从欧拉-拉格朗日方程到理论力学和全变分约束降噪

谈老师
中国科学院大学 光学博士

写在开始

首先需要明确一下函数(function)与泛函(functional)的区别，这两个本质都是一种映射，其主要区别在于：

函数：数到数的映射$x \to f(x)$

泛函：函数到数的映射$f(x) \to \mathbb{R}$

所以也可以说泛函是函数的函数。

欧拉-拉格朗日方程

> 问题的提出：
> 已知一个函数$f(x)$，当泛函$A=\int L(f(x), f'(x), x)\mathrm{d}x$取**极值**时，求$f(x)$

欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange)方程：

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\partial L}{\partial f'})=0$$

当$f(x)$满足欧拉-拉格朗日方程时，泛函取极值。

证明

欧拉-拉格朗日的证明方法有很多种，这里给出一种变分的方法去证明。假设已经找到函数$f_0(x)$使得泛函取得极小值，那个存在一个任意函数$\eta(x)$，有：

$$\int L(f)\mathrm{d}x=\int L(f_0(x)+\epsilon\eta(x))\mathrm{d}x \geq \int L(f_0(x))\mathrm{d}x$$

这种方法称之为**变分法**。其中ϵ足够小，那么左边的泛函就可以写成关于ϵ的一个函数$A(\epsilon)$，当$\epsilon=0$时候，关于$f(x)$的泛函取极值，有$A'(\epsilon=0)=0$，根据这个关系，可以得到：

$$\begin{aligned}A'(\epsilon)&=\int\frac{\mathrm{d}L(f,f',x)}{\mathrm{d}\epsilon}\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}(\frac{\partial L}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \epsilon}+\frac{\partial L}{\partial f'}\frac{\partial f'}{\partial \epsilon})\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}(\frac{\partial L}{\partial f}\eta(x)+\frac{\partial L}{\partial f'}\eta'(x))\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对上式的第二项做一次分部积分：

$$\begin{aligned}A'(\epsilon)&=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial L}{\partial f}\eta(x)\mathrm{d}x+\eta\frac{\partial L}{\partial f'}\Big|_{x_1}^{x_2}-\int(\frac{\partial L}{\partial f'})'\eta(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}[\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\partial L}{\partial f'})]\eta(x)dx\end{aligned}$$

注意到积分区域为$[x_1,x_2]$，在两端的位置η值为0。上式在$\epsilon=0$的情况下，对任意的$\eta(x)$都成立，所以得证

当函数的自变量为高维的时候，欧拉-拉格朗日方程将会发生什么样的变化呢。首先以二维为例，看结果会有什么不同。二维的泛函将会变成：

$$A=\int L(f(x,y),f_x(x,y),f_y(x,y),x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中f_x和f_y分别是函数f对自变量x和y的偏导。根据上面的证明，假设已经找到函数$f_0(x,y)$使得泛函取得极值，存在一个任意函数$\eta(x,y)$，有：

$$\int L(f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int L(f_0(x,y)+\epsilon\eta(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq\int L(f_0(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对ϵ求导，有：

$$\begin{aligned}A'(\epsilon)&=\int\frac{\mathrm{d}L(f,f_x,f_y,x,y)}{\mathrm{d}\epsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(\frac{\partial L}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial\epsilon}+\frac{\partial L}{\partial f_x}\frac{\partial f_x}{\partial\epsilon}+\frac{\partial L}{\partial f_y}\frac{\partial f_y}{\partial\epsilon})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}(\frac{\partial L}{\partial f}\eta(x,y)+\frac{\partial L}{\partial f_x}\eta_x(x,y)+\frac{\partial L}{\partial f_y}\eta_y(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

对后面两项进行分部积分，可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\partial L}{\partial f_x})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\frac{\partial L}{\partial f_y})=0$$

欧拉-拉格朗日方程的简单应用：两点间直线最短

坐标轴上点(x_1,y_1)到点(x_2,y_2)之间的距离为：

$$S=\int\mathrm{d}L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

直接求解其欧拉-拉格朗日方程，可以得到$y'=\mathrm{const}$，y的导数为一个常数，就说明是一条直线。

欧拉-拉格朗日方程在物理学中的应用

欧拉-拉格朗日方程在物理学上的应用主要体现在建立了**理论力学**。理论力学是现代物理学的基石，它的思想对物理学的产生了深远的影响。

理论力学主要包含两个等价的理论，分别是**拉格朗日力学**和**哈密顿力学**，这两个理论可以通过**勒让德变换**连接，这里我们主要讨论的是拉格朗日力学。

在引出拉格朗日力学之前，我们先回顾一下经典牛顿力学，主要的公式就是牛顿第二定律：

$$F=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

仔细观察这个式子，可以发现，跟欧拉-拉格朗日方程式十分相似的，在这里，我们重新写出欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}})$$

这里将之前的自变量自变量做了一些修改，$\dot{}$表示对时间的微分，那么为了将欧拉-拉格朗日方程与

很容易得到：$L = E_k-E_p$，其中E_k和E_p分别代表动能和势能，L称之为拉格朗日量。

所以，对比牛顿力学与拉格朗日力学：

- 牛顿力学关注于**力的分析**，力是改变物体运动状态的唯一原因。
- 拉格朗日力学关注于**拉格朗日量**，运动方程通过求解系统的拉格朗日量求解。

事实上，相对于牛顿力学的受力分析，拉格朗日力学的计算往往会更加简单，甚至于在拉格朗日力学的世界里，是**不需要力这个概念的。**

物理学守恒量

理论力学可以从本质上看清物理规律，在拉格朗日力学中，只关心拉格朗日量，这里我们写成$L(q,\dot{q},t)$，可以说，**拉格朗日量**就是物理规律，如果拉格朗日量修改了，那就可以说就物理修改了。

这里插一句题外话，**刘洋的科幻小说小说《2.013》**里描写了这么一个故事：在一个离我们很远的星球上，有这样一个勾股定理：在一个直角三角形中两个直角边的平方和 等于斜边的s次方，这个s就是俗称的勾股常数，约等于2.013。不经如此在这个星球上，所有的物理学规律都与我们熟知的不同，比如

- 引力与距离的2.07次方成反比
- 能量等于质量乘以光速的2.03次方

在上面的故事里，事实上就是拉格朗日量发生了变化。

回到我们的主题，现在的问题是：**我们如何能够知道物理规律，也就是拉格朗日量会不会改变？**，可怕的是，我们并不能知道，我们不能确定几万年前，万有引力是距离的平方反比还是立方反比，或者如小说里写的，是不是2.07次方反比。不过我们可以假设它不随时间变化，至少在现在可观测的时间内，物理规律还没有发生变换，也就是说拉格朗日量对时间的偏导为0

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\$$

当上面的式子满足的时候，我们可以得到一个非常重要的守恒量，也就是能量守恒，下面简单证明一下，首先写出L关于时间的全微分：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d} \dot{q}}{\mathrm{d} t}\\$$

利用欧拉-拉格朗日方程，可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d} \dot{q}}{\mathrm{d} t}\\ & =\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right) \end{aligned}\\$$

可以得到一个量$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}-L$，其对时间的导数为0。根据之前的计算，很容易得到$H = E_k+E_p$，也就是总能量。需要注意的是，以上的推导都是对于单质点的，对于更复杂的物理系统，也能推导出相似的东西，这里不过多展开。至此，可以证明，**时间的平移不变性可以推导出能量守恒。**

事实上在物理学中不变性往往能够推导出守恒量，下面列举几种：

- 时间平移不变性：能量守恒
- 空间平移不变性：动量守恒
- 空间转动不变性：角动量守恒
- 规范不变性：电荷守恒
- 反演不变性：宇称守恒

上一节的内容太过于理论化，在本节中我将介绍一下欧拉-拉格朗日方程在图像去噪中的运用，主要介绍的是利用全变分。

图像的全变分定义为$\text{TV}(u) = \iint |\bigtriangledown u|\mathrm{d}x\mathrm{d}y =\iint \sqrt{u_x^2+u_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

这个数值表示的是一个图像的平滑程度，通常，TV值越小，平滑度越高，可以想象，一张每个像素点值都相同的图像，即这张图像没有任何起伏，其全变分为0。为了对比，对比了8位的lena图和二值化之后的lena图的TV值，分别为7.56e5和1.63e6。可以很明显感觉到8位的图像平滑度更高。

很多真实图像是满足

模型，这里使用**拉格朗**

$$\text{min}\, J(u) = \iint \sqrt{u_x^2+u_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\lambda }{2}\iint (u-u_0)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\$$

求解这个其欧拉-拉格朗日方程，可以得到：

$$\begin{aligned} 0 =\lambda(u-u_0)-&\frac{\partial }{\partial x}[u_x(u_x^2+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}]-\frac{\partial }{\partial y}[u_y(u_x^2+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}]\\ =\lambda(u-u_0)-&\left\{u_{xx}(u_x^2+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}-u_x(u_xu_{xx}+u_yu_{yx})(u_x^2+u_y^2)^{-\frac{3}{2}}\right.\\ &\left.+u_{yy}(u_x^2+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}-u_y(u_xu_{xy}+u_yu_{yy})(u_x^2+u_y^2)^{-\frac{3}{2}}\right\}\\ =\lambda(u-u_0)-&(u_{xx}u_y^2-2u_xu_xu_{xy}+u_{yy}u_x^2)(u_x^2+u_y^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \\$$

当然上面那个式子可以写成更简洁的形式：

$$-\nabla\frac{\nabla u}{|\nabla u|}+\lambda(u-u_0) = 0\\$$

计算这个式子很很多的方法，这里不详细介绍了。最后看一下效果，这是matlab模拟的结果。所加噪声为**泊松噪声**，TV约束的\lambda是一个调节平滑度程度与和噪声图像差异的值，简单来说，这个值越大，最后的结果与噪声图像差异越小，适用于在噪声较小的情况下。我稍微对比了中值滤波方法，可以看出TV去噪效果是比较好的，在保留细节同时，有效去除了噪声。

编辑于 2020-10-10 16:47

拉格朗日力学 理论力学 图像处理

谈老师 作者
谢谢你的提醒，那是因为，我在计算的时候没有归一化，也就是说，8位的是0-255的，而二值化之后变成了0-1的。如果把二值变成0-255，TV值会变成1.63e6
2020-10-10 回复 2

Scorpio
请问”那么为了将欧拉-拉格朗日方程与牛二定律统一，需要“凑”一个函数L “，凑完之后是怎么容易得到L=动能-势能的呢？基础较差想不明白，能否告知计算过程？
10-11 回复 喜欢

小李永远在学习
你好，我想问下有代码吗😂
2022-03-29 回复 喜欢

学海无涯苦作舟
求问楼主，全变分除了去噪，图像复原还有什么应用吗？尤其是力学方面的。我看力学变分法用得多但是全变分没怎么看见。
😷
2022-03-23 回复 喜欢

若言
H为什么是总能量？
2021-03-02 回复 喜欢

知乎用户6O4sDY
你好，我想问一下u是什么啊，它刻画了图像的什么特征？我是纯数学的，不太理解。
2020-09-20 回复 喜欢

opticcss
就是圖像intensity
2022-01-02 回复 喜欢

HYQ
求问楼主 一开始的公式 后面的r和diag都是什么？
2020-08-02 回复 喜欢

谈老师 作者
我能说是乱码吗，知乎这个公式编辑有问题啊
2020-08-02 回复 喜欢

Quackquack
分步积分那里原函数是不是少了个η? \partial L/ \partial f' η? 还是说我搞错了
2020-07-11 回复 喜欢

谈老师 作者
嗯，我看了一下，是错了。谢谢你的指正，已修改。
2020-07-11 回复 喜欢

元澈
问一些可能比较低层次的问题。。。
第一个问题：欧拉-拉格朗日方程的证明部分，为什么从不定积分变成了积分区间为[x1,x2]的定积分了呢？
第二个问题：前面不是说\eta(x)为任意函数吗？为什么又说在区间两端，\eta的值为0呢？
2020-03-21 回复 喜欢

谈老师 作者
你这两个其实是一个问题，在讨论确定的物理问题的时候，两端都是要固定的，要给出起止位置才能讨论中间过程。比如考虑两点间什么线距离最短，肯定要先给出两个点的位置，所以是这两个位置的定积分，而且这两个点给定了，是不会变化的，所以在这两个点上微扰为0。
2020-03-22 回复 3

点击查看全部评论 >

写下你的评论...

科学与技术

分享一些数学和物理的原理和方法，希望能够帮助大家