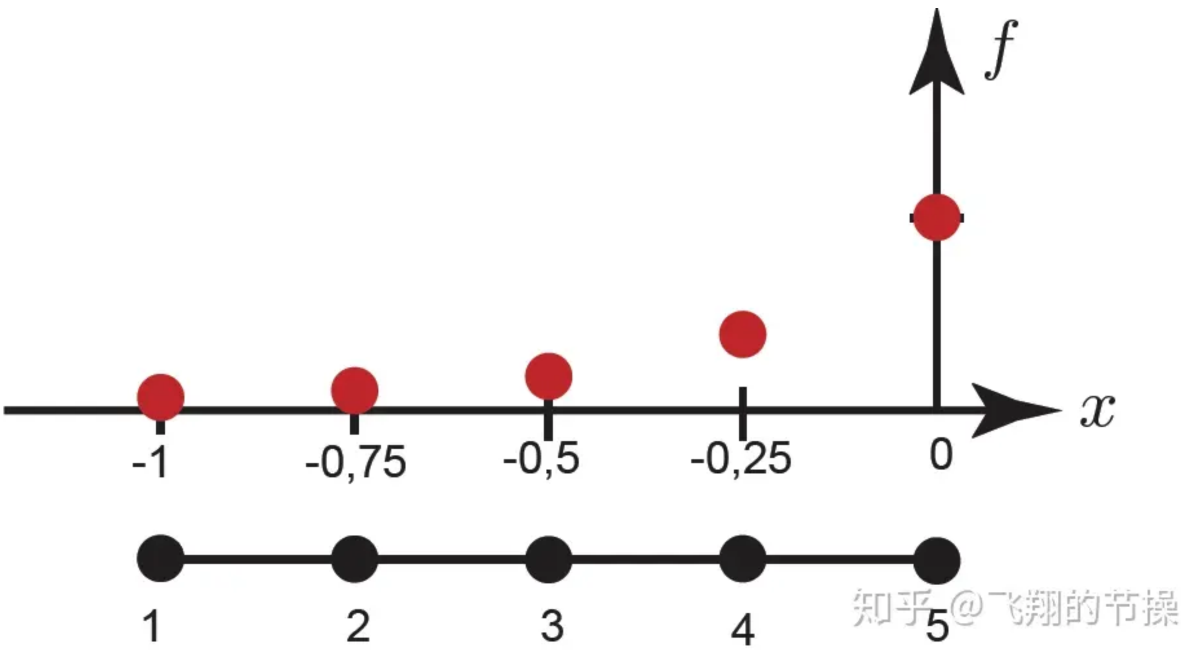
有限元超精简入门教程

我在网上搜了一下，发现好像讲有限元入门的一来就是什么“最小势能原理”，我觉得很恶心，于是想自己写一个精简教程。需要一点微积分和线性代数的知识。具体可以参考书籍。

有限元方法是计算机数值计算偏微分方程的一种普遍方法。

这里有一个简单偏微分方程： $f(x)=\frac{\partial f}{\partial x}, x\in[-1,0]$ ，已知初始条件： $f(0)=1$

为了求解这个偏微分方程，可以将该函数离散为若干个节点，如下图将该函数离散为了5个节点和四个单元。



因此除去初始条件，得到了4个未知的节点：

$f(x_1)=f'(x_1)$

$f(x_2)=f'(x_2)$

$f(x_3)=f'(x_3)$

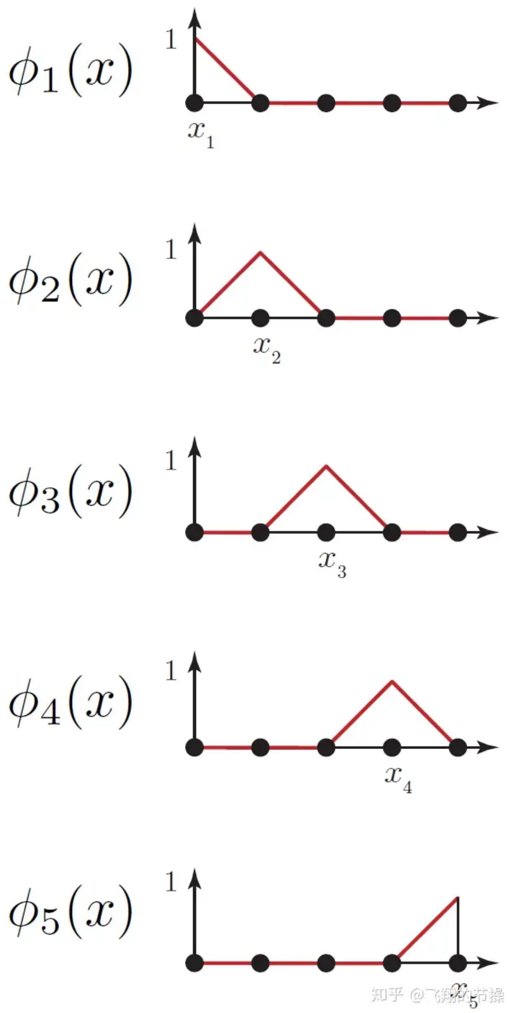
$f(x_4)=f'(x_4)$

$f(x_5)=f'(x_5)=1$

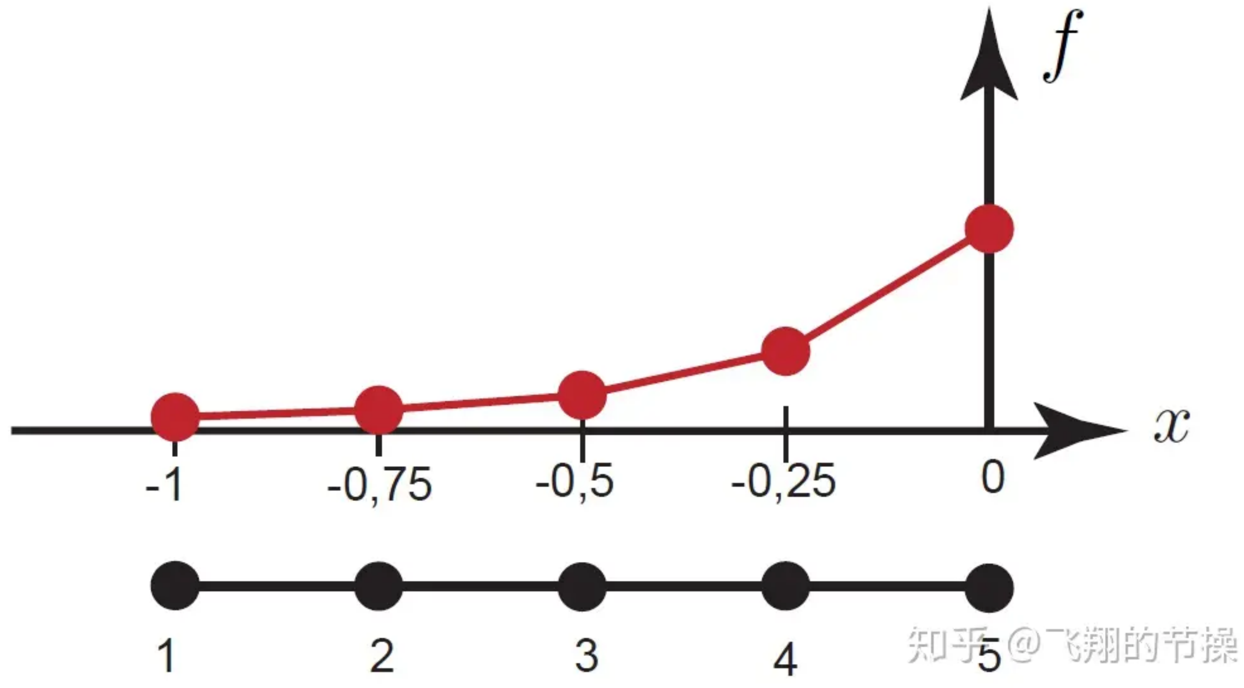
将这五个点用线链接起来，得到一个连续的函数图像，利用该连续图像来求解函数的偏导数。
那么如何将这五个点链接起来呢？

一，插值多项式

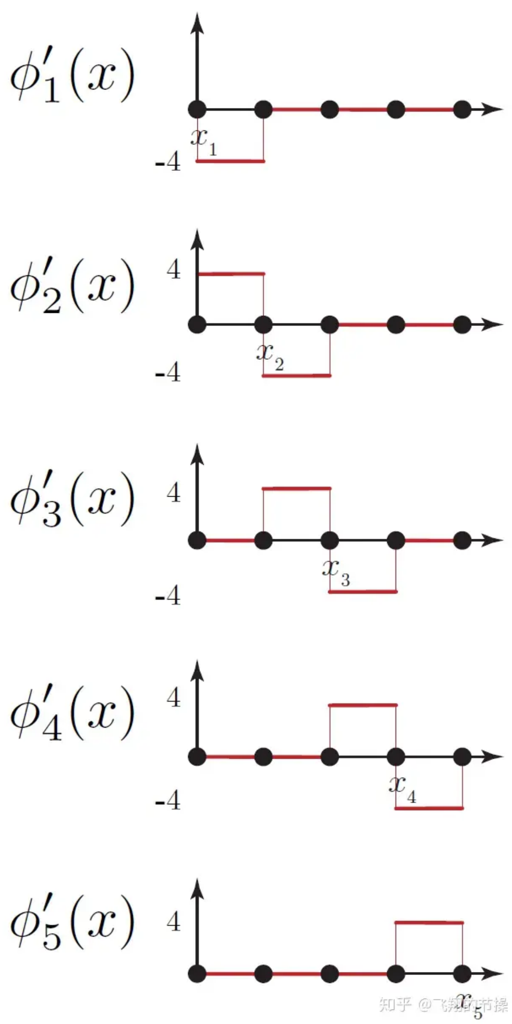
对于以上有五个节点的函数 f ，可以建立五个如图的插值函数：

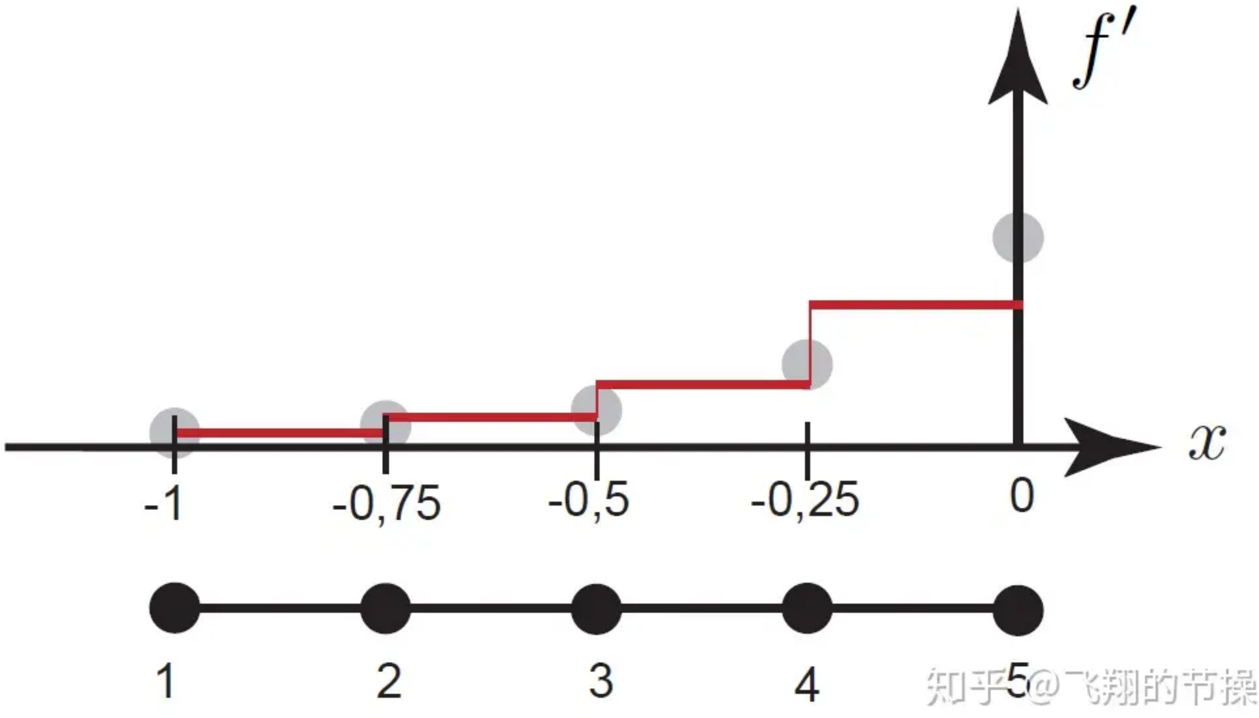


由此可以得到一个函数 f 的近似函数： $f(x) \approx \sum_{k=1}^{N} f_k \phi_k(x)$ 其中， f_k 是第 k 个节点的函数值，当然，此时的 f_k 是作为未知量的存在，在这个新的近似函数中， $\phi_k(x)$ 则是完全已知的函数。由此可以得到链接节点后的函数图像：



由于 $\phi_k(x)$ 是已知的，并且 f_k 是常数，因此对近似函数求导： $f'(x) \approx \sum_{k=1}^{n} f_k \phi'_k(x)$ 可以得到新的导数图像：





但是此时，四个未知量，还是无法求解，怎么办呢？

二，变分法与偏微分方程的弱变形

变分原理，起源于上古时期提出的问题，一个小球在重力作用下从A点滑落到B点，AB路径是什么曲线时，小球滑落的用时最短。这里不展开赘述，具体可以翻看分析力学等书籍。

提问：有没有一个函数 $g(x)$ ，使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某个确定的区间一致？

强形式，即是 $f(x) = g(x), \forall x \in \Omega$ ，两个函数点对点一致。

那么弱形式，即是两个函数的卷积相等： $\int_\Omega w(x)f(x)d\Omega = \int_\Omega w(x)g(x)d\Omega, \forall w(x)$

$w(x)$ 是一个测试函数，它可以是任意函数。但是根据变分原理，函数的边界值为0.

接着上面的例子： $f(x) = f'(x)$

移项并乘以测试函数： $w(x)(f(x) - f'(x)) = 0$

积分： $\int_{-1}^{0} w(x)(f(x) - f'(x))dx = 0$

而它与强形式等价的条件，则是 $\forall w(x)$

别忘了函数 f 和它的导数 f' 的插值近似，将其带入上面的积分形式：

$$\int_{-1}^{0} w(x)(f_1\phi_1(x) + f_2\phi_2(x) + \ldots + f_5\phi_5(x) - f_1\phi_1'(x) - f_2\phi_2'(x) - \ldots - f_5\phi_5'(x))dx = 0$$

$w(x)$ 可以是任意函数，但是为了简便，这里用 $\phi_i(x)$ 替换 $w(x)$ (Galerkin法)

也就是 $\int_{-1}^{0} \phi_i(x)(\sum_{k=1}^{5} f_k\phi_k(x) - \sum_{k=1}^{5} f_k\phi_k'(x))dx = 0$

不要忘了上面的积分中，包含了一个已知节点，和四个未知节点。接下来分离已知量和未知量：

$$\int_{-1}^{0} \phi_i(x)(\sum_{k=1}^{4} f_k\phi_k(x) - \sum_{k=1}^{4} f_k\phi_k'(x))dx = -f_5\int_{-1}^{0} \phi_i(x)(\phi_5(x) - \phi_5'(x))dx$$

已知边界要抽离到right hand side

由此我们得到了一个方程。

但是四个未知量至少需要四个方程才能解，所以还需要遍历未知节点的 $\phi_i(x)$ ，得到一个线性方程组：

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{0}\phi_1(x)(\phi_1(x)-\phi_1'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_1(x)(\phi_2(x)-\phi_2'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_1(x)(\phi_3(x)-\phi_3'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_1(x)(\phi_4(x)-\phi_4'(x))dx \\ \int_{-1}^{0}\phi_2(x)(\phi_1(x)-\phi_1'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_2(x)(\phi_2(x)-\phi_2'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_2(x)(\phi_3(x)-\phi_3'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_2(x)(\phi_4(x)-\phi_4'(x))dx \\ \int_{-1}^{0}\phi_3(x)(\phi_1(x)-\phi_1'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_3(x)(\phi_2(x)-\phi_2'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_3(x)(\phi_3(x)-\phi_3'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_3(x)(\phi_4(x)-\phi_4'(x))dx \\ \int_{-1}^{0}\phi_4(x)(\phi_1(x)-\phi_1'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_4(x)(\phi_2(x)-\phi_2'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_4(x)(\phi_3(x)-\phi_3'(x))dx & \int_{-1}^{0}\phi_4(x)(\phi_4(x)-\phi_4'(x))dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_5\int_{-1}^{0}\phi_1(x)(\phi_5(x)-\phi_5'(x))dx \\ -f_5\int_{-1}^{0}\phi_2(x)(\phi_5(x)-\phi_5'(x))dx \\ -f_5\int_{-1}^{0}\phi_3(x)(\phi_5(x)-\phi_5'(x))dx \\ -f_5\int_{-1}^{0}\phi_4(x)(\phi_5(x)-\phi_5'(x))dx \end{bmatrix}$$

如此，便可通过计算机得到全部的四个节点的值。

三，热传导模型

对于一个一维热传导微分方程： $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, x \in [0, L]$ ，它的两端边界的温度已知，并且初始时刻所有节点温度已知，因此未知量为除初始时刻外时间的中间节点。

按照上面的套路，首先用插值函数重建一个近似函数： $T(x,t) \simeq \sum_{k=1}^{N} T_k(x,t)\phi_k(x)$

由于是线性插值，所以在一个元素内， $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0$

对中间节点进行强弱转换： $\int_{0}^{L}(\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})\phi_i(x)dx = 0$

对二阶微分项降阶： $\int_0^L \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\phi_i(x)dx = \frac{\partial T}{\partial x}\phi_i(x)\Big|_L^0 - \int_0^L \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}dx$

由于在中间的节点中， $\phi_i(0) = \phi_i(L) = 0$ (狄利克雷边界条件)

因此直接得到： $-\int_0^L \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\phi_i(x)dx = \int_0^L \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}dx$

将该二阶项带入强弱形式转换卷积方程，

得到： $\int_0^L (\frac{\partial T}{\partial t}\phi_i(x) + \lambda\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x})dx = 0, i = 2, 3, 4, \ldots, N-1$

代入插值后的近似函数 $T \simeq \sum_{k=1}^{N} T\phi_k(x)$

于是：

$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^L (\frac{\partial T_k(t)}{\partial t}\phi_k(x)\phi_i(x) + \lambda T_k(t)\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x})dx = 0, i = 2, 3, 4, \ldots, N-1$$

为了解出时间项，还需要用欧拉后向差分： $\frac{\partial T_k}{\partial t} \approx \frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t}$

$$\sum_{k=1}^{N}(\int_0^L \phi_k(x)\phi_i(x)dx)\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} + \lambda\sum_{k=1}^{N} T_k^{n+1}(\int_0^L \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x}dx) = 0$$

分离已知量和未知量：

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{N}(\int_0^L \phi_k(x)\phi_i(x)dx)T_k^{n+1} + \lambda\sum_{k=1}^{N} T_k^{n+1}(\int_0^L \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x}dx) = \sum_{k=1}^{N}(\int_0^L \phi_k(x)\phi_i(x)dx)T_k^n$$

由于插值函数是已知的，所以可以得到如下关系：

$$\int_0^L \phi_k(x)\phi_i(x)dx = \begin{cases} \frac{2\Delta x}{3} & i = k \\ \frac{\Delta x}{6} & |i-k| = 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$\int_0^L \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x}dx = \begin{cases} \frac{2}{\Delta x} & i = k \\ \frac{-1}{\Delta x} & |i-k| = 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

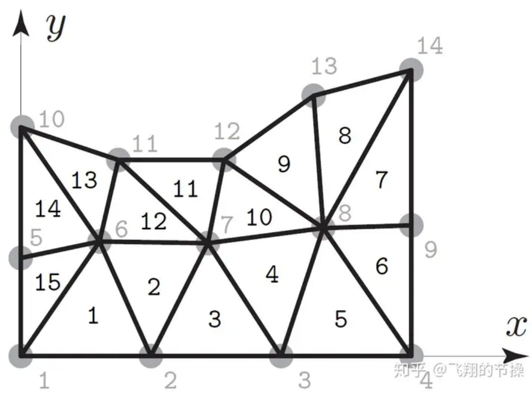
两边同时乘以 Δt ，同时除以 Δx 则得到完整的方程组：

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta x^2} & \frac{1}{6}-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6}-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} & \frac{2}{3}+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta x^2} & \frac{1}{6}-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{2}{3}+\frac{2\lambda\Delta t}{\Delta x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \dots \\ T_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_1^n+\frac{2}{3}T_2^n+\frac{1}{6}T_3^n-(\frac{1}{6}-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2})T_1^{n+1} \\ \frac{1}{6}T_2^n+\frac{2}{3}T_3^n+\frac{1}{6}T_4^n \\ \dots \\ \frac{1}{6}T_{N-2}^n+\frac{2}{3}T_{N-1}^n+\frac{1}{6}T_N^n-(\frac{1}{6}-\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2})T_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

可由计算机求解。

四，二维网格

例举一个二维网格：



该网格有15个单元，14个节点。并且一个单元包含3个节点，因此某一个单元可以由两两相邻的三个节点唯一标识。

比如第一单元格，三个节点分别为1，2，6节点。

还是以热传导模型举例，这次是二维平面的热传导微分方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}),(x,y)\in\Omega$$

经过一系列套路后，它的弱形式方程与一维的例子只有很小的差别：

$$\sum_{k=1}^{n_n}(\int_\Omega \phi_k(x,y)\phi_i(x,y)d\Omega)\frac{T_k^{n+1}-T_k^n}{\Delta t}+\lambda\sum_{k=1}^{n_n}T_k^{n+1}(\int_\Omega \nabla\phi_i(x,y)\cdot\nabla\phi_k(x,y)d\Omega)=0$$

其中 n_n 表示第 n 个节点。如果要表示单元，则用 n_e 。

一般来说需要三个边界条件，一个是初始状态，一个狄利克雷条件，外加一个诺伊曼条件，也就是某一边界的热量传入功率 Q 。

假设某一边界 D 上是绝热的，则诺伊曼条件为： $\hat{n}\cdot\nabla T\big|_{(x,y)\in\partial D}=Q$

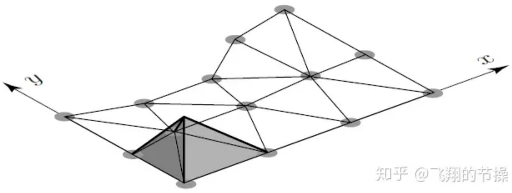
按照套路，首先用插值函数离散温度函数：

$$
\begin{aligned}
T(x,y,t) \approx \sum_{k=1}^{n_n} T_k(t)\phi_k(x,y) \\
= T_1(t)\phi_1(x,y) \\
+ T_2(t)\phi_2(x,y) \\
\cdots \\
+T_6(t)\phi_6(x,y) \\
\cdots \\
+T_{14}(t)\phi_{14}(x,y)
\end{aligned}
$$

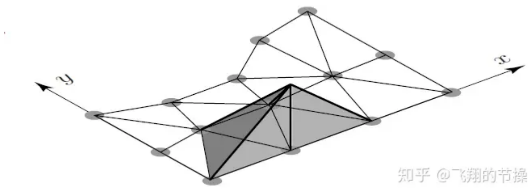
二维的lambda函数:
以节点1的lambda_1为例子
1.节点处的值为1: lambda_1(x_1, y_1) = 1

2.相连节点的函数值为0
lambda_1(x_2, y_2) = 0
lambda_1(x_5, y_5) = 0
lambda_1(x_6, y_6) = 0

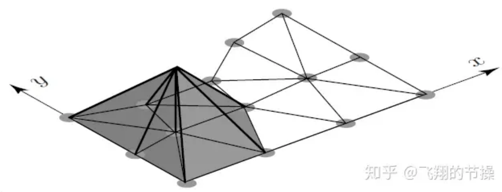
2.只有在与节点直接相连的区域不为0，例如节点1向上做长为1的直线，该直线的顶点与相连的节点(5, 6, 2)作直线相连,只有在该包含域的lambda不为



第一节点插值



第二节点插值



第六节点插值

二维弱形式可以写成矩阵的形式：

$$
\sum_{k=1}^{n_n}\left(\int_\Omega \phi_k(x,y)\phi_i(x,y)d\Omega\right)\frac{T_k^{n+1}-T_k^n}{\Delta t}+\lambda\sum_{k=1}^{n_n}T_k^{n+1}\left(\int_\Omega \nabla\phi_i(x,y)\cdot\nabla\phi_k(x,y)d\Omega\right)=0, i=1,2,3,\ldots,n_n
$$

$$
\frac{1}{\Delta t}M(d^{n+1}-d^n)+\lambda D d^{n+1}=0
$$

其中 $d^{n+1}=\{T_k^{n+1}\}_{k=1,n_n}$ ， $d^n=\{T_k^n\}_{k=1,n_n}$ ，为两个节点向量。上标代表差分的时间节点。

$M=\{M_{ik}\}_{i,k=1,n_n}$ 为质量矩阵， $D=\{D_{ik}\}_{i,k=1,n_n}$ 为热扩散矩阵。

$$M_{ik}=\int_\Omega \phi_k(x,y)\phi_i(x,y)d\Omega\ \ ,\quad D_{ik}=\int_\Omega \nabla\phi_i(x,y)\cdot\nabla\phi_k(x,y)d\Omega$$

再进一步简化为： $Kd^{n+1}=f$

$$K=\frac{1}{\Delta t}M+\lambda D\ \ ,\quad f=\frac{1}{\Delta t}Md^n$$

在给出的这个网格中， M 为一个 14×14 的矩阵。

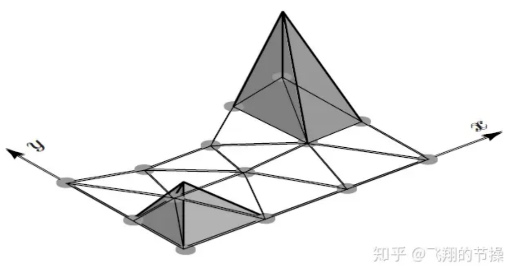
因此完整的给出该矩阵：

$$M=\begin{bmatrix} \int_\Omega \phi_1(x,y)\phi_1(x,y)d\Omega & \int_\Omega \phi_1(x,y)\phi_2(x,y)d\Omega & \dots & \int_\Omega \phi_1(x,y)\phi_{14}(x,y)d\Omega \\ \int_\Omega \phi_2(x,y)\phi_1(x,y)d\Omega & \int_\Omega \phi_2(x,y)\phi_2(x,y)d\Omega & \dots & \int_\Omega \phi_2(x,y)\phi_{14}(x,y)d\Omega \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_\Omega \phi_{14}(x,y)\phi_1(x,y)d\Omega & \int_\Omega \phi_{14}(x,y)\phi_2(x,y)d\Omega & \dots & \int_\Omega \phi_{14}(x,y)\phi_{14}(x,y)d\Omega \end{bmatrix}$$

但是这个矩阵直接放到计算机里算，它的时间复杂度为 $O(n_n\times n_n)$ ，而这其中有很多元素等于零，因此不能直接放到计算机里算，还需要挑选。

问题： $\int_\Omega \phi_1(x,y)\phi_{14}(x,y)d\Omega$ 应该等于多少？

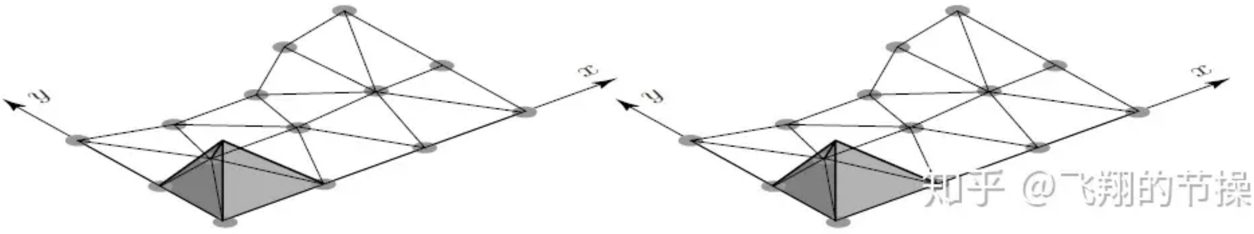
观察插值函数的图像：



第一节点和第十四节点插值函数图像

节点一和节点十四两个插值函数并没有重叠的区域，因此 $\int_\Omega \phi_1(x,y)\phi_{14}(x,y)d\Omega=0$

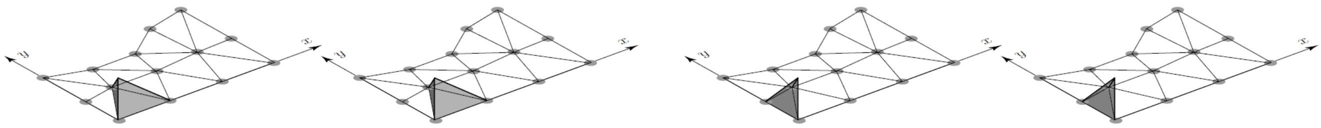
对于一个有重叠的元素： $M_{11}=\int_\Omega \phi_1(x,y)\phi_1(x,y)d\Omega$



第一节点的插值函数同时占据了第一单元和第十五单元

第一节点的插值函数同时占据了第一单元和第十五单元，因此可以将积分拆分为两个区域积分。

$$M_{11}=\int_{\Omega_1}\phi_1^1(x,y)\phi_1^1(x,y)d\Omega+\int_{\Omega_{15}}\phi_1^{15}(x,y)\phi_1^{15}(x,y)d\Omega$$

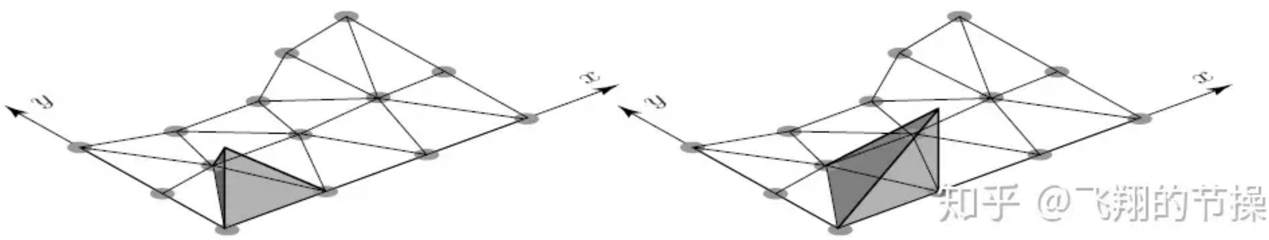


区域拆分

$\phi_i^e(x,y)$ 中， e 表示单元格的序号， i 表示构成单元格的节点序号。

同样的， $M_{12}=\int_{\Omega}\phi_1(x,y)\phi_2(x,y)d\Omega$ 也可以拆分，并保留两个插值函数重叠的部分。

$$M_{12}=\int_{\Omega_1}\phi_1^1(x,y)\phi_2^1(x,y)d\Omega$$

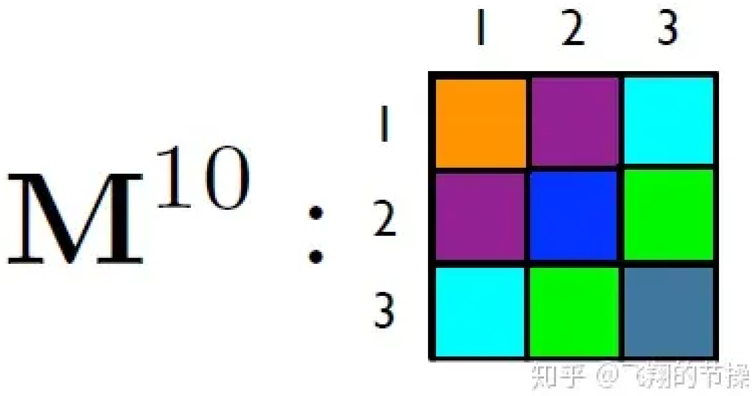


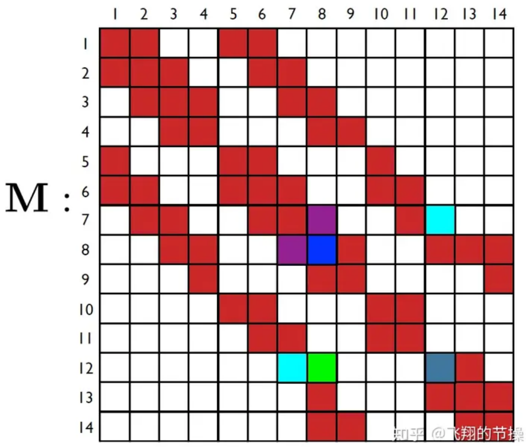
两个插值函数仅在第一单元格重叠

根据上面的原理，可以得到单一单元格的质量矩阵：

$M_{pq}^e=\int_{\Omega_e}\phi_p^e(x,y)\phi_q^e(x,y)d\Omega$ ，该矩阵只和某一单元格和它周围三个节点有关。

而总质量矩阵 M 则是由所有单元格的质量矩阵拼装起来的。

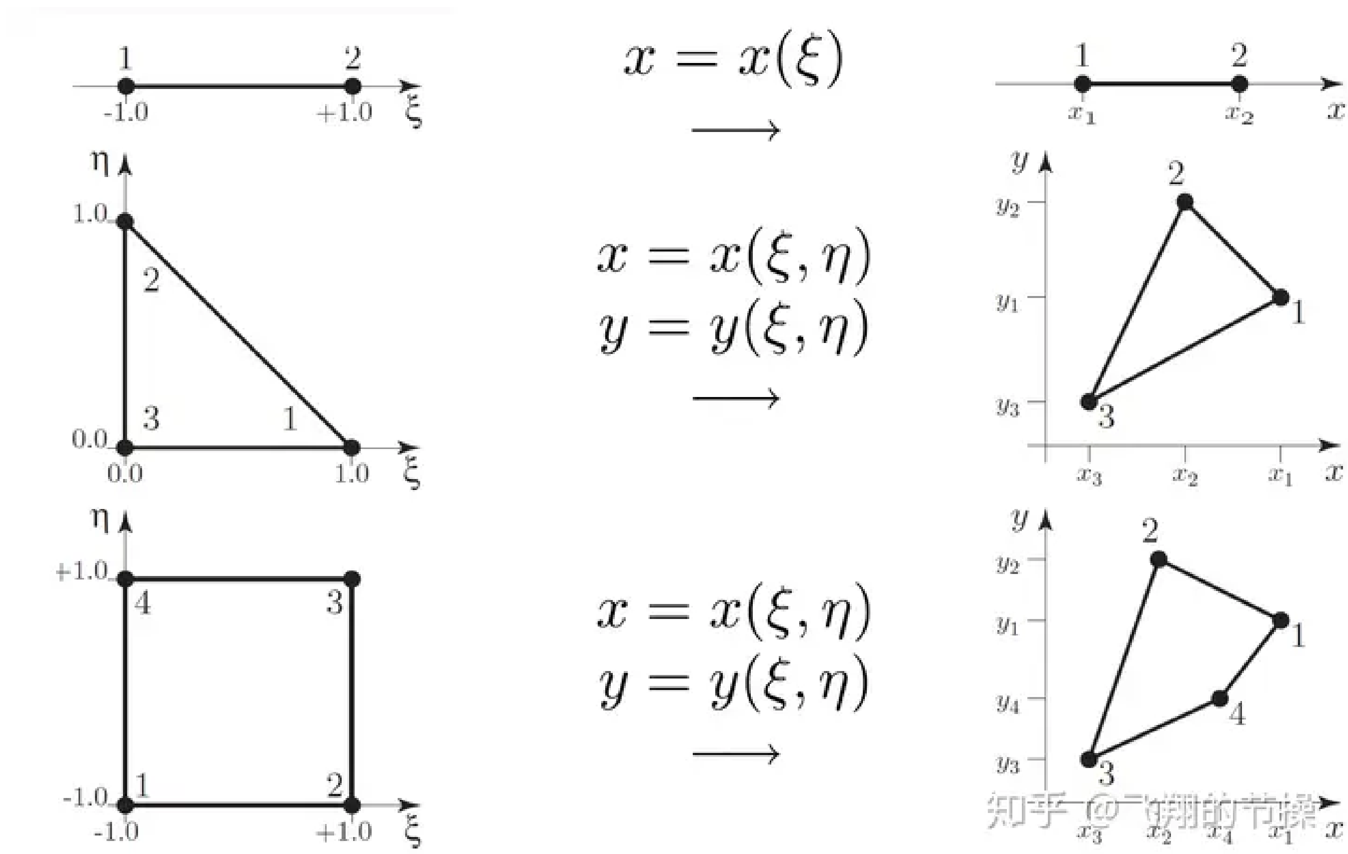




如上图，第十单元格由节点 $(7,8,12)$ 构成，因此拼装进总质量矩阵后需要把每个元素放入对应的点中，并和其他单元格的节点叠加。

五，等参单元

等参单元，就是设置一个简单的多边形单元格，并把它映射到模型的某个网格上。等参原理可以进一步加速卷积的运算速度。



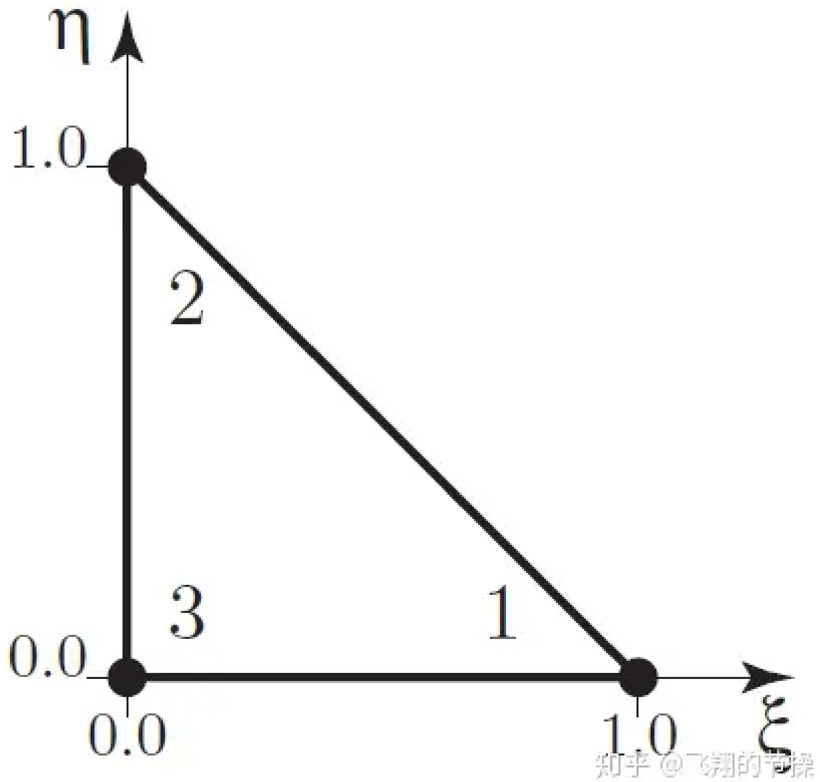
等参变量依然可以用插值函数离散化：

$x(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{n_{en}} x_k^e \phi_k^e(\xi,\eta)$ ，其中 n_{en} 表示 e 单元格的 n 节点。

线性插值等参单元：

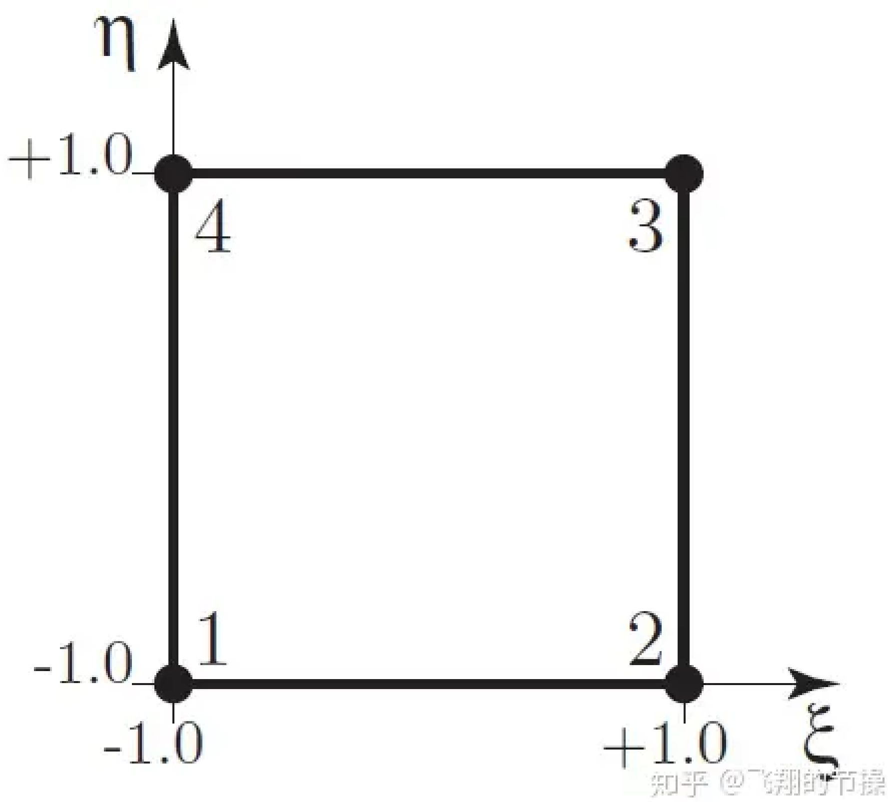
对于一维等参单元： $\phi_1^e(\xi)=\dfrac{1-\xi}{2}$ ， $\phi_2^e(\xi)=\dfrac{1+\xi}{2}$

二维三角形单元： $\phi_1^e(\xi,\eta)=\xi$ ， $\phi_2^e(\xi,\eta)=\eta$ ， $\phi_3^e(\xi,\eta)=1-\xi-\eta$



二维四边形单元： $\phi_1^e(\xi,\eta)=\dfrac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$ ， $\phi_2^e(\xi,\eta)=\dfrac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$

$\phi_3^e(\xi,\eta)=\dfrac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$ ， $\phi_1^e(\xi,\eta)=\dfrac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$



由于坐标系的映射，所以从模型坐标系转换到等参坐标系，需要利用雅可比矩阵（jacobi-matrix）。我们在小学三年级已经学过，图形在不同平面的投影面积即是雅可比矩阵的行列式的值。

$$M_{pq}^{e}=\int_{\Omega_e}\phi_p^e(x,y)\phi_q^e(x,y)d\Omega=\int_0^1\int_0^{1-\eta}\phi_p^e(\xi,\eta)\phi_q^e(\xi,\eta)\left|det(J^e)\right|d\xi d\eta$$

对于例子中的一维等参单元：

$$\left|det(J^e)\right|=\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|=\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=\frac{\Delta x}{2}$$

对于三角形等参单元：

$$\left|det(J^e)\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1-x_3 & x_2-x_3\\ y_1-y_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}$$

以例子中的第十模型网格和三角形等参单元举例，第十网格的三个节点 $(7,8,12)$ 对应等参单元的三个节点 $(1,2,3)$ 。那么第十网格的单元质量矩阵如下：

$$M_{pq}^{10}=\begin{bmatrix}\int_{\Omega_{10}}\phi_7^{10}(x,y)\phi_7^{10}(x,y)d\Omega & \int_{\Omega_{10}}\phi_7^{10}(x,y)\phi_8^{10}(x,y)d\Omega & \int_{\Omega_{10}}\phi_7^{10}(x,y)\phi_{12}^{10}(x,y)d\Omega\\ \int_{\Omega_{10}}\phi_8^{10}(x,y)\phi_7^{10}(x,y)d\Omega & \int_{\Omega_{10}}\phi_8^{10}(x,y)\phi_8^{10}(x,y)d\Omega & \int_{\Omega_{10}}\phi_8^{10}(x,y)\phi_{12}^{10}(x,y)d\Omega\\ \int_{\Omega_{10}}\phi_{12}^{10}(x,y)\phi_7^{10}(x,y)d\Omega & \int_{\Omega_{10}}\phi_{12}^{10}(x,y)\phi_8^{10}(x,y)d\Omega & \int_{\Omega_{10}}\phi_{12}^{10}(x,y)\phi_{12}^{10}(x,y)d\Omega\end{bmatrix}$$

那么它的第一行第一列的元素经过等参变换后：（ e 表示等参单元。）

$$\int_0^1\int_0^{1-\eta}\phi_1^e(\xi,\eta)\phi_1^e(\xi,\eta)\left|det(J^{10})\right|d\xi d\eta$$

第三行第二列：

$$\int_0^1\int_0^{1-\eta}\phi_3^e(\xi,\eta)\phi_2^e(\xi,\eta)\left|det(J^{10})\right|d\xi d\eta$$

对于热扩散矩阵 D ，则熟练运用微积分的链式法则：

$$\frac{\partial\phi_i(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\phi_i^e(\xi,\eta)}{\partial x}=\frac{\partial\phi_i^e}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i^e}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

写成向量的形式也就是：

$$\nabla_{x,y}\phi_i(x,y)=(J^e)^{-T}\nabla_{\xi,\eta}\phi_i^e(\xi,\eta)$$

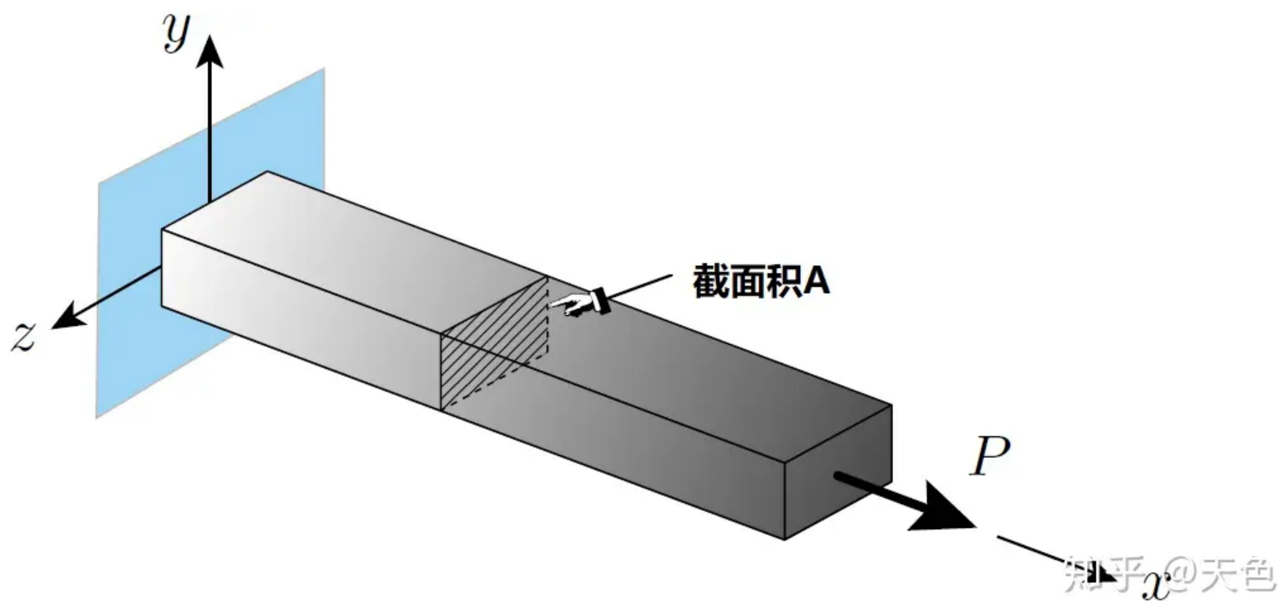
举个例子：

$$D_{87}^{10}=\int_{\Omega_{10}}\nabla\phi_8(x,y)\cdot\nabla\phi_7(x,y)d\Omega$$

它就等于

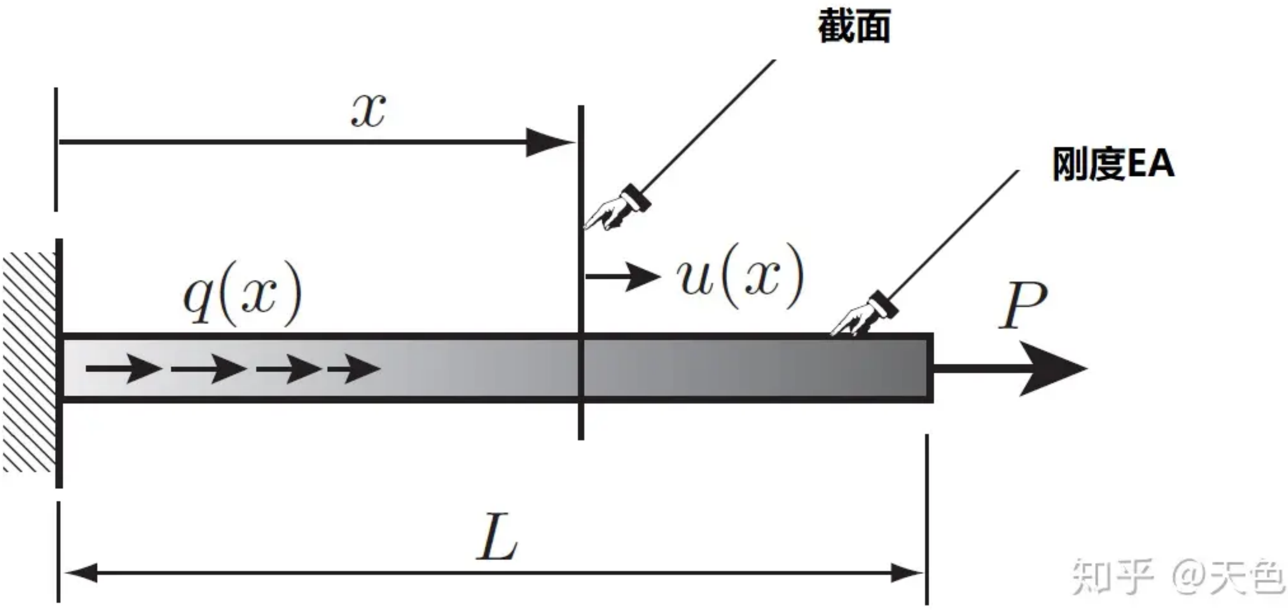
$$\int_0^1\int_0^{1-\eta}\left(\left(J^{10}\right)^{-T}\nabla_{\xi,\eta}\phi_2^e(\xi,\eta)\right)\cdot\left(\left(J^{10}\right)^{-T}\nabla_{\xi,\eta}\phi_1^e(\xi,\eta)\right)\left|det(J^{10})\right|d\xi d\eta$$

六，结构力学应用一，轴向拉伸杆



一个简单的例子

杆的端点收到一个 P 的拉力，弹性模量为 E ，杆长度为 L



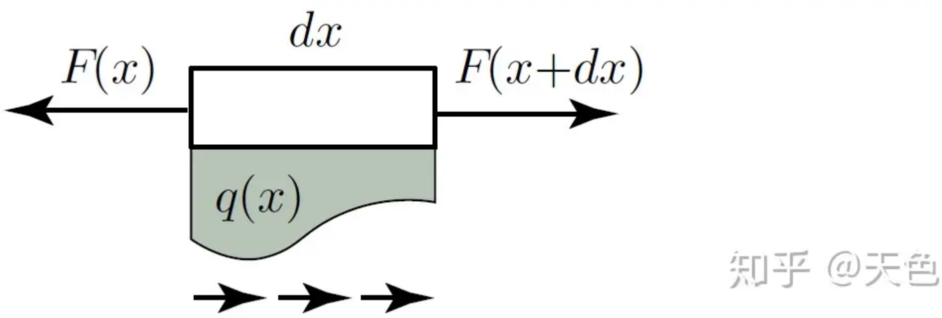
$q(x)$ 为轴向线载荷， $u(x)$ 为截面轴向位移

如此可以得到几个简单公式：

应变 $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ ，应力 $\sigma = E\varepsilon$ ，内力 $F = A\sigma = EA\varepsilon$

由静力平衡原理可以得到平衡方程： $F(x+dx) - F(x) + q(x)dx = 0$

移项得到一个微分方程： $\frac{dF(x)}{dx} = -q(x)$



胡克定理： $F(x) = EA\varepsilon(x)$

组合三个方程，形成一个新的微分方程： $\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) + q(x) = 0, x \in [x, L]$

在有限元的应用中，截面位移 $u(x)$ 是要求解的未知量，因此按照套路，首先要把它用插值函数离散化： $u(x) \approx \sum_{k=1}^{N} u_k \phi_i(x)$ ，再把线载荷也给离散化 $q(x) \approx \sum_{k=1}^{N} q_k \phi_k(x)$

狄利克雷边界条件： $u(x=0)=0 \rightarrow u_1=0$

诺伊曼条件： $F(L)=P \rightarrow F_N=P$

强弱转换： $\int_0^L\left(\phi_i(x) \frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right)+q(x) \phi_i(x)\right) dx=0$

给二阶微分项降阶： $\int_0^L \phi_i(x) \frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) dx=\left.\phi_i(x) EA \frac{du}{dx}\right|_0^L-\int_0^L EA \frac{du}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx$

由于 $F(L)=EA \varepsilon(L)=P$

因此 $\left.\phi_i(x) EA \frac{du}{dx}\right|_0^L=\phi_i(x) P$

整理得到最终的弱形式： $\int_0^L EA \frac{du}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx=\phi_i(x) P+\int_0^L q(x) \phi_i(x) dx$

$i=2,3, \ldots, N$

带入插值后的函数： $\sum_{k=1}^N \int_0^L EA u_k \frac{d\phi_k(x)}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx=\phi_i(x) P+\sum_{k=1}^N \int_0^L q_k \phi_k(x) \phi_i(x) dx$

到这里，就和之前的热传导模型很像了，转化为矩阵表达，该矩阵就叫刚度矩阵。

其实还有几个例子，比如桁架结构和板壳结构的应用，但是写到这里感觉人生索然无味，就这样吧。

编辑于 2021-02-28 · 著作权归作者所有