CHAPTER 09

미분의 활용 II

롤의 정리 평균값 정리 로비탈 정리

김 수 환

동의대학교 수학과

Contents

롤의 정리

롤의 정리

정리 5-4 롤의 정리

함수 $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$가

(1) 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

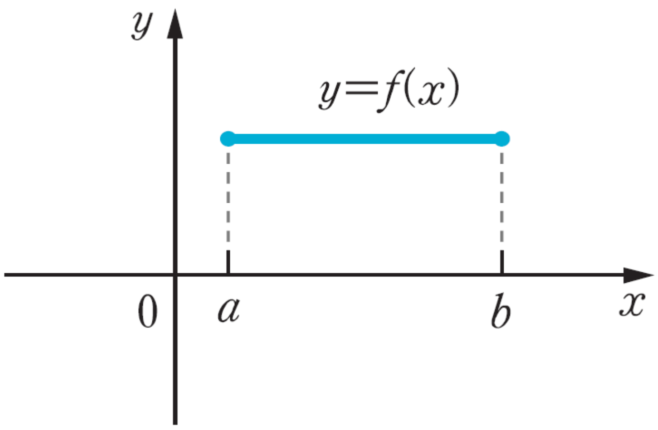
(2) 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며

(3) $f(a) = f(b)$이면,

$f'(c) = 0$인 $c \in (a,\ b)$가 존재한다.

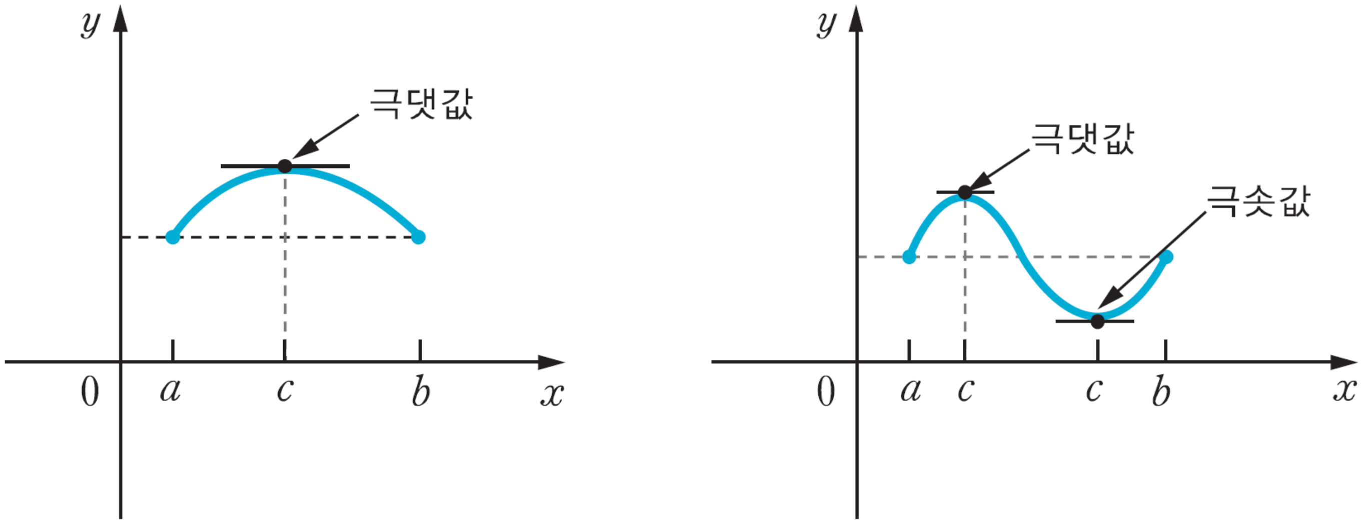
[그림 5-4]에서 $f(x)$가 상수함수이면 $(a,\ b)$ 내의 모든 점 x에서 $f'(x) = 0$이다.

[그림 5-4] 상수함수와 롤의 정리



롤의 정리

[그림 5-5]와 같이 $f(x)$가 상수함수가 아니면 함수가 극댓값 또는 극솟값을 갖는 점에서 $f'(x)=0$이다.



[그림 5-5] 롤의 정리

따라서 $f(x)$가 $f(a)=f(b)$이며 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능한 함수일 때, $f'(c)=0$인 $c\in(a,\ b)$가 항상 존재함을 알 수 있다.

롤의 정리

롤의 정리

예제 5-7

롤의 정리를 이용하여 $f(x) = \sin x$일 때 $f'(c) = 0$인 $c \in (0, \pi)$가 존재함을 증명하라.

예제 5-8

중간값 정리와 롤의 정리를 이용하여 방정식 $x^3 + 2x - 1 = 0$이 단 하나의 실근을 갖는다는 것을 증명하라.

평균값 정리

평균값 정리

정리 5-5 평균값 정리

$f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

인 $c \in (a,\ b)$가 존재한다.

증명

$F : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ 를

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

라 정의하면, $F(x)$는 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며

$$F(a) = 0 = F(b)$$

평균값 정리

롤의 정리에 의하여 $F'(c) = 0$ ········· ②

인 $c \in (a, b)$ 가 존재한다. 그런데 식 ①을 미분하면

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

이므로, ①과 ②에 의하여

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

이다. 그러므로

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

평균값 정리

평균값 정리

예제 5-9

평균값 정리를 이용하여 $f(x)=\sin x$일 때, $f'(c)=\dfrac{2}{\pi}$인 $c\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$가 존재함을 증명하라.

예제 5-10

평균값 정리를 이용하여 임의의 실수 a와 b에 대하여 $|\sin b-\sin a|\leq|b-a|$임을 증명하라.

평균값 정리의 활용

평균값 정리의 활용

- 평균값의 정리를 이용하여 무리수의 근삿값을 구할 수 있다.
- 근삿값을 구하려면 주어진 무리수의 가장 가까운 정수를 이용한다.

예제 5-11

평균값 정리를 이용하여 다음 무리수의 근삿값을 구하라.

(a) $\sqrt{10}$ (b) $\sqrt{15}$

로피탈의 법칙

로피탈의 법칙

- 함수의 극한을 계산할 때, 극한의 형태가 부정형인 경우에는 식을 약분하거나 유리화를 이용하여 극한값을 구한다.
- 식을 유리화하는 방법으로 극한을 계산 할 수 없는 경우엔 평균값 정리를 응용한 로피탈 법칙을 사용해 극한값을 구한다.
- 부정형의 극한 계산에 유용하다.

부정형의 정의 $x \to a$일 때

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

의 극한이

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty$$

의 형태가 되면, 이를 **부정형**이라 한다.

로피탈의 법칙

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

■ $\frac{0}{0}$형에서의 로피탈의 법칙

$f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$의 근방에서 $x=a$를 제외하고 미분가능하며, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ 이고 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이며 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이라 하자.

만일 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$이면

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

이다.

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

➤ $\frac{0}{0}$형에서의 로피탈의 법칙

How to 5-3 $\frac{0}{0}$형에 로피탈의 법칙을 사용하는 방법

❶ $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이고 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$임을 확인한다.

❷ $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$을 계산한다.

❸ ❷의 결과로부터 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$이다.

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

예제 5-12

[How to 5−3]을 이용하여 다음 극한을 구하라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}$

$\frac{0}{0}$ 형과 $\frac{\infty}{\infty}$ 형의 계산

- $\frac{0}{0}$ 형에서의 로피탈의 법칙

  - $\lim_{x\to a} f(x) = 0$일 때 $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$이거나 $\lim_{x\to a} g(x) = 0$일 때 $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$이면,

    $\frac{0}{0}$ 형에서의 로피탈의 법칙을 사용할 수 없다.

예제 5-13

다음 극한을 구하라.

(a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x^2-1}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x}$

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

■ $\frac{\infty}{\infty}$형에서의 로피탈의 법칙

$f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$의 근방에서 $x=a$를 제외하고 미분가능하며, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ 이고 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$이며 $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$라 하자.

만일 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

이다.

$\frac{0}{0}$ 형과 $\frac{\infty}{\infty}$ 형의 계산

➢ $\frac{\infty}{\infty}$ 형에서의 로피탈의 법칙

How to 5–4 $\frac{\infty}{\infty}$ 형에 로피탈의 법칙을 사용하는 방법

❶ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ 이고 $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ 임을 확인한다.

❷ $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ 을 계산한다.

❸ ❷에 의하여 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ 이다.

예제 5-14

[How to 5–4]를 이용하여 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+x)}{\ln x}$ 를 계산하라.

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

➢ $\frac{\infty}{\infty}$형에서의 로피탈의 법칙

➢ $\frac{\infty}{\infty}$형의 로피탈의 법칙에서 $a = \infty$인 경우

$f(x)$와 $g(x)$가 $[b, \infty)$에서 미분가능하고, 모든 $x \in [b, \infty)$에 대하여 $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$이고, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$이며 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$라 하자.

만일 $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$이면 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

예제 5-15

다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$ (d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$

$0\cdot\infty$ 형과 $\infty-\infty$ 형의 계산

$0\cdot\infty$ 형과 $\infty-\infty$ 형의 계산

$0\cdot\infty$형에서의 로피탈의 법칙

How to 5-5 $0\cdot\infty$형에 로피탈의 법칙을 사용하는 방법

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$이고 $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$일 때

❶ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \dfrac{0}{0}$ 형으로 변형하거나 ❷ $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ 형으로 변형하여

[How to 5-3] 또는 [How to 5-4]의 로피탈의 법칙을 적용하여 계산한다.

예제 5-17

다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

(b) $\lim_{x\to\infty} x e^{-x}$

$0 \cdot \infty$ 형과 $\infty - \infty$ 형의 계산

➢ $\infty - \infty$형에서의 로피탈의 법칙

➢ $\infty - \infty$ 형의 부정형은 식을 유리화하거나 묶은 뒤 로피탈 법칙을 이용하여 극한을 계산

How to 5-6 $\infty - \infty$형에 로피탈의 법칙을 사용하는 방법

$\lim_{x \to a} f(a) = \infty$ 이고 $\lim_{x \to a} g(a) = \infty$ 일 때, $f(x) - g(x)$를 변형하여 하나의 식으로 만든 후 로피탈의 법칙을 적용하여 계산한다.

예제 5-18

다음 극한을 계산하라.

(a) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right)$

(b) $\lim_{x \to \infty} \left(\ln(x^2+3) - \ln x^2 \right)$

$\frac{0}{0}$형과 $\frac{\infty}{\infty}$형의 계산

➢ $\infty-\infty$형에서의 로피탈의 법칙

복잡한 형태의 $\infty-\infty$ 형의 부정형 극한을 계산할 때에도 로피탈의 법칙을 사용

[예제 5−19]는 두 삼각함수를 통분한 후 표준적인 로피탈의 법칙을 이용하여 극한을 계산

예제 5-19

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x - \sec x)$를 계산하라.

Thank you!