CHAPTER 11

부정적분 II

삼각함수 적분법　　부분분수 적분법

김 수 환

동의대학교 수학과

Contents

삼각함수의 적분법

정리 6-4 자주 쓰이는 삼각함수 공식

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(2) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

(3) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

(4) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

(5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

삼각함수의 적분법

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 의 계산

■ m 이 홀수이고, n 이 짝수인 경우

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x \, dx$$

로 식을 변형한다. 이때 $m-1$ 이 짝수이므로

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

를 이용하여 식을 변형한 후, 치환적분법을 이용하여 적분을 계산한다.

삼각함수의 적분법

예제 6-15

$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$를 계산하라.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 의 계산

■ m 이 짝수이고, n 이 홀수인 경우

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

로 식을 변형한다. 이때 $n-1$ 이 짝수이므로

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

를 이용하여 식을 변형한 후, 치환적분법을 이용하여 적분을 계산한다.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 의 계산

예제 6-16

$\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$를 계산하라.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 의 계산

■ m과 n이 모두 홀수인 경우

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

로 식을 변형하거나

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x \, dx$$

로 식을 변형한 후, 치환적분법을 이용하여 적분을 계산한다.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 의 계산

예제 6-17

$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$를 계산하라.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 의 계산

■ m과 n이 모두 짝수인 경우

다음 삼각함수 공식

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

로 식을 변형한 후, 치환적분법을 이용하여 적분을 계산한다.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 의 계산

예제 6-18

다음 적분을 계산하라.

(a) $\int \sin^2 x \, dx$

(b) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

$\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$ 의 계산

- $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$ 의 계산

정리 6-5 삼각함수의 형태 변경 공식

(1) $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin (a+b)x + \sin (a-b)x)$

(2) $\sin ax \sin bx = -\frac{1}{2}(\cos (a+b)x - \cos (a-b)x)$

(3) $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos (a+b)x + \cos (a-b)x)$

$\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ 의 계산

예제 6-19

[정리 6−5]를 이용하여 다음 적분을 계산하라.

(a) $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$ (b) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$

$\int \tan^n x\,dx$ 의 계산

$\int \tan^n x\,dx$ 의 계산 (n=1, 2인 경우)

탄젠트 함수가 피적분함수일 때 부정적분을 계산하려면 다음 공식을 이용한다.

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x$$

[정리 6–3]의 삼각함수의 부정적분 공식에 의하여

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

이며, 치환적분법에 의하여

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

이다.

$\int \tan^n x\, dx$ 의 계산

$\int \tan^n x\, dx$ 의 계산 (n 이 3이상)

■ n이 홀수인 경우

다음과 같이 식을 변형한 후 적분을 계산한다.

$$\tan^n x = \tan^{n-1} x \tan x = (\sec^2 x - 1)^{\frac{n-1}{2}} \tan x$$

예제 6-20

$\int \tan^3 x\, dx$를 계산하라.

$\int \tan^n x\, dx$ 의 계산

■ n이 짝수인 경우

다음과 같이 식을 변형한 후 적분을 계산한다.

$$\begin{aligned}\tan^n x &= \tan^{n-2} x \tan^2 x \\ &= \tan^{n-2} x\,(\sec^2 x - 1) \\ &= \tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-2} x\end{aligned}$$

예제 6-21

다음 적분을 계산하라.

(a) $\int \tan^2 x\, dx$ (b) $\int \tan^4 x\, dx$

부분분수 적분법

부분분수 적분법

- 유리함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 적분법

만일 다항함수 $f(x)$의 차수가 다항함수 $g(x)$의 차수보다 크거나 같다면, 다항함수의 나눗셈을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

이를 이용하여

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$$

를 계산해야 한다. 이때 $r(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 작다.

반대로 다항함수 $f(x)$의 차수가 다항함수 $g(x)$의 차수보다 작은 경우에는 다항함수의 나눗셈을 사용하지 않고

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \text{ 를 계산한다.}$$

부분분수 적분법

■ 분자의 차수가 분모의 차수보다 큰 경우의 적분

만일 유리함수의 분자에 있는 다항함수의 차수가 분모에 있는 다항함수의 차수보다 큰 경우에는 나눗셈을 시행한 후에 적분을 계산한다.

예제 6-23

$\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$를 계산하라.

부분분수 적분법

How to 6–5 분수함수를 부분분수화하여 적분하는 방법

❶ $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x+1)}dx$를 계산하려면 분모의 항을

$$x,\ x^2,\ x^3,\ x+1$$

의 4개의 항으로 보고, 4개의 부분분수

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{d}{x+1}$$

로 나타낸다. 그리고 항등식을 이용하여 분자의 값을 구한 후 적분을 계산한다. x^2과 x^3은 각각 2차 다항함수와 3차 다항함수이지만, x와 같은 형태이므로 분자에 상수함수를 적는다.

❷ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^3}dx$를 계산하려면 분모의 항을

$$x,\ x^2,\ x^2+1,\ (x^2+1)^2,\ (x^2+1)^3$$

의 5개의 항으로 보고, 5개의 부분분수

부분분수 적분법

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}+\frac{ex+f}{(x^2+1)^2}+\frac{gx+h}{(x^2+1)^3}$$

로 나타낸다. 그리고 항등식을 이용하여 분자의 값을 구한 후 적분을 계산한다. $(x^2+1)^2$은 4차 다항함수이고 $(x^2+1)^3$은 6차 다항함수이지만, x^2+1과 같은 형태이므로 분자에 1차 다항함수를 적는다.

❸ $\int \frac{1}{x^2(x^2-1)^3}\,dx$를 계산하려면

$$\int \frac{1}{x^2(x^2-1)^3}\,dx=\int \frac{1}{x^2(x-1)^3(x+1)^3}\,dx$$

이므로, 분모의 항을

$$x,\ \ x^2,\ \ (x-1),\ \ (x-1)^2,\ \ (x-1)^3,\ \ (x+1),\ \ (x+1)^2,\ \ (x+1)^3$$

의 8개의 항으로 보고, 8개의 부분분수

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{(x-1)^3}+\frac{f}{x+1}+\frac{g}{(x+1)^2}+\frac{h}{(x+1)^3}$$

로 나타내고, 항등식을 이용하여 분자의 값을 구한 후 적분을 계산한다.

부분분수 적분법

예제 6-24

$\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$를 계산하라.

Thank you!