CHAPTER 05

미분 II

합성함수 미분법　　음함수 미분법　　매개변수 미분법

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

연쇄법칙

How to 3-3 거듭제곱근 함수의 미분법

$F(x)=\sqrt[n]{(\square)}$ 이면 $F(x)=(\square)^{\frac{1}{n}}$ 이므로, 연쇄법칙에 의하여 $F(x)$의 미분을 다음과 같이 계산한다.

$$F'(x)=\frac{1}{n}(\square)^{\frac{1}{n}-1}(\square)'$$

예제 3-13

다음 함수를 미분하라.

(a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ (b) $g(x)=\sqrt[3]{2x+7}$ (c) $h(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3+1}}$

예제 3-14

연쇄법칙을 두 번 이상 사용하여 $f(x)=\sqrt{(2x+3)^3-1}$ 일 때 $f'(x)$를 구하라.

참고] 풀이는 다음에서 자세히 다룬다

연쇄법칙

예제 3-13

다음 함수를 미분하라.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$　(b) $g(x) = \sqrt[3]{2x+7}$　(c) $h(x) = \sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3+1}}$

풀이]

연쇄법칙

예제 3-14

연쇄법칙을 두 번 이상 사용하여 $f(x) = \sqrt{(2x+3)^3 - 1}$ 일 때 $f'(x)$를 구하라.

풀이]

음함수와 매개변수함수의 미분법

음함수의 미분법

양함수의 정의

- $y = f(x)$ 의 형태로 주어진 함수를 **양함수**라 한다.
- 다루기는 편하나 어떤 현상이나 공학의 문제를 설명하는데 한계가 있다.

예제 3-15

반지름이 1인 원을 양함수로 표현하라.

음함수의 정의

음함수의 정의 두 변수 x와 y를 포함하는 관계식

$f(x, y) = 0$ 에 의하여 표현되는 함수를 **음함수**라 한다.

참고] 음함수 표현은 양함수 표현을 포함한다.

음함수의 미분법

음함수의 미분법

How to 3-4 음함수의 미분법

❶ 주어진 음함수 $f(x,\ y)=0$을 어떤 변수로 미분하는가를 확인한다.

❷ x에 관하여 미분하는 경우

- x항을 미분할 때 : (미분 공식에 따른 미분)만 계산
- y항을 미분할 때 : (미분 공식에 따른 미분) $\cdot\ \dfrac{dy}{dx}$ 계산

❸ y에 관하여 미분하는 경우

- x항을 미분할 때 : (미분 공식에 따른 미분) $\cdot\ \dfrac{dx}{dy}$ 계산
- y항을 미분할 때 : (미분 공식에 따른 미분)만 계산

음함수의 미분법

예제 3-16

$x^3 + y^2 = 0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

풀이]

음함수의 미분법

예제 3-17

$\sin x + y^3 = 0$일 때, $\dfrac{dx}{dy}$를 구하라.

풀이]

음함수의 미분법

예제 3-18

$x^2 + xy + y^3 = 0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

풀이]

음함수의 미분법

예제 3-19

$x^2 + xy + y^3 = 0$일 때, $\dfrac{dx}{dy}$를 구하라.

풀이]

음함수의 미분법

➢ n이 유리수일 때의 미분

정리 3-7 음함수의 미분 정리

n이 유리수일 때, $y = x^n$을 미분하면 $y' = n x^{n-1}$이다.

증명

n이 유리수이므로 적당한 정수 a와 b가 존재하여 $n = \frac{a}{b}$이다. $y = x^n = x^{\frac{a}{b}}$

양변을 b 제곱하면 $y^b = x^a$ 이다.

음함수의 미분법을 이용하여 양변을 x에 관하여 미분하면

$$b y^{b-1} \frac{dy}{dx} = a x^{a-1}$$ 이고, 이를 정리하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^{a-1}}{by^{b-1}}$$

$$= \frac{a x^{a-1}}{b (x^{\frac{a}{b}})^{b-1}} = \frac{a x^{a-1}}{b x^{a - \frac{a}{b}}}$$

$$= \frac{a}{b} x^{\frac{a}{b} - 1} = n x^n - 1$$

매개변수함수의 미분법

매개변수함수의 미분법

매개변수함수와 매개변수의 정의 두 변수 x와 y가 두 함수 f와 g에 의하여

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

로 표현될 때, 이 식을 **매개변수함수**라 하고, t를 **매개변수**라 한다.

How to 3–5 매개변수함수의 미분법

$x = f(t)$, $y = g(t)$가 모두 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$이면 $\dfrac{dy}{dx}$는 다음과 같이 구한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

참고] 다음은 매개변수의 미분법을 설명한다.

매개변수함수의 미분법 암기방법

$$\frac{dy}{dx}\left(\begin{array}{ll} y & \\ \downarrow & \frac{dy}{dt} \\ t & \\ \downarrow & \frac{dt}{dx} \\ x & \end{array}\right. \qquad \frac{d^2y}{dx^2}\left(\begin{array}{ll} \frac{dy}{dx} & \\ \downarrow & \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ t & \\ \downarrow & \frac{dt}{dx} \\ x & \end{array}\right.$$

의미: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ **의미:** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$

예제 3-20

[How to 3−5]를 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $\begin{cases} x = 3t^2 - 1 \\ y = 2t^2 + t + 1 \end{cases}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$를 구하라.

(b) $\begin{cases} x = (3s - 1)^4 \\ y = s^2 + 3 \end{cases}$ 일 때, $\frac{dx}{dy}$를 구하라.

참고] 풀이는 다음에서 자세히 다룬다

매개변수함수의 미분법 암기방법

예제 3-20

[How to 3−5]를 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) $\begin{cases} x = 3t^2 - 1 \\ y = 2t^2 + t + 1 \end{cases}$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

(b) $\begin{cases} x = (3s - 1)^4 \\ y = s^2 + 3 \end{cases}$ 일 때, $\dfrac{dx}{dy}$를 구하라.

풀이]

Thank you!