CHAPTER 07

미분 IV

쌍곡선함수 미분법　　고계 도함수

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

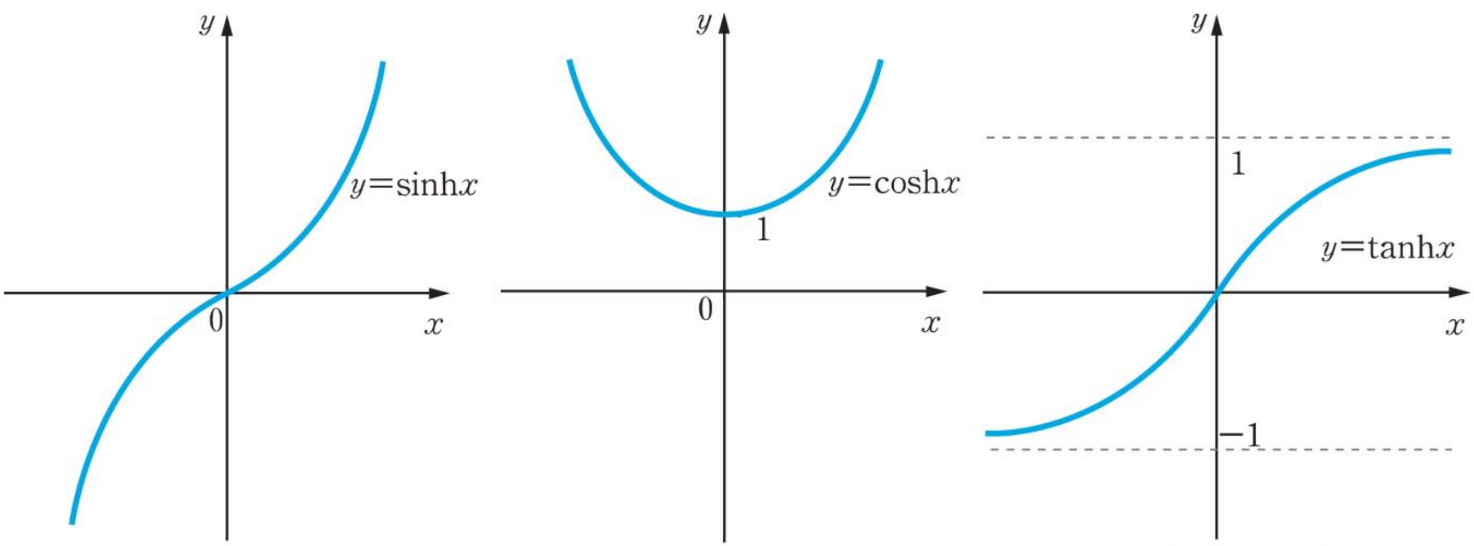
쌍곡선함수의 정의

쌍곡선함수의 정의

❶ $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$을 **쌍곡선 사인함수**라 한다.

❷ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$을 **쌍곡선 코사인함수**라 한다.

❸ $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$을 **쌍곡선 탄젠트함수**라 한다.



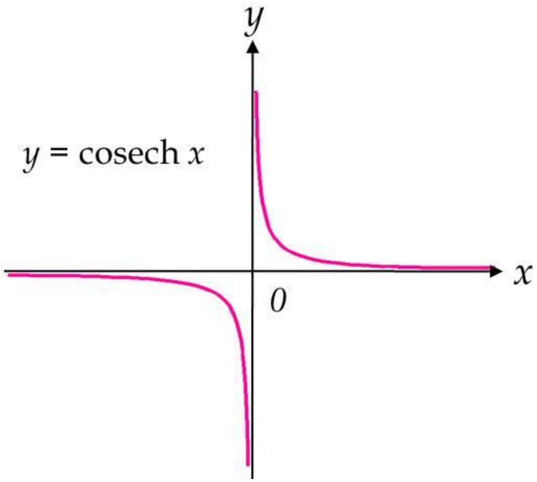
(a) 쌍곡선 사인함수 (b) 쌍곡선 코사인함수 (c) 쌍곡선 탄젠트함수

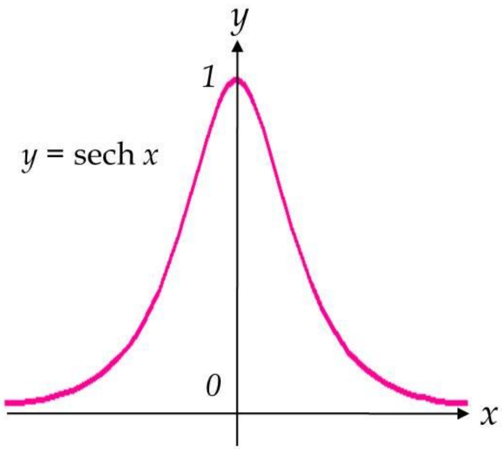
[그림 4-1] 쌍곡선함수의 종류

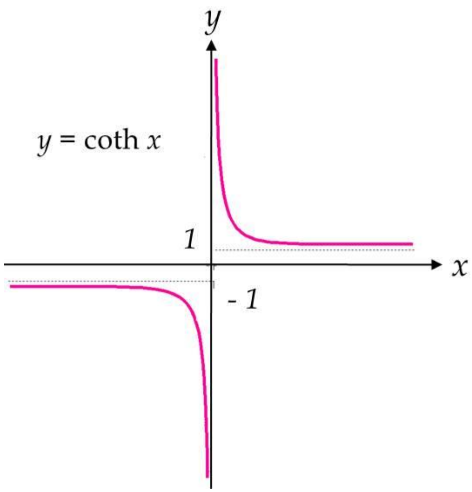
쌍곡선함수의 정의

➢ **쌍곡선 코시컨트함수, 쌍곡선 시컨트함수, 쌍곡선 코탄젠트함수 정의**

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$







쌍곡선함수의 성질

쌍곡선함수의 성질

정리 4-6 쌍곡선함수의 성질

(1) $\sinh(-x) = -\sinh x$

(2) $\cosh(-x) = \cosh x$

(3) $\tanh(-x) = -\tanh x$

증명

(1) $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = -\sinh x$

(2) $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$

(3) (1)과 (2)의 결과로부터

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$$

쌍곡선함수의 성질

정리 4-7 쌍곡선함수 공식

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (2) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

증명

(1) $$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right. \\ &= 1\end{aligned}$$

(2) (1)의 결과에 의하여

$$\begin{aligned}1 - \tanh^2 x &= 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \operatorname{sech}^2 x\end{aligned}$$

쌍곡선함수의 미분법

쌍곡선함수의 미분

정리 4-8 쌍곡선함수의 미분 정리

(1) $y = \sinh x$일 때, $y' = \cos h\, x$이다.

(2) $y = \cosh x$일 때, $y' = \sinh\, x$이다.

(3) $y = \tanh x$일 때, $y' = \mathrm{sech}^2 x$이다.

증명

(1) $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$이므로

$$y' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

이다.

쌍곡선함수의 미분법

(2) $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 이므로

$$y' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

이다.

(3) (1)과 (2)의 결과를 이용한다. $y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' \\ &= \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh x\cosh x - \sinh x\sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

쌍곡선함수의 미분법

예제 4-12

연쇄법칙을 이용하여 다음 함수를 미분하라.

(a) $f(x) = \sinh^2 x$ (b) $g(x) = \cosh 3x$ (c) $h(x) = \tanh x^4$

예제 4-13

연쇄법칙과 미분의 기본 정리를 사용하여 다음 함수를 미분하라.

(a) $f(x) = \sinh 3x \cosh x^2$ (b) $g(x) = \sinh(\cosh x)$

(c) $h(x) = \tanh^2 3x^4$

1계, 2계,3계 도함수

1계, 2계, 3계 도함수

1계, 2계 도함수의 정의 $y = f(x)$의 도함수가 존재할 때, $f'(x)$를 **1계 도함수**라 한다. 만일 $y' = f'(x)$의 도함수가 존재할 때

$$(y')' = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

를 $y = f(x)$의 **2계 도함수**라 한다.

예제 4-14

2계 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 2계 도함수를 구하라.

(a) $y = x^5$

(b) $y = x^3 - 4x$

(c) $y = \cos x$

(d) $y = e^{2x}$

1계, 2계,3계 도함수

1계, 2계, 3계 도함수

3계 도함수의 정의 $y'' = f''(x)$의 도함수가 존재할 때

$$(y'')' = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$$

를 $y = f(x)$의 **3계 도함수**라 한다.

예제 4-15

3계 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 3계 도함수를 구하라.

(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \ln x$

(c) $y = \sin x$ (d) $y = e^{3x}$

n계 도함수

n계 도함수

n계 도함수의 정의 n이 자연수이고 $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$의 도함수가 존재할 때

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$$

를 $y=f(x)$의 **n계 도함수**라 한다.

$n\geq 2$일 때 $y^{(n)}$을 **고계 도함수**라 하고, $y^{(n)}$ 또는 $f^{(n)}(x)$ 또는 $\dfrac{d^n y}{dx^n}$로 나타낸다.

How to 4-2 **n계 도함수를 구하는 방법**

$n=1$, $n=2$, $n=3$일 때 주어진 함수의 도함수를 계산하고, 이때 나타나는 숫자와 식이 변화되는 값을 관찰하여 n계 도함수를 구한다.

n계 도함수

예제 4-16

고계 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 n계 도함수를 구하라.

(a) $y = e^{2x}$ (b) $y = 3^x$ (c) $y = \ln x$

예제 4-17

$y = \sin x$ 의 n계 도함수를 구하라.

매개변수함수의 고계 도함수

매계 변수함수의 고계 도함수

매개변수함수가 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 일 때, 1계 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다. 이제 $\frac{dy}{dx} = Y$라 하면, 2계 도함수는

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(Y) = \frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

주의

$$\frac{d^2 y}{d x^2} \neq \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{\frac{d^2 x}{dt^2}}$$

매개변수함수의 고계 도함수

매계 변수함수의 고계 도함수 편리한 암기법

$$\frac{dy}{dx}\left(\begin{array}{cc} y & \\ \downarrow & \dfrac{dy}{dt} \\ t & \\ \downarrow & \dfrac{dt}{dx} \\ x & \end{array}\right. \qquad \frac{d^2y}{dx^2}\left(\begin{array}{cc} \dfrac{dy}{dx} & \\ \downarrow & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \\ t & \\ \downarrow & \dfrac{dt}{dx} \\ x & \end{array}\right.$$

의미: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$ 의미: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}$

예제 4-18

다음 함수를 미분하라.

(a) $\begin{cases} x = 3t^2 - 1 \\ y = 9t^3 \end{cases}$ 일 때, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 구하라. (b) $\begin{cases} x = \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$ 일 때, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 구하라.

Thank you!