

CHAPTER 15

정적분의 활용 II

회전체의 부피(2가지 유형)

김 수 환

동의대학교 수학과

Contents

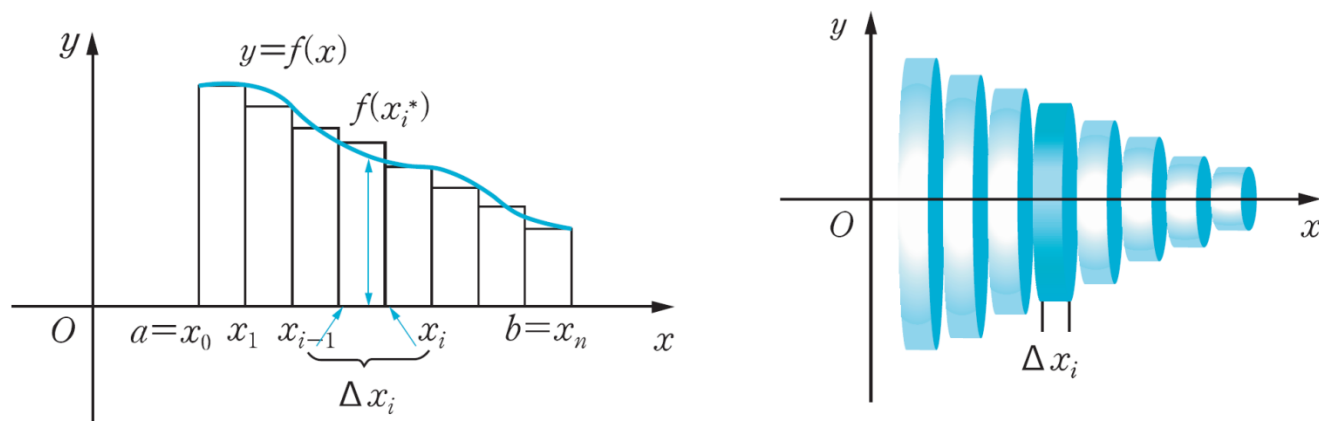
15.1 회전체의 부피(2가지 유형)

회전을 이용하는 방법(원판 형)

● 회전을 이용하는 방법(x축 회전)

■ x 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피

$y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역을 x 축과 수직인 방향으로 폭이 Δx 인 얇은 띠로 만든 후 x 축을 기준으로 회전시키면, 각각의 띠는 높이가 Δx 이고 반지름이 $|f(x)|$ 인 원기둥이 된다.



[그림 8-3] x 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체

회전을 이용하는 방법(원판 형)

- $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역을 x 축을 기준으로 회전시켜서 얻은 입체의 부피는

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i^*)]^2 \Delta x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

이다.

회전을 이용하는 방법(원판 형)

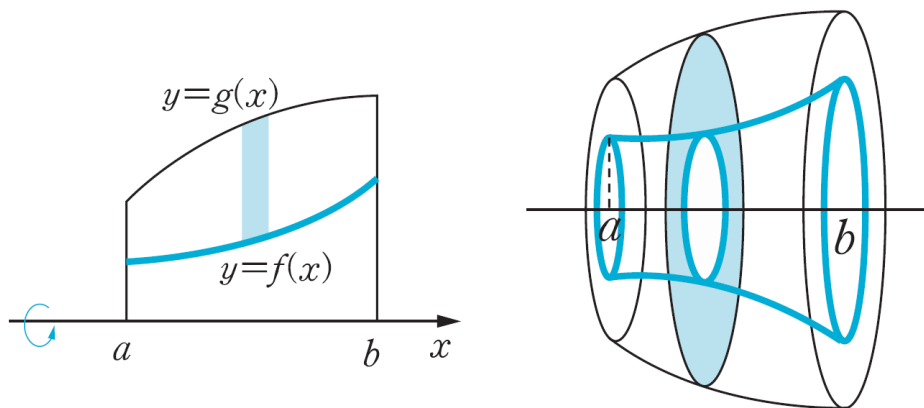
예제 8-6

$y = x + 2$ 와 $x = 2$, $x = -2$ 그리고 x 축으로 둘러싸인 영역을 x 축을 기준으로 회전시켜서 얻은 입체의 부피를 구하라.

회전을 이용하는 방법(와서 형)

■ 응용 : 두 함수 사이의 영역을 x 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피

➤ 구간 $[a, b]$ 에서 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ 라 하자.



[그림 8-4] 두 함수 사이의 영역을 x 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체

따라서

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \\ &= \pi \int_a^b ([g(x)]^2 - [f(x)]^2) dx \end{aligned}$$

회전을 이용하는 방법(와서 형)

예제 8-7

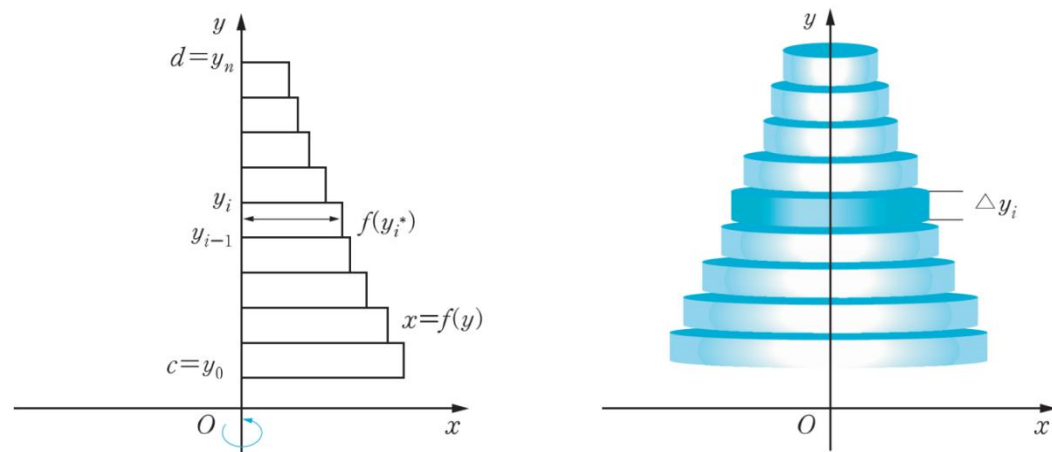
$f(x) = x$ 와 $g(x) = 4x - x^2$ 에 의해 둘러싸인 영역을 x 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구하라.

회전을 이용하는 방법(원판 형)

● 회전을 이용하는 방법(y축 회전)

■ y축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피

- $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ 와 y축으로 둘러싸인 영역을 y축과 수직인 방향으로 폭이 Δy 인 얇은 띠로 만들어 y축을 기준으로 회전시키면, 각각의 띠는 높이가 Δy 이고 반지름이 $|f(y)|$ 인 원기둥이 된다.



[그림 8-6] y축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체

따라서 $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ 와 y축으로 둘러싸인 영역을 y축을 기준으로 회전시킨 입체의 부피는
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(y_i^*)]^2 \Delta y = \int_c^d \pi [f(y)]^2 dy$$
 이다.

회전을 이용하는 방법(원판 형)

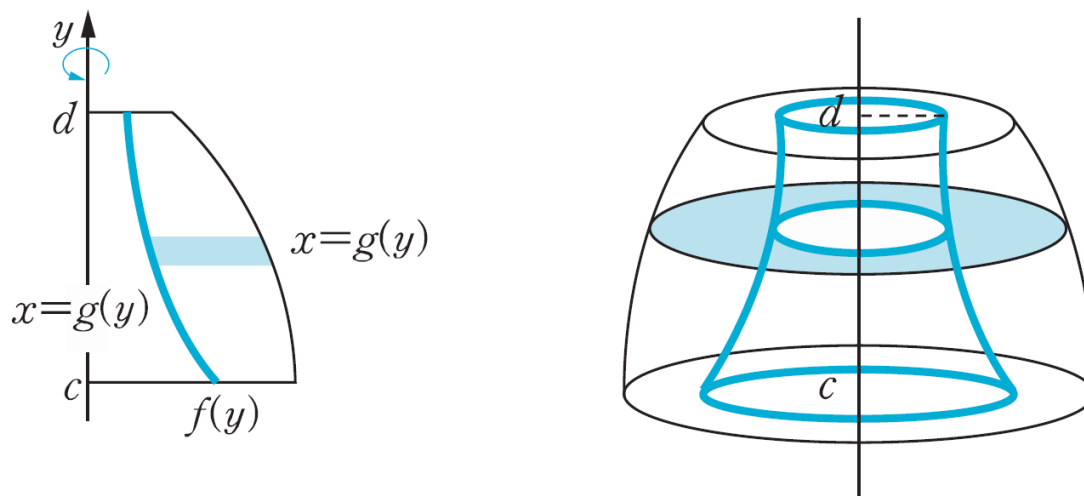
예제 8-8

$y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $y = 4$ 와 y 축으로 둘러싸인 영역을 y 축을 기준으로 회전시켜 얻은 입체의 부피를 구하라.

회전을 이용하는 방법(와서 형)

■ 응용 : 두 함수 사이의 영역을 y 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피

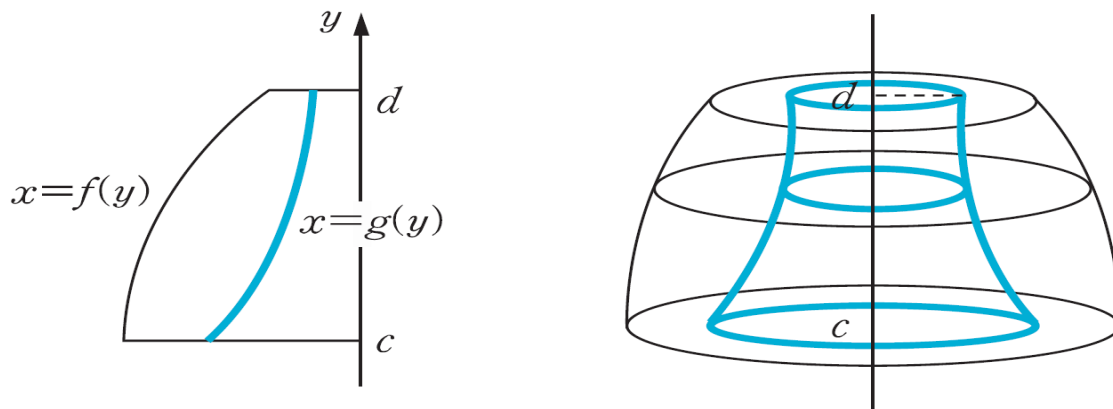
- 구간 $[c, d]$ 에서 $0 \leq f(y) \leq g(y)$ 라 하자. $y = c$ 부터 $y = d$ 까지 $x = f(y)$ 와 $x = g(y)$ 사이의 영역을 y 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피는 $y = c$ 부터 $y = d$ 까지 $x = g(y)$ 를 y 축을 기준으로 회전시킨 입체의 부피에서 $y = c$ 부터 $y = d$ 까지 $x = f(y)$ 를 y 축을 기준으로 회전시킨 입체의 부피를 빼면 얻을 수 있다.



[그림 8-7] 두 함수 사이의 영역을 y 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체

회전을 이용하는 방법(와서 형)

➤ 만일 구간 $[c, d]$ 에서 $f(y) \leq g(y) \leq 0$ 이 성립한다고 하자.



[그림 8-8] 두 함수 사이의 영역을 y 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체

이 경우 $y=c$ 부터 $y=d$ 까지 $x=f(y)$ 와 $x=g(y)$ 사이의 영역을 y 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피는

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy - \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy \\ &= \pi \int_c^d ([f(y)]^2 - [g(y)]^2) dy \end{aligned}$$

이다.

회전을 이용하는 방법(와서 형)

예제 8-9

$y = x^3$ 과 $y = x$ 에 의해 둘러싸인 1사분면의 영역을 y 축을 기준으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구하라.

Thank you!