数据分析 样条

在B-spline中，如何理解knot和breakpoint？彼此之间联系和区别是什么？

本人数据分析小白一枚。最近在看Ramsay的函数型数据分析，因为在国外，所以没有中文书参考。由于本人英文水平不是很高，在看到其中B-spline时，不...显示全部

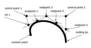
6 个回答 默认排序

FrancisZhao
运动控制/运动规划-攻城狮 + 关注

110 人赞同了该回答

上篇中我们讲解了贝塞尔曲线

FrancisZhao：曲线篇: 贝塞尔曲线
537 赞同 · 23 评论 文章



B样条是贝塞尔曲线的延申，贝塞尔曲线是B样条的基础， B样条可以看成很多组贝塞尔曲线的拼接。因此，如果你还不了解贝塞尔曲线，建议你先看懂上一篇。

由来

贝塞尔曲线是在汽车的曲线设计种首次被提出的，汽车的外形设计十分复杂，控制点的表示方式能够简化其数学描述，将其数学化的表示出来。

如今汽车的线条感很强，曲线设计很复杂

还记得贝塞尔曲线的特质吗？主要的两个， 1 阶次是控制点个数减1， 2 牵一发动全身，移动一个控制点，整段曲线都会变化。

如果要用贝塞尔曲线来设计上图种的汽车造型， 那么汽车的设计简直是噩梦，形状复杂的曲线需要更多的控制点，曲线的阶次就会变得非常高。牵一发而动全身， 想改一下车屁股的造型， 移动一下控制点，结果车头的造型也被改变了。

为了克服贝塞尔曲线的以上两大缺点，B样条应运而生了。

相关问题

如何构建一个TNO鉴中鉴的世界呢？ 18 个回答
如果穿越到TNO世界，你会做什么？9 个回答
knot哦无聊就？ 0 个回答
tno世界线731部队是否依然存在？ 0 个回答
TNO世界线里的人会怎么看KR的世界线？ 1 个回答

B样条采用解决方案是贝塞尔曲线的拼接，也就是把一条曲线变为多段贝塞尔曲线的拼接。

定义

先看B样条的定义：

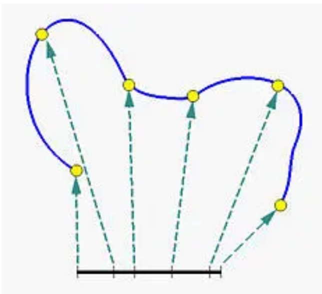
B样条有三大要素：***节点，控制点，阶次。***

控制点和贝塞尔的一样，就是空间上决定曲线形状的点。

设*U*是*m* + 1个非递减数的集合，*u*0 <= *u*2 <= *u*3 <= ... <= *um*。*ui*称为**节点**（*knots*），集合*U*称为**节点向量**（*knot vector*），半开区间[*ui*, *ui*+1) 是第*i*个节点区间（*knot span*）。注意某些*ui*可能相等，某些节点区间会不存在。如果一个节点 *ui* 出现 *k* 次 (即，*ui* = *ui*+1 = ... = *ui*+*k*-1), 其中 *k* > 1, *ui* 是一个重复度（*multiplicity*）为*k*的多重节点，写为 *ui*(*k*)。 否则，如果*ui*只出现一次，它是一个简单节点。如果节点等间距(即， *ui*+1 - *ui* 是一个常数，对 0 <= *i* <= *m* - 1)，节点向量或节点序列称为均匀的；否则它是非均匀的。

节点可认为是分隔点，将区间[*u*0, *um*]细分为节点区间。所有B-样条基函数被假设定义域在[*u*0, *um*]上。在本文中，我们经常使用*u*0 = 0和*um* = 1，所以定义域是闭区间[0,1]。

比如节点向量是 [0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0]

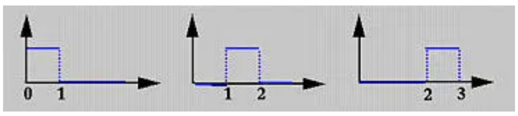


上图是一段B样条曲线，六个节点把曲线分成了五段，节点向量为 [0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0]

为了定义B-样条基函数，我们还需要一个参数，基函数的次数（degree）*p*，第*i*个*p*次B-样条基函数，写为*Ni,p*(*u*)，递归定义如下：

$$
\begin{aligned}
N_{i,0}(u) &= \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{i,p}(u) &= \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)
\end{aligned}
$$

上述公式通常称为*Cox-de Boor*递归公式。 这个定义看起来很复杂；但是不难理解。如果次数（degree）为零（即， *p* = 0），这些基函数都是阶梯函数，这也是第一个表达式所表明的。即，如果*u*是在第*i*个节点区间[*ui*, *ui*+1)上基函数*Ni*,0(*u*)是1。 例如，如果我们有四个节点*u*0 = 0, *u*1 = 1, *u*2 = 2和 *u*3 = 3, 节点区间 0, 1 和2是[0,1), [1,2), [2,3)，0次基函数是*N*0,0(*u*) = 1 在 [0,1)，在其它区间是0； *N*1,0(*u*) = 1 在 [1,2)上，在其它区间是0； *N*2,0(*u*) = 1在[2,3)上，其它区间是0。如下图所示：



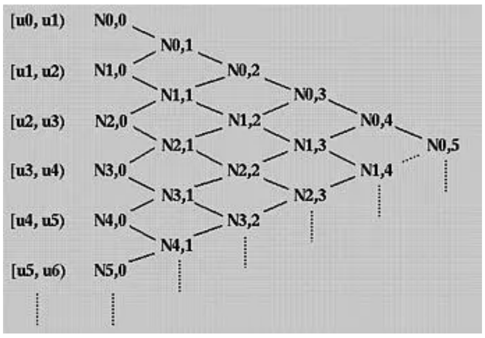
这一部分一定要理解，为什么是这种阶梯函数呢？其实0阶的意思就是比线性插值低一阶，两个点之间的线性插值是一阶曲线，那么0阶呢？ 就是不是线了，就是点。

因此如果你要的B样条
点，因为基函数除了1

插值了嘛， 如果低一阶的曲线是0阶曲线，那么不就是两点之间的线性插值嘛。

建议再看一下我在贝塞尔曲线那一篇如何用逐渐减低阶次的方式递归来理解的。你就明白了，B样条就是贝塞尔穿了个马甲。

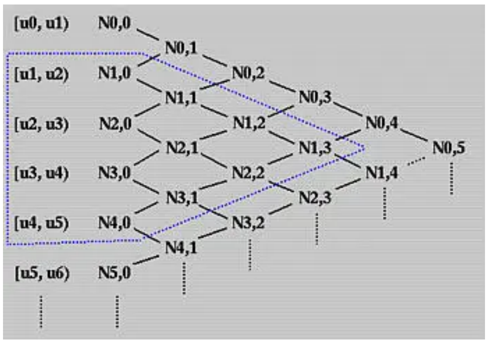
为了理解p大于0时计算$N_{i,p}(u)$的方法，我们使用三角计算格式。所有节点区间列在左边（第一）列，所有零次基函数在第二列。见下图。



因此，第一列就是控制点，第二列是第一列控制点的线性插值，第三列是第列点的线性插值，以此类推。

两个重要的性质

因为 $N_{i,1}(u)$ 是从 $N_{i,0}(u)$ 和 $N_{i+1,0}(u)$计算的而 因为$N_{i,0}(u)$和$N_{i+1,0}(u)$ 在区间$[u_i, u_{i+1})$和$[u_{i+1}, u_{i+2})$分别是非零的，$N_{i,1}(u)$ 在这两个区间都是非零的。换句话说，$N_{i,1}(u)$在$[u_i, u_{i+2})$上是非零的。相似地，因为 $N_{i,2}(u)$ 依赖于$N_{i,1}(u)$ 和$N_{i+1,1}(u)$且因为这两个基函数在$[u_i, u_{i+2})$和$[u_{i+1}, u_{i+3})$分别是非零的，$N_{i,2}(u)$在$[u_i, u_{i+3})$上非零。总之，为确定基函数$N_{i,p}(u)$, 的非零定义域，可以追溯到三角计算格式直到回到第一列。例如，假设我们想找到 $N_{1,3}(u)$的非零定义域。基于上述讨论，我们可以从西北和西南方向追溯直到第一列为止，如下图中蓝色虚线所示。因此$N_{1,3}(u)$在 $[u_1, u_2)$, $[u_2, u_3)$, $[u_3, u_4)$ 和$[u_4, u_5)$上是非零的。或，相等地，它在$[u_1, u_5)$上非零。.



这个具体是什么意思呢： 因为基函数N 最后是和控制点直接相乘的，换句话说，基函数N不为零就意味着控制点被用上了，如果基函数N为零就意味着控制点根本就没有用上。

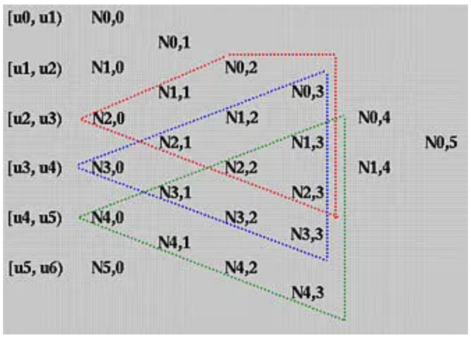
总之，我们有下列观察：

基函数 $N_{i,p}(u)$ 在$[u_i, u_{i+p+1})$上非零。或，相等地，$N_{i,p}(u)$ 在 $p+1$个节点区间$[u_i, u_{i+1})$, $[u_{i+1}, u_{i+2})$, ..., $[u_{i+p}, u_{i+p+1})$上非零。

> 我再把这句话翻译成大家更理解的话。**$N_{i,p}(u)$ 就是p阶的B样条函数，第i个控制点仅仅在$[u_i, u_{i+1})$, $[u_{i+1}, u_{i+2})$, ..., $[u_{i+p}, u_{i+p+1})$被用上了，在其他的节点区间$[u_i, , u_{i+p+1})$之外，根本就没用上。**

接着，我们看相反的方向。给定一个节点区间$[u_i, u_{i+1})$,我们想知道哪个基函数会在计算中使用这个区间。我们可以以这个
形里的基函数使用 N_i

p+1 项，即 $N_{i,p}(u)$, $N_{i-1,p}(u)$, $N_{i-2,p}(u)$, ..., $N_{i-p+2,p}(u)$, $N_{i-p+1,p}(u)$ 和$N_{i-p,p}(u)$。



让我们看上图。为了找到所有3次在 [u_4, u_5) 上非零的基函数，画出两个箭头和所有在垂直边的函数是我们想要的。这个例子，是$N_{1,3}(u)$, $N_{2,3}(u)$, $N_{3,3}(u)$, 和$N_{4,3}(u)$.用黄色三角表示。蓝色 (*resp.*, 红色) 三角显示的是在[u_3, u_4) (*resp.*, [u_2, u_3))上非零的3次基函数。注意在[u_2, u_3)上只有3个3次基多项式。.

总之，我们观察到下列特性：

在任何一个节点区间 [u_i, u_{i+1}), 最多有 p+1个p 次基函数非零，即：$N_{i-p,p}(u)$, $N_{i-p+1,p}(u)$, $N_{i-p+2,p}(u)$, ..., $N_{i-1,p}(u)$ 和 $N_{i,p}(u)$,

> 我再把这句话翻译成大家更理解的话。**区间 [u_i, u_{i+1})中，只有第i-p个控制点到第i和控制点被用上了，其他的控制点的位置不会相应区间 [u_i, u_{i+1})上曲线的形状。p阶次的B样条，最多用到相对应的p+1个点。 再仔细回想一下，这不就是贝塞尔曲线的性质嘛，曲线的阶次等于控制点的个数减1.**
>
> **因此，你就能更深一步的理解B样条曲线是贝塞尔曲线拼接而来的，在每一个节点的区间内都可以看作一个贝塞尔曲线。**

因此，能看出来，节点的设计是很关键的，下一篇我来说一下节点向量的设计。

专栏里每一篇都是我一个字一个字打的，都是我认为的原创干货。
欢迎指正讨论，转载请注明，认同请点赞。
这个系列的文章很容易出错，希望大佬们多多指正补充。
仅仅收藏是学不会的，还得点赞喜欢加转发啊。

FrancisZhao：专栏文章列表以及一些说明
167 赞同 · 10 评论 文章

本文的主要参考资料：

> 搜索结果提示 - 博客园找找看
> CS3621 Introduction to Computing with Geometry Course Notes
> B-样条曲线教程（B-spline Curves Notes）目录

编辑于 2020-05-11 22