Sequential Quadratic Programming（SQP）

Wilson Li

有一般的约束优化问题

$$\begin{aligned}&\text{minimize } f(\mathbf{x})\\&\text{subject to: } a_i(\mathbf{x})=0 \text{ for } i=1,2,\ldots,p\\&c_j(\mathbf{x})\leq 0 \text{ for } i=1,2,\ldots,q\end{aligned}\tag{1}$$

对应的kkt条件为：

$$\begin{aligned}\nabla_x L(\mathbf{x},\lambda,\boldsymbol{\mu})&=\mathbf{0}\\a_i(\mathbf{x})&=0 \quad \text{for } i=1,2,\ldots,p\\c_j(\mathbf{x})&\leq 0 \quad \text{for } i=1,2,\ldots,q\\\boldsymbol{\mu}&\geq\mathbf{0}\\\mu_j c_j(\mathbf{x})&=0 \quad \text{for } j=1,2,\ldots,q\end{aligned}\tag{2}$$

Lagrangian方程为：

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{q}\mu_j c_j(\mathbf{x})\tag{3}$$

在第k次迭代中，将 $\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{\lambda}_k,\boldsymbol{\mu}_k$ 更新为 $\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{\lambda}_{k+1},\boldsymbol{\mu}_{k+1}$ ，假设 $\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k$ ，方程2在 $\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{\lambda}_{k+1},\boldsymbol{\mu}_{k+1}$ 处被满足，可以得到关于 $\boldsymbol{\delta}_k$，$\boldsymbol{\lambda}_{k+1},\boldsymbol{\mu}_{k+1}$ 的方程组：

这条式子已经对dx进行了求导

这是L函数的二阶泰勒展开

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_k\boldsymbol{\delta}_k+\mathbf{g}_k+\mathbf{A}_{ek}^T\lambda_{k+1}+\mathbf{A}_{ik}^T\boldsymbol{\mu}_{k+1}&=\mathbf{0}\\\mathbf{A}_{ek}\boldsymbol{\delta}_x&=-\mathbf{a}_k\\\mathbf{A}_{ik}\boldsymbol{\delta}_x&\leq-\mathbf{c}_k\\\boldsymbol{\mu}_{k+1}&\geq\mathbf{0}\\(\boldsymbol{\mu}_{k+1})\left(\mathbf{A}_{ik}\boldsymbol{\delta}_k+\mathbf{c}_k\right)_j&=0 \text{ for } j=1,2,\ldots,q\end{aligned}\tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}&=\nabla_x^2 f(\mathbf{x}_k)+\sum_{i=1}^{p}(\lambda_k)_i\nabla_x^2 a_i(\mathbf{x}_k)+\sum_{j=1}^{q}(\mu)_j\nabla_x^2 c_j(\mathbf{x}_k)\\\mathbf{g}_k&=\nabla_x f(\mathbf{x}_k)\\\mathbf{A}_{ek}&=\begin{bmatrix}\nabla_x^T a_1(\mathbf{x}_k)\\\nabla_x^T a_2(\mathbf{x}_k)\\\vdots\\\nabla_x^T a_p(\mathbf{x}_k)\end{bmatrix},\mathbf{A}_{ik}=\begin{bmatrix}\nabla_x^T c_1(\mathbf{x}_k)\\\nabla_x^T c_2(\mathbf{x}_k)\\\vdots\\\vdots\\\nabla_x^T c_q(\mathbf{x}_k)\end{bmatrix},\mathbf{a}_k=\begin{bmatrix}a_1(\mathbf{x}_k)\\a_2(\mathbf{x}_k)\\\vdots\\\vdots\\a_p(\mathbf{x}_k)\end{bmatrix},\mathbf{c}_k=\begin{bmatrix}c_1(\mathbf{x}_k)\\c_2(\mathbf{x}_k)\\\vdots\\c_q(\mathbf{x}_k)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

公式4可以表达为下面qp问题公式6的kkt条件，

这里转换为一个二次规划问题，转换为二次规划的好处是可以合理处理不等式问题

$$\begin{aligned}&\text{minimize } \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{Z}_k\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{g}_k\\&\text{subject to: } \mathbf{A}_{ek}\boldsymbol{\delta}=-\mathbf{a}_k\\&\mathbf{A}_{ik}\boldsymbol{\delta}\leq-\mathbf{c}_k\end{aligned}\tag{6}$$

假设 δ_k 是公式6对应的qp问题的解， λ_{qp},μ_{qp} 为对应qp问题的Lagrange乘子，如果我们让

$$\delta_\lambda=\lambda_{qp}-\lambda_k,\delta_\mu=\mu_{qp}-\mu_k\tag{7}$$

则 $\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{\lambda}_{k+1},\boldsymbol{\mu}_{k+1}$ 可以表达为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{\delta}_x \\
\lambda_{k+1} &= \lambda_k + \alpha_k \boldsymbol{\delta}_\lambda \\
\boldsymbol{\mu}_{k+1} &= \boldsymbol{\mu}_k + \alpha_k \boldsymbol{\delta}_\mu
\end{aligned} \tag{8}
$$

α_k 可以通过line search的方法去获得。

总结算法步骤：

第1步：

输入初始点 $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{\lambda_0}, \boldsymbol{\mu_0}$ ， 以及tolerance ε,设置 $\boldsymbol{k=0}$

第2步：

解公式4对应的等价QP问题，得到 $\boldsymbol{\delta_x}, \boldsymbol{\lambda_{qp}}, \boldsymbol{\mu_{qp}}$,然后利用公式7获得 $\boldsymbol{\delta_\lambda}$， $\boldsymbol{\delta_\mu}$

第3步：

求解line search $\boldsymbol{\alpha_k}$

第5步：

利用公式8更新得到 $\boldsymbol{x_{k+1}}, \boldsymbol{\lambda_{k+1}}, \boldsymbol{\mu_{k+1}}$

第6步：

判断终止利用公式9：

$$
\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \lambda_k \\ \boldsymbol{\mu}_{k+1} - \boldsymbol{\mu}_k \end{bmatrix} \right\|_2 < \varepsilon \tag{9}
$$

从上面可以看出SQP不是将普通有约束问题，在一点处利用泰勒展开，变成QP问题，然后求解，得到迭代方向.而是求解每一步的KKT条件相当于求解一个qp方程（kkt方程对应了一个qp问题），得到迭代方向。

编辑于 2023-02-06 13:52・IP 属地江苏

编程语言 计算机

▲ 赞同 4 ▼ 添加评论 分享 喜欢 收藏 申请转载 ···

写下你的评论...

还没有评论，发表第一个评论吧

文章被以下专栏收录

运动规划和控制

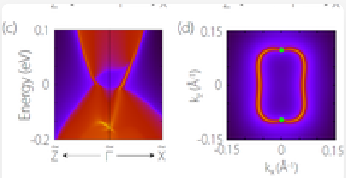
优化

推荐阅读

Sequential Quadratic Programming(SQP)

对于一个带等式约束的优化问题 \begin{aligned} \min& \ f(x) \\ \text{st } \ \ & c(x) = 0 \end{aligned} 构造拉格朗日函数 \mathcal{L} (x, \lambda) = f(x) - \lambda^T c(x) …

沈华



Quadratic Contact Point Semimetal: 理论及材料实现

Yaust 发表于计算材料学

Conic Linear Programming 锥线性规划

锥线性规划Conic Linear Programming，记作CLP，锥线性规划，是线性规划一种自然的拓展。 许多经典的优化问题，诸如LP、SDP、SOCP都是CLP的一种特殊形式。直到最近20年来，才有…

落落小方地... 发表于分布式鲁棒...

Deep Unsupervised Cardinality Estimation…

作为智能数据专栏，本文解决最新（VLDB20）的一篇论文Deep Unsupervised Cardinality Estimation，原文可以google。 本文目标是要做一个cardinality(selectivity)…

学习者