CHAPTER 01

집합과 함수

함수 지수함수 로그함수

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

1.1 함수

1.2 지수함수

1.3 로그함수

집합의 정의

이 책에서 다룰 집합의 종류

❶ 자연수 집합 : $\mathbb{N}$ 으로 나타내며 $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$이다.

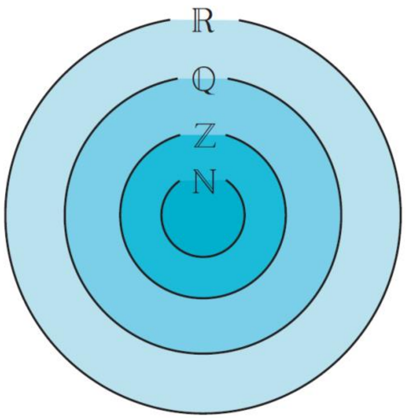
❷ 정수 집합 : $\mathbb{Z}$ 로 나타내며 $\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$이다.

❸ 유리수 집합 : $\mathbb{Q}$ 로 나타내며 $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} : m,\ n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right\}$이다.

❹ 무리수 집합 : $\mathbb{Q}^c$로 나타내며 $\mathbb{Q}^c = \{\,x : x$는 유리수가 아닌 실수$\}$이다.

예를 들어, $\sqrt{3}$, π, e 등은 무리수에 속하는 원소들이다.

❺ 실수 집합 : $\mathbb{R}$ 로 나타내며 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$이다.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

[그림 1-1] 집합의 포함 관계

구간의 정의

구간의 정의

유한 구간의 정의 a와 b가 실수일 때

❶ $[a, b]=\{x : a \le x \le b\}$를 **닫힌 구간** 또는 **폐구간**이라 한다.

❷ $(a, b)=\{x : a < x < b\}$를 **열린 구간** 또는 **개구간**이라 한다.

❸ $(a, b]=\{x : a < x \le b\}$와 $[a, b)=\{x : a \le x < b\}$를 **반 닫힌 구간** 또는 **반 열린 구간**이라 한다.

예제 1-3

$A=[1, 3]$이고 $B=(2, 4)$일 때, 다음을 구하라.

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$

(c) $A - B$ (d) $B - A$

구간의 정의

무한 구간의 정의 a와 b가 실수일 때

❶ $[a, \infty) = \{x : a \le x\}$와 $(-\infty, b] = \{x : x \le b\}$를 **닫힌 반직선**이라 한다.

❷ $(a, \infty) = \{x : a < x\}$와 $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$를 **열린 반직선**이라 한다.

❸ 실수 집합을 구간으로 나타내면 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$이며 $(-\infty, \infty)$를 **직선**이라 한다.

예제 1-4

$C = [1, \infty)$이고 $D = (-\infty, 4)$일 때, 다음을 구하라.

(a) $C \cup D$ (b) $C \cap D$

(c) $C - D$ (d) $D - C$

구간의 정의

∞ 와 관련된 연산

❶ $\infty + \infty = \infty$

❷ $\infty \cdot \infty = \infty$

❸ $\infty - \infty$ 와 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 는 값을 알 수 없음(부정)

카테시안 곱

카테시안 곱의 정의 두 집합 A 와 B에 대해 $a \in A$이고 $b \in B$인 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 집합을 A와 B의 **카테시안 곱**(Cartesian product)이라 하고, $A \times B$로 나타낸다.

예제 1-5

카테시안 곱의 정의를 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $A = \{1,\ 2\}$이고 $B = \{2,\ 4,\ 6\}$일 때, $A \times B$를 구하라.

(b) $C = [1,\ 2]$이고 $D = [3,\ 4]$일 때, $C \times D$를 그림으로 나타내라.

절댓값

절댓값

절댓값의 정의 실수 x의 **절댓값**은 다음과 같이 정의한다.

$$|x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$$

How to 1–1 절댓값을 풀어쓰는 방법

❶ 단계 1 : 절댓값 안의 모든 식을 $\square$에 담는다.

❷ 단계 2 : $y = |\square|$일 때

$$y = \begin{cases} \square, & \square \geq 0 \\ -\square, & \square < 0 \end{cases}$$

로 풀어쓴 후, $\square \geq 0$과 $\square < 0$을 정리한다.

절댓값

예제 1-6

다음 식들을 절댓값 기호 없이 나타내라.

(a) $y = |x - 1|$

(b) $y = |x^2 - 4|$

정리 1-1 절댓값의 기본 성질

a와 b가 실수일 때, 다음이 성립한다.

(1) $|a| = |-a|$

(2) $|ab| = |a||b|$

(3) $|a+b| \leq |a| + |b|$: 삼각 부등식

(4) $r > 0$일 때 $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$

(5) $r > 0$일 때 $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ 또는 $x > r$

절댓값

예제 1-7

다음 부등식을 풀어라.

(a) $|x-1| < 3$

(b) $|2x+1| > 1$

예제 1-8

다음 부등식을 풀어라.

(a) $|-x+2| \le 3$

(b) $|-3x-2| \ge 4$

예제 1-9

다음 부등식을 풀어라.

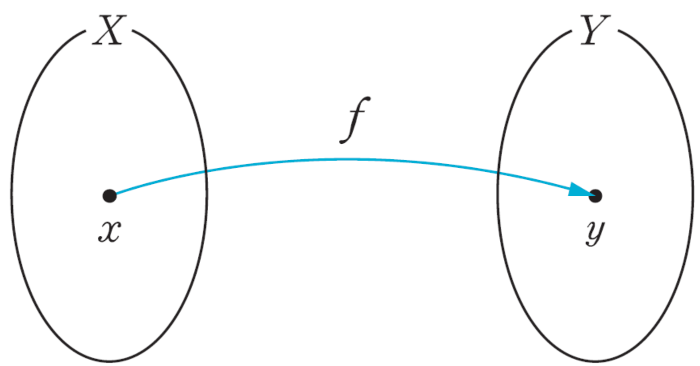
(a) $|x^2-1| \le 2$

(b) $|x^2+x-1| \ge 1$

함수의 정의

- **함수란?** 공집합이 아닌 두 집합 사이의 원소들 사이에 특별한 관계가 있을 때, 그 원소들을 연결하는 관계

함수의 정의 공집합이 아닌 두 집합 X와 Y가 있다. X의 각 원소 x에 대해 Y의 단 하나의 원소 y가 대응할 때, 이 대응 규칙 f를 X에서 Y로의 **함수**(function)라 한다. 이때 X를 함수 f의 **정의역**, Y를 **공변역**, $f(X)$를 **치역**이라 한다.



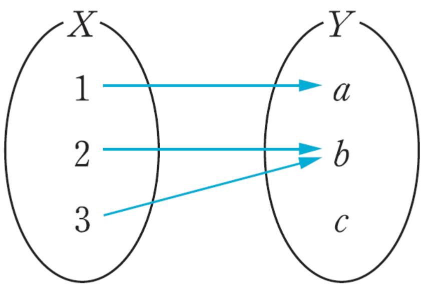
[그림 1-4] 함수의 정의

함수의 정의

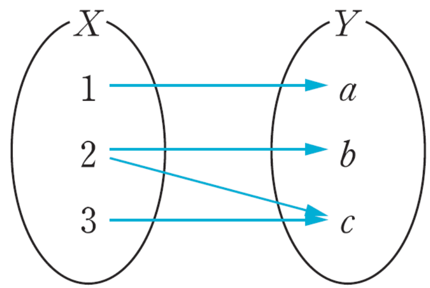
예제 1-10

다음 중 대응관계가 함수인 것을 찾아라. 대응관계가 함수일 때, 정의역, 치역, 공변역을 구하라.

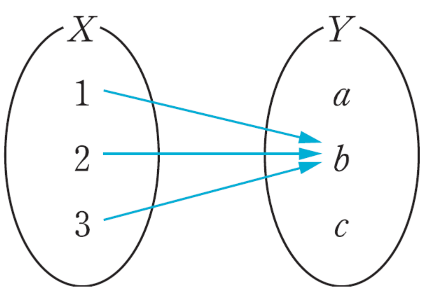
(a)



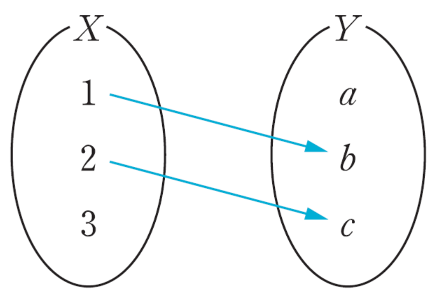
(b)



(c)



(d)



함수의 종류

함수의 종류

$$\text{함수}\begin{cases}\text{대수적 함수}\begin{cases}\text{다항함수}\\ \text{유리함수}\\ \text{무리함수}\end{cases}\\ \\ \text{초월적 함수}\begin{cases}\text{지수함수}\\ \text{로그함수}\\ \text{삼각함수}\end{cases}\end{cases}$$

다항함수 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 형태의 함수를 **다항함수**라 하고, $a_n \neq 0$이면 $f(x)$를 n차 다항함수라 한다. 예 $y = x^2 + x + 1$, $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$

함수의 종류

유리함수 $g(x)=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ 형태의 함수를 **유리함수**라 한다. 예 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{2x-3}{3x+1}$

무리함수 $h(x)=\sqrt[p]{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}$ 또는 $h(x)=\sqrt[p]{\dfrac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}}$ 형태의 함수를 **무리함수**라 한다. 예 $y=\sqrt{x+1}$, $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}$

How to 1–2 대수적 함수의 정의역을 구하는 방법

1. 주어진 함수가 다항함수이면 정의역은 $\mathbb{R}$ 이다.
2. 주어진 함수가 유리함수이면 정의역은 $\mathbb{R}-\{x : x$에서 유리함수의 분모가 0이다.$\}$ 이다.
3. 주어진 함수가 무리함수이면 정의역은 p 값에 따라 달라진다.
   - p가 홀수이면 근호 안에 있는 함수의 정의역이 무리함수의 정의역이 된다.
   - p가 짝수이면 무리함수의 정의역은 $\{x : x$에서 근호 안의 함숫값이 0보다 크거나 같다.$\}$ 이다.

함수의 종류

예제 1-11

다음 함수의 정의역을 구하라.

(a) $y = x - 1$

(b) $y = 2x^3 + 4x + 5$

(c) $y = \dfrac{1}{x - 1}$

(d) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$

(e) $y = \sqrt{x - 1}$

(f) $y = \sqrt[3]{x + 1}$

예제 1-12

$y = \dfrac{x - 1}{x - 1}$ 의 정의역을 구하라.

일대일대응

일대일대응

일대일 대응의 정의 $f: X \to Y$라 할 때

❶ 만일 $x_1 \neq x_2$인 모든 x_1, x_2에 대해 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립하면 f를 **일대일 함수** 또는 **단사함수**라 한다.

❷ 만일 $f(X) = Y$이면 f를 **위로의 함수** 또는 **전사함수**라 한다.

❸ 함수 f가 단사함수이면서 전사함수이면, f를 **일대일 대응** 또는 **전단사함수**라 한다.

예제 1-13

다음 표에서 $f(x)$는 단사함수인가?

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	2	7	1	2	4

일대일대응

How to 1–3 단사함수 확인 방법 : 수평선 검사

❶ 정의역 위에 $y=f(x)$를 그린다.

❷ x축에 평행하게 수평선을 그었을 때, 모든 수평선이 그래프와 한 번 이하로 만나면, 주어진 함수는 정의역에서 단사함수라 판정한다. x축에 평행하게 수평선을 그었을 때 어느 한 수평선이라도 그래프와 두 번 이상 만나면, 주어진 함수는 정의역에서 단사함수가 아니라고 판정한다.

예제 1-14

다음 함수가 단사함수인지를 판정하라.

(a) $y=x^2$

(b) $y=-x^2$, 정의역 $=(-\infty,\ 0]$

예제 1-15

다음 함수의 정의역과 치역을 구하라.

(a) $y=x+1$

(b) $y=x^2+2$

(c) $y=\sqrt{x+1}$

(d) $y=\sqrt{x-2}+3$

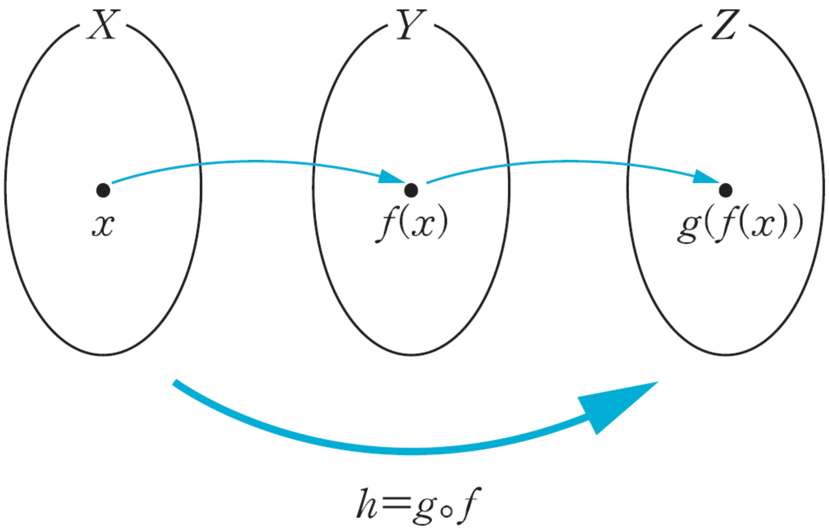
합성함수

합성함수

합성함수의 정의 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$에 대해 $h: X \to Z$를

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

라 정의하면, 함수 h를 f와 g의 **합성함수**라 한다.



[그림 1-5] 합성함수의 그래프

합성함수

예제 1-16

$f(x)=x^2+2x$일 때, 다음을 계산하라.

(a) $f(1)$ (b) $f(h)$

(c) $f(x+1)$ (d) $f(x^2)$

How to 1–4 합성함수를 구하는 방법

❶ $f(x)$와 $g(x)$에 대해 $(f \circ g)(x)=f(g(x))$를 구하는 방법

① $f(x)$ 의 x에 □를 대입하여 $f(□)$를 구한다.

② $f(□)$의 식에 있는 □의 자리에 $g(x)$를 대입하면 그 결과가 합성함수가 된다.

❷ $f(x)$와 $g(x)$ 에 대해 $(g \circ f)(x)=g(f(x))$를 구하는 방법

① 우선 $g(x)$의 x에 □를 대입하여 $g(□)$를 구한다.

② $g(□)$의 식에 있는 □의 자리에 $f(x)$를 대입하면 그 결과가 합성함수가 된다.

합성함수

예제 1-17

다음 함수들에 대해 $g \circ f$와 $f \circ g$를 구하라.

(a) $f(x) = x^2,\ g(x) = x - 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = x^2 + 2$

지수

지수

제곱의 정의 n이 자연수일 때 어떤 수 a를 거듭하여 n번 곱한 것을 a의 n**제곱**이라 하고, a^n으로 나타낸다. 이때 a를 **밑수**, n을 **지수**라 한다.

정리 1-2 지수의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m과 n이 실수일 때, 다음이 성립한다.

(1) $a^0=1$

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(ab)^m = a^m b^m$

예제 1-18

다음 식을 간단히 하라.

(a) $\sqrt[3]{a^5} \times \sqrt{a^7}$

(b) $\sqrt[4]{9} \div \sqrt[6]{27}$

(c) $\sqrt[3]{a^2} \times a^{\frac{1}{4}} \div a^2$

(d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{16} \div \sqrt{\sqrt[6]{2}}$

지수

제곱근의 정의 n이 2 이상의 자연수일 때

$$x^n = a$$

를 만족하는 x를 a의 n**제곱근**이라 하고, $x = \sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

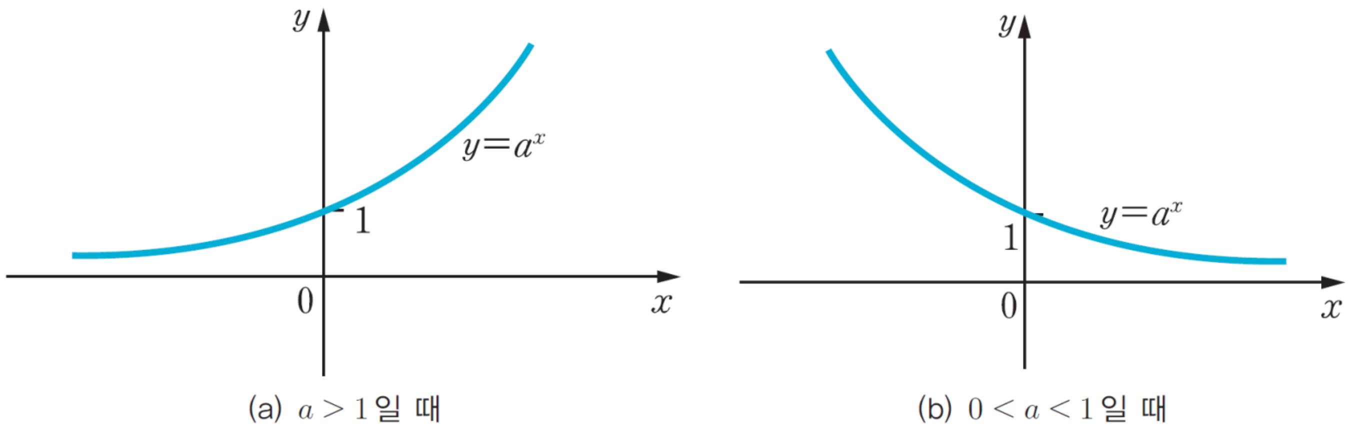
지수함수

지수함수

지수함수의 정의 $a > 0$이고 $a \neq 1$이라 하자. x가 실수일 때

$$y = a^x$$

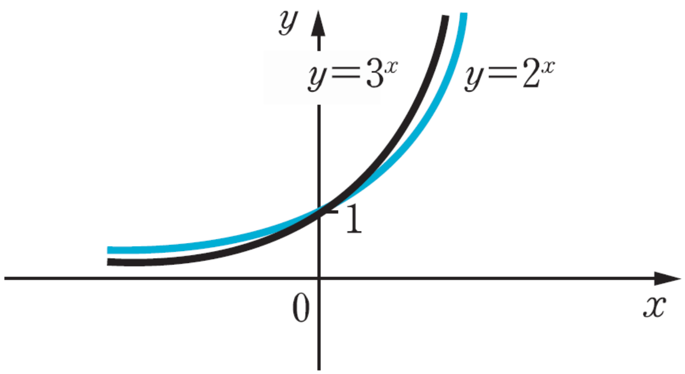
을 **지수함수**라 한다. 이때 a를 **밑수**, x를 **지수**라 한다.



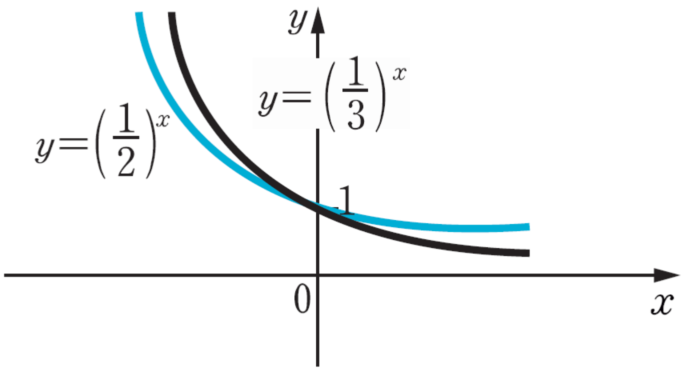
[그림 1-6] $y = a^x$ 의 그래프

지수함수

지수함수의 예제



[그림 1-7] $y=2^x$ 과 $y=3^x$ 의 그래프



[그림 1-8] $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 과 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프

로그

로그

로그의 정의 $a>0,\ a\neq 1$일 때 $x>0$인 x에 대해 $a^p=x$가 성립하면

$$p=\log_a x$$

로 나타내고, p를 a를 밑수로 하는 **로그**라 한다. 이때 x를 $\log_a x$의 **진수**라 한다.

정리 1-3 로그의 성질

$a>0,\ \ a\neq 1$이고 $x>0,\ y>0$일 때, 다음이 성립한다.

(1) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

(2) $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

(3) $\log_a x-\log_a y=\log_a \dfrac{x}{y}$

(4) r이 실수일 때, $\log_a x^r=r\log_a x$

로그

예제 1-19

다음 식을 간단히 하라.

(a) $\log_3 243$

(b) $\log_2 \dfrac{1}{32}$

(c) $\log_2 \dfrac{2}{3} + \log_2 \dfrac{3}{16}$

(d) $\log_4 \dfrac{4}{3} - \log_4 \dfrac{2}{3}$

상용로그와 자연로그의 정의 밑수가 10인 로그를 **상용로그**라 하며, 이 경우

$$\log_{10} x = \log x$$

와 같이 밑수 10을 생략한다. $2.71828\cdots$ 인 무리수를 e 로 나타내는데, 밑수가 e 인 로그를 **자연로그**라 하며, 다음과 같이 간략하게 표기한다.

$$\log_e x = \ln x$$

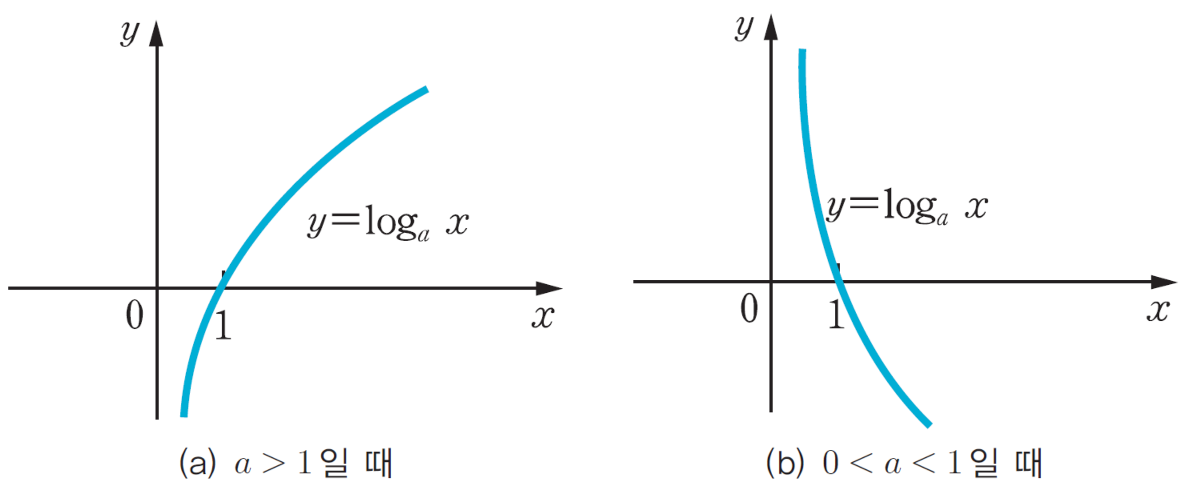
로그함수

로그함수

로그함수의 정의 $a > 0$이고 $a \neq 1$이라 하자. x가 양의 실수일 때

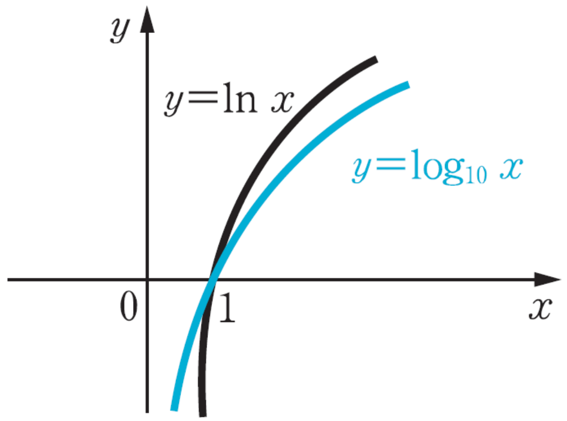
$$y = \log_a x$$

를 **로그함수**라 한다. 이때 a를 **밑수**, x를 **진수**라 한다.

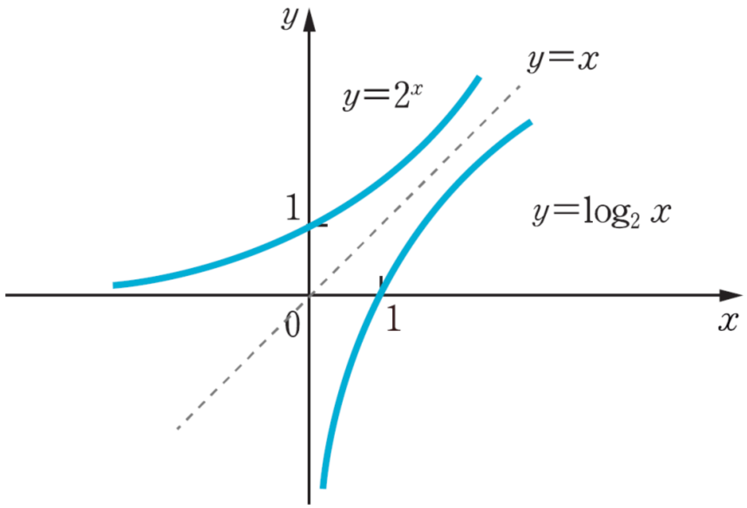


[그림 1-9] $y = \log_a x$ **의 그래프**

로그함수



[그림 1–10] $y=\log_{10} x$와 $y=\ln x$의 그래프



[그림 1–11] $y=2^x$과 $y=\log_2 x$의 그래프

➢ **지수함수와 로그함수의 관계:** $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$

예제 1-20

다음 문제를 풀어라.

(a) $\log_3 x = 4$일 때, x의 값을 구하라.

(b) $4^y = 3$일 때, y의 값을 구하라.

Thank you!