CHAPTER 10

부정적분 I

부정적분의 정의　치환적분법　부분적분법

김 수 환
동의대학교 수학과

Contents

부정적분의 정의

원시함수의 정의 $f : D \to \mathbb{R}$ 이고 모든 $x \in D$에 대하여

$$F'(x) = f(x)$$

가 되는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 **원시함수**(primitive function)라 하고

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

로 나타낸다.

예제 6-1

원시함수의 정의를 이용하여 다음을 증명하라.

(a) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$이 $f(x) = x^2$의 원시함수임을 증명하라.

(b) $G(x) = -x^2 + x - 1$이 $g(x) = -2x + 1$의 원시함수임을 증명하라.

부정적분의 정의

부정적분의 정의

부정적분의 정의 $F(x)$가 $f(x)$의 원시함수일 때 임의의 상수 C에 대하여

$$(F(x)+C)' = f(x)$$

이므로

$$F(x)+C = \int f(x)\,dx$$

가 되고, $F(x)+C$를 $f(x)$의 **부정적분**(indefinite integral)이라 한다. 이때 상수 C를 **적분 상수**(constant of integration), $f(x)$를 **피적분함수**(integrand)라 한다.

적분 기호 $\int$는 합을 의미하는 단어인 sum의 첫 글자인 s에서 유래되었으며 라이프니츠(Leibniz)가 처음 도입한 것으로 알려져 있다.

부정적분의 기본 정리

부정적분의 기본 정리

➢ 부정적분과 미분과의 관계

$$(F(x)+C)' = f(x) \Leftrightarrow F(x)+C = \int f(x)\,dx$$

정리 6-1 기본적인 적분 공식

(1) $n \neq -1$일 때 $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

증명

(1) $n \neq -1$일 때 $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$이므로 $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$이다.

(2) $(\ln|x| + C)' = \dfrac{1}{x}$이므로 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$이다.

부정적분의 기본 정리

정리 6-2 부정적분의 기본 성질

a와 b가 상수일 때

(1) $\int (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$

(2) $\int (a\,f(x) - b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx - b\int g(x)\,dx$

예제 6-2

[정리 6-1]과 [정리 6-2]를 이용하여 다음 함수들의 적분을 계산하라.

(a) $\int (3x^3 + 2)\,dx$ (b) $\int (x^5 - 2x^4)\,dx$

부정적분의 기본 정리

정리 6-3 다양한 적분 공식

■ 삼각함수의 부정적분

(1) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(2) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(3) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

■ 지수함수의 부정적분

(4) $\int e^x \, dx = e^x + C$

(5) $\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

■ 쌍곡선함수의 부정적분

(6) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

(7) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$

(8) $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C$

부정적분의 기본 정리

증명

(1) $(\sin x + C)' = \cos x$이므로 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$이다.

(2) $(-\cos x + C)' = \sin x$이므로 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$이다.

(3) $(\tan x + C)' = \sec^2 x$이므로 $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$이다.

(4) $(e^x + C)' = e^x$이므로 $\int e^x\, dx = e^x + C$이다.

(5) $a > 0,\ a \neq 1$일 때 $(a^x + C)' = a^x \ln a$이므로 $\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$이다.

(6) $(\sinh x + C)' = \cosh x$이므로 $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$이다.

(7) $(\cosh x + C)' = \sinh x$이므로 $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$이다.

(8) $(\tanh x + C)' = \mathrm{sech}^2 x$이므로 $\int \mathrm{sech}^2 x\, dx = \tanh x + C$이다.

부정적분의 기본 정리

예제 6-4

[정리 6−3]을 이용하여 다음 적분을 계산하라.

(a) $\displaystyle\int (3\sin x + 2\cos x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int (\sinh x - 3\,\mathrm{sech}^2\, x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \left(3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\right) dx$

(d) $\displaystyle\int (\cos x + \cosh x)\,dx$

치환적분법과 부분적분법

치환적분법

치환적분법의 정의 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$이고 $t = g(x)$가 미분가능한 함수일 때

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

와 같이 적분을 계산하는 것을 **치환적분법**이라 한다.

How to 6-1 치환적분법을 적용하는 방법

❶ 피적분함수에 $(\square)^n$이 있으면 괄호 안의 함수를 $g(x)$로 생각하여 이를 t로 치환하고, $g'(x)\,dx = dt$의 관계를 이용하여 적분을 계산한다.

❷ 피적분함수에 근호가 있으면 근호 안의 함수를 $g(x)$로 생각하여 이를 t로 치환하고, $g'(x)\,dx = dt$의 관계를 이용하여 적분을 계산한다.

치환적분법

예제 6-7

[How to 6−1]을 이용하여 다음 적분을 계산하라.

(a) $\displaystyle\int 2x\,(x^2-1)^5\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

치환적분법

How to 6–2 부분함수에 대해 치환적분법을 적용하는 방법

피적분함수가 유리함수이면 분모 전체나 분모의 일부를 $g(x)$로 생각하여 이를 t로 치환하고, $g'(x)\,dx = dt$의 관계를 이용하여 적분을 계산한다.

예제 6-8

[How to 6–2]를 이용하여 다음 적분을 계산하라.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+1)^4}\,dx$

부분적분법

부분적분법

부분적분법의 정의 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 미분가능할 때 곱에 대한 미분법에 의하여

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이다. 이 식의 양변을 적분하면

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx \\ &= \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

이고, 이를 **부분적분법**이라 한다.

적분대상: $g(x)' \rightarrow g(x)$

$+\nearrow \quad -\uparrow \int dx$

미분대상: $f(x) \rightarrow f(x)'$

부분적분법

예제 6-11

다음 적분을 계산하라.

(a) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

(b) $\displaystyle\int x^3 \sin x \, dx$

부분적분법

예제 6-12

$\int e^x \sin x \, dx$를 계산하라.

부분적분법

How to 6-4 피적분함수에 대해 부분적분법을 적용하는 방법

부분적분법을 적용할 때 피적분함수에 $\ln x$가 있는 경우, $u = \ln x$로 정하고 남은 함수를 v'으로 하여 계산한다.

예제 6-13

$\int x \ln x \, dx$를 계산하라.

부분적분법

예제 6-14

$\int \ln x \, dx$를 계산하라.

Thank you!