积分关系定理（格林公式、高斯公式、斯托克斯公式）

柿子君

本人文章中的许多内容从网上摘抄，仅供学习交流，如侵权联系删除

> 本文主要引用杨艳萍和明清河老师的《数学分析中的重要定理》第四章积分关系

一、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式

格林公式（Green formula）

> 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有一阶的连续偏导数，则有 $\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$，这里 L 为闭区域的边界曲线并取正向。

高斯公式（Gauss formula）

> 设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围城，若函数P,Q,R 在 V 上连续，且有一阶的连续偏导数，则 $\iiint\limits_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，其中 S 取外侧。

斯托克斯公式（Stokes formula）

> 设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线，若函数 P,Q,R在 S （连同 L）上连续，且有一阶的连续偏导数，则
> $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx$
> $+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$
> ，其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定。

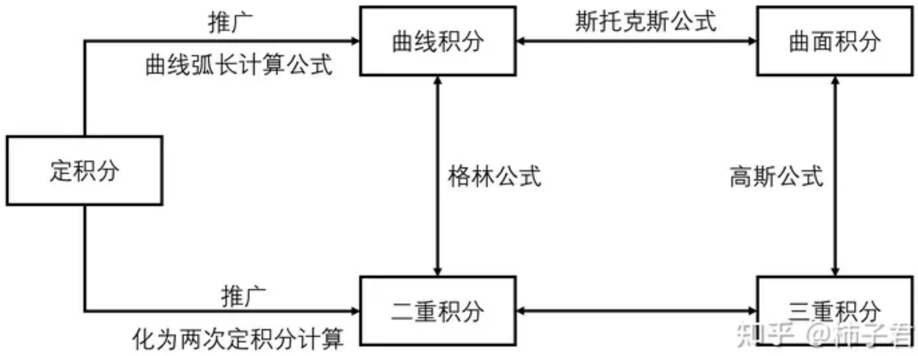
二、各类积分的起源与关系

1. 各类积分的起源

> 定积分的概念从计算“曲边梯形的面积”等问题引入
> 二重积分从计算“曲顶柱体体积”引入
> 三重积分则是从求“三维空间中的有界物体的质量”引入的
> 第一类曲线积分从求“物质曲线的质量”中引入
> 第二类曲线积分从计算“力场做功问题”引入
> 第一类曲面积分从求“物质曲面质量问题”引入
> 第二类曲面积分则是从“讨论流量问题”引入

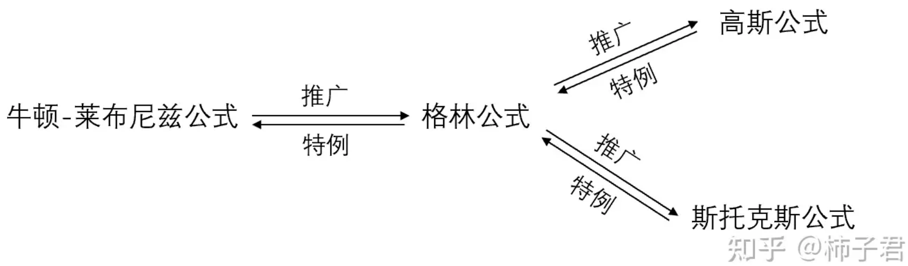
2.各类积分之间的关系

2.1重积分、线积分、面积分之间的关系



定积分、重积分、线积分、面积分之间的关系

2.2各类积分之间的转换



牛顿莱布尼兹公式、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式之间的关系

三、四个积分公式的统一形式

> 前置知识需要补充两个概念微分的外积运算与外微分，目的是对微分增加方向的概念。

1.外积

定义微分的外积运算，并使用预算符“∧”表示，并满足以下的运算法则：

- $\alpha(dx \wedge dy) = (\alpha dx) \wedge dy$， α 为实数
- 加法分配律： $dx \wedge (dy + dz) = dx \wedge dy + dx \wedge dz$
- 反交换律： $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$
- 结合律： $dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz$

微分的外积运算可以理解为有向度量， $dx \wedge dy$ 表示有向面积微分， $dx \wedge dy \wedge dz$ 表示有向体积微分。

2.外微分

在三维欧氏空间中，设函数 $f(x,y,z)$ 在空间区域 V 上连续，则可以定义四个具有外微分形式的函数：

- 三元0阶外微分形式： $\omega_0 = f(x,y,z)$
- 三元1阶外微分形式： $\omega_1 = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$
- 三元2阶外微分形式：
  $\omega_2 = A(x,y,z)dx \wedge dy + B(x,y,z)dy \wedge dz + C(x,y,z)dz \wedge dx$
- 三元3阶外微分形式： $\omega_3 = F(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz$

易得k阶外微分形式的外微分是k+1阶外微分形式。可以得到 $|dx \wedge dy| = dxdy$，可以看出我们之所以定义外微分是为了后续将无定向积分与定向积分写成一个统一的形式。