CHAPTER 06

미분 III

삼각함수 미분법　로그함수 미분법　지수함수 미분법

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

삼각함수의 미분법

삼각함수의 미분법

삼각함수의 미분법을 유도하기 위해 몇 가지 기본적인 삼각함수 공식을 알고 있어야 한다.

❶ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

❷ $$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

❸ $$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

삼각함수의 미분법

➢ 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 의 미분 공식

정리 4-1 기본 삼각함수의 미분 정리

(1) $y = \sin x$일 때, $y' = \cos x$이다.

(2) $y = \cos x$일 때, $y' = -\sin x$이다.

(3) $y = \tan x$일 때, $y' = \sec^2 x$이다.

증명

(1) $y = \sin x$일 때 $y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x$$

삼각함수의 미분법

(2) $y=\cos x$일 때 $y'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}-\sin\frac{2x+h}{2}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$=-\sin x$$

(3) (1)과 (2)의 결과와 나눗셈의 미분법을 이용한다.

$y=\tan x$일 때 $y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x$$

삼각함수의 미분법

- $\csc x$, $\sec x$, $\cot x$ 의 미분법과 관련된 정리.

정리 4-2 변형 삼각함수의 미분 정리

(1) $y=\csc x$일 때, $y'=-\csc x \cot x$이다.

(2) $y=\sec x$일 때, $y'=\sec x \tan x$이다.

(3) $y=\cot x$일 때, $y'=-\csc^2 x$이다.

증명 (1) $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$이므로, 나눗셈의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned} y' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' &= \frac{1'\sin x - 1(\sin x)'}{(\sin x)^2} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} \\ &= -\csc x \cot x \end{aligned}$$

삼각함수의 미분법

(2) $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 이므로, 나눗셈의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned} y' = \left(\frac{1}{\cos x}\right) &= \frac{1'\cos x - 1(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sec x \tan x \end{aligned}$$

(3) $y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ 이므로, 나눗셈의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned} y' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \\ &= \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2} \end{aligned}$$

복잡한 삼각함수의 미분법

복잡한 삼각함수의 미분법

How to 4–1 삼각함수의 합성함수 미분법

❶ $y=\sin(\square)$이면 $y'=\cos(\square)\cdot(\square)'$이다.
❷ $y=\cos(\square)$이면 $y'=-\sin(\square)\cdot(\square)'$이다.
❸ $y=\tan(\square)$이면 $y'=\sec^2(\square)\cdot(\square)'$이다.
❹ $y=\csc(\square)$이면 $y'=-\csc(\square)\cot(\square)\cdot(\square)'$이다.
❺ $y=\sec(\square)$이면 $y'=\sec(\square)\tan(\square)\cdot(\square)'$이다.
❻ $y=\cot(\square)$이면 $y'=-\csc^2(\square)\cdot(\square)'$이다.

예제 4-1

다음 함수를 미분하라.

(a) $y=\sin 3x$
(b) $y=\cos\frac{1}{5}x$
(c) $y=\tan 7(x+1)$
(d) $y=\csc 3x$
(e) $y=\sec\sqrt{x}$
(f) $y=\cot(2x+1)$
(g) $y=\sec(\sin x)$

복잡한 삼각함수의 미분법

예제 4-2

다음 함수를 미분하라.

(a) $y = \sin^2 x$ (b) $y = \sin x^2$

(c) $y = \cos \sqrt{x}$ (d) $y = \tan (x^2 + 1)$

예제 4-3

다음 함수를 미분하라.

(a) $y = \sin^2 3x$ (b) $y = \sin^3 x^2$

(c) $y = \cos^3 (x^2 + 1)$ (d) $y = \tan^4 (2x + 1)$

로그함수의 미분법

로그함수의 미분법

극한공식] $\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$

정리 4-3 로그함수의 미분 정리

함수가 $y=\ln x$일 때, 이 함수의 미분은 $y'=\frac{1}{x}$이다.

증명

도함수의 정의에 의하여

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

로그함수의 미분법

➢ **로그함수를 이용하여 밑수와 진수에 변형된 형태일 때의 미분방법**

■ **진수 x는 바뀌지 않고 밑수만 e에서 a로 바뀐 경우(단, $a>0$, $a \neq 1$)**

이 경우 로그함수는 $y=\log_a x$이고, 이를 미분하면 다음과 같다.

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

예제 4-4

다음 함수를 미분하라.

(a) $y=\log_2 x$

(b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

로그함수의 미분법

➢ **로그함수를 이용하여 밑수와 진수에 변형된 형태일 때의 미분방법**

■ **밑수 e는 바뀌지 않고 진수만 x에서 $f(x)$로 바뀐 경우**

이 경우 로그함수는 $y=\ln f(x)$이고, 이를 미분하면 다음과 같다.

$$y'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

예제 4-5

다음 함수를 미분하라.

(a) $y=\ln(3x^2+1)$

(b) $y=\ln(x^3-1)$

로그함수의 미분법

➢ 로그함수를 이용하여 밑수와 진수에 변형된 형태일 때의 미분방법

■ 밑수 e와 진수 x가 모두 바뀐 경우

밑수가 e에서 a로 바뀌고 진수도 x에서 $f(x)$로 바뀐 경우의 로그함수는

$$y = \log_a f(x)$$

앞서의 두 경우를 종합하여 로그함수를 미분하면

$$y' = \frac{1}{f(x)} f'(x) \frac{1}{\ln a}$$

예제 4-6

다음 함수를 미분하라.

(a) $y = \log_2 (3x^2 + 1)$

(b) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x^3 - 1)$

로그함수 미분법의 활용

로그함수 미분법의 활용

예제 4-10

$y = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 일 때, y' 을 구하라.

예제 4-11

$y = x^x$ 일 때, y' 을 구하라.

로그함수 미분법의 활용

➢ 연속과 미분의 관계

정리 4-5 $y = x^n$의 미분 정리

n이 실수이고 $y = x^n$일 때, $y' = nx^{n-1}$이다.

증명

$y = x^n$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \ln x^n = n \ln x$$

이다. 이 식의 양변을 x에 관하여 미분하면 음함수의 미분법에 의하여

$$\frac{1}{y} y' = n \cdot \frac{1}{x}$$

을 얻는다. 이를 정리하면

$$y' = y \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}$$

지수함수의 미분법

지수함수의 미분법

정리 4-4 지수함수의 미분 정리

함수가 $y=e^x$일 때, 이 함수의 미분은 $y'=e^x$이다.

증명

$y=e^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \ln e^x = x$$

이다. 이 식의 양변을 x에 관하여 미분하면 음함수의 미분법에 의하여

$$\frac{1}{y}y' = 1$$

이 되며, 이를 정리하면

$$y' = y = e^x$$

지수함수의 미분법

➢ 로그함수를 이용하여 밑수와 진수에 변형된 형태일 때의 미분방법

■ **지수 x는 바뀌지 않고 밑수만 e에서 a로 바뀐 경우(단, $a>0$, $a\neq 1$)**

이 경우 지수함수는 $y=a^x$ 이고, 이를 미분하면 $y' = a^x \ln a$

예제 4-7

다음 함수를 미분하라.

(a) $y=3^x$

(b) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

■ **밑수 e는 바뀌지 않고 지수만 x에서 $f(x)$로 바뀐 경우**

이 경우 지수함수는 $y=e^{f(x)}$ 이고, 이를 미분하면 $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

예제 4-8

다음 함수를 미분하라.

(a) $y=e^{x^2+1}$

(b) $y=e^{\sqrt{x}}$

지수함수의 미분법

- **로그함수를 이용하여 밑수와 진수에 변형된 형태일 때의 미분방법**

■ 밑수 e와 지수 x가 모두 바뀐 경우

밑수가 e에서 a로 바뀌고, 지수도 x에서 $f(x)$로 바뀐 경우의 지수함수는

$$y = a^{f(x)}$$

이다. 앞서의 두 경우를 종합하여 지수함수를 미분하면

$$y' = a^{f(x)} f'(x) \ln a$$

예제 4-9

다음 함수를 미분하라.

(a) $y = 5^{x^2+1}$ (b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^3-1}$

Thank you!