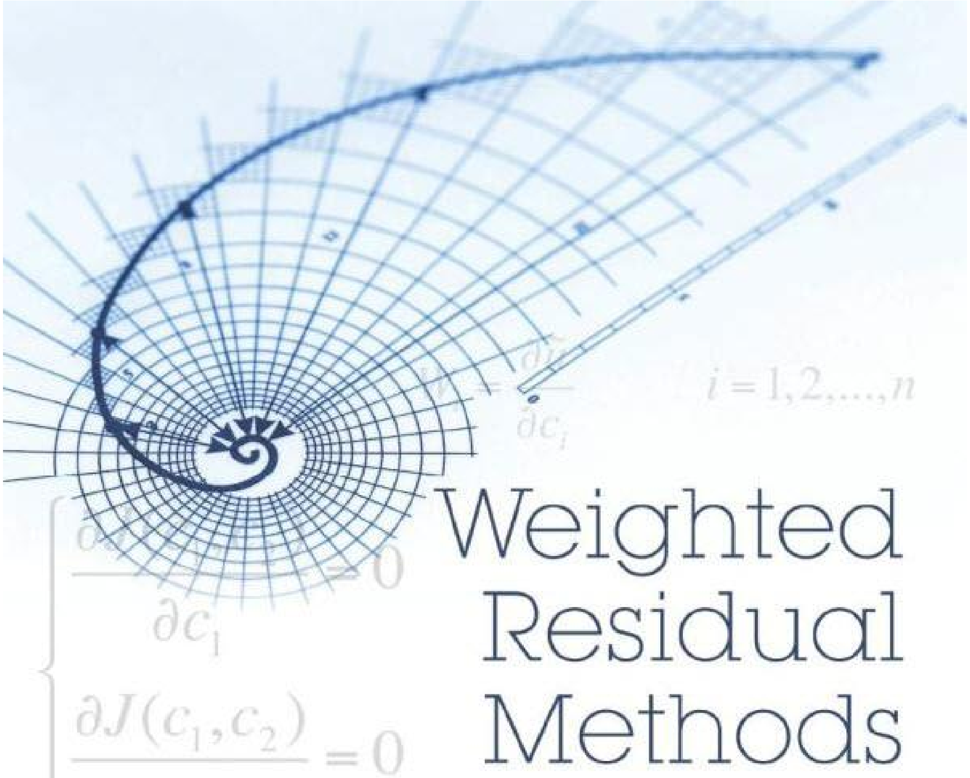
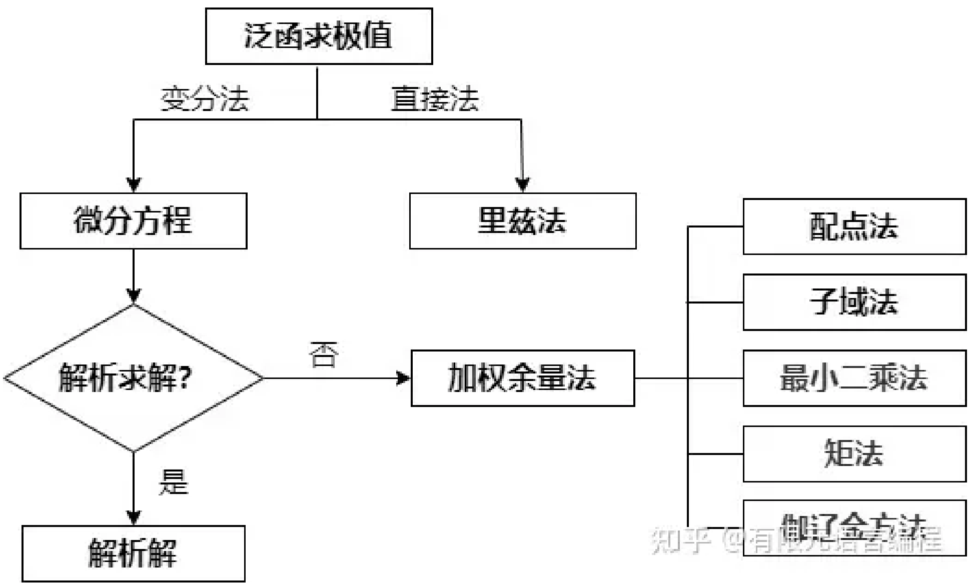


有限元思想追溯 —— 加权余量法

有限元语言编程
致力于代码自动生成技术 给我一组控制方程 还你一套专业软件

加权余量法的基本概念

用变分方法求近似解时，首先要找到相应的泛函。对于某些问题，相应的泛函尚未找到，或者根本不存在相应的泛函，在这种情况下就无法应用变分学中的直接方法求解了，但可以应用加权余量法求解。不同数值方法之间的关系如下图所示。



里兹法可以参考之前的文章，这里简单介绍一下加权余量法的基本概念。

有限元语言编程：有限元思想追溯 —— 里兹法
16 赞同 · 2 评论 文章

加权余量法是求微分方程近似解的一种有效方法。设在区域 D 中 u 必须满足微分方程

$$L(u)=p \tag{1}$$

在边界 C 上 u 必须满足边界条件

$$B(u)=0 \tag{2}$$

$L(\ )$ 和 $B(\ )$ 是微分算子。

精确解 u 必须在区域 D 中任一点都满足上述微分方程，并在边界 C 上任一点都满足上述边界条件。对于复杂的工程问题来说，这样的精确解往往是很难找到的，因此，人们只能设法去寻找具有一定精度的近似解。

用下式表示上述问题的近似解

$$u=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\cdots+\beta_n u_n=\sum_{i=1}^{n}\beta_i u_i \tag{3}$$

式中，β_i 为待定系数。

u_i 满足边界条件，但不满足微分方程。u_i 应是**线性独立**的，并应取自**完备函数集合**。所谓完备函数集合指的是，任一函数都可用此集合表示。

由于 u_i 不满足微分方程，把上述近似解代人微分方程 (1)， 将得到余量

$$R=L(u)-p \tag{4}$$

对于精确解来说，在区域 D 的任一点，余量 R 都等于零。对于近似解来说，可以选择系数 β_i，使得在某种平均意义上余量 R 等于零。这里令余量的加权积分值等于零，即

$$\int W_i R dV=0 \tag{5}$$

式中，W_i 为权函数。 取 n 个权函数，由上式得到 n 个方程，正好可用来求解式 (3) 中的 n 个待定系数 β_i。采用不同的权函数，就得到不同的计算方法。下面分别加以说明。

配点法

取权函数为

$$W_i=\begin{cases}1 & \text{在 } n \text{ 个分散的点上}\\ 0 & \text{在区域 } D \text{ 的其余部分}\end{cases} \tag{6}$$

实际上，这就是要求近似解在 n 个分散的点上满足微分方程。换句话说，在这 n 个点上余量应等于零

$$R_i=0, i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

由上述 n 个方程，可求解 n 个待定系数 β_i，从而得到近似解如式 (3)。

【例 1】求解下列二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}+u+x=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1) \tag{8}$$

边界条件

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } x=0 \text{ 时}, u=0\\ \text{当 } x=1 \text{ 时}, u=0\end{array}\right\} \tag{9}$$

取近似解为

$$u=x(1-x)\left(\beta_1+\beta_2 x+\cdots\right) \tag{10}$$

显然，上式满足边界条件 (9)， 但不满足微分方程 (8)。

如在式 (10) 中只取一项，得到第一近似解

$$u=\beta_1 x(1-x)$$

代人式 (8)，余量为

$$R(x)=x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)$$

取 $x=\frac{1}{2}$ 作为配点

$$R\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\beta_1=0$$

由此得到 $\beta_1=\frac{2}{7}$，所以第一近似解为

$$u=\frac{2}{7}x(1-x)$$

如在式 (10) 中取两项，得到第二近似解

$$u=x(1-x)\left(\beta_1+\beta_2 x\right)$$

余量为

$$R(x)=x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)+\beta_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)$$

把区间 $[0,1]$ 三等分，取 $x=\frac{1}{3}$ 及 $x=\frac{2}{3}$ 作为配点，得到

$$\begin{aligned}
R\left(\tfrac{1}{3}\right)&=\tfrac{1}{3}-\tfrac{16}{9}\beta_1+\tfrac{2}{27}\beta_2=0\\
R\left(\tfrac{2}{3}\right)&=\tfrac{2}{3}-\tfrac{16}{9}\beta_1-\tfrac{50}{27}\beta_2=0
\end{aligned}$$

由此解得 $\beta_1=0.1948$，$\beta_2=0.1731$。所以，第二近似解为

$$u=x(1-x)(0.1948+0.1731x)$$

这个问题的精确解为

$$u=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$$

用配点法求得的近似解与精确解的比较见下表。可见对于本问题来说，第二近似解与精确解已相当接近，最大误差只有 3%。如取更多的项，计算精度还可以进一步提高。

表 1 配点法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0536	0.0446	0.0440
0.50	0.0713	0.0704	0.0697
0.75	0.0536	0.0619	0.0601

子域法

将物体的内域 V 分成 n 个子域 $V_i(i=1,2,\cdots,n)$，权函数选为

$$W_i=\begin{cases}1 & \text{在 } V_i \text{ 域内} \\ 0 & \text{在 } V_i \text{ 域外}\end{cases} \tag{11}$$

列出消除余量的方程为

$$\int_{v_i} R_l \, \mathrm{d}V_i=0 \quad i=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

这样便可获得 n 个代数方程，解出 n 个系数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$。

【例 2】用最子域法求解例 1 所述问题。

一项近似解: 子域取全域，即 $W_1=1$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$。由 (12) 式可得

$$\begin{gathered}\int_0^1 R_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[x+a_1\left(-2+x-x^2\right)\right]\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{11}{6}a_1=0 \\ a_1=\tfrac{3}{11}\end{gathered}$$

求得一项近似解为

$$u=\frac{3}{11}x(1-x)$$

两项近似解：取 $W_1=1$ 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(\Omega_1)$，$W_2=1$ 当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1\,(\Omega_2)$。

由 (12) 式得到

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} R_2(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2}\left[x+a_1\left(-2+x-x^2\right)+a_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{8}-\tfrac{11}{12}a_1+\tfrac{53}{192}a_2=0 \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 R_2(x)\mathrm{d}x &= \tfrac{3}{8}-\tfrac{11}{12}a_1-\tfrac{229}{192}a_2=0\end{aligned}$$

解得 $a_1=\frac{291}{1551}=0.1876$, $a_2=\frac{24}{141}=0.1702$。

所以，两项近似解为

$$u=x(1-x)(0.1876+0.1702x)$$

近似解与精确解的比较见下表。

表 2 子域法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0511	0.0432	0.0440
0.50	0.0682	0.0682	0.0697
0.75	0.0511	0.0591	0.0601

最小二乘法

将余量 $R=L(u)-p$ 的二次方 R^2 在区域 D 中积分，得到

$$I=\int R^2 \, \mathrm{d}V \tag{13}$$

选择系数 β_i，使积分 I 的值为极小，因此要求

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

由式 (13) 对 β_i 求导数，得到

$$\int R\frac{\partial R}{\partial \beta_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

由此得到 n 个方程，正好可用以求 n 个待定系数 β_i 。比较式 (5) 和式 (14) 两式，可见目前的权函数为

$$W_i=\frac{\partial R}{\partial \beta_i} \tag{15}$$

【例 3】用最小二乘法求解例 1 所述问题。第一近似解取为

$$u=\beta_1 x(1-x)$$

$$R=x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1}=-2+x-x^2$$

由式 (14)

$$\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial \beta_1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)\right]\left(-2+x-x^2\right)\mathrm{d}x=0$$

积分后，得到

$$\frac{101}{5}\beta_1-\frac{11}{2}=0$$

由此求得 $\beta_1=\frac{55}{202}=0.272$，故

$$u=0.272x(1-x)$$

第二近似解取为

$$u=x(1-x)\left(\beta_1+\beta_2 x\right)$$
$$R=x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)+\beta_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)$$

由式 (14)

$$\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial \beta_1}\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1\left[x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)+\beta_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)\right]\left(-2+x-x^2\right)\mathrm{d}x=0$$
$$\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial \beta_2}\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1\left[x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)+\beta_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)\right]\left(2-6x+x^2-x^3\right)\mathrm{d}x=0$$

经过积分，得到

$$
\begin{aligned}
202\beta_1 + 101\beta_2 &= 55 \\
101\beta_1 + 1532\beta_2 &= 393
\end{aligned}
$$

解之，得到 $\beta_1 = 0.192$，$\beta_2 = 0.165$，第二近似解为

$$u = x(1-x)(0.192 + 0.165x)$$

近似解与精确解的比较见下表 。

表 3 最小二乘法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0506	0.0434	0.0440
0.50	0.0681	0.0683	0.0697
0.75	0.0506	0.0592	0.0601

矩法

对于一维问题，取权函数如下

$$W_i = 1, W_2 = x, W_3 = x^2, \cdots, W_n = x^{n-1}$$

把这些权函数代人式 (5) , 得到

$$
\left.
\begin{array}{l}
\int x^0 R \,\mathrm{d}V = 0 \\
\int x^1 R \,\mathrm{d}V = 0 \\
\int x^2 R \,\mathrm{d}V = 0 \\
\vdots \\
\int x^{n-1} R \,\mathrm{d}V = 0
\end{array}
\right\} \tag{16}
$$

由上述方程组可解出待定系数 β_i 。以上各式左端分别代表余量 R 的零次矩、一次矩、二次矩 ...... 所以，这个方法称为矩法。

【例 4】用矩法求解例 1 所述问题。

取第一近似解为 $u = \beta_1 x(1-x)$，取权函数 $W_1 = 1$，由式 (16)，得到

$$\int_0^1 1 \cdot R \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x + \beta_1 \left(-2 + x - x^2\right)\right] \mathrm{d}x = 0$$

即

$$1 - \frac{11}{3}\beta_1 = 0$$

从而求得 $\beta_1 = \frac{3}{11} = 0.273$，故

$$u = 0.273x(1-x)$$

取第二近似解为 $u = x(1-x)\left(\beta_1 + \beta_2 x\right)$，余量为

$$R = x + \beta_1 \left(-2 + x - x^2\right) + \beta_2 (2 - 6x + x^2 - x^3)$$

取权函数 $W_1 = 1$，$W_2 = x$，由式 (16) 得到

$$\int_0^1 1\cdot R\,\mathrm{d}x=0,\quad \int_0^1 xR\,\mathrm{d}x=0$$

积分后，得

$$\begin{aligned}\tfrac{11}{6}\beta_1+\tfrac{11}{12}\beta_2&=\tfrac{1}{2}\\ \tfrac{11}{12}\beta_1+\tfrac{19}{12}\beta_2&=\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

解之，$\beta_1=0.1878$，$\beta_2=0.1693$，故

$$u=x(1-x)(0.1878+0.1693x)$$

近似解与精确解的比较见下表。

表 4 矩法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0512	0.0432	0.0440
0.50	0.0682	0.0682	0.0697
0.75	0.0512	0.0591	0.0601

伽辽金方法

取权函数为

$$W_i=u_i \tag{17}$$

代人式 (5)，得到

$$\left.\begin{array}{l}\int u_1R\,\mathrm{d}V=0\\ \int u_2R\,\mathrm{d}V=0\\ \vdots\\ \int u_nR\,\mathrm{d}V=0\end{array}\right\} \tag{18}$$

其中 $R=L(u)-p$ 为余量。由此得到 n 个方程，正好用以求解 n 个待定系数 β_i。

伽辽金法的计算精度较高。当存在相应的泛函时，伽辽金法与变分法往往导致同样的结果。因此，伽辽金法应用较广。

【例 5】 用伽辽金方法求解例 1 所述问题。近似解取为

$$u=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots=\beta_1x(1-x)+\beta_2x^2(1-x)+\cdots$$

如只取一项，得第一近似解 $u=\beta_1u_1=\beta_1x(1-x)$，取权函数 $W_1=u_1=x(1-x)$，由式 (18)

$$\int_0^1 u_1R\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)\left[x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)\right]\mathrm{d}x=0$$

即

$$\frac{1}{12}-\frac{3}{10}\beta_1=0$$

由此得到 $\beta_1=5/18=0.278$，因此

$$u = 0.278x(1-x)$$

第二近似解取为 $u=\beta_1 x(1-x)+\beta_2 x^2(1-x)$，取权函数 $W_1=x(1-x)$，$W_2=x^2(1-x)$，代入式 (18)，得到

$$\int_0^1 x(1-x)\left[x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)+\beta_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)\left[x+\beta_1\left(-2+x-x^2\right)+\beta_2\left(2-6x+x^2-x^3\right)\right]\mathrm{d}x=0$$

即

$$\begin{aligned}\frac{3}{10}\beta_1+\frac{3}{20}\beta_2&=\frac{1}{12}\\ \frac{3}{20}\beta_1+\frac{13}{105}\beta_2&=\frac{1}{20}\end{aligned}$$

解之, 得 $\beta_1=0.1924$，$\beta_2=0.1707$，因此

$$u=x(1-x)(0.1924+0.1707x)$$

近似解与精确解的比较见下表。

表 5 伽辽金法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0521	0.0440	0.0440
0.50	0.0695	0.0698	0.0697
0.75	0.0521	0.0600	0.0601

评述

在前面，我们要求试函数式 (3) 事先满足边界条件。这项要求是可以放宽的。在变分法中，边界条件分为自然条件和强制条件两种。试函数只要满足强制边界条件，不必满足自然边界条件，在泛函极小化过程中可以迫使自然边界条件得到满足。这种处理方法也可以应用于加权余量法中，在不满足边界条件的那一部分边界上引入边界余量，在计算过程中，要求边界余量以某种积分方式等于零。

和里兹法一样，加权余量法的实质是把在**无限维可取函数空间**中求解的变分问题或数学物理方程的边值问题转化为在以 $\{\varphi_i\}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为基底的 n **维函数空间**中来求解，从而把复杂的变分问题或微分方程边值问题化为求解 n 元代数方程组的问题，这样就把被求解的问题大大简化了。

里兹法和加权余量法是同一物理现象的不同表现。其表现形式有所不同，但实质是一样的。在固体力学中的很多问题是有泛函的，故可应用里兹法。但还有物理现象没有泛函，不能用里兹法，这时只能用加权余量法。所以，加权余量法的应用范围更为广泛，可用于求解结构、流体、热传导等问题，从这种意义上说，加权余量法是更广义的近似计算方法。

参考文献

[1]王勖成,邵敏.有限单元法基本原理和数值方法-第2版[M].清华大学出版社,1997.

[2]朱伯芳.有限单元法原理与应用-第3版[M].中国水利水电出版社,2009.

FEtch 系统是笔者团队开发的新一代有限元软件开发平台。只需按照有限元语言格式填写脚本文件，即可在线自动生成有限元计算程序，从而大幅提高 CAE 软件的开发效率。欢迎站内私信交流。

了解更多最新信息，欢迎关注我们的 **B 站主页**：

有限元语言编程的个人空间-有限元语言编程个人主页-哔哩哔哩视频

阅读详细文档，请访问 FEtch 系统的**技术网站**：

> Tags - FEtch 有限元自动生成系统

有任何疑问或建议，欢迎加Q群 "**FEtch有限元开发系统(519166061)**" 留言讨论。 我们长期开展 FEtch 系统的免费试用活动，感兴趣的朋友入群后可直接联系管理员，免费获取**许可证文件**。

> 点击链接加入群聊【FEtch有限元开发系统】：jq.qq.com/?...

编辑于 2023-10-07 13:11・IP 属地山东

数值模拟 有限元 微分方程

▲ 赞同 14 ▼ 添加评论 分享 喜欢 收藏 申请转载 ···

写下你的评论...

还没有评论，发表第一个评论吧

文章被以下专栏收录

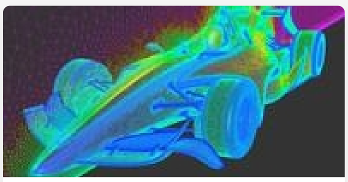
有限元法学习笔记
面向有限元学习，记录一些有价值的知识点

推荐阅读

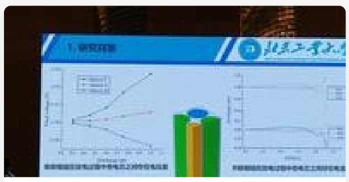
有限元分析50年发展之路

本文转自：公众号-有限元仿真分析 原文链接： 有限元分析50年发展之路计算机辅助工程（CAE）作为一门新兴的学科已经逐渐的走下神坛，成为了各大企业中设计新产品过程中不可缺少的一环。传统…

有限元分析需要注意的3大原



有限元方法的核心思想



有限元是什么？有限元法的核心

材料科研SCI

则！

元王cae工程师

技术邻 发表于技术邻CA...

思想是啥?

麓山南路疯子阿水