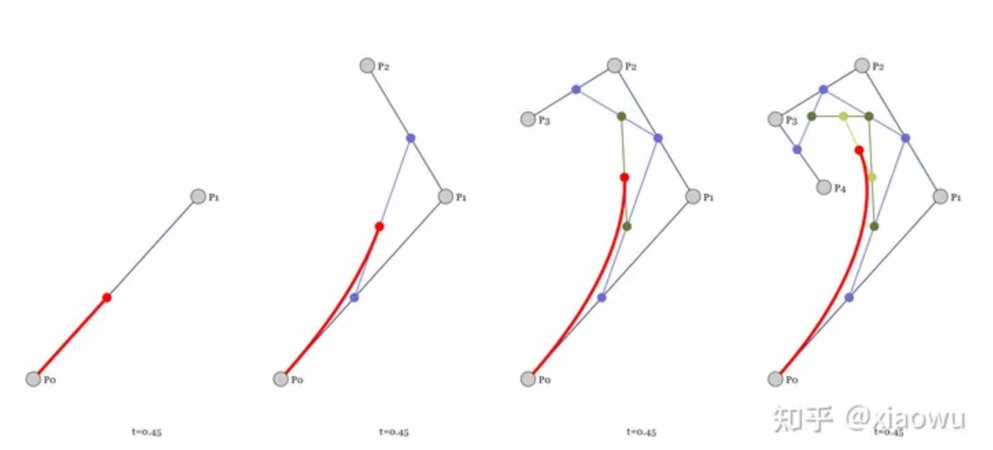
B-spline简介

小吴想读博
北京师范大学 统计学硕士

Bézier曲线

贝塞尔曲线(1962, Pierre Bézier) 完全由控制点决定其形状，n个控制点对应着$n-1$阶的贝塞尔曲线，根据t线性插值，通过递归实现。



- 一阶曲线 (2个控制点)：直线

$$B_1(t)=P=P_0+t(P_1-P_0)=(1-t)P_0+tP_1,\quad t\in[0,1].$$

- 二阶曲线 (3个控制点)：抛物线

$$\begin{aligned} P_0^1&=(1-t)P_0+tP_1,\quad P_1^1=(1-t)P_1+tP_2,\\ \therefore B_2(t)=P=P_0^2&=(1-t)P_0^1+tP_1^1\\ &=(1-t)[(1-t)P_0+tP_1]+t[(1-t)P_1+tP_2]\\ &=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1+t^2P_2. \end{aligned}$$

- n阶曲线 ($n+1$个控制点)
  递推公式：

$$P_i^k=\begin{cases} P_i, & k=0,\\ (1-t)P_i^{k-1}+tP_{i+1}^{k-1}, & k=1,2,\dots;i=0,1,\dots,n-k. \end{cases}$$

  一般化：

$$B_n(t)=P=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)P_i,\quad t\in[0,1],$$
$$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i},\quad i=0,1,\dots,n.$$

  可以看出，$B_n(t)$公式中的系数$B_{i,n}(t)$是$\left(t+(1-t)\right)^n$的二项式展开，系数和为1并且对称。
  注：
  - 贝塞尔曲线方程的阶数 = 控制点个数 - 1
  - 贝塞尔曲线经过初始点和末尾点
  - 贝塞尔曲线的导数仍然是贝塞尔曲线
  - 牵一发而动全身：只要移动其中任意一个点，整个曲线都会变化

B-spline

B样条 (1978, De Boor C) 是样条曲线的一种特殊表达形式，是B-样条基函数的线性组合，是贝塞尔曲线的一般化。

B样条基函数

两个重要参数：节点 (knots) 和次数 (degress)

- 定义域被节点细分，分成很多个结节区间
- 每个基函数局部非零
- 基函数的次数可以人为给定

假设B-样条的基函数的定义域为$[u_0,u_m]$，节点$u_0\le u_1\le\cdots\le u_m$，把区间$[u_0,u_m]$细分为$m$个子区间，其中$[u_i,u_{i+1})$是第$i$个节点区间 (knots span)。

> 常用的B样条：

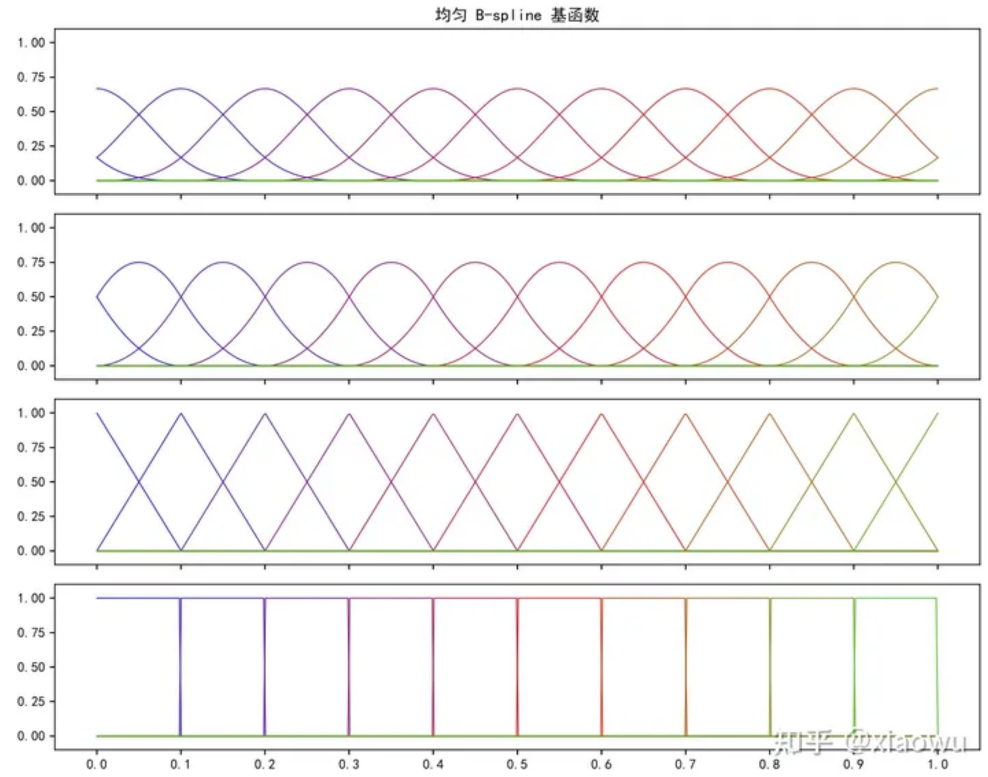
> (2) 准均匀B样条：中间节点等间距，两端节点具有重复度p

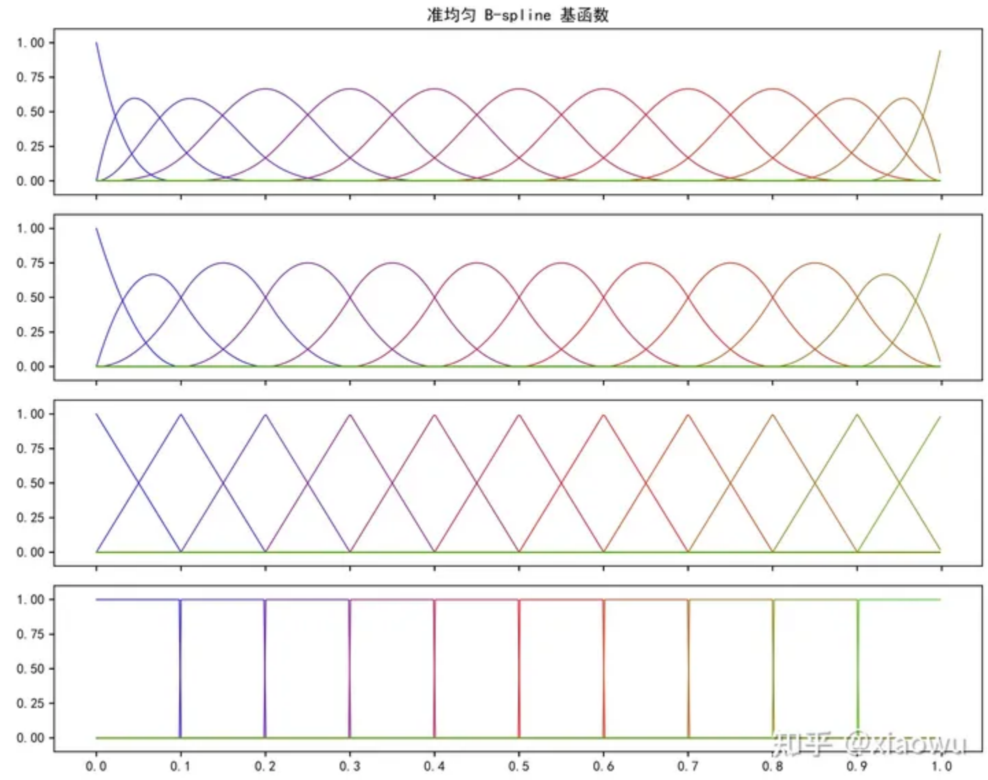
记基函数的次数为k，第i个k次B-样条基函数为$B_{i,k}(u)$.

Cox-de Boor递归公式定义：

$$B_{i,0}(u)=\begin{cases}1, & u_i \le u < u_{i+1}, i=0,1,\dots,m-1\\ 0, & otherwise\end{cases},$$
$$B_{i,k}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i}B_{i,k-1}(u)+\frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u).$$

B样条基函数图像如下：

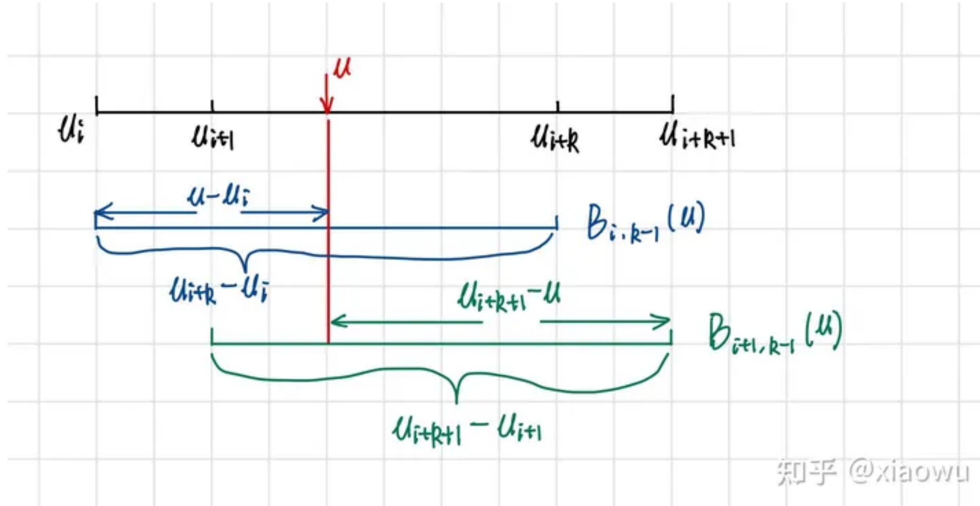




$[u_0,u_1)$	$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{0,2}$	$B_{0,3}$	$B_{0,4}$
$[u_1,u_2)$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{1,3}$	$\dots$
$[u_2,u_3)$	$B_{2,0}$	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	$\dots$	
$[u_3,u_4)$	$B_{3,0}$	$B_{3,1}$	$\dots$		
$[u_4,u_5)$	$B_{4,0}$	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

性质：
(1) 基函数$B_{i,k}(u)$在$[u_i,u_{i+k+1})$上非零，为k次多项式；
(2) 在任何一个节点区间$[u_i,u_{i+1})$，最多有$k+1$个k次基函数非零，且这$k+1$个基函数的和为1；

当$k=0$时，这些基函数都是阶梯函数，对于$B_{i,0}(u)$仅在区间$[u_i,u_{i+1})$上等于1，在其他区间都等于0。



$B_{i,k}(u)$依赖于$B_{i,k-1}(u)$和$B_{i+1,k-1}(u)$，其系数的意义：

- $B_{i,k-1}(u)$在区间$[u_i, u_{i+k})$上非零，区间长度为$u_{i+k}-u_i$，若u在这个区间内，则$u-u_i$是u和这个区间左端点之间的距离，可知$\frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i}\in[0,1)$;
- $B_{i+1,k-1}(u)$在区间$[u_{i+1}, u_{i+k+1})$上非零，区间长度为$u_{i+k+1}-u_{i+1}$，若u在这个区间内，则$u_{i+k+1}-u$是u和这个区间右端点之间的距离，可知$\frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}\in(0,1]$;
- $B_{i,k}(u)$是$B_{i,k-1}(u)$和$B_{i+1,k-1}(u)$的线性组合。

B-spline拟合

在局部区间$[a,b]$上，选择节点数为m，则确定了$m-1$个节点区间，一共有$(m+k-1)$个次数为k的B样条基函数。

则B样条的曲线方程为：

$$B(x)=\sum_{i=0}^{m+k-2}P_iB_{i,k}(x),$$

其中，$\sum_{i=0}^{m+k-2}B_{i,k}(x)=1$. P_i可以理解为贝塞尔曲线中的控制点，B样条曲线相当于对控制点进行加权平均，与贝塞尔曲线类似。

> B样条相比于贝塞尔曲线的优点：
> (1) 可以指定阶数
> (2) 改变某个控制点，B样条曲线仅在部分区间内发生变化

通过B样条技术可以把一些非参数估计问题转化为参数估计问题，其局部估计为：

$$f(x_0)=\alpha_1B_1(x_0)+\alpha_2B_2(x_0)+\cdots+\alpha_{m+k-1}B_{m+k-1}(x_0),$$

其中，α_i为待估参数，$B_i(x)$为节点数为m、次数为k的B样条基函数，$i=1,2,\ldots,m+k-1$.

这样就可以结合最小二乘法或者极大似然函数法将参数估出了，与局部多项式回归有异曲同工之妙！

参考资料

[1] De Boor C. A practical guide to splines[M]. New York: springer-verlag, 1978.

编辑于 2023-04-22 22:20・IP 属地北京

统计学 样条

写下你的评论...

8 条评论 默认 最新

在下小H
请问下上面“重复度为p”和“基函数为p次多项式”这两个里面的p 跟次数k什么关系呢？
04-08 · IP 属地江苏 回复 喜欢

小吴想读博 作者
笔误，已更正，感谢～
基函数次数统一为k
04-22 · IP 属地北京 回复 喜欢

树上寒冬
有点好奇公式是错的结果是对的怎么做到的
03-26 · IP 属地上海 回复 喜欢

树上寒冬 ▸ **小吴想读博**
不好意思，有点忘了，当时复现的时候发现一处公式错了，后来在别的地方找到了，输出了正确结果
06-08 · IP 属地上海 回复 喜欢