CHAPTER 04

미분 I

미분의 정의 미분의 기본정리

김 수 환

동의대학교 수학과

Contents

미분의 계수

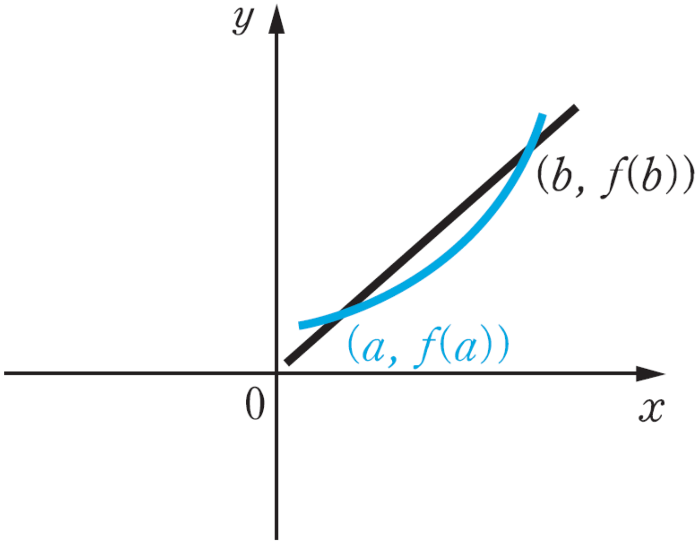
미분계수

증분과 평균변화율의 정의 $y=f(x)$에 대하여

❶ x가 a에서 b로 변했을 때 $b-a$를 **x의 증분**이라 하고, Δx로 나타낸다.

❷ $f(b)-f(a)$를 **y의 증분**이라 하고, Δy로 나타낸다.

❸ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$를 a에서 b까지 함수 $f(x)$의 **평균변화율**이라 한다.



[그림 3-1] 증분과 평균변화율

미분계수

예제 3-1

$f(x) = x^2 + 1$일 때

(a) x가 2에서 3으로 변했을 때, 함수 $f(x)$의 평균변화율을 구하라.

(b) x가 2에서 0으로 변했을 때, 함수 $f(x)$의 평균변화율을 구하라.

(c) x가 -1에서 1로 변했을 때, 함수 $f(x)$의 평균변화율을 구하라.

미분계수

➢ 순간 변화율과 미분계수의 정의

순간변화율과 미분계수의 정의 $x=a$에서 $y=f(x)$의 **순간변화율**은

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

로 정의한다. $x=a$에서의 $f(x)$의 순간변화율은 $x=a$에서의 $f(x)$의 **미분계수**(differential coefficient)라고도 하며, $f'(a)$로 나타낸다.

미분계수의 정의에서 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이지만, 이렇게 표현한다고 해서 $f'(a)$가 반드시 존재하는 것은 아니다.

미분가능성

미분가능성

미분가능성의 정의 $y = f(x)$에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면, $f(x)$는 $x = a$에서 **미분가능하다**(differentiable)고 한다.

따라서 극한이 존재하지 않는 경우의 $f(x)$는 $x = a$에서 **미분가능하지 않다**고 한다. 다르게 표현하면 $x = a$에서의 **미분계수가 존재하지 않는다**고 한다.

미분가능성

How to 3–1 미분가능성을 확인하는 방법

다음 식에서 극한은 존재할 수도 있고, 존재하지 않을 수도 있다.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

❶ 극한이 존재하면 '$f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다'고 결론을 내리고, 그 극한값을 '$x = a$에서 $f(x)$의 미분계수'라 한다.

❷ 극한이 존재하지 않으면 '$f(x)$는 $x = a$에서 미분불가능하다'고 결론을 내리고, '$x = a$에서 $f(x)$의 미분계수는 존재하지 않는다'고 한다.

예제 3-2

[How to 3–1]을 이용하여 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = x^2 - 3x$ 일 때, $x = 1$ 에서 $f(x)$ 의 미분계수를 구하라.

(b) $g(x) = |x|$ 일 때, $x = 0$ 에서 $g(x)$ 의 미분계수를 구하라.

미분가능성

예제 3-3

다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ 일 때, $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능한가?

(b) $g(x) = |x|$일 때, $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능한가?

미분가능성

➢ 연속과 미분의 관계

정리 3-1 연속과 미분의 관계

$f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이다.

증명

$f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 보이려면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$가 성립함을 보여야 한다. 이는

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$$

임을 보이는 것과 같다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)\\ &= f'(a)\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

이 성립하므로, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. ■

미분가능성

➢ **[정리 3-1]의 역:**

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $x=a$에서 미분가능하다.

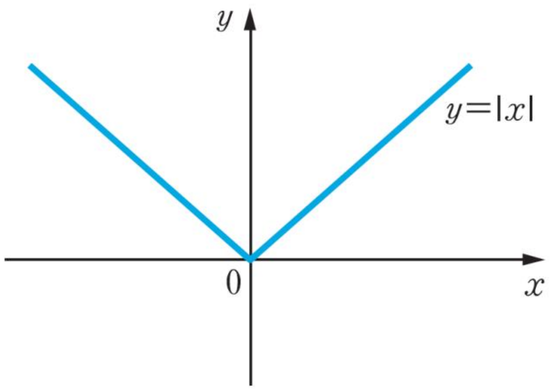
이 명제는 참이 아니다. [정리 3-1]의 역이 성립하지 않는 경우를 살펴보자.

예제 3-4

$f(x)=|x|$일 때, $f(x)$가 $x=0$에서 연속이지만 미분불가능함을 증명하라.

풀이

$f(x)$의 그래프를 그려보면 다음 식이 성립하는 것을 알 수 있다.



$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

[예제 3-2]의 (b)에서 증명한 바와 같이 $f'(0)=\begin{cases} 1, & h\to 0^+ \\ -1, & h\to 0^- \end{cases}$ 이므로,

$f(x)$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

도함수

도함수

도함수의 정의 함수 $y=f(x)$가 미분가능한 점들의 집합을 A라 할 때, $x \in A$에 대하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

를 함수 $f(x)$의 x에 관한 **도함수**(derivative) 또는 **미분**(differentiation)이라 한다.

도함수는 일반적으로 $f'(x)$, y' 또는 $\frac{dy}{dx}$로 나타낸다.

예제 3-5

$f(x)=x^2$의 도함수를 구하라.

예제 3-6

$f(x)=\sqrt{x}$일 때, $f'(1)$, $f'(\pi)$, $f'(5)$를 구하라.

미분의 기본 정리

미분의 기본 정리

정리 3-2 기본적인 미분 정리

(1) c가 상수일 때, $f(x) = c$이면 $f'(x) = 0$이다.

(2) n이 자연수일 때, $f(x) = x^n$이면 $f'(x) = nx^{n-1}$이다.

증명

(1) $f(x)$가 상수함수이므로 임의의 h에 대하여 $f(x) = c = f(x+h)$이다. 따라서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다.

미분의 기본 정리

(2) 이항정리

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

을 이용한다. 따라서

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + nx^{n-1}h + \cdots + h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

미분의 기본 정리

예제 3-7

다음 함수를 미분하라.

(a) $f(x) = 5$

(b) $g(x) = \pi^3$

(c) $h(x) = x^4$

(d) $k(x) = x^{100}$

미분의 기본 정리

정리 3-3 미분의 사칙연산 정리

$f(x)$와 $g(x)$가 미분가능하면 다음이 성립한다.

(1) c가 상수일 때, $(cf(x))' = cf'(x)$

(2) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

(3) $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

(4) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(5) 만일 $g'(x) \neq 0$이면 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$이다.

증명

(1) 극한을 이용하여 도함수를 나타낸 후 상수항을 극한 앞으로 보내서 결과를 유도한다.

$$
\begin{aligned}
(cf(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} \\
&= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= cf'(x)
\end{aligned}
$$

미분의 기본 정리

(2) 극한을 이용하여 도함수를 나타냈을 때, 분자에 있는 네 개의 항을 두 개씩 묶어서 결과를 유도한다.

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

(3) (2)에서와 같이 극한을 이용하여 도함수를 나타냈을 때, 분자에 있는 네 개의 항을 두 개씩 묶어서 결과를 유도한다.

$$
\begin{aligned}
(f(x)-g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-g(x+h))-(f(x)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))-(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)-g'(x)
\end{aligned}
$$

미분의 기본 정리

(4) 극한을 이용하여 도함수를 나타냈을 때, 분자에서 $f(x)g(x+h)$를 뺀 후에 다시 더하여 네 개의 항으로 만든 후, 이를 두 개씩 묶어서 결과를 유도한다.

$$
\begin{aligned}
(f(x)\,g(x))' &= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x+h)+\lim_{h\to0}f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\
&= f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)
\end{aligned}
$$

미분의 기본 정리

(5) (4)의 경우와 비슷하게 극한을 이용하여 도함수를 나타냈을 때, 분자에서 $f(x)g(x)$를 뺀 후에 다시 더하여 네 개의 항으로 만든 후, 이를 두 개씩 묶어서 결과를 유도한다.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\,\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\,\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\,\frac{(f(x+h)-f(x))g(x)+f(x)(g(x)-g(x+h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)+f(x)\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \frac{1}{(g(x))^2}\left[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\right] \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad ■
\end{aligned}$$

미분의 기본 정리

예제 3-8

[정리 3−3]을 이용하여 다음 함수를 미분하라.

(a) $y = x^3 + 4x$

(b) $y = x^5 - 2x^4$

(c) $y = (x^2 + x + 1)(2x^3 - 1)$

(d) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

미분의 기본 정리

➢ 확장된 미분의 기본 정리

정리 3-4 확장된 미분의 기본 정리

$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x)$가 미분가능한 함수들일 때 다음이 성립한다.

(1) $(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x))' = f_1{}'(x)+f_2{}'(x)+\cdots+f_n{}'(x)$

(2) $(f_1(x)-f_2(x)-\cdots-f_n(x))' = f_1{}'(x)-f_2{}'(x)-\cdots-f_n{}'(x)$

(3) $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)) = f_1{}'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)+f_1(x)f_2{}'(x)f_3(x)\cdots f_n(x)$
$+\cdots+f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x)f_n{}'(x)$

예제 3-9

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$일 때, $f'(x)$를 구하라.

예제 3-10

다음 함수를 미분하라.

(a) $f(x)=x^{-3}$　　(b) $g(x)=x^{-8}$

미분의 기본 정리

예제 3-11

[정리 3−5]를 이용하여 다음 함수를 미분하라.

(a) $y = x^{-11}$

(b) $y = \dfrac{1}{x^{100}}$

Thank you!