Sequential Quadratic Programming(SQP)

沈华
RL/Animation

对于一个带等式约束的优化问题

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{st}\quad c(x)=0 \end{aligned}$$

构造拉格朗日函数 $\mathcal{L}(x,\lambda)=f(x)-\lambda^T c(x)$

令

$$A(x)^T=[\nabla c_1(x),\nabla c_2(x),\ldots,\nabla c_m(x)]$$

一阶KKT条件

$$F(x,\lambda)=\begin{bmatrix}\nabla f(x)-A(x)^T\lambda \\ c(x)\end{bmatrix}=0$$

对上式求Jacobian矩阵

$$F'(x,\lambda)=\begin{bmatrix}\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x,\lambda) & -A(x)^T \\ A(x) & 0\end{bmatrix}$$

更新的步长

$$\begin{bmatrix}x_{k+1}\\ \lambda_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_k\\ \lambda_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_k\\ p_\lambda\end{bmatrix}$$

求解Newton-KKT方程

$$\begin{bmatrix}\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_k & -A_k^T \\ A_k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_k\\ p_\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\nabla f_k+A_k^T\lambda_k \\ -c_k\end{bmatrix}$$

带不等式约束的情形

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{subject to } & c_i(x)=0, \qquad i\in\mathcal{E}, \\ & c_i(x)\geq 0, \qquad i\in\mathcal{I}. \end{aligned}$$

对约束做一阶泰勒展开

$$\begin{aligned} \min_p\quad & f_k+\nabla f_k^T p+\tfrac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_k p \\ \text{subject to}\quad & \nabla c_i(x_k)^T p+c_i(x_k)=0, \quad i\in\mathcal{E}, \\ & \nabla c_i(x_k)^T p+c_i(x_k)\geq 0, \quad i\in\mathcal{I}. \end{aligned}$$

对于最小二乘问题

$$\min_\lambda \|\nabla_x\mathcal{L}(x_k,\lambda)\|_2^2=\|\nabla f_k-A_k^T\lambda\|_2^2$$

解析解为

$$\hat{\lambda}_{k+1}=\left(A_kA_k^T\right)^{-1}A_k\nabla f_k$$

Line search

每次迭代除了计算更新方向，还要对最优步长做一维搜索。

信赖域(Trust Region) SQP方法

优化问题可以写为

$$\begin{aligned} \min_p\ & f_k+\nabla f_k^T p+\tfrac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_k p \\ \text{subject to } & \nabla c_i(x_k)^T p+c_i(x_k)=0, \quad i\in\mathcal{E} \\ & \nabla c_i(x_k)^T p+c_i(x_k)\geq 0, \quad i\in\mathcal{I} \\ & \|p\|\leq\Delta_k \end{aligned}$$

Byrd–Omojokun Trust-Region SQP Method

选择合适的常数$\epsilon>0,\eta,\gamma\in(0,1)$;
选择初始解x_0, 初始信赖域$\Delta_0>0$;
for $k=0,1,2,\cdots$
  计算$f_k,c_k,\nabla f_k,A_k$;
  计算$\hat{\lambda}_k$;
  if $\left\|\nabla f_k-A_k^T\hat{\lambda}_k\right\|_\infty<\epsilon$ and $\|c_k\|_\infty<\epsilon$:
    return x_k
  计算$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_k$或使用拟牛顿法近似;
  计算$\rho_k=\text{ared}_k/\text{pred}_k$;
  if $\rho_k>\eta$:
    $x_{k+1}=x_k+p_k$;
  else :