# 格林公式、高斯公式及斯托克斯公式的理解及相互关系

若漂
活得就剩下三点一线了



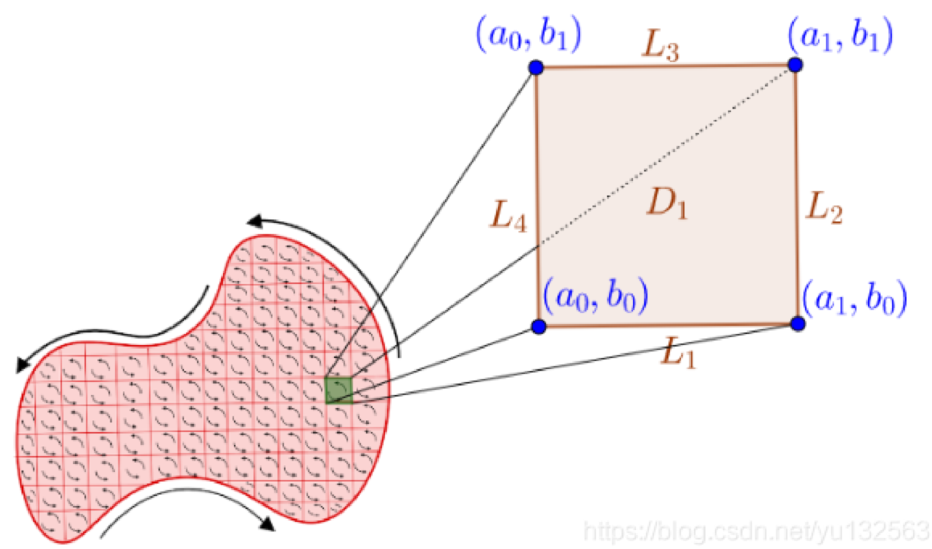
作者：Innerpeace_yu

链接：格林公式、高斯公式及斯托克斯公式的理解及相互关系_yu132563的专栏-CSDN博客_高斯公式

格林公式其实表达的是能量守恒的关系，比较详细的解释可以参照知乎的这篇文章（

> **格林公式的几何意义是什么?**
> 1686 关注 · 40 回答 问题

），其主要功能是构建曲线积分和曲面积分的关系，推倒过程简述如下：






$$\begin{aligned}
\oint_{L^+} Pdx + Qdy &= \int_{L_1^+} Pdx + \int_{L_2^+} Qdy + \int_{L_3^+} Pdx + \int_{L_4^+} Qdy \\
&= \int_{a_0}^{a_1} P(x, b_0)dx + \int_{b_0}^{b_1} Q(a_1, y)dy + \int_{a_1}^{a_0} P(x, b_1)dx + \int_{b_1}^{b_0} Q(a_0, y)dy \\
&= \int_{b_0}^{b_1} [Q(a_1, y) - Q(a_0, y)]dy + \int_{a_0}^{a_1} [P(x, b_0) - P(x, b_1)]dx \\
&= \int_{b_0}^{b_1}\int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1} \frac{\partial P}{\partial y} dydx \\
&= \int_{b_0}^{b_1}\int_{a_0}^{a_1} [\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}]dxdy \\
&= \iint_{D_1} [\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}]dxdy
\end{aligned}$$



最终可得如下结果：

$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

将其拓展到三维，就得到斯托克斯公式，其表达式为

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,,\ \text{w}$$

1.点为点乘，dr为[dx，dy，dz]的向量，对曲线的微分为曲线该点的法向量(可由x^2+y^2=1，在x=1，y=0的梯度向量理解)，对三维体或高维体同理。

2.高维体的微分都是向量

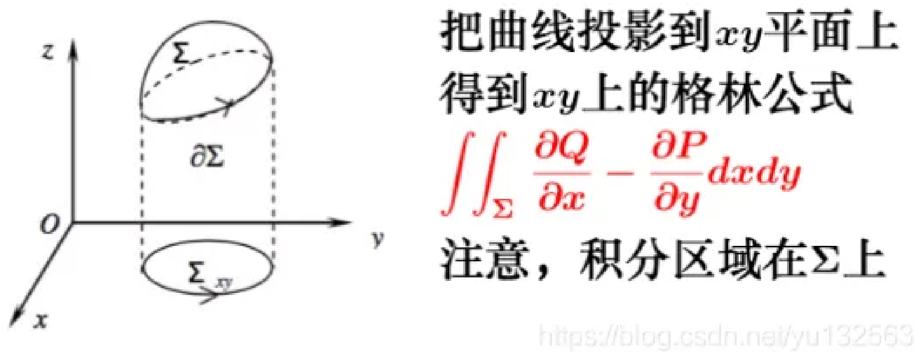
3.如果将x^2+y^2=1转为y对于x的函数，再对求梯度，这才是y相对于x的梯度。对level set函数的各个元求梯度，是level set高维体的法向量

将散度展开，则表达式为

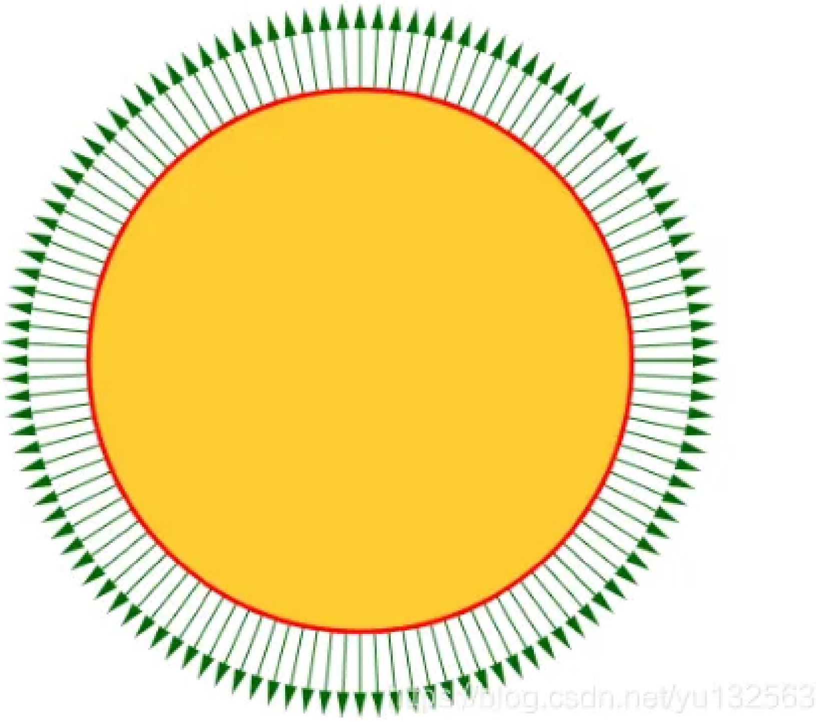
$$\iint_{\Sigma} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\,dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\,dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \right)$$

$$= \oint_{\partial\Sigma} \left( P\,dx + Q\,dy + R\,dz \right),$$

比较格林公式和斯托克斯公式，可以看到格林公式是斯托克斯公式在xy面上的投影




不过斯托克斯公式从做功的角度进行理解还是有点太抽象，本来这个公式的产生是为了计算物理中的磁场通量，即电场产生磁场，规定线圈逆时针为正方向，用右手定律可知z方向为磁通量正方向（如上图），而磁通量可以按照曲面形状分别投影到三个坐标平面进行求取，即三个坐标平面的投影面积乘上相对应的磁通量分量，这样理解的话与高斯公式有一定的相似之处（都是计算通量），可以说高斯公式是斯托克斯公式的特殊情况，只是高斯公式构建了三维体积分和闭合曲面积分之间的关系，而斯托克斯公式构建的是面积分和闭合曲线之间的关系（曲面可以不闭合）。这么说可能还是有点抽象，现在给出高斯公式的具体物理意义：



比如说，闭合曲面中有很多点往外散发能量，现在要求取闭合曲面往外散射的能量（通过闭合曲面的能量），这个时候有两种方法，一种是在闭合曲面上取很小的一个面积乘上这个面积上的强度，按照微积分学的基本思想，在曲面上求取曲面积分，其表达式为

$$\oint_{L^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{n}$$

另外一种方法就是对闭合曲面内中的每个点进行体积分，其表达式为

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

这就是高斯公式的表达式。

将高斯公式与斯托克斯公式进行比较，可以发现

1. **二者都是描述通量，不同之处在于高斯公式对应有源闭合曲面情况，斯托克斯公式对应无源曲面情况，在此种情况下如果都为闭合曲面，斯托克斯公式对应的通量为零，高斯公式对应的通量非零；**
2. **斯托克斯公式对应的通量是矢量（平行曲面法向方向），高斯公式对应的通量为标量没有方向，这是二者本质区别；**

由以上分析可以知道 高斯公式是斯托克斯公式的特殊形式，在一定情况下斯托克斯公式能退化成高斯公式。

**以上是我对这三个公式的理解，如有不当或者错误的地方，大神们请提出宝贵意见。**

发布于 2020-11-28 14:52