CHAPTER 13

이상적분

이상적분

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

이상적분

이상적분

- 미적분학의 기본 정리를 이용한 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 의 제한 조건

  ❶ 적분구간 $[a, b]$는 유한구간이다.

  ❷ $f(x)$는 유한구간에서 연속이다.

- 제한을 받지 않는 적분 (이상적분)

❶ $f(x)$는 연속이지만 적분구간이 유한하지 않은 경우

❷ 적분구간은 유한하지만 $f(x)$가 적분구간 내의 어떤 점에서 $+\infty$ 또는 $-\infty$를 갖는 경우

❸ 적분구간도 유한하지 않고, $f(x)$가 적분구간 내의 어떤 점에서 $+\infty$ 또는 $-\infty$를 갖는 경우

함수는 연속이지만 적분구간이 유한하지 않은 경우

함수는 연속이지만 적분구간이 유한하지 않은 경우

- ❶에서 구간 $[a, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 이상적분은 우선 유한구간인 $[a, t]$에서 정적분의 계산법을 이용하여 적분을 계산한 후 극한을 계산해야 한다.
- 같은 방법으로 ❷에서 구간 $(-\infty, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 이상적분은 우선 유한구간인 $[s, b]$에서 정적분의 계산법을 이용하여 적분을 계산한 후 극한을 계산해야 한다.
- 극한을 계산했을 때 그 극한값이 $+\infty$이거나 $-\infty$이면 이상적분은 **발산한다**고 하며, 극한값이 유한한 값이면 이상적분은 **수렴한다**고 한다.

함수는 연속이지만 적분구간이 유한하지 않은 경우

예제 7-10

다음 이상적분을 계산하라.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

함수는 연속이지만 적분구간이 유한하지 않은 경우

이상적분의 정의 Ⅱ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 이상적분은 적당한 실수 c에 대하여

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

로 정의한다.

- 이상적분의 정의 Ⅱ에서 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$와 $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$가 모두 수렴할 때 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$는 수렴한다고 한다.
- $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$와 $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ 중 어느 하나라도 발산하면 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$는 발산한다고 한다.

주의

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

함수는 연속이지만 적분구간이 유한하지 않은 경우

예제 7-11

이상적분의 정의 Ⅱ를 이용하여 $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$가 수렴 또는 발산하는지를 판정하라.

적분구간은 유한하지만 함수가 유한하지 않은 경우

적분구간은 유한하지만 함수가 유한하지 않은 경우

이상적분의 정의 Ⅲ 구간 $[a,\ b]$의 내부점 $x=c$에서 $f(x)=\infty$이거나 $f(x)=-\infty$일 때, 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 이상적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s\to c^-}\int_a^s f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

로 정의한다.

- 우변에 있는 두 개의 항 중 어느 하나라도 발산하면 좌변의 이상적분은 발산한다고 판정
- 우변의 두 개항 모두가 수렴하면 좌변의 이상적분은 수렴한다고 판정한다.

적분구간은 유한하지만 함수가 유한하지 않은 경우

예제 7-12

이상적분의 정의 Ⅲ를 이용하여 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$가 수렴 또는 발산하는지를 판정하라.

적분구간은 유한하지만 함수가 유한하지 않은 경우

[예제 7-12]의 적분에 미분적분학의 기본 정리를 사용하여

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -1-1 = -2 \text{ 라 하면 안 된다.}$$

- 미분적분학의 기본 정리는 피적분함수가 적분구간에서 연속일때만 사용
- [예제 7-12]에서 $y = \dfrac{1}{x^2}$은 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이 아니기 때문에 사용할 수 없다.

적분구간은 유한하지만 함수가 유한하지 않은 경우

적분구간은 유한하지만 함수가 유한하지 않은 경우

이상적분의 정의 Ⅳ $f(x)$가 $(a,\ b]$에서 연속이고 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ 또는 $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$이면, 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 이상적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

로 정의한다.

적분구간은 유한하지만 함수가 유한하지 않은 경우

예제 7-13

이상적분의 정의 Ⅳ를 이용하여 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$를 계산하라.

적분구간과 함수 모두 유한하지 않은 경우

적분구간과 함수 모두 유한하지 않은 경우

이상적분의 정의 V

❶ 구간 $[a, \infty)$의 내부점 $x=c$에서 $f(x)=\infty$이거나 $f(x)=-\infty$일 때, 구간$[a, \infty)$에서 $f(x)$의 이상적분은

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{s\to c^-}\int_a^s f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+,\ r\to\infty}\int_t^r f(x)\,dx$$

로 정의한다.

❷ 구간 $(-\infty, \infty)$의 내부점 $x=c$에서 $f(x)=\infty$이거나 $f(x)=-\infty$일 때, 구간$(-\infty, \infty)$에서 $f(x)$의 이상적분은

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{s\to c^-,\ q\to-\infty}\int_q^s f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+,\ r\to\infty}\int_t^r f(x)\,dx$$

적분구간과 함수 모두 유한하지 않은 경우

예제 7-14

이상적분의 정의 V를 이용하여 다음 이상적분이 수렴 또는 발산하는지를 판정하라.

(a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6}\, dx$

Thank you!