设$J(x(t))$在$x_0(t)$取得极值(极大或极小)，且设$J(x_0+\alpha\delta x)$ 为α的函数，则该函数一定在$\alpha=0$时取得极值，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(x(t)+\alpha\delta x(t))|_{\alpha=0}=0$$

无约束的泛函极值(核心)

$$J(x(t))=\int_{t_0}^{t_f}F(t,x(t),x'(t))dt$$

其边界条件$x(t_0)=x_0$，$x(t_f)=x_f$

计算$J(x(t))$的变分

$$\begin{aligned}\delta J&=\frac{\partial}{\partial\alpha}J(x(t)+\alpha\delta x(t))|_{\alpha=0}\\&=\int_{t_0}^{t_f}F(t,x(t)+\alpha\delta x(t),x'(t)+\alpha\delta x'(t))|_{\alpha=0}dt\\&=\int_{t_0}^{t_f}[F_x(t,x(t),x'(t))]\delta x+F_{x'}(t,x(t),x'(t)\delta x'(t))]dt\end{aligned}$$

对第二项分布积分,乘积项根据边界条件为0，则

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}[F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}]\delta xdt=0$$

因为δx任意，所以可以推出

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0$$

> 该式为欧拉-拉格朗日方程，是泛函取极值的必要条件

可以将对t求导展开写为

$$F_x-F_{tx'}-F_{xx'}x'-F_{x'x'}x''=0$$

为二阶微分方程，通解的常数可以根据边界条件确定

所以在求泛函极值时，直接写出欧拉方程即可，求解这个微分方程就能获得最优解及最优解对应的曲线x(t)

- 如果J是两个不同函数的泛函，即

$$J(y(t),z(t))=\int_{t_1}^{t_2}F(t,y,y',z,z')dt$$

边界条件为

$$\begin{cases}y(t_1)=y_1,y(t_2)=y_2\\ z(t_1)=z_1,z(t_2)=z_2\end{cases}$$

则此时求极值的欧拉方程组为

$$\begin{cases}F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=0\\ F_z-\frac{d}{dt}F_{z'}=0\end{cases}$$

- 为高阶导的泛函，即

$$J(y(t))=\int_{t_1}^{t_2}F(t,y,y',y'')dt$$

边界条件为

$$\begin{cases}y(t_1)=y_1,y(t_2)=y_2\\ y'(t_1)=y'_1,y'(t_2)=y'_2\end{cases}$$

则此时欧拉方程为

$$F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{y''}=0$$

> 从这就可以看出为啥叫欧拉方程了，类比常微分方程里面的欧拉方程，你细品~

- 多元函数的泛函，即

$$J(z(x,y))=\iint_D F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

边界为区域D的边界线 则此时极值需要满足的方程(应该就是偏微分方程了)为

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}=0$$