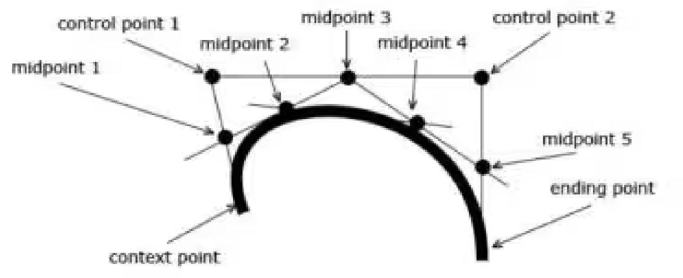


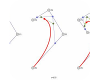
曲线篇: 贝塞尔曲线

FrancisZhao
运动控制/运动规划-攻城狮

最近正在研究贝塞尔曲线. 在学习之际也把自己的思路写下来.

下面的链接可以拖拽贝塞尔的点, 先感受一下贝塞尔曲线的圆润.

Animated Bézier Curves
www.jasondavies.com/animated-bezier/



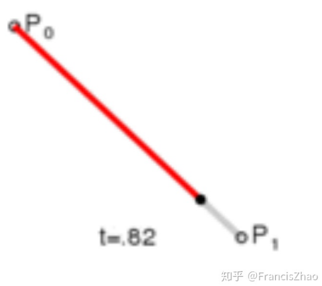
贝塞尔曲线的历史:

贝塞尔曲线于 1962 年，由法国工程师皮埃尔·贝济埃（Pierre Bézier）所广泛发表，他运用贝塞尔曲线来为汽车的主体进行设计,贝塞尔曲线最初由保尔·德·卡斯特里奥于1959年运用德卡斯特里奥算法开发，以稳定数值的方法求出贝塞尔曲线.

贝塞尔曲线有着很多特殊的性质, 在图形设计和路径规划中应用都非常广泛, 我就是想在路径规划中

贝塞尔曲线完全由其控制点决定其形状， n 个控制点对应着 n - 1 阶的贝塞尔曲线，并且可以通过递归的方式来绘制. 画重点了啊: ***递归***

一阶曲线:



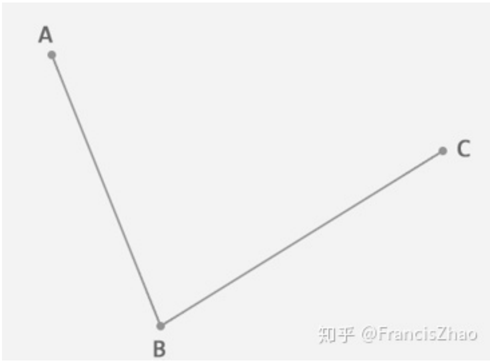
值得出线段上那个点的

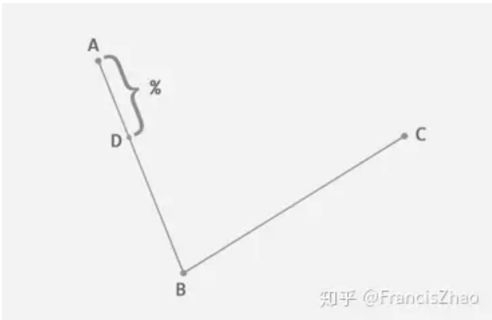
$$B_1(t) = (1 - t)P_0 + tP_1, t \in [0, 1]$$

一阶曲线就是很好理解, 就是根据t来的线性插值. P0表示的是一个向量 [x ,y], 其中x和y是分别按照这个公式来计算的.

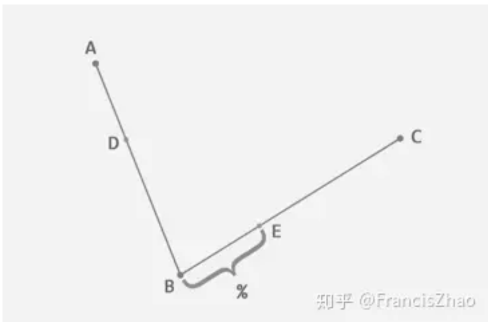
二阶贝塞尔:

既然重点是递归, 那么二阶贝塞尔必然和一阶有关系.

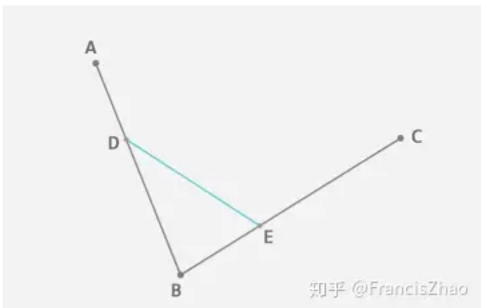


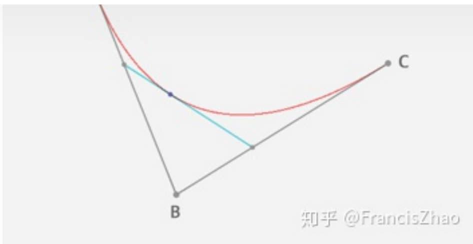


在平面内任选 3 个不共线的点，依次用线段连接。在第一条线段上任选一个点 D。计算该点到线段起点的距离 AD，与该线段总长 AB 的比例。



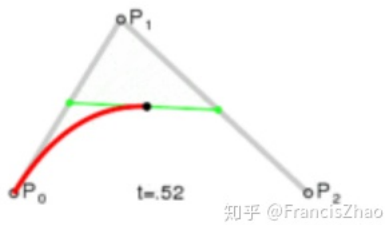
根据上一步得到的比例，从第二条线段上找出对应的点 E，使得 AD:AB = BE:BC。





这时候DE又是一条直线了, 就可以按照一阶的贝塞尔方程来进行线性插值了, t= AD:AE

这时候就可以推出公式了.



推公式的主图

$$P_0^{'} = (1-t)P_0 + tP_1$$

对应着上图绿色线段的左端点

$$P_1^{'} = (1-t)P_1 + tP_2$$

对应着上图绿色线段的右端点

$$B_2(t) = (1-t)P_0^{'} + tP_1^{'}$$

$$= (1-t)((1-t)P_0 + tP_1) + t((1-t)P_1 + tP_2)$$

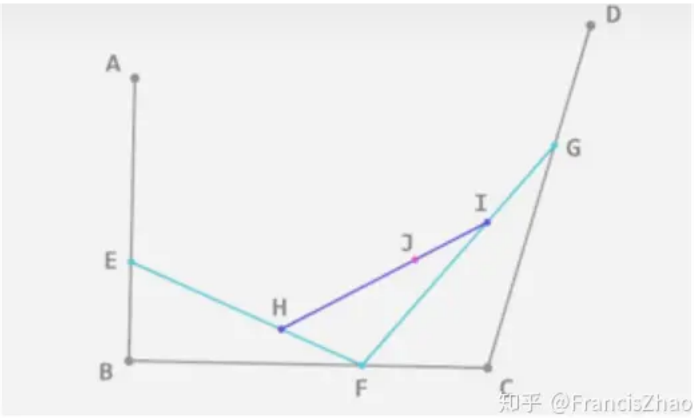
$$= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

对应着绿色线段的一阶贝塞尔曲线(线性插值)

$$B_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, t \in [0, 1]$$

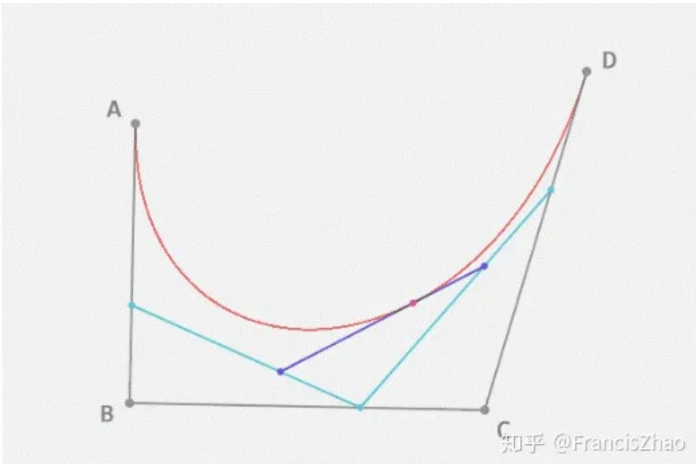
整理一下公式, 得到二阶贝塞尔公式

三阶贝塞尔曲线:



二阶的贝塞尔通过在控制点之间再采点的方式实现降阶, 每一次选点都是一次的降阶.

四个点对应是三次的贝塞尔曲线. 分别在 AB BC CD 之间采EFG点, EFG三个点对应着二阶贝塞尔, 在EF FG之间采集HI点来降阶为一阶贝塞尔曲线.



高阶贝塞尔曲线:

高阶的贝塞尔可以通过不停的递归直到一阶

贝塞尔曲线 公式

可以通过递归的方式来理解贝塞尔曲线, 但是还是给出公式才方便计算的.

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), t \in [0,1]$$

$$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i (1-t)^{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \text{【} i=0,1,\cdots,n \text{】}$$

仔细看可以发现, 贝塞尔的参数B是二项式(t+(1-t))^n = (1)^n的展开公式. **划重点了: 系数是二项式的展开**. 后面的很多的贝塞尔曲线的性质都可以用这个来解释.

变化一下贝塞尔公式:

$$\mathbf{C}(u)=\sum_{i=0}^{n}B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i$$

$$B_{n,i}(u)=\frac{n!}{i!(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i}$$

和上文中的公式相同, 但是有一些字母的替换, 表达习惯不同

控制点是独立的, 因此求导是直接对u就行求导, 就是仅仅对参数项B进行求导.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}B_{n,i}(u)=B'_{n,i}(u)=n(B_{n-1,i-1}(u)-B_{n-1,i}(u))$$

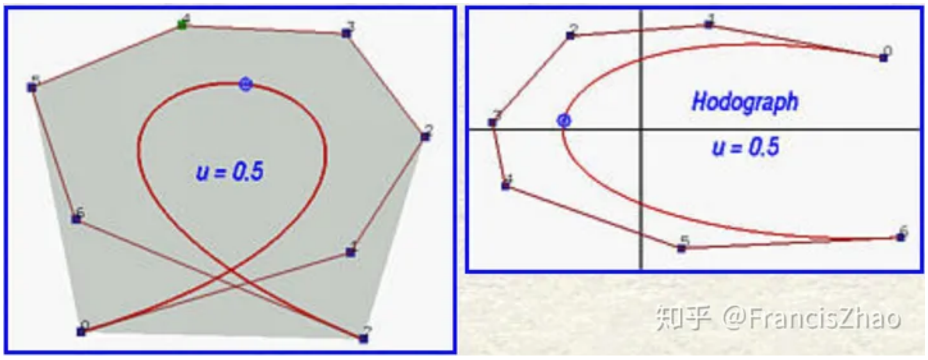
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbf{C}(u)=\mathbf{C}'(u)=\sum_{i=0}^{n-1}B_{n-1,i}(u)\{n(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i)\}$$

定义: Q0=n*(P1-P0), Q0=n*(P2-P1), Q0=n*(P3-P2),...Qn-1=n*(Pn-Pn-1), . 如果我们把Q当做一组新的控制点, 那么原贝塞尔的导数可以写成如下:

$$\mathbf{C}'(u)=\sum_{i=0}^{n-1}B_{n-1,i}(u)\mathbf{Q}_i$$

导数还是贝塞尔曲线, 只不过是控制点是原来控制点的组合而已.

> This derivative curve is usually referred to as the *hodograph* of the original Bézier curve. 贝塞尔的导数可以理解为原贝塞尔的速度曲线.(瞎翻译的)



七阶贝塞尔曲线和其导数曲线(六阶贝塞尔曲线)

以此类推:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}'' &= \sum_{i=0}^{n-2}B_{n-2,i}(u)\{(n-1)(\mathbf{Q}_{i+1}-\mathbf{Q}_i)\}\\ &= \sum_{i=0}^{n-2}B_{n-2,i}(u)\{n(n-1)(\mathbf{P}_{i+2}-2\mathbf{P}_{i+1}+\mathbf{P}_i)\}\end{aligned}$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\sum_{i=0}^{n-k} B_{n-k,i}(u)\mathbf{D}_i^k$$

可以得出一个很有趣的结论, 贝塞尔曲线的导数还是贝塞尔曲线.

贝塞尔曲线的性质

> 1 各项系数之和为1.

这个很好理解,因为是系数是二项式的展开(t+(1-t))^n = (1)^n非负性. 好理解, 二项式的展开啊

> 2 对称性

第i项系数和倒数第i项系数相同, 从二项式的展开来思考,这个也好理解

> 3 递归性

递归性指其系数满足下式:

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \text{【}i = 0, 1, \cdots, n\text{】}$$

这个好理解, 因为我们就是从递归来理解贝塞尔曲线的

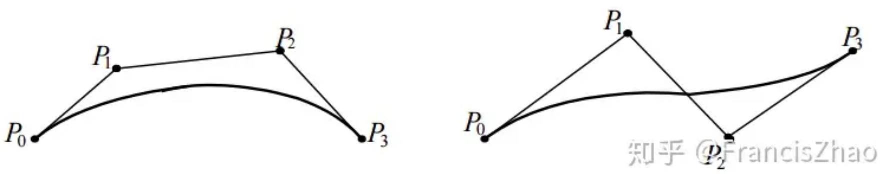
> 4 凸包性质

贝塞尔曲线始终会在**包含了所有控制点的最小凸多边形**中, 不是按照控制点的顺序围成的最小多边形. 这点大家一定注意.　这一点的是很关键的，也就是说可以通过控制点的凸包来限制规划曲线的范围，在路径规划是很需要的一个性质.

> 5 端点性质

第一个控制点和最后一个控制点，恰好是曲线的起始点和终点．这一点可以套用二项式展开来理解，ｔ＝１或者０的时候，相乘二项式的系数，出了初始点或者末尾点，其余的都是０.

> 6 一阶导数性质



假设上图中贝塞尔的ｔ是由左到右从０到１增加的，那么贝塞尔曲线在ｔ＝０时的导数是和Ｐ０Ｐ１的斜率（导数）是相同，ｔ＝１时的导数是和Ｐ３Ｐ４的斜率（导数）是相同