

从零开始几何处理：RBF函数

 启思
图形学，视觉，机器学习

引入

上一篇文章中，介绍了函数插值和函数拟合，还有函数空间的概念。

一个好的函数空间很重要，它决定了这个函数空间内的函数的性质。

本篇文章介绍常用的 RBF 径向基函数，并展示一下如何使用 C++ 调用 Python 接口来实现 RBF 拟合。

RBF（径向基函数）

RBF（Radial Basis Function，径向基函数）是一个函数空间中的基函数，而这些基函数都是径向函数。

所谓径向函数（Radial Function） $\varphi(\boldsymbol{x})$ 满足这样一种条件：对于某一个固定点 \boldsymbol{c} ，满足 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|)$ ，即对于围绕着某固定点 \boldsymbol{c} 的等距的 \boldsymbol{x} ，函数值相同。

常见的径向函数有很多，高斯函数是其中之一，即

$$\varphi_{\mu,\sigma}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中 $\boldsymbol{c} = \mu$ 。

使用 RBF 拟合函数

给定 m 个数据点后，在 RBF 的函数空间中，我们需要拟合函数 $f(\boldsymbol{x})$ 。

假设 $f(\boldsymbol{x})$ 由 n 个互不相同的 RBF 的线性组合加上一个常数项组成，即

$$f(\boldsymbol{x}) = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i * \varphi_{\mu_i, \sigma_i}(\boldsymbol{x})$$

此时我们发现，未知量有 a_i, μ_i, σ_i 。

一种求解方法是，直接规定 μ_i, σ_i 的取值：设 $n = m$ ，直接令 $\mu_i = \boldsymbol{x}_i, \sigma_i = \sigma'$ ，则此时只需要优化 a_i 即可， σ' 作为超参数手动调节。此时就是在优化组合系数，直接列线性方程组求解即可，实际上就是 Games 102 hw1 中的高斯基函数拟合。

另一种方法是，我们直接优化 a_i, μ_i, σ_i 。减少人工干预可能会求出更好的结果，但是这带来了求解的困难。幸运的是，我们可以利用神经网络来求解这个问题。

RBF 神经网络

首先可以轻松观察到，对于任意的正态分布，即 $\varphi_{\mu,\sigma}(\boldsymbol{x})$ ，均是由标准正态分布的线性变换得到的。

更精确的，

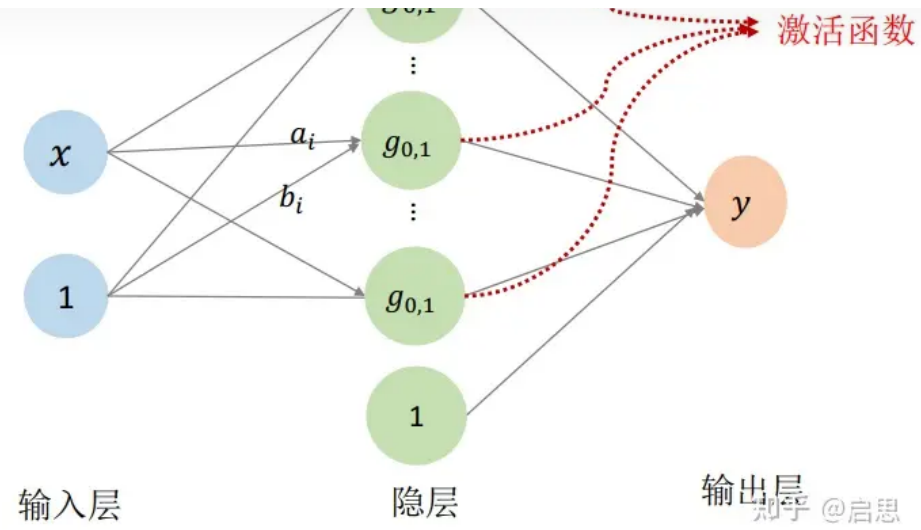
$$\begin{aligned} \varphi_{\mu,\sigma}(\boldsymbol{x}) &= \varphi_{0,1}(a\boldsymbol{x} + b) \\ a &= \frac{1}{\sigma}, b = -\frac{\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

于是，求解 $f(\boldsymbol{x}) = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \varphi_{\mu_i, \sigma_i}(\boldsymbol{x})$ ，相当于求解

$$f(\boldsymbol{x}) = w_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} w_i * \varphi_{0,1}(a_i \boldsymbol{x} + b_i)$$

通过观察可以发现，输入 \boldsymbol{x} 首先进行了一个仿射变换，变成 $a_i \boldsymbol{x} + b_i$ ，之后通过激活函数 $\varphi_{0,1}$ 后，又由参数 w_i 进行了一次仿射变换，最终得到答案。

这实际上是一个单隐层的神经网络

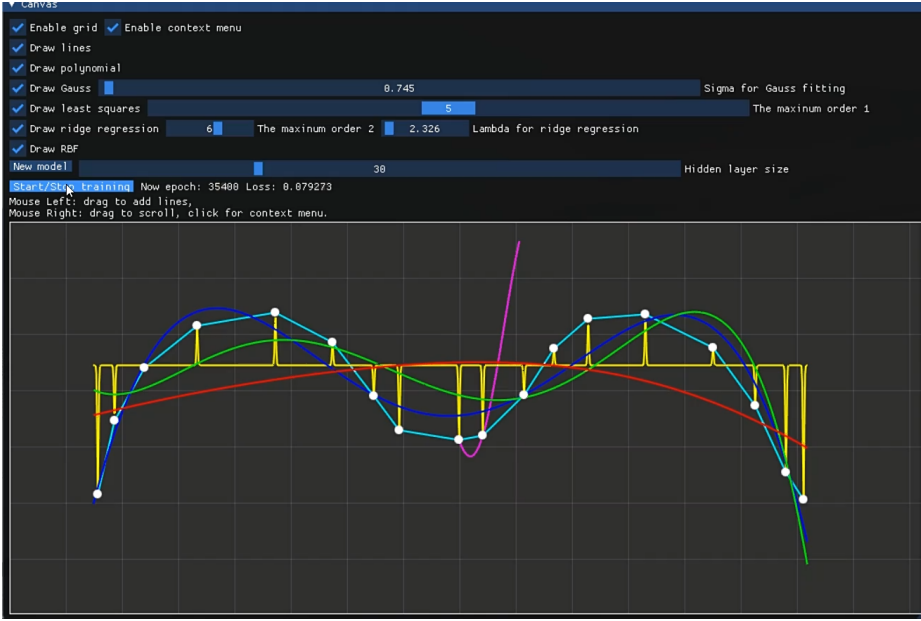
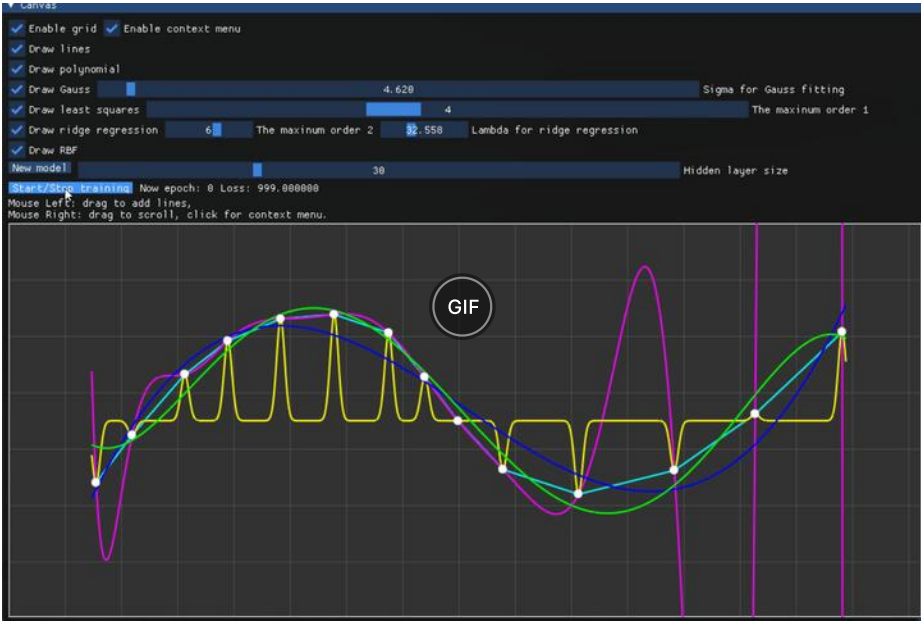


接下来，只需要规定损失函数（即定义“最佳逼近”）再反向传播，即可训练。

RBF 神经网络的实现

代码实现就是简单的罗列上述结构。使用 TensorFlow 实现，利用 Python 自带的 API 将代码传递给 C++ 程序使用。

结果大概长这样。



实现

代码太长就不贴了，见 github.com/DQSSSSS/GAME...

参考资料

[1] Games 102 slides. staff.ustc.edu.cn/~lgli...

[2] en.wikipedia.org/wiki/R...

发布于 2021-09-24 17:11

计算机图形学 三维建模 曲线拟合

写下你的评论...

2 条评论

默认 最新