【工程学笔记之一】有限元法

机器工坊
别人笑我太疯癫，我笑他人看不穿。机械PhD。

有限元法是谁发明的?

有限元法（Finite Element Method）是一种求解微分方程的常用数值方法。

有限元法的基本思想为：

- 假如 u 表示微分方程的解（它是某个函数），那么需要将问题转化为——找到函数 u，使得它能够最小化某种“势能”。这种“势能”通常指的是微分方程的变分形式，即有关 u 的泛函。泛函为“函数的函数”，这里可以理解为对应函数 u 的某种“能量”。
- 有限元的经典方法——Rayleigh-Ritz-Galerkin法——的基本思想是选取有限数量的“试探函数”，用它们的线性组合去近似地估算 u。

有限元法的发展可以追溯到1940年代欧美和前苏联数学家、工程师为解决复杂结构分析问题而做出的先驱性的工作。开拓者包括俄裔加拿大工程师Alexander Hrennikoff、德裔美国数学家Richard Courant（纽约大学的柯朗数学科学研究所就是以他的名字命名）、希腊工程师John Argyris等。

必须指出的是，中国数学家冯康也是有限元法的发明人之一！

在1950年代晚期到1960年代早期，冯康独立地提出了一种系统性求解偏微分方程的数值方法。1965年，冯康在《应用数学和计算数学》杂志发表论文《基于变分原理的差分格式》，奠定了有限元法坚实严格的数学基础[1]。

这是一项伟大的成就！

1997年冯康的工作获得获得国家自然科学奖一等奖。为纪念冯康，中国科学院设立冯康科学计算奖。冯康去世时，柯朗数学科学研究所的Peter Lax写文章纪念他[2]——

> 他不仅通过自己的研究和他学生的研究使中国在应用和计算数学领域崭露头角，而且还确保了所需资源的提供。——由GPT-4翻译

冯康的工作使得中国在计算数学领域占据一席之地。

接下来简单地介绍下有限元法的求解思路。

一个例子——Sturm–Liouville问题

我们来看一个微分方程的例子：

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x) \tag{1}$$

如果上述方程在端点（这里取 $x=0,\pi$）有合适的边界条件，那么此二阶线性常微分方程是经典的Sturm–Liouville问题。这个方程能够描述很多不同的物理过程，如一根杆件的温度分布，或一根旋转的弦的位移[3]。

如何用有限元法近似求解上述方程呢?

首先我们需要将微分方程（1）转换为它的变分形式。

我们的目的是求解 $u(x)$，它是一个关于 x 的函数。我们知道，微分运算是线性的，我们用一个线性算子 $\mathcal{L}$ 作用于上述方程的左边，得到：

$$\mathcal{L}u=f \tag{2}$$

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API | Printed with Pdfcrowd.com

首先我们要明确一下函数 u 的取值范围。 $u(x)$ 为定义在 $[0, \pi]$ 上的一段函数，可以看作是一个“无穷维”的向量。注意，这里的无穷为“不可数无穷”，即 u 的取值是不能和自然数 $1, 2, 3, \ldots$ 一一对应的，它的“维度”比自然数多得多。

我们将 u 所在空间限定为Sobolev空间 $\mathbb{H}_E^1$，这个空间的函数满足如下条件：

1. $\mathbb{H}_E^1$ 中的1表示“一阶导数平方可积”，即 $\int_\Omega (u')^2 dx < \infty$，其中 Ω 为整个定义域。即 $u' \in L^2(\Omega)$，其中 L^2 空间表示平方可积函数的集合。
2. $\mathbb{H}_E^1$ 中的 E 表示特定能量范数 $\|u\|_E = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2}$，因此，空间中函数的“能量”是有限的。
3. $u(0) = 0$。

接下来，等式（2）与下列二次泛函有关：

$$I(v) = \langle \mathcal{L}v, v \rangle - 2\langle f, v \rangle \tag{3}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积，定义为 $\langle u(x), v(x) \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$，如果将函数看作“无穷维”的向量，那这里的内积就更容易理解一些，可参考有限维向量内积的定义。容易看出，当且仅当 $I(v)$ 的一次变分为零时， $I(v)$ 可取到最小值，而这个条件恰好就是式（2），即

$$\frac{dI}{dv}\bigg|_{v=u} = 2(\mathcal{L}u - f) = 0$$

式（3）就是Sturm–Liouville问题的变分形式。这两种形式是等价的。

如要取得有效解，则需要 $\mathcal{L}$ 是正定的。

先将 v 想作一个向量，如果 I 在 u 处能够取得最小值的话，则对任意 v 和 ϵ，有

$$I(u) \le I(u + \epsilon v) = I(u) + 2\epsilon[\langle \mathcal{L}u, v \rangle - \langle f, v \rangle] + \epsilon \langle \mathcal{L}v, v \rangle \tag{4}$$

因为 ϵ 可取任意小的值，且符号可正可负，那么它的系数必须为零，否则上式可能不成立。故而有

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle f, v \rangle,\ \forall v \tag{5}$$

我们称式（5）为Galerkin形式。

接下来我们计算 I，用分部积分法计算第一项，得到

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}v, v \rangle &= \int_0^\pi [(-pv')' + qv]v\, dx \\ &= \int_0^\pi [p(v')^2 + qv^2]\, dx - pv'v|_0^\pi \end{aligned}$$

我们设定 v 满足边界条件 $v(0) = v'(\pi) = 0$，则

$$I(v) = \int_0^\pi [p(x)(v'(x))^2 + q(x)v(x)^2 - 2f(x)v(x)]dx \tag{6}$$

因此，求解式（1）转化为最小化式（6）。可以看出， $I(v)$ 是有关 v 的某种能量泛函。

Ritz法

为简化问题，我们将式（1）中的 p 和 q 设为常数。不妨都设为1。

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com

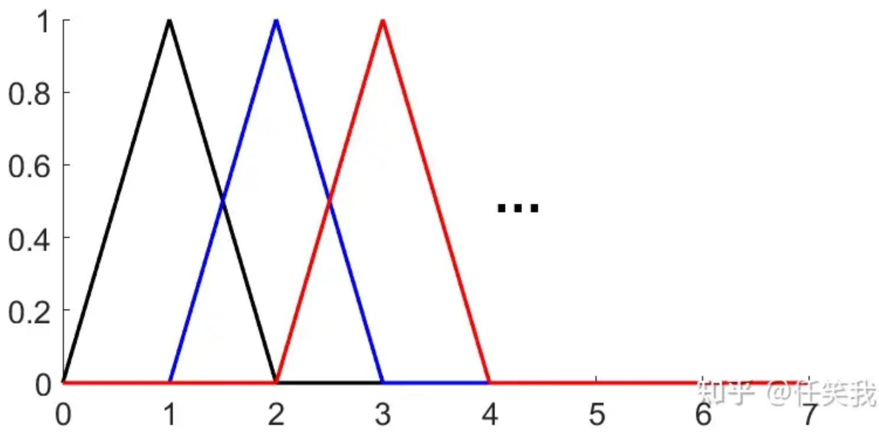
有限元的思想是用一组“有限”数量的“试探函数”来估算原始方程的解。对方程（1）而言，最简单的选择是分段线性函数。

首先，我们需要将定义域区间 $[0,\pi]$ 分割为 N 个等距的子区间，每个区间的长度为 $h=\pi/N$。每个区间成为一个“元”（Element），它的端点称为“节点”（Node）。节点的坐标即为 $x_i=ih,\ i=0,1,\dots,N$。

我们选取一组函数 $\varphi_j^h,\ j=1,\dots N$，它们满足以下条件：

1. 在节点 $x=jh$ 的值为1，即 $\varphi(jh),\ j=1,\dots,N$；
2. $\varphi(0)=0$。

这些试探函数的导数为分段常数，因此显然具有有限的能量。此类的试探函数称为“线性元”。如果 $h=1$，试探函数可见下图：



方程（1）可能的解即为试探函数的线性组合：

$$v^h(x)=\sum_{j=1}^{N}u_j\varphi_j^h(x)$$

式子（6）变为

$$I(v^h)=\int_0^{\pi}\left[((v^h)')^2+(v^h)^2-2fv^h\right]dx$$

在 $[(j-1)h,jh]$（即一个线性元）段内，$v^h=u_{j-1}\varphi_{j-1}+u_j\varphi_j$，进而有

$$\begin{aligned}\int_{(j-1)h}^{jh}((v^h)')^2dx=\frac{(u_j-u_{j-1})^2}{h}&=\begin{bmatrix}u_{j-1} & u_j\end{bmatrix}\frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{j-1}\\ u_j\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}u_{j-1} & u_j\end{bmatrix}\mathbf{k}\begin{bmatrix}u_{j-1}\\ u_j\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{7}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_{(j-1)h}^{jh}(v^h)^2dx=\frac{h}{3}(u_j^2+u_ju_{j-1}+u_{j-1}^2)&=\begin{bmatrix}u_{j-1} & u_j\end{bmatrix}\frac{h}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{j-1}\\ u_j\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}u_{j-1} & u_j\end{bmatrix}\mathbf{m}\begin{bmatrix}u_{j-1}\\ u_j\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{8}$$

其中，式（7）中的 $\mathbf{k}$ 称作“单元刚度矩阵”，式（8）中的$\mathbf{m}$ 称作“单元质量矩阵”。这些术语是类比于力学中的质量和刚度概念而取的，并且在有限元应用于力学的实例中，这些矩阵确有其物理意义。

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com

接下来的步骤就是将各个有限元的刚度矩阵和质量矩阵组合起来，形成全域矩阵，如下

$$K=\frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}+\frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & -1 & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}+\cdots+\frac{1}{h}\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{h}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

这里很好的写出了分元的计算思路：
mat_A * B * mat_A.T + mat_A * C * mat_A.T =
mat_A * (B+C) * mat_A.T
* 指矩阵乘法

类似有

$$M=\frac{h}{6}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 4 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & 1 & 4 & 1 \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

因此，解式（1）转化为求解如下的线性方程：

$$(K+M)=F$$

其中，$U=[u_0,\ldots,u_n]^\top$ 。于是，原本需要求解“不可数无穷维”函数的问题转化为求解“有限维”的线性方程，求解就会变得容易多了。

线性元的估算误差

用 u^h 估算能够多接近真实解 u 呢?

答案是：要多接近就能多接近。

上述的Ritz法是最优的。

> 定理1：$\|u-u^h\|_0 \le \rho C^2 h^2 \|u''\|_0 \le \rho^2 C^2 h^2 \|f\|_0$.

参考

1. ^ https://ks3-cn-beijing.ksyun.com/attachment/675b03cd193277f817b01ac32f8348a2
2. ^ http://lsec.cc.ac.cn/fengkangprize/article2.pdf
3. ^ Gilbert Strang and George Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, New Jersey, 1973.

编辑于 2023-04-18 02:29・IP 属地美国

工程学

▲ 赞同 3 ▼ 添加评论 分享 喜欢 收藏 申请转载 ···

写下你的评论...

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com