CHAPTER 02

삼각함수

삼각함수 역함수 역삼각함수

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

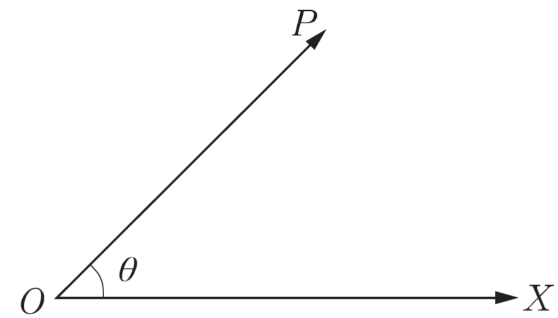
2.1 삼각함수

2.2 역함수

2.3 역삼각함수

60분법과 호도법

- **60분법:**
  - 양의 각도 : 시계반대 방향으로 측정한 각도
  - 음의 각도 : 시계 방향으로 측정한 각도
  - 시초선 : 반직선 OX
  - 동경 : 반직선 OP

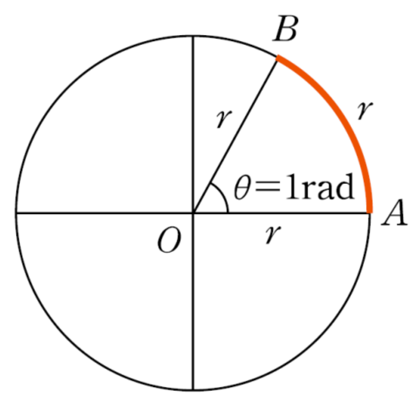


[그림 1-12] 시초선과 동경

- **호도법**:
  - 호의 길이를 이용하여 각을 표현하는 방법
  - 반지름의 길이와 호의 길이가 동일한 중심각 : *1*(라디안:rad)

$$\theta \;:\; 360^\circ = r \;:\; 2\pi r$$

$$1\,(\mathrm{rad}) = \theta = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.2958^\circ$$



[그림 4-4] 1라디안의 정의

60분법과 호도법

예제 1-21

그래프를 그려 다음 문제를 풀어라.

(a) $115°$를 음의 각도로 설명하라.

(b) $-35°$를 양의 각도로 설명하라.

[표 1-1] 60분법과 호도법으로 표현한 각도

60분법	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
호도법	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
60분법	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$	
호도법	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	

예제 1-22

다음 60분법의 각도를 호도법으로 표현하라.

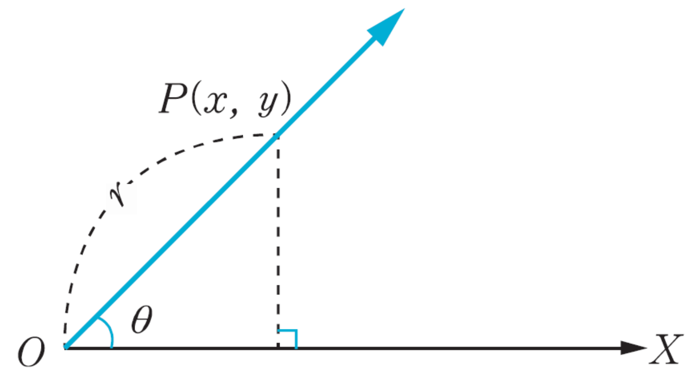
(a) $15°$

(b) $75°$

삼각함수의 정의

삼각함수의 정의

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



[그림 1-13] 각도와 삼각함수

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\theta \in$ 1사분면	+	+	+
$\theta \in$ 2사분면	+	−	−
$\theta \in$ 3사분면	−	−	+
$\theta \in$ 4사분면	−	+	−

[그림 1-14] 평면의 영역 구분과 각 영역에서의 삼각함수 값

삼각함수의 정의

예제 1-23

다음 문제를 풀어라.

(a) $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ 이고 θ 가 1사분면의 각일 때, $\cos\theta$ 와 $\tan\theta$ 를 구하라.

(b) $\cos\theta = -\dfrac{12}{13}$ 이고 θ 가 3사분면의 각일 때, $\sin\theta$ 와 $\tan\theta$ 를 구하라.

$\sin x$, $\cos x$ 와 $\tan x$ 를 이용하여

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

을 정의한다. $\csc x$ 는 '코시컨트 x', $\sec x$ 는 '시컨트 x', $\cot x$ 는 '코탄젠트 x'라 읽는다.

삼각함수의 특수각

➢ 1사분면의 특수각에 대한 삼각함수 값

[표 1-2] 특수각에 대한 삼각함수 값

삼각함수	특수각				
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$	정의 안 됨

예제 1-24

다음 값을 구하라.

(a) $\csc\frac{\pi}{6}$　　(b) $\sec\frac{\pi}{3}$

(c) $\cot\frac{\pi}{4}$　　(d) $\csc\frac{\pi}{4}$

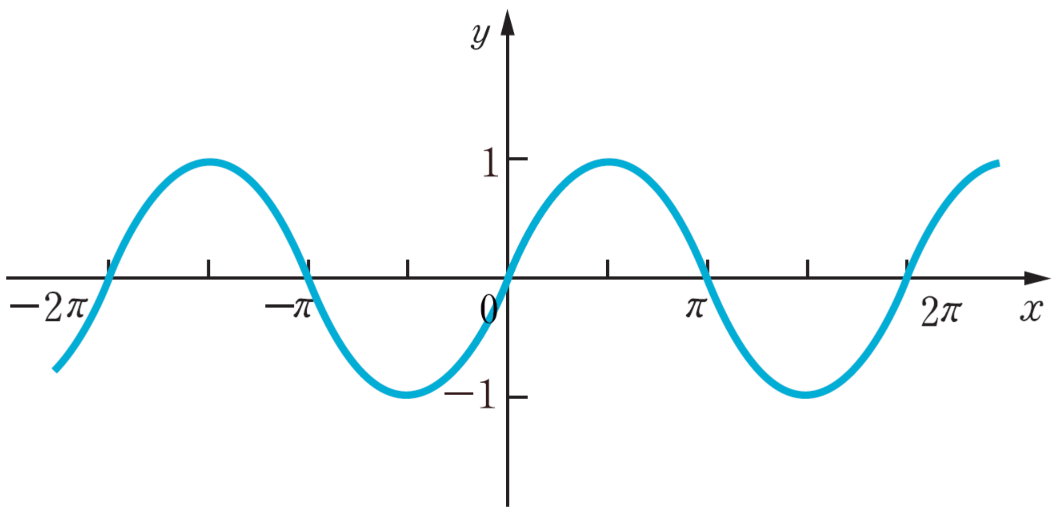
삼각함수의 그래프

삼각함수의 기본 성질

주기함수의 정의 p가 0이 아닌 상수라 하자. 정의역 내의 임의의 점 x에 대해 $f(x) = f(x+p)$가 성립하면 함수 $f(x)$는 p를 주기로 하는 **주기함수**라 한다.

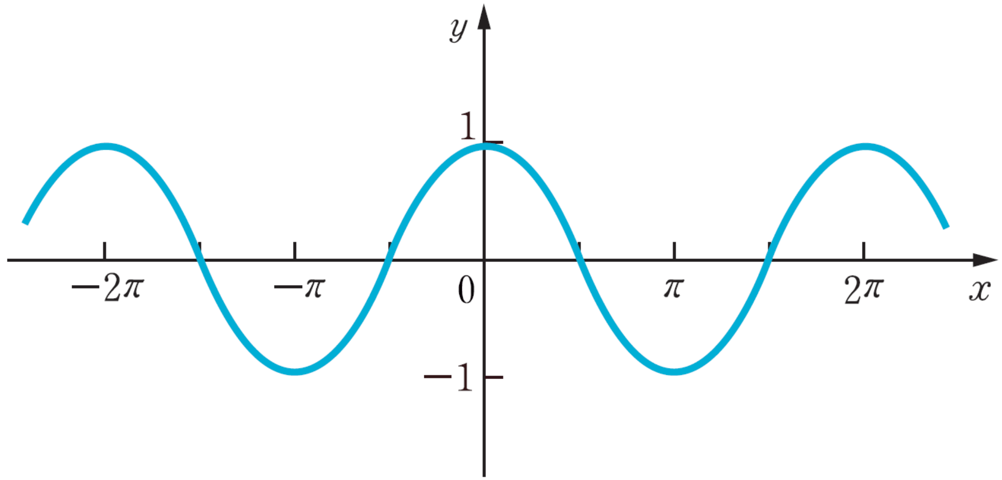
➢ 삼각함수의 주기

$y = \sin x$ 와 $y = \cos x$는 주기가 2π 인 주기함수이고, $y = \tan x$ 는 주기가 π 인 주기함수이다.

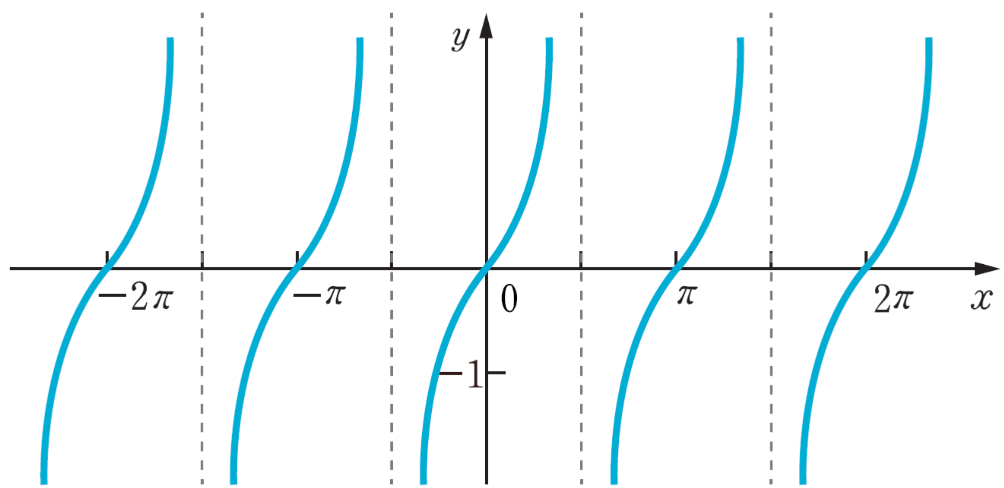


(a) $y = \sin x$

삼각함수의 그래프



(b) $y = \cos x$



(c) $y = \tan x$

[그림 1-15] 주기성을 갖는 삼각함수

삼각함수의 주기

➢ 변형된 삼각함수의 주기

- $y = \sin ax$이면, 이 함수의 주기는 $\frac{2}{a}\pi$이다.
- $y = \cos bx$이면, 이 함수의 주기는 $\frac{2}{b}\pi$이다.
- $y = \tan cx$이면, 이 함수의 주기는 $\frac{\pi}{c}$이다.

예제 1-25

다음 함수의 주기를 구하라.

(a) $y = \sin 4x$

(b) $y = \sin \frac{1}{4}x$

(c) $y = \cos \frac{3}{2}x$

(d) $y = \tan \frac{4}{3}x$

삼각함수의 최댓값과 최솟값

➢ **삼각함수의 최댓값과 최솟값** : $\sin x$와 $\cos x$ 모두 최댓값 1과 최솟값 -1을 가짐

How to 1–5 변형된 형태의 사인함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법

❶ $y=\sin ax$는 사인함수의 주기만 바뀐 것이므로 이 함수의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

❷ $y=\sin a(x-b)$는 $y=\sin ax$를 x축 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로, 이 함수의 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이다.

❸ $y=c\sin a(x-b)$는 최댓값 1, 최솟값 -1을 갖는 $y=\sin a(x-b)$에 상수 c가 곱해진 것이므로, 최댓값은 $|c|$, 최솟값은 $-|c|$이다.

❹ $y=c\sin a(x-b)+d$는 $y=c\sin a(x-b)$의 그래프가 y축 방향으로 d 만큼 평행이동한 것이므로, 최댓값은 $|c|+d$, 최솟값은 $-|c|+d$ 이다.

삼각함수의 대칭성

예제 1-26

다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하라.

(a) $y = \sin\frac{1}{4}x$

(b) $y = \cos 3(x-1)$

(c) $y = 3\sin 2x$

(d) $y = 2\cos\frac{1}{2}(x+1)+3$

➢ 삼각함수의 대칭성

기함수와 우함수의 정의

❶ $f(-x) = -f(x)$이면 $f(x)$를 **기함수**라 한다.

➢ 함수의 그래프를 그렸을 때 그 그래프가 원점 대칭인 경우

❷ $f(-x) = f(x)$이면 $f(x)$를 **우함수**라 한다.

➢ 그래프가 y축 대칭인 경우

삼각함수의 기본 성질

예제 1-27

다음을 간단히 하라.

(a) $\sin(-x)$ (b) $\cos(-x)$ (c) $\tan(-x)$

예제 1-28

다음 함수가 기함수인지 또는 우함수인지 판정하라.

(a) $f(x) = x^3 + \sin x$ (b) $g(x) = x^2 + \cos x$ (c) $h(x) = x\tan x$

- **삼각함수에서 는 제곱의 위치에 따라 의미가 다름**

❶ $y = \sin(x^2)$은 괄호를 없애고 $y = \sin x^2$으로 나타낸다.

❷ $y = (\sin x)^2$은 괄호를 없애고 $y = \sin^2 x$로 나타낸다.

삼각함수의 기본 성질

예제 1-29

다음 함수가 기함수인지 또는 우함수인지 판정하라.

(a) $f(x) = \sin x^2$

(b) $g(x) = \sin^2 x + x$

➢ 삼각함수 관련 문제를 풀 때 반드시 알아야 할 공식

❶ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

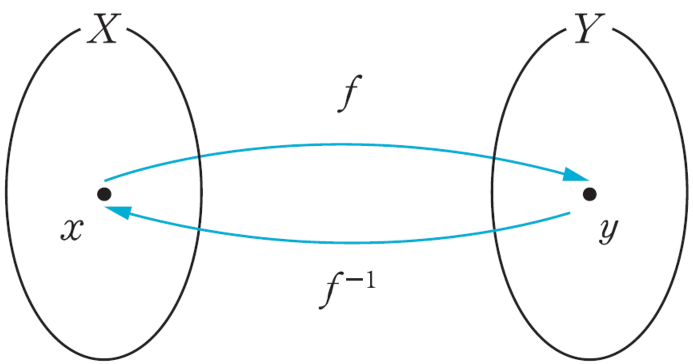
❷ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

❸ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

역함수

역함수

역함수의 정의 $f: X \to Y$가 전단사함수이면 임의의 $y \in Y$에 대해 $f(x) = y$가 되는 단 하나의 x가 대응한다. 함수 $g: Y \to X$를 $g(y) = x$라 하면, g를 함수 f의 **역함수**라 정의하고, 이를 f^{-1}로 나타낸다.



[그림 1-16] 역함수의 정의

역함수

How to 1–6 역함수를 구하는 방법

1. 주어진 함수 f가 전단사함수인가를 확인한다.
2. 정의역의 변수 x와 치역의 변수 y를 맞바꾼다.
3. 식을 y에 대해 정리하면 그 결과가 역함수가 된다.
4. 만일 y에 대해 정리했을 때 식이 두 개가 나타나면 정의역과 치역을 이용하여 역함수를 결정한다.

예제 1-30

$y = x^3 + 1$의 역함수를 구하라.

예제 1-31

$y = x^2$의 역함수를 구하라.

역함수

정리 1-4 역함수의 정의역과 치역

$f: A \rightarrow B$가 전단사함수이면, f^{-1}이 존재하고 $f^{-1}: B \rightarrow A$이다.

예제 1-32

다음 문제를 풀어라.

(a) 정의역이 $[0, \infty)$일 때, $f(x) = x^2$의 역함수를 구하라.

(b) 정의역이 $(-\infty, 0]$일 때, $f(x) = x^2$의 역함수를 구하라.

역삼각함수

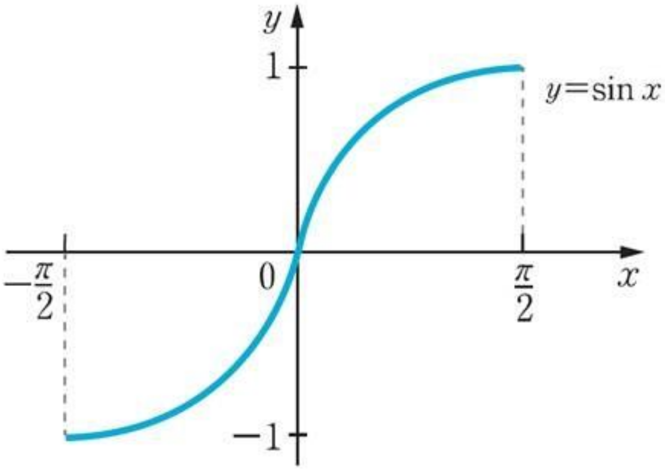
역삼각함수

사인함수의 역함수

$y = \sin x$의 정의역을 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$로 제한하면

$$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

은 전단사함수가 된다.



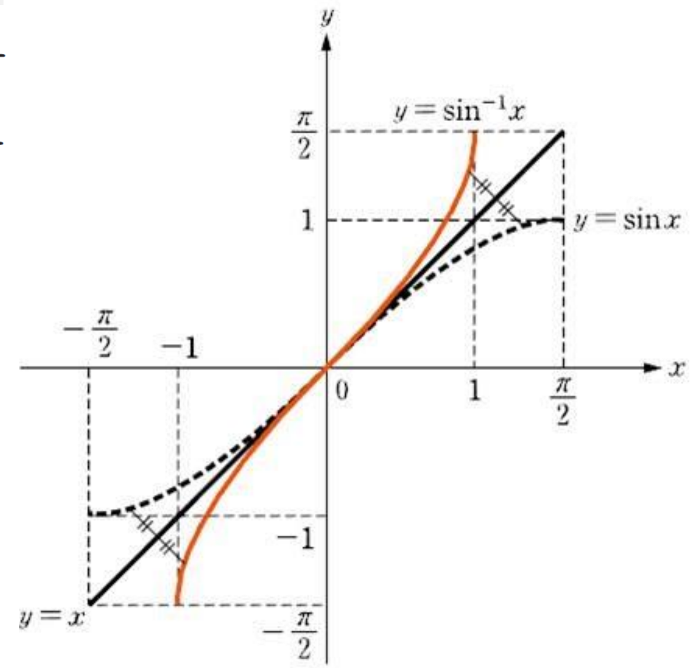
[그림 1-17-0] 사인함수

역삼각함수

[How to 1-6]의 역함수를 구하는 방법에 따라 x와 y를 맞바꾸면 $x = \sin y$가 되는데, 이 식을 $y = \sin^{-1} x$로 나타내며, '아크사인 x'라 읽는다. 이때

$$\sin^{-1} x : [-1,\ 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

이다.



[그림 1-17] 사인함수의 역함수

예제 1-33

다음 값을 구하라.

(a) $\sin^{-1}\frac{1}{2}$

(b) $\sin^{-1}1$

역삼각함수

➢ 코사인함수의 역함수

$y=\cos x$의 정의역을 $[0, \pi]$로 제한하면

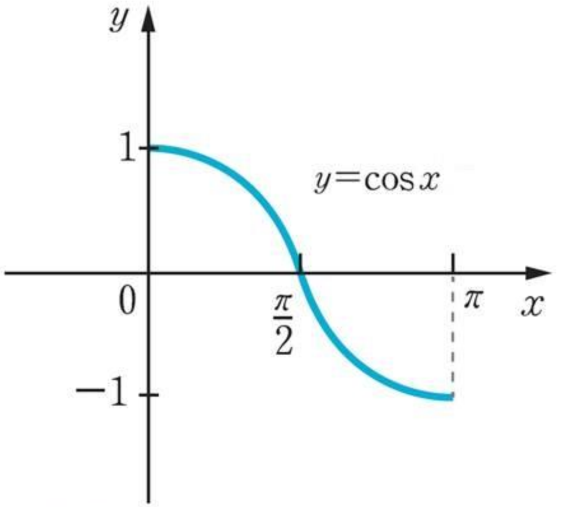
$$\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

은 전단사함수가 된다.

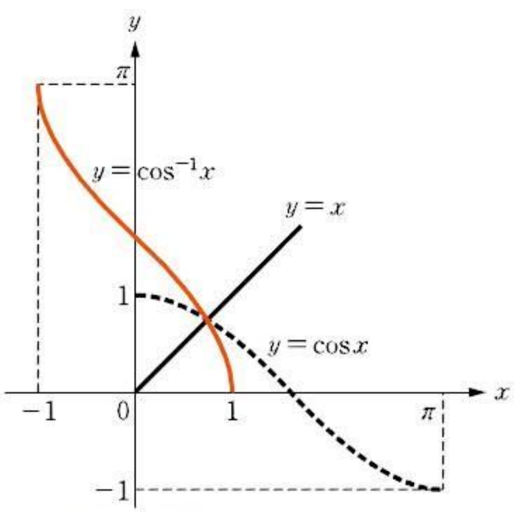
[How to 1–6]의 역함수를 구하는 방법에 따라 x와 y를 맞ㅂ 꾸면 $x=\cos y$가 되는데, 이 식을 $y=\cos^{-1}x$로 나타내며, '아크코사인 x'라 읽는다. 이때

$$\cos^{-1}x : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

이다.



[그림 1–18–0] 코사인함수



[그림 1–18] 코사인함수의 역함수

역삼각함수

예제 1-34

다음 값을 구하라.

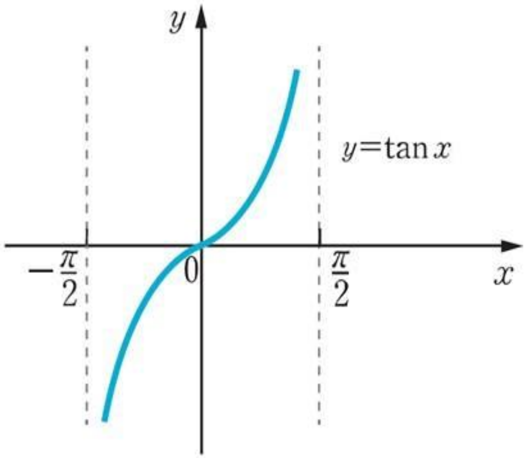
(a) $\cos^{-1}\dfrac{1}{2}$ (b) $\cos^{-1}1$

➢ 탄젠트함수의 역함수

$y = \tan x$ 의 정의역을 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$로 제한하면

$$\tan x : \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty,\ \infty)$$

는 전단사함수가 된다.



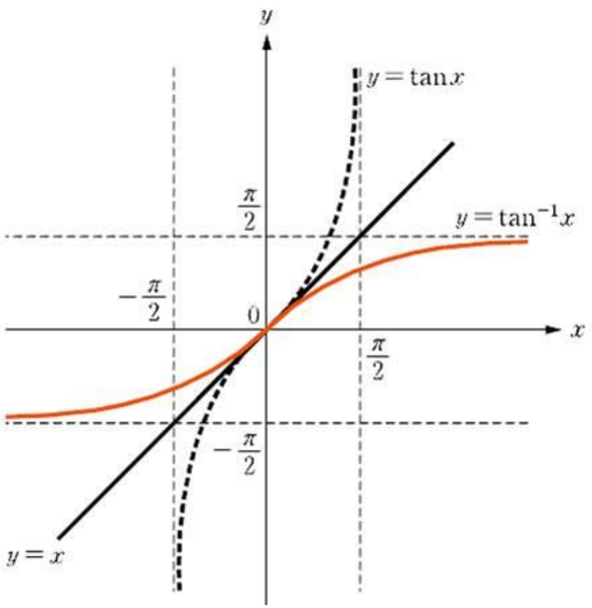
[그림 1-19] 탄젠트함수

역삼각함수

[How to 1–6]의 역함수를 구하는 방법에 따라 x와 y를 맞바꾸면 $x = \tan y$가 되는데, 이 식을 $y = \tan^{-1} x$로 나타내며, '아크탄젠트 x'라 읽는다. 이때

$$\tan^{-1} x : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

이다.



예제 1-35

다음 값을 구하라.

(a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\tan^{-1} 1$

Thank you!