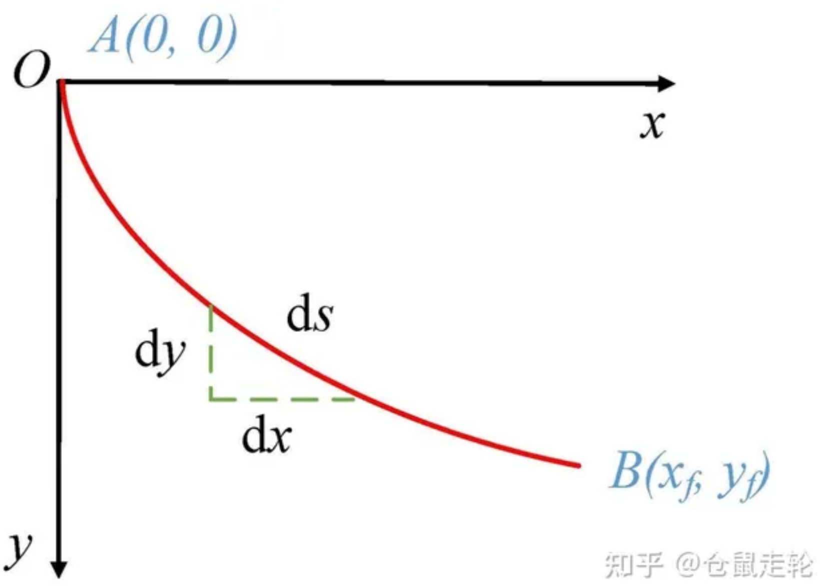
变分法简介

仓鼠走轮

学生

1. 起源

1696年约翰·伯努利提出最速降线问题：**设A和B是铅直平面上不在同一铅直线上的两点，在所有连接A和B的平面曲线中，求出一条曲线，使仅受重力作用且初速度为零的质点从A点到B点沿这条曲线运动时所需时间最短。**



最速降线示意图（图片来自网络）

我们知道，用微积分的方法，时间可以表示为：

$$t=\int_a^b \mathrm{d}t=\int_a^b \frac{\sqrt{\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}^2y}}{\sqrt{2gy}}$$

那么怎样选取函数，使这个积分最小？

2. 预备定理

考虑一个积分：

$$\int_a^b M(x)h\,(x)\mathrm{d}x=0$$

其中 $h(x)$ 为任意函数，满足 $h\,(a)=h\,(b)=0$。若该等式恒成立，则 $M(x)$ 在[a,b]上为零函数，证明如下：

令 $h\,(x)=-M\,(x)\,(x-a)\,(x-b)$

则 $\int_a^b M(x)h\,(x)\mathrm{d}x=\int_a^b -M^2(x)\,(x-a)\,(x-b)\mathrm{d}x$

因为 $-\,(x-a)\,(x-b)>0$，而 $M^2(x)\geq 0$，则 $M^2(x)\equiv 0$

同理，考虑积分 $\int_a^b M(x)\eta\,(x)+N(x)\xi\,(x)\mathrm{d}x=0$，则有 $M^2(x)+N^2(x)\equiv 0$。

3. 变分法基本方法

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API | Printed with Pdfcrowd.com

令 $Y(x) = y(x) + \epsilon\eta(x)$，其中 $y(x)$ 表示真实的路径，$Y(x)$ 表示所有可能的路径，ϵ 是一个常数，$\eta(x)$ 表示任意的一个非常小的连续扰动函数，但要满足 $\eta(a) = \eta(b) = 0$。

4. Euler方程的推导

考虑一个积分

$I(\epsilon) = T(Y) = \int_{x1}^{x2} F(x, Y, Y')\,\mathrm{d}x = \int_{x1}^{x2} F(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')\,\mathrm{d}x$，当 $\epsilon = 0$，所有的路径收敛到真实的路径，则积分的结果出现极值，该点的微分为零。

即 $\frac{\mathrm{d}I(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0$

令 $U = y + \epsilon\eta$； $V = y' + \epsilon\eta'$

则 $\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial \epsilon} = \frac{\partial F}{\partial U}\eta + \frac{\partial F}{\partial V}\eta'$

当 $\epsilon = 0$，U 和 V 分别收敛到 y 与 y'，

那么 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\epsilon} = \int_{x1}^{x2} \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\mathrm{d}x = \int_{x1}^{x2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta|_{x1}^{x2}$

因为 $\frac{\partial F}{\partial y'}\eta|_{x1}^{x2} = 0$

所以有 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \equiv 0$

这就是变分法中的**Euler方程的第一种形式**。

我们让 F 对 x 求全导数：

$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'}$

考虑 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$

则 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$

于是 $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \equiv 0$

这就是**Euler方程的第二种形式**。

5. 最速降线问题与摆线等时性

回到最初的问题，质点所用的时间为 $\int_{x_a}^{x_b}\frac{\sqrt{\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}^2y}}{\sqrt{2gy}} = \int_{x_a}^{x_b}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$

$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$

根据第二种形式，简化后有：

$y(1 + y'^2) = k$ （k 为常数）

令 $y = \frac{k}{2}(1 - coos\theta)$，则 $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dx}} = \frac{k}{2}sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$，带入整理得：

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com

$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{k(1-cos\theta)}$ ，分离变量积分得：

$x=\frac{k}{2}(\theta-sin\theta)+x_0$ ，若坐标轴建立在原点，则 $x_0=0$于是路径的参数方程为：

$$\begin{cases} x=\frac{k}{2}(\theta-sin\theta) \\ y=\frac{k}{2}(1-coos\theta) \end{cases}$$

可以看出路径方程是一条摆线。

摆线的等时性：**若一质点从此段摆线任意点出发，在重力作用下沿摆线向下滑，则此质点到达最低点C（$\theta=\pi$）所需的时间与出发点的位置无关。**

时间 $t=\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{a\sqrt{2(1-cos\theta)}}{\sqrt{2ga(cos\theta_0-cos\theta)}}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{sin\frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\mathrm{d}\theta$

令 $u=\frac{cos\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta_0}{2}}$ ，带入积分得：

$t=2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=2\sqrt{\frac{a}{g}}arcsinu|_0^1=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$，它是一个与初始位置无关的常数，于是我们证明了摆线的等时性。

6. 多变量的变分问题

$I(\epsilon)=T(G_1(x),\ldots,G_n(x))=$
$\int_{x1}^{x2}F(x,G_1(x),\ldots,G_n(x),G_1'(x),\ldots,G_n'(x))\,\mathrm{d}x$

其中 $G_i(x)=g_i(x)+\epsilon\eta_i(x)$

$\frac{\mathrm{d}I(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=0}=0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial g_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial g_i'}\right)\equiv 0$

7. 有条件的变分问题

在两个变量的变分法中，若有 $H\left(g_1\left(x\right),g_2\left(x\right),x\right)=0$，则不能说明上面推得的关系，

8. 多重积分的变分问题

$I(\epsilon)=\iint_D F\left(x_1,x_2,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$

$\frac{\mathrm{d}I(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}=\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial y_{x_1}'}\frac{\partial y_{x_1}'}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial y_{x_2}'}\frac{\partial y_{x_2}'}{\partial\epsilon}\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$

根据格林公式，$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)=\int_c P\mathrm{d}x_2-Q\mathrm{d}x_1$

令 $P=\phi A,Q=\phi B$，其中 ϕ、A、B 均是 x_1、x_2 的函数，则

$\iint_D A\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+B\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=-\iint_D\left(\frac{\partial A}{\partial x_1}+\frac{\partial B}{\partial x_2}\right)\phi\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+\int_c(A\mathrm{d}x_1-B\mathrm{d}x_2)\,\phi$

再令 $\phi=\frac{\partial y}{\partial\epsilon},A=\frac{\partial F}{\partial y_{x_1}'},B=\frac{\partial F}{\partial y_{x_2}'}$ ，当 $\epsilon=0$,上式线积分为0，于是

$\frac{\mathrm{d}I(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}=\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial x_1}-\frac{\partial B}{\partial x_2}\right]\phi\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=0$，则

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial x_1}-\frac{\partial B}{\partial x_2}=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y_{x_1}\partial_{x_1}}-\frac{\partial^2 F}{\partial y_{x_2}\partial_{x_2}}=0$$

编辑于 2022-11-15 00:46 • IP 属地重庆

变分法 最速降线问题

▲ 赞同 2 ▼ 添加评论 分享 喜欢 收藏 申请转载 ···

写下你的评论...

还没有评论，发表第一个评论吧

推荐阅读

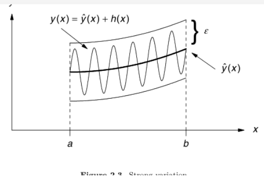
变分法基本问题

变分法的基本概念函数的变分如图所示，在 [a,b] 区间上定义了一个函数，其曲线形状如绿色线条，现在考虑对这条曲线进行一定程度的扰动，变为了一条虚线。于是这两条曲线在区间 [a,b] 两个端…

Celer... 发表于重温高等数...

变分法(1)

inver... 发表于某数学的i...



变分法笔记(1)——古典变分问题的例子

Fiddi... 发表于Fiddi...

变分法的应用和变分问题求解方法（略去证明，只术不道，极…

引子 源头问题与当今应用 变分法基本原理 变分问题求解方法1.引子过去遇到的问题——求函数极值，但有时我们需要对自变量也是函数的特殊函数求极值。 这种特殊函数即“函数的函数”，称为泛…

微尘-黄含... 发表于数学学习，...

Convert web pages and HTML files to PDF in your applications with the Pdfcrowd HTML to PDF API Printed with Pdfcrowd.com