CHAPTER 14

정적분의 활용 I

영역의 넓이　　단면적을 알 때 입체도형의 부피

김 수 환

동의대학교 수학과

Contents

함수와 x축 사이의 넓이

함수와 x축 사이의 넓이

How to 8-1 $f(x)$가 항상 양의 값 또는 음의 값을 가질 때 넓이를 구하는 방법

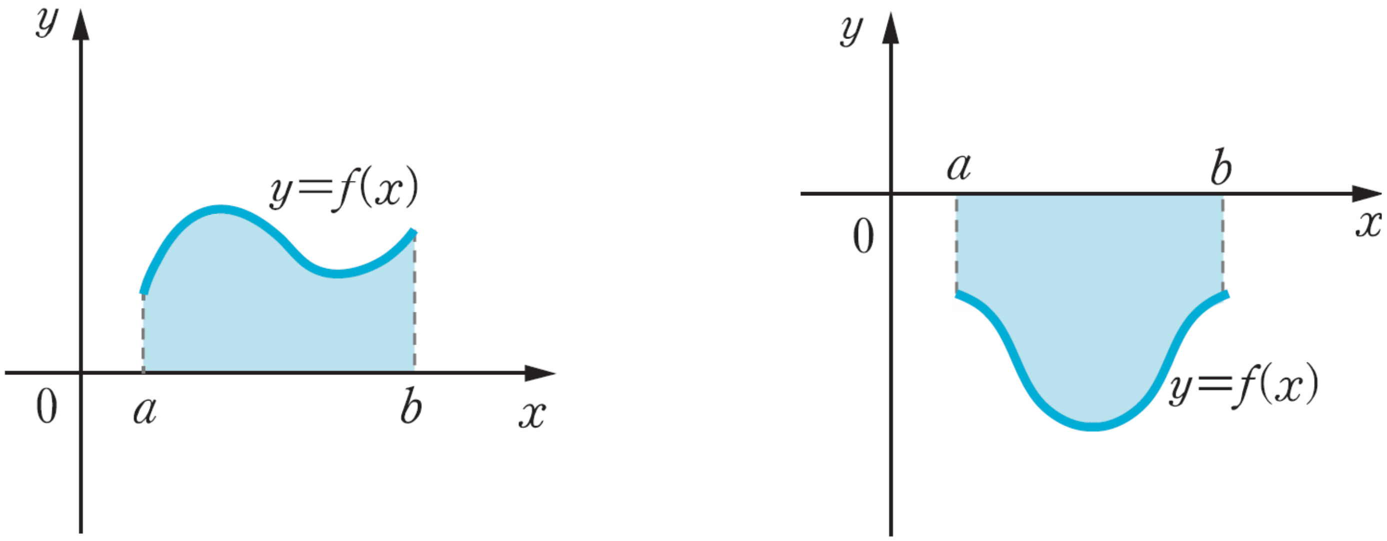
❶ 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) \geq 0$일 때, $y = f(x)$와 $x = a$, $x = b$ 그리고 x축에 의해 둘러싸인 영역의 넓이는 다음과 같다.

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

❷ 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 임의의 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) \leq 0$일 때, $y = f(x)$와 $x = a$, $x = b$ 그리고 x축에 의해 둘러싸인 영역의 넓이는 다음과 같다.

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

함수와 x축 사이의 넓이



(a) $f(x)$가 항상 양인 경우　　(b) $f(x)$가 항상 음인 경우

[그림 8-1] 구간 $[a, b]$에서 $f(x)$가 항상 양이거나 음인 그래프

함수와 x축 사이의 넓이

예제 8-1

[How to 8−1]을 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $y = x^3$과 $x = 1$, $x = 2$ 그리고 x축에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

(b) $y = x^2 - 5$와 $x = 0$, $x = 2$ 그리고 x축에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

함수와 x축 사이의 넓이

How to 8-2 $f(x)$가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때 넓이를 구하는 방법

$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$를 구하는 방법은 다음과 같다.

❶ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)=0$인 점들을 모두 찾는다.

❷ 찾은 점들이 $x=c,\ x=d$일 때 구간 $(a,\ c),\ (c,\ d),\ (d,\ b)$에서 $f(x)$가 양의 값을 갖는지 또는 음의 값을 갖는지를 판정한다. 이 판정을 하기 위해 각 소구간에서 하나의 점을 선택하여 $f(x)$의 부호를 판정한다.

❸ 양의 값을 갖는 영역에서는 $f(x)$를 그대로 적분하고, 음의 값을 갖는 영역에서는 $-f(x)$를 적분한다.

함수와 x축 사이의 넓이

예제 8-2

[How to 8−2]를 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $y = x - 1$, $x = 0$, $x = 2$와 x축에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

(b) $y = x^2 - 2x$, $x = -1$, $x = 3$과 x축에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

두 함수 사이의 넓이

두 함수 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이는

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$$ 이다.

How to 8–3 **두 함수 사이의 넓이를 구하는 방법**

$A=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$를 구하는 방법은 다음과 같다.

❶ $f(x)-g(x)=0$인 점들을 모두 찾는다.

❷ 찾은 점들이 $x=\alpha,\ \gamma,\ \beta$이고 $\alpha<\gamma<\beta$이면, 구간 $(\alpha,\ \gamma)$, $(\gamma,\ \beta)$에서 $f(x)-g(x)$가 양의 값을 갖는지 혹은 음의 값을 갖는지를 판정한다. 이를 판정하기 위해 각 소구간에서 하나의 점을 선택하여 $f(x)-g(x)$의 부호를 판정한다.

❸ 양의 값을 갖는 영역에서는 $f(x)-g(x)$를 그대로 적분하고, 음의 값을 갖는 영역에서는 $-(f(x)-g(x))$를 적분한다.

두 함수 사이의 넓이

예제 8-3

[How to 8−3]을 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $f(x) = x^2 - 1$과 $g(x) = -x^2 + 1$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

(b) $f(x) = x^3 - 3x$와 $g(x) = x$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

두 함수 사이의 넓이

- 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 식은

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$$

- 그런데 구간을 제시하면 그 구간에서 두 함수 사이의 넓이를 구하는 식은 다른 형태가 된다. 구간 $[a,\ b]$에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이는

$$A=\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|\,dx$$

두 함수 사이의 넓이(주어진 구간에서)

How to 8−4 주어진 구간에서 두 함수 사이의 넓이를 구하는 방법

$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$를 구하는 방법은 다음과 같다.

1. 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)-g(x)=0$인 점들을 모두 찾는다.
2. 찾은 점들이 $x=\alpha,\ \beta$이고 $\alpha<\beta$이면, 구간 $(a,\ \alpha),\ (\alpha,\ \beta),\ (\beta,\ b)$에서 $f(x)-g(x)$가 양의 값을 갖는지 혹은 음의 값을 갖는지를 판정한다. 이를 판정하기 위해 각 소구간에서 하나의 점을 선택하여 $f(x)-g(x)$의 부호를 판정한다.
3. 양의 값을 갖는 영역에서는 $f(x)-g(x)$를 그대로 적분하고, 음의 값을 갖는 영역에서는 $-(f(x)-g(x))$를 적분한다.

두 함수 사이의 넓이(주어진 구간에서)

예제 8-4

구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)=x^2$과 $g(x)=2-x^2$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

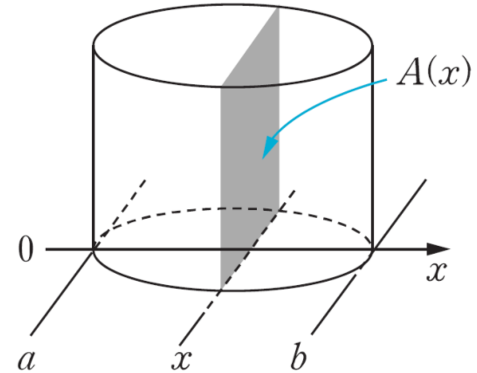
수직단면을 이용하는 방법

수직단면을 이용하는 방법

➤ $x=a$에서 $x=b$ 사이에 놓인 입체도형 S가 있다고 하자. 구간 $[a, b]$에 있는 임의의 점 x에서 입체도형 S를 x축에 수직이 되도록 잘랐을 때 절단면의 넓이를 $A(x)$라 하면 S의 부피는

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(x_i)\Delta x=\int_a^b A(x)\,dx \text{ 이다.}$$

이렇게 입체도형의 부피를 구하는 방법을 수직단면에 의한 방법이라 한다.



[그림 8-2] 수직단면을 이용한 부피 구하기

수직단면을 이용하는 방법

예제 8-5

반지름이 r인 구의 부피를 구하라.

Thank you!