CHAPTER 08

미분의 활용 I

함수의 증가와 감소　극댓값과 극솟값　극값의 활용

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

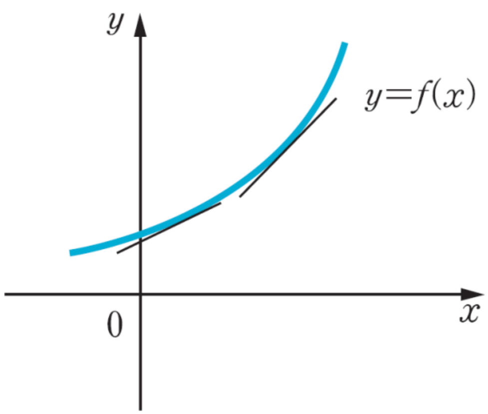
함수의 증가, 감소

함수의 증가 , 감소

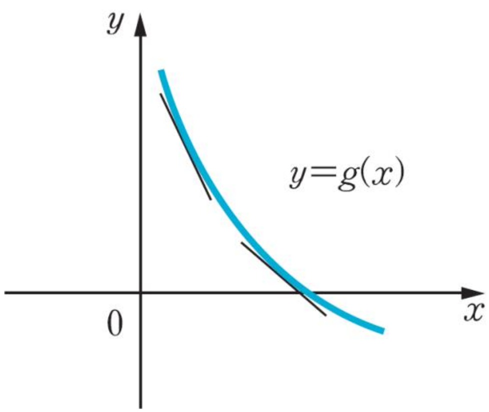
함수의 증가, 감소의 정의 $f: I \to \mathbb{R}$이라 하자. $x_1 < x_2$인 정의역 I 내의 모든 x_1과 x_2에 대해

❶ $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 I에서 **증가한다**(increasing)고 한다.

❷ $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 I에서 **감소한다**(decreasing)고 한다.



[그림 5-1] 함수의 증가



[그림 5-2] 함수의 감소

정리 5-1 함수의 증가와 감소

$f: I \to \mathbb{R}$ 이라 할 때, I의 임의의 점 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 I에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 I에서 감소한다.

함수의 증가, 감소

How to 5-1 함수가 증가 또는 감소하는 구간을 구하는 방법

❶ 정의역에서 $f'(x)=0$ 또는 $f'(x)$가 존재하지 않는 x를 모두 구한다.

❷ ❶에서 구한 x를 이용하여 정의역을 소구간으로 나눈다.

❸ 각 소구간에서 한 점을 선택하여 그 점에서 $f'(x)$가 양의 값을 갖는지 또는 음의 값을 갖는지를 계산한다.

❹ 만일 양의 값을 가지면 그 소구간에서 $f(x)$는 증가한다고 판정하고, 만일 음의 값을 가지면 그 소구간에서 $f(x)$는 감소한다고 판정한다.

함수의 증가, 감소

예제 5-1

[How to 5−1]을 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = x^2 - 4x$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 구하라.

(b) 구간 $[-5,\ 5]$에서 $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 구하라.

함수의 증가, 감소

➢ 임계점의 정의

임계점의 정의 만일 $f'(c)=0$이거나 $f'(c)$가 존재하지 않을 때, 정의역 내의 점 $x=c$를 $f(x)$의 **임계점**(critical point)이라 한다.

예제 5-3

다음 함수의 임계점을 구하라.

(a) $f(x)=2x^2+4x-1$

(b) $g(x)=\sqrt{x}\,(x-1)$

함수의 극댓값, 극솟값

함수의 극댓값, 극솟값

극댓값, 극솟값의 정의 $f: D \to \mathbb{R}$이고 $c \in D$라 하자. $c \in I$인 적당한 개구간 I가 존재하여

❶ I의 모든 점 x에 대하여

$$f(x) \leq f(c)$$

이면, 함수 $f(x)$는 $x = c$에서 **극댓값**(local maximum) $f(c)$를 갖는다고 한다.

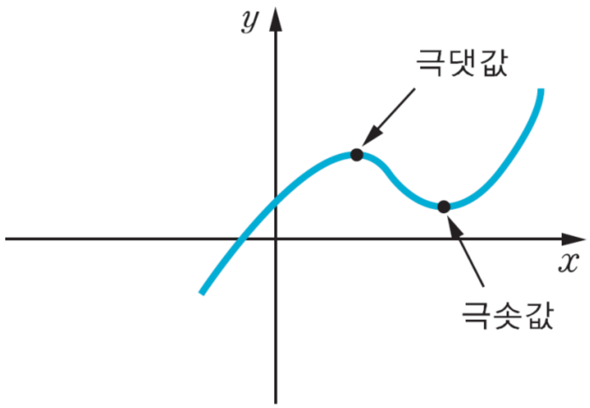
❷ I의 모든 점 x에 대하여

$$f(x) \geq f(c)$$

이면, 함수 $f(x)$는 $x = c$에서

극솟값(local minimum) $f(c)$를 갖는다고 한다.

❸ 극댓값 또는 극솟값을 **극값**이라 한다.



[그림 5-3] **극댓값과 극솟값**

함수의 극댓값, 극솟값

정리 5-2 1계 도함수 판정법

$f(x)$가 $x=c$에서 연속이고 $x=c$가 임계점이라 하자. $x=c$의 근처에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=c$에서 극댓값을 갖는다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=c$에서 극솟값을 갖는다.

(3) $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으면, $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 갖지 않는다.

함수의 극댓값, 극솟값

예제 5-5

1계 도함수 판정법을 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 4$ 의 극값을 구하라.

(b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 의 극값을 구하라.

함수의 극댓값, 극솟값

최댓값과 최솟값의 정의 $f: D \to \mathbb{R}$이고 $c \in D$라 하자.

❶ D의 모든 점 x에 대하여

$$f(x) \le f(c)$$

이면, 함수 $f(x)$는 $x = c$에서 **최댓값**(global maximum) $f(c)$를 갖는다고 한다.

❷ D의 모든 점 x에 대하여

$$f(x) \ge f(c)$$

이면, 함수 $f(x)$는 $x = c$에서 **최솟값**(global minimum) $f(c)$를 갖는다고 한다.

정리 5-3 최댓값·최솟값의 정리

$f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수의 극댓값, 극솟값

How to 5−2 최댓값과 최솟값을 구하는 방법

❶ $[a,\ b]$에서 $f(x)$가 연속함수인지 확인한다.
❷ $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 모든 임계점을 구한다.
❸ $\{f(a),\ f(\text{임계점}),\ f(b)\}$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

함수의 극댓값, 극솟값

예제 5-6

[How to 5−2]를 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) 구간 $[-3,\ 3]$에서 $f(x)=x^3-6x$의 최댓값과 최솟값을 구하라.

(b) 구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)=x^3-6x$의 최댓값과 최솟값을 구하라.

(c) 구간 $[0,\ 2]$에서 $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$의 최댓값과 최솟값을 구하라.

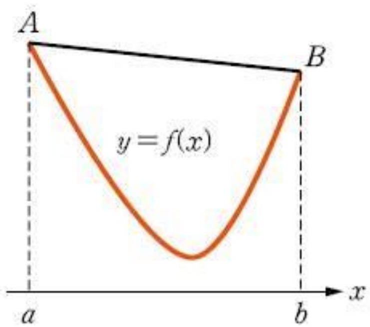
함수의 오목성

함수의 오목성(볼록성)

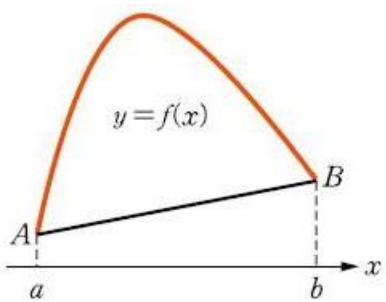
오목성의 정의 $f:(a,\ b)\to\mathbb{R}$ 일 때

❶ 임의의 $x\in(a,\ b)$에서 그은 접선이 f의 그래프보다 위쪽에 있을 때 함수 f는 $(a,\ b)$에서 **위로 볼록(아래로 오목) 하다** 고 한다.

❷ 임의의 $x\in(a,\ b)$에서 그은 접선이 f의 그래프보다 아래쪽에 있을 때 함수 f는 $(a,\ b)$에서 **아래로 볼록(위로 오목) 하다** 고 한다.



아래로 볼록=위로 오목



위로 볼록=아래로 오목

함수의 오목성

➢ 오목성 판별의 정리

- $y = x^2$은 위로 오목인 함수인데, $y' = 2x$이고 $y'' = 2 > 0$이다.
- $y = -x^2$은 아래로 오목인 함수인데, $y' = -2x$이고 $y'' = -2 < 0$이다.

정리 5-6 오목성 판별 정리

$f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$일 때

(1) 만일 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여 $f''(x) > 0$이면, f의 그래프는 $(a,\ b)$에서 위로 오목이다.

(2) 만일 임의의 $x \in (a,\ b)$에 대하여 $f''(x) < 0$이면, f의 그래프는 $(a,\ b)$에서 아래로 오목이다.

함수의 오목성

➢ 오목성 판별의 정리

How to 5–7 아래로 오목인 구간과 위로 오목인 구간을 구하는 방법

❶ 정의역에서 $f''(x)=0$이거나 $f''(x)$가 존재하지 않는 x를 모두 구한다.

❷ ❶에서 구한 x를 이용하여 정의역을 소구간으로 나눈다.

❸ 소구간에서 한 점을 선택하여 그 점에서 $f''(x)$가 양의 값을 갖는지 또는 음의 값을 갖는지를 계산한다.

❹ 만일 양의 값을 가지면 그 소구간에서 $f(x)$는 위로 오목하다고 판정하고, 만일 음의 값을 가지면 그 소구간에서 $f(x)$는 아래로 오목하다고 판정한다.

함수의 오목성

예제 5-21

[How to 5−7]을 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$이 아래로 오목인 구간과 위로 오목인 구간을 구하라.

(b) 구간 $[-5,\ 5]$에서 $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$가 아래로 오목인 구간과 위로 오목인 구간을 구하라.

변곡점

변곡점

변곡점의 정의 만일 $x=c$가 정의역 내의 점이고 $f''(c)=0$이거나 $f''(c)$가 존재하지 않는다고 하자. 점 $(c, f(c))$를 중심으로 하여 함수가 아래로 오목에서 위로 오목으로 바뀌거나 위로 오목에서 아래로 오목으로 바뀌면, 점 $(c, f(c))$를 **변곡점**(inflection point)이라 한다.

예제 5-22

다음 함수의 변곡점을 구하라.

(a) $f(x)=x^4-2x^2-1$ (b) $g(x)=x^4-3$

2계 도함수의 판정법

2계 도함수 판정법

정리 5-7 2계 도함수 판정법

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$가 미분가능하고 $c \in (a, b)$가 $f(x)$의 임계점이라 하자.

(1) 만일 $f''(c) > 0$이면, $f(x)$는 $x = c$에서 극솟값을 갖는다.

(2) 만일 $f''(c) < 0$이면, $f(x)$는 $x = c$에서 극댓값을 갖는다.

2계 도함수의 판정법

예제 5-24

2계 도함수 판정법을 이용하여 다음 함수의 극값을 구하라.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ (b) $g(x) = -x^4 + 4x^3 + 3$

극댓값과 극솟값의 활용

극댓값과 극솟값의 활용

예제 5-26

합이 12가 되는 두 수가 있다. 두 수를 제곱하여 합했을 때의 최솟값을 구하라.

예제 5-27

한 변의 길이가 10m 인 정사각형의 골판지가 있다. 이 골판지의 네 모서리에서 같은 크기의 정사각형을 잘라내어 남아 있는 골판지로 위가 열려있는 상자를 만들려고 한다. 상자의 부피를 최대로 할 때 잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 구하라.

극댓값과 극솟값의 활용

예제 5-28

부피가 13500m^3인 뚜껑이 없는 육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 육면체의 밑면이 정사각형이라 할 때, 사용되는 골판지 사용량을 최소화하려면 정사각형의 한 변의 길이를 얼마로 해야 하는지를 구하라.

예제 5-29

반지름이 4인 원에 내접하는 직사각형 중 가장 큰 직사각형의 넓이를 구하라.

Thank you!