+c)}{(b+c)(c+d)} = \tfrac{b}{b+c} + \tfrac{c}{b+c} = 1$$

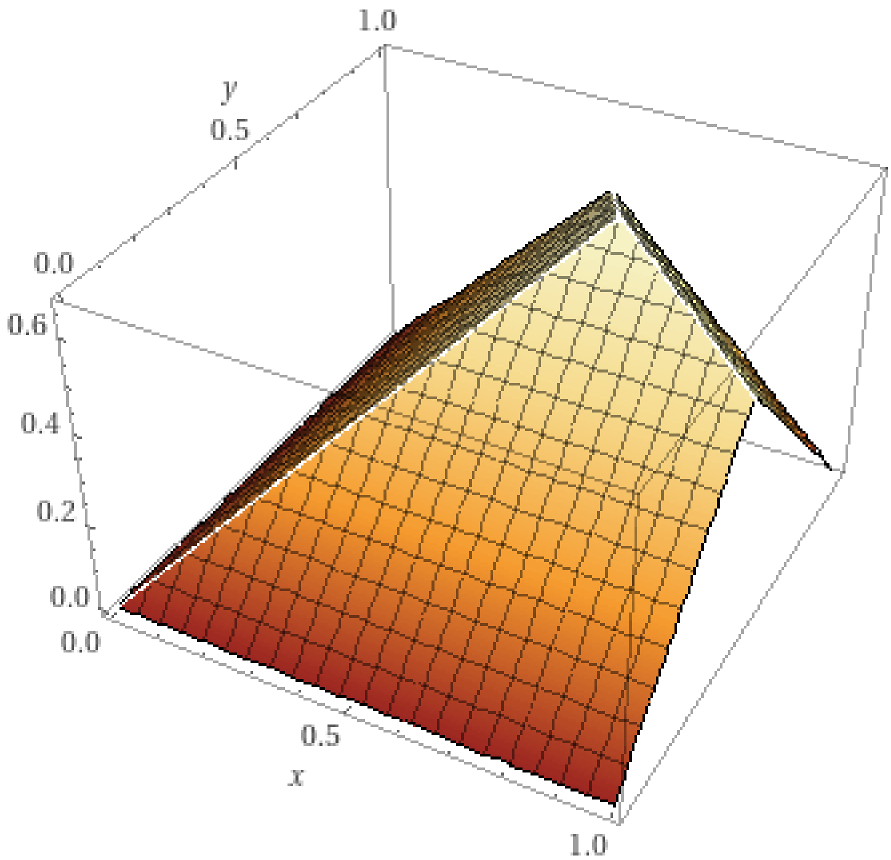
Равенство суммы вероятностей единицы выполнено. Теперь перейдем к решению оптимизационной задачи.

2.3 Решение оптимизационной задачи

Перейдем к исследованию полученных соотношений. Будем максимизировать силу нетранзитивности, а именно:

$$min((P(X_1 < X_2), P(X_2 < X_3), P(X_3 < X_1)) \to max$$
$$min(\tfrac{a}{a+b}, \tfrac{b}{a+b} + \tfrac{c}{c+d}, \tfrac{d}{c+d}) \to max$$
$$x := \tfrac{a}{a+b}, y := \tfrac{d}{c+d}, 0 < x < 1, 0 < y < 1$$
$$min(x, 2 - x - y, y) \to max$$

Минимум левого вырежния можно рассмотреть, как минимум из трех функций $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = 2 - x - y$, $f_3(x, y) = y$. Построим графики этих функций в одной системе координат и оставим их части соответствующие $min(f_1, f_2, f_3)$:



Из графика видно, что максимум достигается в точке пересечения трех плоскостей, значит, надо приравнять все три функции, то есть $x = 2 - x - y = y$. Отсюда получаем что $x = y = \frac{2}{3}$. Таким образом $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ - точка максимума.

Возвращаясь к изначальным переменным имеем, что сила нетранзитивности максимальна при $a = 2b$, $d = 2c$ сила нетранзитивности будет максимальной. Теперь перейдем к практической части.

Глава 3

Численный эксперимент

В этой главе мы исследуем свойство нетранзитивности на реальных данных. Проведем численный эксперимент при $a = d$, $b = c$ (для простоты анализа). То есть одна стратегия закрывалась в плюс на таком же проценте, как и другая в минус, и наоборот. Эксперимент будем проводить на акциях Сбербанка за 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 (ticker = SBER)[3].

3.1 Описание эксперимента

Будем считать, что одна стратегия лучше другой, если она чаще дает больший результат. Поэтому наша цель, подтвердить, что приведенные ранее соотношения для стратегий будут выполняться. Для агрегирования данных будем использовать язык Python и библиотеку Pandas. Код будет приведен в следующей главе.

Результаты приведем в таблицах: по строкам укажем всевозможные исходы (их 9 штук), по столбцам обозначим годы. В пересечении строк и столбцов укажем процент, соответсвующий кажому исходу по годам.

Для первого эксперимента $a = d = 0.6$, $b = c = 0.3$. Результат:

	2017	2018	2019	2020	2021
s1 > s2	36.9	31.9	32.9	36.8	39.4
s1 > s3	65.5	63.0	63.9	66.8	74.3
s2 > s1	63.1	68.1	67.1	63.2	60.6
s2 > s3	29.0	31.1	31.3	30.0	35.0
s3 > s1	34.5	37.0	36.1	33.2	25.7
s3 > s2	67.1	59.4	66.7	61.6	62.4
s1 == s2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s1 == s3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s2 == s3	4.0	9.4	2.0	8.4	2.7
Количество дней	252	254	252	250	226

Вывод: за все годы наблюдается эффект нетранзитивности. Из таблицы видно, что $s_2 > s_1$ (действительно примерно в $\frac{2}{3}$ случаев) и $s_1 > s_3$ (также примерно в $\frac{2}{3}$ случаев), но соотношение, что $s_2 > s_3$ является неверным.

Далее возьмем $a = d = 0.4$, $b = c = 0.2$. Результат:

	2017	2018	2019	2020	2021
s1 > s2	40.1	35.0	38.1	38.4	42.0
s1 > s3	63.9	58.3	63.9	64.8	68.6
s2 > s1	59.9	65.0	61.9	61.6	58.0
s2 > s3	23.8	23.2	25.8	26.4	26.5
s3 > s1	36.1	41.7	36.1	35.2	31.4
s3 > s2	59.1	53.1	65.5	54.0	70.4
s1 == s2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s1 == s3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s2 == s3	17.1	23.6	8.7	19.6	3.1
Количество дней	252	254	252	250	226

Вывод: при изменении параметров второй и третьей стратегии эффект нетранзитивности сохраняется.

Далее возьмем $a = d = 0.5$, $b = c = 0.25$. Результат:

	2017	2018	2019	2020	2021
s1 > s2	36.1	32.7	36.1	37.2	43.8
s1 > s3	65.9	59.4	62.7	66.0	71.2
s2 > s1	63.9	67.3	63.9	62.8	56.2
s2 > s3	29.8	26.8	27.0	28.8	27.4
s3 > s1	34.1	40.6	37.3	34.0	28.8
s3 > s2	60.3	58.7	69.8	60.0	69.0
s1 == s2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s1 == s3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s2 == s3	9.9	14.6	3.2	11.2	3.5
Количество дней	252	254	252	250	226

Вывод: при изменении параметров второй и третьей стратегии эффект нетранзитивности сохраняется.

Последний эксперимент: $a = d = 2$, $b = c = 1$. Результат:

	2017	2018	2019	2020	2021
s1 > s2	25.4	27.6	25.0	26.4	28.3
s1 > s3	69.8	74.4	71.8	70.8	70.8
s2 > s1	74.2	72.4	75.0	73.6	71.7
s2 > s3	50.8	51.6	49.6	49.2	46.9
s3 > s1	29.8	25.6	27.8	29.2	29.2
s3 > s2	22.2	34.3	13.5	30.0	20.8
s1 == s2	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0
s1 == s3	0.4	0.0	0.4	0.0	0.0
s2 == s3	27.0	14.2	36.9	20.8	32.3
Количество дней	252	254	252	250	226

Вывод: при изменении параметров нетранзитивность сохраняется, только в более слабом смысле: не вероятность выигрыша больше половины, а вероятность выигрыша больше вероятности проигрыша (поскольку ничьи отнимают часть полной вероятности). Также можно заметить рост равенства стратегий s_2 и s_3.

3.2 Графическая эллюстрация

Дополнительно рассмотрим на графиках всевозможные варианты реализации стратегий s_2 и s_3 для $a = d = 0.6$, $b = c = 0.3$. Всего есть 9 всевозможных реализаций (как уже было указано ранее). Опишем их и приведем графики ниже:

1. s_2 продажа на повышение, s_3 продажа на повышение (рис. 3.1)
2. s_2 продажа на повышение, s_3 продажа на понижение (рис. 3.2)
3. s_2 продажа на повышение, s_3 продажа в конце дня (рис. 3.3)
4. s_2 продажа на понижение, s_3 продажа на повышение (не реализуется)
5. s_2 продажа на понижение, s_3 продажа на понижение (рис. 3.4)
6. s_2 продажа на понижение, s_3 продажа в конце дня (не реализуется)
7. s_2 продажа в конце дня, s_3 продажа на повышение (не реализуется)
8. s_2 продажа в конце дня, s_3 продажа на понижение (рис. 3.5)
9. s_2 продажа в конце дня, s_3 продажа в конце дня (рис. 3.6)

Сразу отметим, что случаи, описанные под буквами г, е, ж не реализуются. Случай, описанный под пунктом и), также не был найден для выбранных a, b, c, d, но при увеличении этих значений на незначительную величину приведет также к реализации этого случая (см. рис. 6).

Рис. 3.1: s_2 продажа на повышение, s_3 продажа на повышение

Рис. 3.2: s_2 продажа на повышение, s_3 продажа на понижение

Рис. 3.3: s_2 продажа на повышение, s_3 продажа в конце дня

Здесь дополнительно отмечу, что все графики были построены на тех же данных по акциям Сбербанка (ticker = SBER) за 2017, 2018, 2019, 2020, 2021. Синим цветом обозначено изменение стоимости акции в течение торгового дня(данные были взяты поминутно). Красные пунктирные линии обозначает границы продажи для стратегии s_2, зеленые пунктирные линии обозначают границы продажи для стратегии s_3. Посмотрим оставшиеся графики:

Рис. 3.4: s_2 продажа на понижение, s_3 продажа на понижение

Рис. 3.5: s_2 продажа в конце дня, s_3 продажа на понижение

Рис. 3.6: s_2 продажа в конце дня, s_3 продажа в конце дня

На этом численный эксперимент можно считать законченным.

Глава 4

Разбор парсинга данных на языке Python

Приведем код на языке Python для предобработки и анализа данных. Для более удобного анализа и представления результатов я использовал Jupyter Notebook (в целом это может быть и другая интегрированная среда разработки для языка программирования Python).

Считывание файлов и подключение библиотек:

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

data2021 = pd.read_csv('SBER_2021.csv', sep = ';')
data2020 = pd.read_csv('SBER_2020.csv', sep = ';')
data2019 = pd.read_csv('SBER_2019.csv', sep = ',')
data2018 = pd.read_csv('SBER_2018.csv', sep = ',')
data2017 = pd.read_csv('SBER_2017.csv', sep = ',')

dfs = [data2017, data2018, data2019, data2020, data2021]
```

Функция для получения прибыли от стратегий и сравнения двух стратегий:

```
def strategy23(data, day, a, b):
    df = data[data['<DATE>'] == day]
    prices = list(df['<OPEN>'])
    start_price = prices[0]
    income = 0
    for p in prices[1:]:
        percent = round((p/start_price - 1) * 100, 3)
        if percent > a or percent < -b:
            income = p - start_price
            break
    if income == 0:
        return round(start_price - prices[-1], 4)
    else:
        return round(income, 4)
```

```
def betterthan(a1, a2):
    count = 0
    for i in range(len(a1)):
        if a1[i] > a2[i]:
            count += 1
    return count
```

Функции для составления сводной таблицы для трех стратегий за все года. Вывод - это таблицы, которые были приведены в предыдущей главе:

```
def pivot_table(dfs, a = 0.3, b = 0.6):
    results = []
    for df in dfs:
        days = sorted(list(set(df['<DATE>'])))
        s1income = [0] * len(days)
        s2income = []
        s3income = []
        for d in days:
            s2income.append(strategy23(df,d, a, b))
            s3income.append(strategy23(df,d, b, a))
        s1betters2 = betterthan(s1income, s2income)
        s1betters3 = betterthan(s1income, s3income)
        s2betters1 = betterthan(s2income, s1income)
        s2betters3 = betterthan(s2income, s3income)
        s3betters1 = betterthan(s3income, s1income)
        s3betters2 = betterthan(s3income, s2income)
        s1isequals2 = len(days) - s1betters2 - s2betters1
        s1isequals3 = len(days) - s1betters3 - s3betters1
        s2isequals3 = len(days) - s2betters3 - s3betters2
        results.append(['paste all *betters* here'])
    return results
```

Делаем вывод таблицы (приведем пример для стандартных значений функции):

```
results = pivot_table(dfs)
d = {'2017': results[0], '2018': results[1], '2019': results[2], '2020': results[3], '2021':results[4]}
out = pd.DataFrame(d, index=['s1 > s2', 's1 > s3', 's2 > s1','s2 > s3', 's3 > s1', 's3 > s2','s1 == s2', 's1 == s3', 's2 == s3', 'Num of days'])
out
```

Код для отрисовки поведения стоимости акций в пределах суток (они также были приведены в предыдущей главе)

```
import plotly.graph_objects as go
def update_time(x):
    x = str(x)
    return x[:2] + ':' + x[2:4] + ':' + x[4:]

a = 0.3
b = 0.6
day = 20210108
```

```
df = data2021[data2021['<DATE>'] == day]
time = [update_time(x) for x in df['<TIME>']]
up2 = [list(df['<OPEN>'])[0] * (1 + a / 100)] * len(df)
up3 = [list(df['<OPEN>'])[0] * (1 + b / 100)] * len(df)
down2 = [list(df['<OPEN>'])[0] * (1 - b / 100)] * len(df)
down3 = [list(df['<OPEN>'])[0] * (1 - a / 100)] * len(df)


fig = go.Figure()

fig.add_trace(go.Scatter(x = time, y = list(df['<OPEN>']), name = '',
                         line = dict(color ='royalblue', width = 2)))

fig.add_trace(go.Scatter(x = time, y = up2, name = '',
                         line = dict(color = 'firebrick', width = 2, dash='dash')))
fig.add_trace(go.Scatter(x = time, y = down2, name = '',
                         line = dict(color = 'firebrick', width = 2, dash='dash')))
fig.add_trace(go.Scatter(x = time, y = up3, name = '',
                         line = dict(color = 'rgb(33, 183, 98)', width = 2, dash='dash')))
fig.add_trace(go.Scatter(x = time, y = down3, name = '',
                         line = dict(color = 'rgb(33, 183, 98)', width = 2, dash='dash')))

fig.show()
```

Глава 5

Список используемых ресурсов

[1] Токарев С.С., "Нетранзитивный лохотрон"на фондовом рынке. Об одной перспективной форме платного обучения экономике, 2009.

[2] Grimmett, Geoffrey R.; Stirzaker, David R., Probability and Random Processes (3rd ed.). Oxford University Press. p. 491, 2001

[3] Финам, Мосбиржа, акции Сбербанк, 2021.