CHAPTER 03

함수의 극한과 연속

함수의 극한 연속함수 중간값정리

김 수 환

동의대학교 수학과

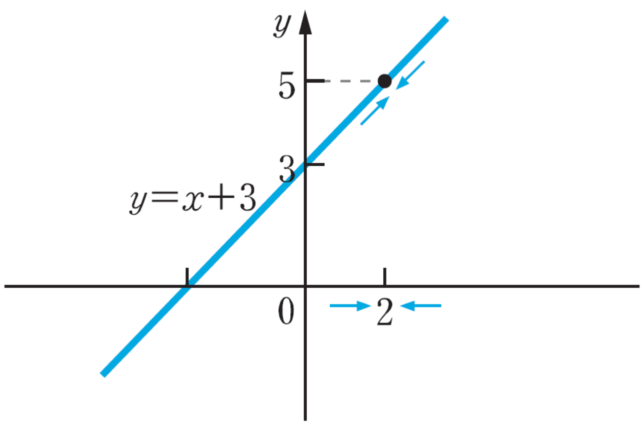
Contents

함수의 극한

극한

극한의 정의 x 가 a 는 아니면서 a 에 가까이 갈 때, $f(x)$ 가 실수 L 로 접근하면 L 을 $f(x)$ 의 극한이라 하고 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 로 나타낸다.

- 'x가 a가 아니면서'란 '$x \neq a$'
- $f(x) = x + 3$일 때 x가 2로 접근한다면, $f(x)$의 값



[그림 2-1] x가 2로 접근할 때 $f(x)$의 극한

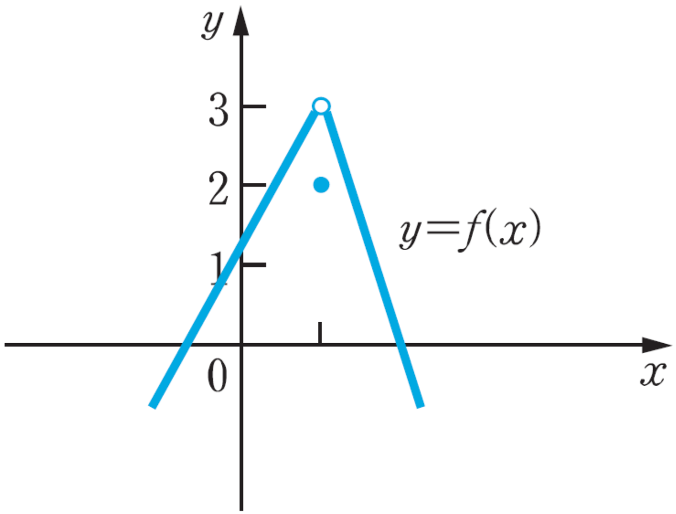
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.8	4.8	2.2	5.2
1.9	4.9	2.1	5.1
1.99	4.99	2.01	5.01
1.999	4.999	2.001	5.001

- $f(x)$ 의 극한은 5이다. 이를 식으로 $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ 나타낸다.

함수의 극한

예제 2-1

$y = f(x)$의 그래프가 [그림 2-2]와 같을 때, x가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$의 극한값은 어떻게 되는가?



[그림 2-2] $y = f(x)$의 그래프

좌극한과 우극한

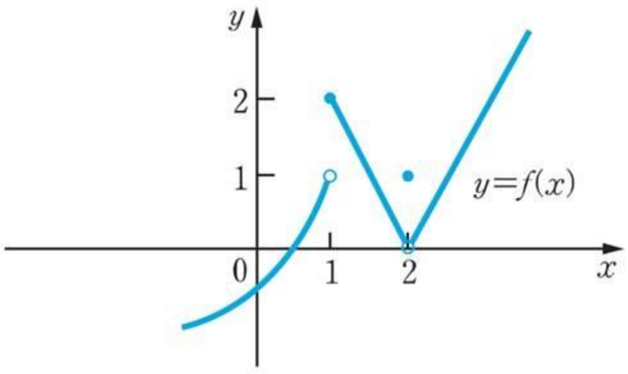
좌극한과 우극한

좌극한과 우극한의 정의 x가 a는 아니면서 **a의 왼쪽에서부터** a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 $f(x)$의 **좌극한**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

반대로 x가 a는 아니면서 **a의 오른쪽에서부터** a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 실수 L로 접근하면 L을 $f(x)$의 **우극한**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$



[그림 2-3] 좌극한과 우극한

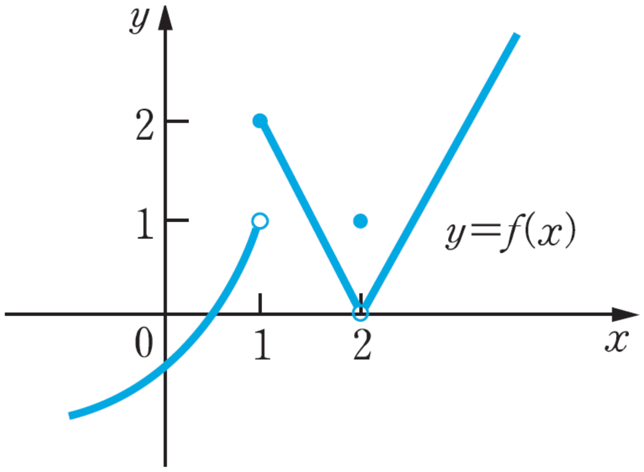
좌극한과 우극한

예제 2-2

$y=f(x)$의 그래프가 [그림 2-4]와 같을 때, 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to1^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to2^-} f(x)$ (d) $\lim_{x\to2^+} f(x)$



[그림 2-4] $y=f(x)$의 그래프

좌극한과 우극한

예제 2-3

다음 극한을 계산하라.

(a) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\le 3 \\ 3x+2, & x>3 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$와 $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(b) $g(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ -x^2+3, & x>0 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 0^-} g(x)$와 $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

(c) $h(x)=\begin{cases} -x+4, & x\le 1 \\ x^2+2, & x>1 \end{cases}$ 일 때, $\lim_{x\to 1^-} h(x)$와 $\lim_{x\to 1^+} h(x)$

➢ **극한의 존재성 확인**

정리 2-1 극한의 존재성

$\lim_{x\to a} f(x)=L$이기 위한 필요충분조건은 $\lim_{x\to a^-} f(x)=L=\lim_{x\to a^+} f(x)$이다.

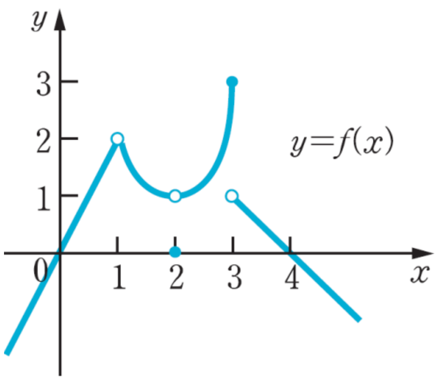
좌극한과 우극한

예제 2-4

$y=f(x)$의 그래프가 [그림 2-5]와 같을 때, 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 4} f(x)$



[그림 2–5] $y=f(x)$의 그래프

예제 2-5

다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x)=|x|$일 때, $\lim_{x\to 0} f(x)$를 구하라.

(b) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$일 때, $\lim_{x\to 0} g(x)$를 구하라.

발산

발산

발산의 정의 x가 a는 아니면서 a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 양의 값을 가지면서 한없이 커지면 $f(x)$는 **양의 무한대로 발산한다**고 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

x가 b는 아니면서 b에 가까이 갈 때, $f(x)$가 음의 값을 가지면서 한없이 커지면 $f(x)$는 **음의 무한대로 발산한다**고 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to b} f(x) = -\infty$$

발산

예제 2-6

다음 극한을 계산하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^2}$

극한의 기본 정리

기본적인 사칙 연산

정리 **2-2** 극한의 기본 정리

$\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재할 때 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

(3) c가 상수일 때 $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$

(4) $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

(5) $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$일 때 $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

극한의 기본 정리

예제 2-7

$f(x)=2x+3$이고 $g(x)=x^2-1$일 때, 다음을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

(b) $\lim_{x\to 2}(f(x)-g(x))$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x)\,g(x)$

(d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

극한 계산법

$\frac{0}{0}$ 형태의 극한 계산법

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{이고 } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{일 때} \right)$$

❶ 분자와 분모를 인수분해하여 약분한 후 극한을 계산하거나

❷ 분자 또는 분모에 있는 근호를 유리화하여 약분한 후 극한을 계산한다.

- $\sqrt{x} - a = \dfrac{(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a)}{\sqrt{x} + a} = \dfrac{x - a^2}{\sqrt{x} + a}$
- $\sqrt{x} + a = \dfrac{(\sqrt{x} + a)(\sqrt{x} - a)}{\sqrt{x} - a} = \dfrac{x - a^2}{\sqrt{x} - a}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x} - b} = \dfrac{\sqrt{x} + b}{(\sqrt{x} - b)(\sqrt{x} + b)} = \dfrac{\sqrt{x} + b}{x - b^2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x} + b} = \dfrac{\sqrt{x} - b}{(\sqrt{x} + b)(\sqrt{x} - b)} = \dfrac{\sqrt{x} - b}{x - b^2}$

극한 계산법

예제 2-8

$\dfrac{0}{0}$ 형태의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

극한 계산법

- **유리함수의 극한 계산법 :** 분자와 분모의 차수에 따라 결정

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\, f(x) \text{와 } g(x) \text{가 다항함수일 때} \,)$$

❶ 분자인 $f(x)$의 차수가 분모인 $g(x)$의 차수보다 큰 경우

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad \text{또는} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

❷ 분자인 $f(x)$의 차수가 분모인 $g(x)$의 차수보다 작은 경우

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

극한 계산법

❸ 분자인 $f(x)$의 차수와 분모인 $g(x)$의 차수가 같은 경우

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^n + a_1 x + a_0$이고, $g(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x + b_0$

이며, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$이면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_n}$$

예제 2-9

유리함수의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{-x+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+2}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{-x^3+4}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{2x^3+3x-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{-3x^2+3x+1}$

압착정리

정리 2-3 압착정리

$x = a$의 적당한 근방에 있는 모든 점 x에 대해 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$$

이면, $\lim_{x \to a} g(x) = L$이다.

예제 2-10

압착정리를 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$

압착정리

삼각 함수의 극한 계산법

삼각함수에 관한 극한을 계산할 때는

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

을 이용한다. 이 극한을 일반화하면 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$ 이며, 이 극한의 결과는 $x \to 0$ 일 때, $\square \to 0$ 인 경우에만 성립한다.

압착정리

예제 2-11

삼각함수의 극한 계산법을 이용하여 다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{4x}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}$

예제 2-12

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}$ 를 계산하라.

연속의 정의

연속의 정의

한 점에서의 연속의 정의 x가 a에 가까이 갈 때, $f(x)$가 L에 가까이 가고 $L=f(a)$이면, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 한다.

연속을 엄밀하게 정의하면 다음과 같다.

$y=f(x)$가 다음 세 조건을 모두 만족하면 $x=a$에서 **연속**이라 한다.

❶ $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

❷ $f(a)$가 존재한다.

❸ $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$가 성립한다.

만일 세 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이 아니다.

연속의 정의

예제 2-13

연속의 정의를 사용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x)=x^2-1$일 때, $f(x)$는 $x=1$에서 연속인가?

(b) $g(x)=|x|$일 때, $g(x)$는 $x=0$에서 연속인가?

예제 2-14

다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ -x+2, & x<0 \end{cases}$일 때, $f(x)$는 $x=0$에서 연속인가?

(b) $g(x)=\dfrac{1}{x}$일 때, $g(x)$는 $x=0$에서 연속인가?

(c) $h(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>1 \\ 3, & x=1 \\ x^2, & x<1 \end{cases}$일 때, $h(x)$는 $x=1$에서 연속인가?

연속의 정의

정리 2-4 연속함수의 기본 정리

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면, 다음의 경우도 모두 $x=a$에서 연속이다.

(1) $f(x)+g(x)$

(2) $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)\cdot g(x)$

(4) $g(a)\neq 0$일 때 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

예제 2-15

다음 함수의 연속성을 확인해 보자.

(a) $y=x^2+\sin x$는 $x=0$에서 연속인가?

(b) $y=\dfrac{x}{\cos x}$는 $x=0$에서 연속인가?

연속의 정의

구간에서의 연속의 정의 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$ 내의 모든 점에서 연속일 때, $f(x)$는 **구간 $[a,\ b]$에서 연속**이라 한다.

How to 2–1 함수가 연속인 구간을 찾는 방법

함수가 주어졌을 때, 그 함수가 연속이 되는 점들의 집합은 그 함수의 정의역과 같다.

예제 2-16

다음 함수가 연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y=x^3-x-1$

(b) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

(c) $y=\sqrt{x+1}$

(d) $y=\sin 2x$

(e) $y=e^{3x-2}$

(f) $y=\ln(3x-1)$

연속의 정의

예제 2-17

다음 유리함수가 불연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y = \dfrac{x^3+1}{x-1}$ (b) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

How to 2–2 두 함수의 합 또는 차에 대해 연속인 구간을 찾는 방법

함수 $f(x)$가 연속인 점들의 집합이 D, 함수 $g(x)$가 연속인 점들의 집합이 E이면, $f(x)+g(x)$와 $f(x)-g(x)$가 연속인 점들의 집합은 $D \cap E$이다.

예제 2-18

[How to 2–2]를 이용하여 다음 함수가 연속이 되는 점들의 집합을 구하라.

(a) $y = x + \dfrac{1}{x}$ (b) $y = \sin x - \dfrac{x+1}{2x-3}$

(c) $y = \dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x}{2x+1}$ (d) $y = \ln x + \dfrac{1}{2x-1}$

중간값 정리

중간값 정리: 방정식의 해가 존재하는지 증명 할 수 있다

정리 2-5 중간값 정리

$f:[a,\ b]\rightarrow\mathbb{R}$ 가 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면, $f(c)=0$인 c가 $[a,\ b]$에 적어도 하나 존재한다.

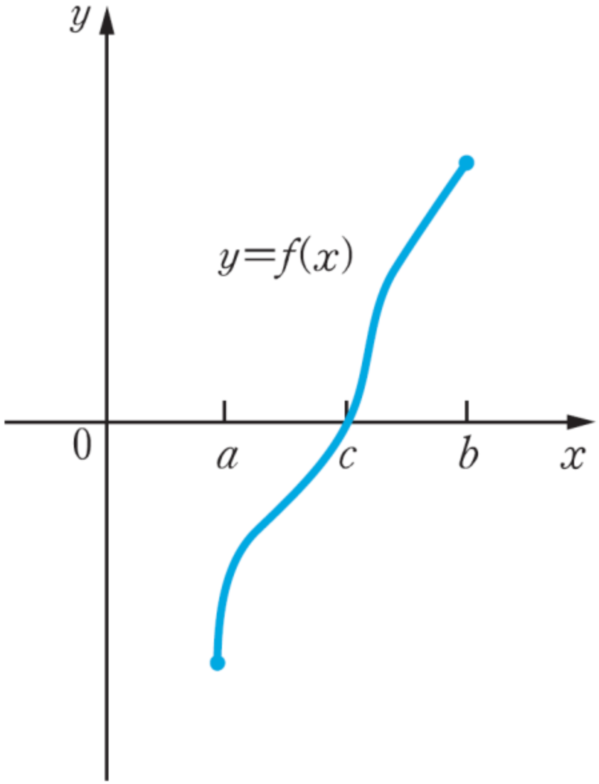
➢ 중간값 정리를 사용하기 위한 조건 확인

❶ 정의역은 폐구간이어야 한다.

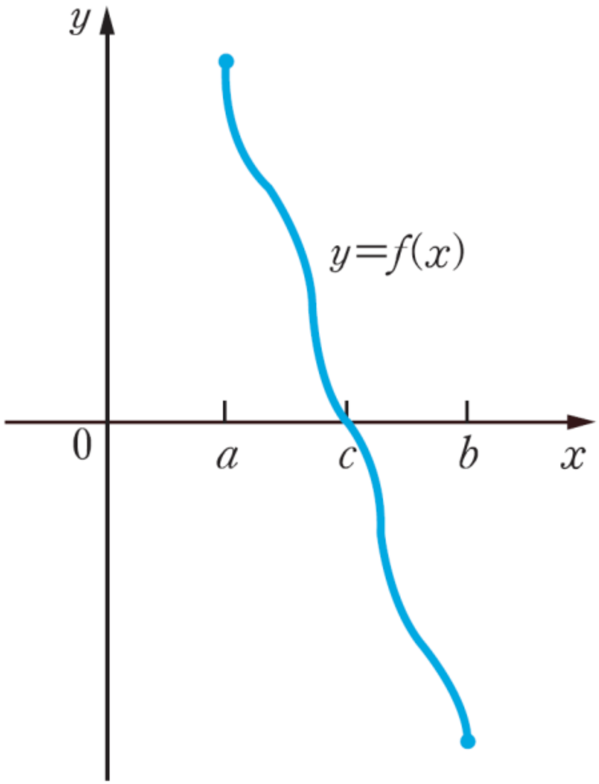
❷ f는 정의역 위에서 연속이어야 한다.

❸ $f(a)f(b)<0$인지 확인한다. 이는 정의역의 한 끝에서의 함숫값이 양이면 다른 끝에서의 함숫값이 음이 되어야 함을 의미한다.

중간값 정리



(a) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ 인 경우



(b) $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ 인 경우

[그림 2-6] 중간값 정리 증명

중간값 정리

예제 2-19

$x^3 - 5x + 2 = 0$이 구간 $[0, 1]$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

예제 2-20

$x^3 - 4x - 1 = 0$이 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

Thank you!