

从欧拉-拉格朗日方程到理论力学和全变分约束降噪

谈老师
中国科学院大学 光学博士

2019 科学季 >

写在开始

首先需要明确一下函数(function)与泛函(functional)的区别, 这两个本质都是一种映射, 其主要区别在于:

函数: 数到数的映射 $x \rightarrow f(x)$

泛函: 函数到数的映射 $f(x) \rightarrow \mathbb{R}$

所以也可以说泛函是函数的函数。

欧拉-拉格朗日方程

问题的提出:

已知一个函数 $f(x)$, 当泛函 $A = \int L(f(x), f'(x), x) dx$ 取极值时, 求 $f(x)$

欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange)方程:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) = 0$$

当 $f(x)$ 满足欧拉-拉格朗日方程时, 泛函取极值。

证明

欧拉-拉格朗日的证明方法有很多种, 这里给出一种变分的方法去证明。假设已经找到函数 $f_0(x)$ 使得泛函取得极小值, 那个存在一个任意函数 $\eta(x)$, 有:

$$\int L(f) dx = \int L(f_0(x) + \epsilon \eta(x)) dx \geq \int L(f_0(x)) dx$$

这种方法称之为**变分法**。其中 ϵ 足够小, 那么左边的泛函就可以写成关于 ϵ 的一个函数 $A(\epsilon)$, 当 $\epsilon = 0$ 时候, 关于 $f(x)$ 的泛函取极值, 有 $A'(\epsilon = 0) = 0$, 根据这个关系, 可以得到:

$$\begin{aligned} A'(\epsilon) &= \int \frac{dL(f, f', x)}{d\epsilon} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial f'} \frac{\partial f'}{\partial \epsilon} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta'(x) \right) dx \end{aligned}$$

对上式的第二项做一次分部积分:

$$\begin{aligned} A'(\epsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial f} \eta(x) dx + \eta \frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right)' \eta(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \right] \eta(x) dx \end{aligned}$$

注意到积分区域为 $[x_1, x_2]$, 在两端的位置 η 值为0。上式在 $\epsilon = 0$ 的情况下, 对任意的 $\eta(x)$ 都成



当函数的自变量为高维的时候，欧拉-拉格朗日方程将会发生什么样的变化呢。首先以二维为例，看结果会有什么不同。二维的泛函将会变成：

$$A = \int L(f(x,y), f_x(x,y), f_y(x,y), x, y) dx dy$$

其中 f_x 和 f_y 分别是函数 f 对自变量 x 和 y 的偏导。根据上面的证明，假设已经找到函数 $f_0(x,y)$ 使得泛函取得极值，存在一个任意函数 $\eta(x,y)$ ，有：

$$\int L(f) dx dy = \int L(f_0(x,y) + \epsilon \eta(x,y)) dx dy \geq \int L(f_0(x,y)) dx dy$$

对 ϵ 求导，有：

$$\begin{aligned} A'(\epsilon) &= \int \frac{dL(f, f_x, f_y, x, y)}{d\epsilon} dx dy \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial f_x} \frac{\partial f_x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial f_y} \frac{\partial f_y}{\partial \epsilon} \right) dx dy \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f} \eta(x,y) + \frac{\partial L}{\partial f_x} \eta_x(x,y) + \frac{\partial L}{\partial f_y} \eta_y(x,y) \right) dx dy \end{aligned}$$

对后面两项进行分部积分，可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f_x} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial L}{\partial f_y} \right) = 0$$

欧拉-拉格朗日方程的简单应用：两点间直线最短

坐标轴上点 (x_1, y_1) 到点 (x_2, y_2) 之间的距离为：

$$S = \int dL = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

直接求解其欧拉-拉格朗日方程，可以得到 $y' = \text{const}$ ， y 的导数为一个常数，就说明是一条直线。

欧拉-拉格朗日方程在物理学中的应用

欧拉-拉格朗日方程在物理学上的应用主要体现在建立了**理论力学**。理论力学是现代物理学的基石，它的思想对物理学的产生了深远的影响。

理论力学主要包含两个等价的理论，分别是**拉格朗日力学**和**哈密顿力学**，这两个理论可以通过**勒让德变换**连接，这里我们主要讨论的是拉格朗日力学。

在引出拉格朗日力学之前，我们先回顾一下经典牛顿力学，主要的公式就是牛顿第二定律：

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

仔细观察这个式子，可以发现，跟欧拉-拉格朗日方程式十分相似的，在这里，我们重新写出欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

这里将之前的自变量自变量做了些修改，表示对时间的微分，那么为了将欧拉-拉格朗日方程与

很容易得到： $L = E_k - E_p$ ，其中 E_k 和 E_p 分别代表动能和势能， L 称之为拉格朗日量。

所以，对比牛顿力学与拉格朗日力学：

- 牛顿力学关注于**力的分析**，力是改变物体运动状态的唯一原因。
- 拉格朗日力学关注于**拉格朗日量**，运动方程通过求解系统的拉格朗日量求解。

事实上，相对于牛顿力学的受力分析，拉格朗日力学的计算往往会更加简单，甚至于在拉格朗日力学的世界里，是**不需要力这个概念的**。

物理学守恒量

理论力学可以从本质上看清物理规律，在拉格朗日力学中，只关心拉格朗日量，这里我们写成 $L(q, \dot{q}, t)$ ，可以说，**拉格朗日量**就是物理规律，如果拉格朗日量修改了，那就可以说就物理修改了。

这里插一句题外话，**刘洋的科幻小说小说《2.013》**里描写了这么一个故事：在一个离我们很远的星球上，有这样一个勾股定理：在一个直角三角形中两个直角边的平方和 等于斜边的s次方，这个s就是俗称的勾股常数，约等于2.013。不经如此在这个星球上，所有的物理学规律都与我们熟知的不同，比如

- 引力与距离的2.07次方成反比
- 能量等于质量乘以光速的2.03次方

在上面的故事里，事实上就是拉格朗日量发生了变化。

回到我们的主题，现在的问题是：**我们如何能够知道物理规律，也就是拉格朗日量会不会改变？**，可怕的是，我们并不能知道，我们不能确定几万年前，万有引力是距离的平方反比还是立方反比，或者如小说里写的，是不是2.07次方反比。不过我们可以假设它不随时间变化，至少在现在可观测的时间内，物理规律还没有发生变换，也就是说拉格朗日量对时间的偏导为0

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

当上面的式子满足的时候，我们可以得到一个非常重要的守恒量，也就是能量守恒，下面简单证明一下，首先写出 L 关于时间的全微分：

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

利用欧拉-拉格朗日方程，可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

可以得到一个量 $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$ ，其对时间的导数为0。根据之前的计算，很容易得到 $H = E_k + E_p$ ，也就是总能量。需要注意的是，以上的推导都是对于单质点的，对于更复杂的物理系统，也能推导出相似的东西，这里不过多展开。至此，可以证明，**时间的平移不变性可以推导出能量守恒**。

事实上在物理学中不变性往往能够推导出守恒量，下面列举几种：

- 时间平移不变性：能量守恒
- 空间平移不变性：动量守恒
- 空间转动不变性：角动量守恒
- 规范不变性：电荷守恒
- 反演不变性：宇称守恒

上一节的内容太过于理论化，在本节中我将介绍一下欧拉-拉格朗日方程在图像去噪中的运用，主要介绍的是利用全变分。

图像的全变分定义为 $\text{TV}(u) = \iint \bigtriangledown u \cdot \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

这个数值表示的是一个图像的平滑程度，通常，TV值越小，平滑度越高，可以想象，一张每个像素点值都相同的图像，即这张图像没有任何起伏，其全变分为0。为了对比，对比了8位的lena图和二值化之后的lena图的TV值，分别为7.56e5和1.63e6。可以很明显感觉到8位的图像平滑度更高。

很多真实图像是满足
模型，这里使用拉格朗

- 

谈老师 作者

谢谢你的提醒，那是因为，我在计算的时候没有归一化，也就是说，8位的是0-255的，而二值化之后变成了0-1的。如果把二值变成0-255，TV值会变成1.63e6

2020-10-10

回复 喜欢 2
- 

Scorpio

请问“那么为了将欧拉-拉格朗日方程与牛二定律统一，需要“凑”一个函数L“，凑完之后是怎么容易得到L=动能-势能的呢？基础较差想不明白，能否告知计算过程？

10-11

回复 喜欢
- 

小李永远在学习

你好，我想问下有代码吗

2022-03-29

回复 喜欢
- 

学海无涯苦作舟

求问楼主，全变分除了去噪，图像复原还有什么应用吗？尤其是力学方面的。我看力学变分法用得很多但是全变分没怎么看见。

2022-03-23

回复 喜欢
- 

若言

H为什么是总能量？

2021-03-02

回复 喜欢
- 

知乎用户604sDY

你好，我想问一下u是什么啊，它刻画了图像的什么特征？我是纯数学的，不太理解。

2020-09-20

回复 喜欢
- 

opticcss

就是图像intensity

2022-01-02

回复 喜欢
- 

HYQ

求问楼主 一开始的公式 后面的r和diag都是什么？

2020-08-02

回复 喜欢
- 

谈老师 作者

我能说是乱码吗，知乎这个公式编辑有问题啊

2020-08-02

回复 喜欢
- 

Quackquack

分步积分那里原函数是不是少了个 η ? $\partial L / \partial f' \eta$? 还是说我搞错了

2020-07-11

回复 喜欢
- 

谈老师 作者

嗯，我看了一下，是错了。谢谢你的指正，已修改。

2020-07-11

回复 喜欢
- 

元澈

问一些可能比较低层次的问题。。。第一个问题：欧拉-拉格朗日方程的证明部分，为什么从不定积分变成了积分区间为 $[x_1, x_2]$ 的定积分了呢？第二个问题：前面不是说 $\eta(x)$ 为任意函数吗？为什么又说在区间两端， η 的值为0呢？

2020-03-21

回复 喜欢
- 

谈老师 作者

你这两个其实是一个问题，在讨论确定的物理问题的时候，两端都是要固定的，要给出起止位置才能讨论中间过程。比如考虑两点间什么线距离最短，肯定要先给出两个点的位置，所以是这两个位置的定积分，而且这两个点给定了，是不会变化的，所以在这两个点上微扰为0。

2020-03-22

回复 喜欢 3

点击查看全部评论 >

写下你的评论...



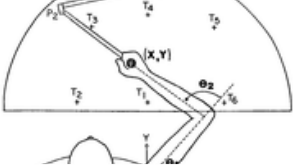
科学与技术
分享一些数学和物理的原理和方法，希望能够帮助大家

推荐阅读



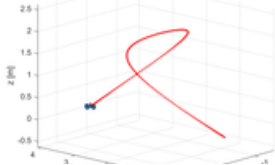
王桑的分析力学笔记(1)欧拉-拉格朗日方程

24k2



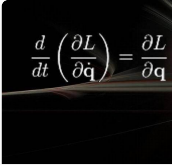
从泛函到无人机控制[2]—欧拉-拉格朗日方程

最爱麦丽素 发表于麦丽素的专...



从泛函到无人机控制[1]—欧拉-拉格朗日方程

最爱麦丽素 发表于麦丽素的专...



理论力学：拉格朗日方程

寒色鸽鸽