CHAPTER 12

정적분

정적분정의와 정리 치환적분법 부분적분법

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

정적분의 정의와 정리

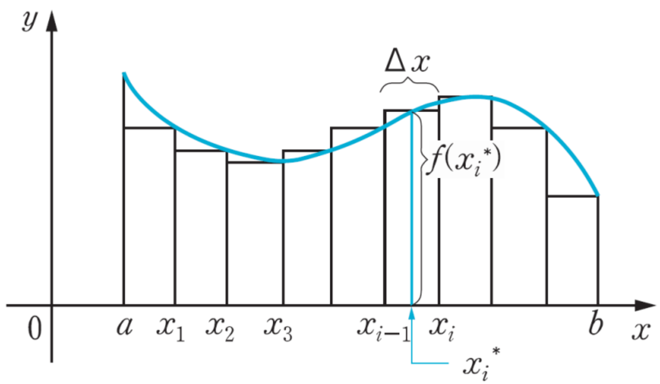
정적분의 정의

정적분의 정의 n이 자연수이고 $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

구간 $[a,\ b]$를 길이가 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$인 소구간들로 분할한다.

소구간들의 끝점을 차례로 $x_0=a,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$

라 놓고, i번째 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 점 x_i^*를 선택한다.



[그림 7-1] 정적분의 정의

이때 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 **정적분은**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

로 정의한다.

정적분의 기본 정리

정적분의 기본 정리

정리 7-4 정적분의 기본 정리 I

$f(x)$와 $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 적분가능할 때 다음이 성립한다.

(1) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

(3) k가 상수일 때, $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(4) 만일 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le g(x)$이면, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$이다.

(5) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

정적분의 기본 정리

➢ **정적분의 성질을 설명하기 위하여 다음을 정의한다.**

❶ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

❷ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

예제 7-3

$\int_0^1 f(x)\,dx = 3$이고 $\int_0^1 g(x)\,dx = -2$일 때, 다음을 구하라.

(a) $\int_1^0 f(x)\,dx$

(b) $\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$

(c) $\int_0^1 \sqrt{2}\,g(x)\,dx$

(d) $\int_0^1 (3f(x) - 2g(x))\,dx$

정적분의 기본 정리

정리 7-5 정적분의 기본 정리 Ⅱ

$f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 적분가능하고 $c \in (a, b)$일 때

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

이다.

예제 7-4

[정리 7−5]를 이용하여 다음을 계산하라.

(a) $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$이고 $\int_0^5 f(x)\,dx = 8$일 때, $\int_1^5 f(x)\,dx$를 구하라.

(b) $\int_2^5 g(x)\,dx = 4$이고 $\int_3^5 g(x)\,dx = -1$일 때, $\int_2^3 g(x)\,dx$를 구하라.

정적분의 평균값 정리

정적분의 평균값 정리

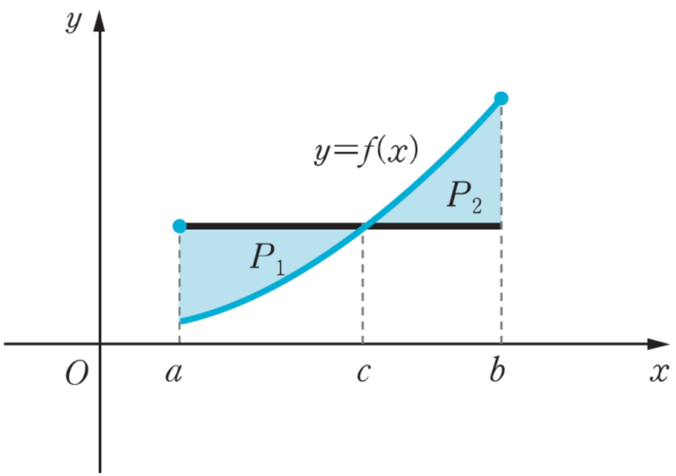
정리 7-6 적분의 평균값 정리

$f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

인 $c \in (a,\ b)$가 존재한다.

- 영역 P_1과 P_2의 넓이가 같아지는 점에서 정적분의 넓이는, 가로가 $b-a$이고 높이가 $f(c)$인 직사각형의 넓이와 같아진다.



[그림 7-2] 적분의 평균값 정리

미분적분학의 기본 정리

미분적분학의 기본 정리

정리 7-7 미분적분학의 기본 정리 I

$f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $x \in [a,\ b]$에 대하여

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

라 할 때, F는 $[a,\ b]$에서 미분가능하고 $F'(x) = f(x)$이다.

예제 7-5

[정리 7-7]을 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $F(x) = \int_0^x (t^3 + e^t \sin t)\, dt$일 때, $F'(x)$를 구하라.

(b) $G(x) = \int_1^x \left(s^2 - s\tan\frac{1}{s^2+1}\right) ds$일 때, $G'(x)$를 구하라.

미분적분학의 기본 정리

정리 7-8 미분적분학의 기본 정리 I의 변형

(1) $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 미분가능하며, $x \in [a,\ b]$에 대하여

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

일 때

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

이다.

(2) $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $g(x)$, $h(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 미분가능하며, $x \in [a,\ b]$에 대하여

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

일 때

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

이다.

미분적분학의 기본 정리

예제 7-6

[정리 7-8]을 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $F(x) = \int_0^{x^3} (\cos^2 t + 1)\, dt$ 일 때, $F'(x)$를 구하라.

(b) $G(x) = \int_{x^3+2}^{2} \sin t^2\, dt$ 일 때, $G'(x)$를 구하라.

(c) $H(x) = \int_{x^2}^{\sin x} \cot s\, ds$ 일 때, $H'(x)$를 구하라.

미분적분학의 기본 정리

정리 7-9 미분적분학의 기본 정리 Ⅱ

$f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $F(x)$가 $f(x)$의 원시함수이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

이다.

미분적분학의 기본 정리

예제 7-7

[정리 7–9]를 이용하여 다음 정적분을 계산하라.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x^2\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$

정적분의 치환적분법

정적분의 치환적분법

정리 7-10 정적분의 치환적분법

구간 $[a, b]$에서 $g'(x)$가 연속이고 함수 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 치역에서 연속이면

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

이다.

정적분의 치환적분법

예제 7-8

[정리 7−10]을 이용하여 다음 정적분을 계산하라.

(a) $\int_{-1}^{1} (x+1)^4\,dx$

(b) $\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

정적분의 부분적분법

정리 7-11 정적분의 부분적분법

구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 미분가능하면

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

➢ 정적분의 부분적분법을 쉽게 기억하기 위하여 $\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v$ 로 적고, 미분하면 식이 작아지는 함수를 u로, 나머지 함수를 v'으로 선택한다.

정적분의 부분적분법

예제 7-9

[정리 7−11]을 이용하여 다음 정적분을 계산하라.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\,dx$

Thank you!