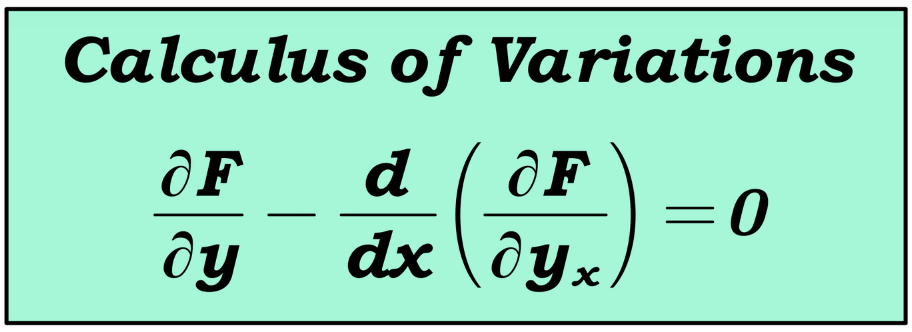
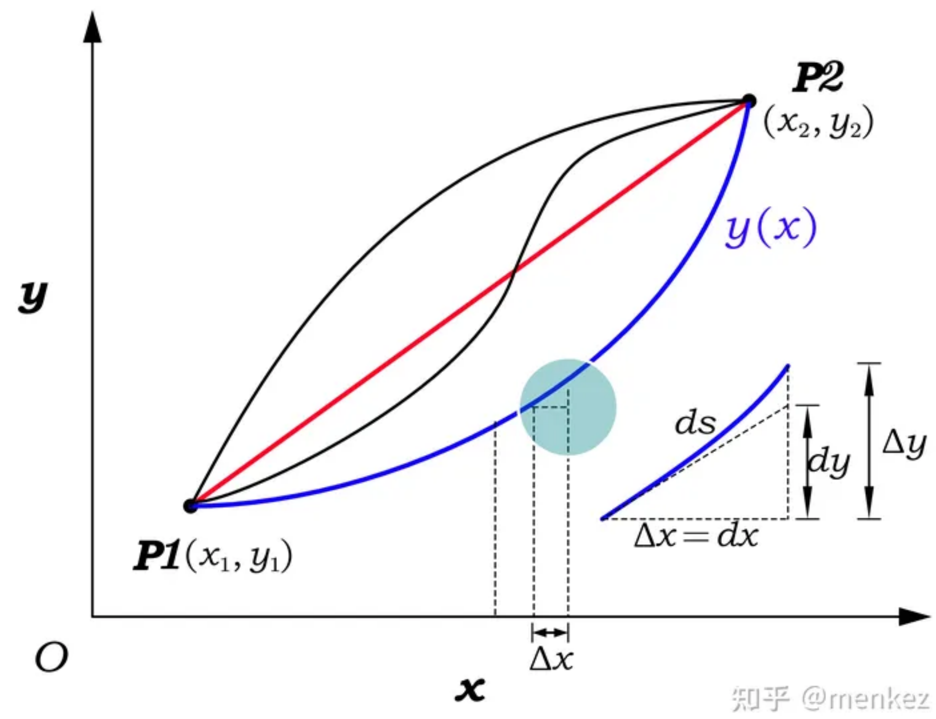


【变分计算1】欧拉-拉格朗日方程

menkez
瞎写写。

许多数学物理问题都涉及到能够以积分形式表示的量的最小化或者最大化。

比如说对于下图，同一平面内的两点（ $P1, P2$ ）之间的路径 $y(x)$ 有无数条，那么哪一条路径 $y(x)$ 能够使得两点之间的距离最小呢（当然我们都已经知道是图中红色的线段）？



对于任意一条路径，比如图中的蓝色曲线，通过路径 $y(x)$ 连接的两点之间的距离可以通过积分来表示。将两点之间的 x 区间分成很多个小的 Δx，对于一个 Δx 区间（很小）上的弧长 ds 可以近似成线段，那么弧长便可写为 $ds=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\Delta x\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$

其中 Δx 很小时， $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=y_x$，其中 y_x 表示 $y(x)$ 对 x 的一阶导数。那么将所有 Δx 区间内的弧长相加，便得到 $P1, P2$ 两点在路径上 y 的距离为

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y_x^2}dx$$

因此固定的两点之间的**距离实际上就是路径函数 y 的泛函**。函数代表了数到数的映射，而泛函代表了函数到数的映射，即给定一个函数，泛函能够得到一个数（比如此例中，如果取不同的路径 y，那么积分得到的结果 $J(y)$ 即距离也会不同）。**问题就是要找到一个路径函数 y 使得泛函 $J(y)$ 取极小值。**

上面的问题可以陈述的更普遍一些，当对于一个关于函数 y（ y 在区间 $[a,b]$ 二阶可微）的泛函为

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y_x)dx$$

在 $f(a), f(b)$ 已知，且 F 对其包含的所有参数（ x, y, y_x ）均二阶可微的情况下，为了让泛函取极大或极小值，在这种一般性的情况下，函数 $y(x)$ 应当满足什么条件?

可以**对比上例理解**：固定两点，两点之间的路径（看作 y ）有很多条，但是能够使得连点之间距离（路径不同，距离不同，即距离是路径的泛函）最短的路径只有一条，即通过 $P1, P2$ 连点的路径必须是一条直线，这就是函数 y 此例中为了使 $J(y)$ 取极小值所应当满足的条件。

对于上面的一般性情况，我们将证明当泛函 $J(y)$ 取极值时，函数 $y(x)$ 应当满足欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y_x})=0$$

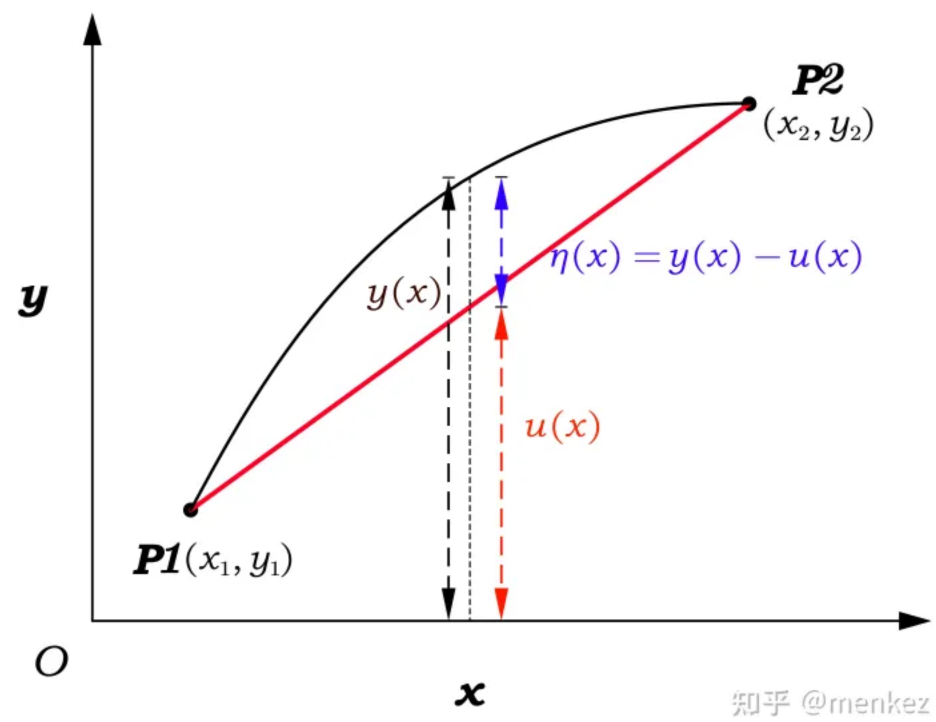
这里 $F, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y_x}$ 一般而言是 x, y, y_x 的函数，那么 $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y_x})$ 可使用链式法则进行求导，这样欧拉-拉格朗日方程的左边相当于是 x, y, y_x, y_{xx} （这里 y_{xx} 指 y 对 x 的二阶导数）的非线性函数。也就是说对于 y，欧拉-拉格朗日方程实际上是一个二阶非线性的常微分方程，再加上 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 两个边界条件，当然就能确定一个函数 $y(x)$ 使积分泛函 $J(y)$ 取极值。

下面讲入**证明部分**。

$y(x)=u(x)+\epsilon\eta(x)$

其中 ϵ 是一个实参数，$\eta(x)$ 定义为其他任何一条 $P1, P2$ 两点之间的函数 $y(x)$ 与 $u(x)$ 的差值。由此可以看出 $\eta(x)$ 应当满足 $\eta(a)=\eta(b)=0$，那么 $y(x)$ 当然也满足边界条件，也代表两点之间的一条路径，并且在确定的 $\eta(x)$ 下，其函数表达式只与 ϵ 有关。

那么对于**任意确定**的函数 $\eta(x)$，泛函$J(y)=J(u+\epsilon\eta)=J(\epsilon)$，应当只是参数 ϵ 的函数，且 $dJ(\epsilon)/d\epsilon|_{\epsilon=0}=0$（$\epsilon=0$ 时，$y(x)=u(x)$,泛函 $J(y)$ 取极值）。



为了要满足上面的条件（$dJ(\epsilon)/d\epsilon|_{\epsilon=0}=0$）,我们首先来计算在任意确定的 $\eta(x)$ 的情况下计算$dJ(\epsilon)/d\epsilon$。

$\frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon}=\frac{d}{d\epsilon}\int_a^b F(x,y(x),y_x(x))dx$

$=\int_a^b \frac{\partial F(x,y(x),y_x(x))}{\partial\epsilon}dx$

$=\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial y_x}\frac{\partial y_x}{\partial\epsilon})dx$（链式求导法则）

$=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)dx+\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y_x}\eta'(x)dx$（$\eta'(x)=d\eta(x)/dx$）

$=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)dx+\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y_x}d\eta(x)$（$\eta'(x)dx=d\eta(x)$）

$=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)dx+\eta(x)\frac{\partial F}{\partial y_x}|_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y_x})\eta(x)dx$（分部积分）

$=\int_a^b[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y_x})]\eta(x)dx$（$\eta(a)=\eta(b)=0$）

当 $\epsilon=0$ 时有:

$\frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}=\int_a^b[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u_x})]\eta(x)dx$

由于 $\eta(x)$ 是任意的，$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u_x})$ 在 F 给定后是一个固定的函数。如果 $\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u_x})$ 不等于0，被积函数就是任意的，无法保证积分恒为0。因此

$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u_x})=0$

得证（在泛函取极值时 $y=u(x)$）。

最后，我们看看如何使用欧拉-拉格朗日方程来解决文章开头的问题。

$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y_x^2}dx$，那么 $F=\sqrt{1+y_x^2}$。

$\frac{\partial F}{\partial y_x}=\frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2}}, \frac{\partial F}{\partial y}=0$，注意这里 F 不显含 y。

那么 $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y_x})=\frac{\sqrt{1+y_x^2}dy_x-y_x d\sqrt{1+y_x^2}}{1+y_x^2}$

$=\frac{\sqrt{1+y_x^2}y_{xx}-y_x\frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2}}y_{xx}}{1+y_x^2}=\frac{y_{xx}}{(1+y_x^2)^{\frac{3}{2}}}$

将上面的求导结果代入欧拉-拉格朗日方程，则有

$y_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=0$

这个常微分方程很容易得到 y 的通解为 $y=C_1x+C_2$，其中待定系数 C_1, C_2 可由两端点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 确定。这也确实说明了使得同一平面上两点之间距离最小的途径是一条线段。

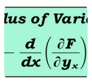
，会达到一个极值（极大或极小）。这个热力学量往往是系统中其他物理量（位置的函数，比如说电势分布）的一个积分泛函，那么这个时候我们就能够通过求解欧拉-拉格朗日方程来得到这些物理量在体系达到**平衡时的空间分布所满足的微分方程**，进而结合边界条件可以求解这些物理量的空间分布。

未完待续。。。

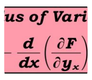
- **拉格朗日乘子法**
- **约束条件下的变分问题**
- **拉格朗日力学和哈密顿力学**

已完结

menkez：【变分计算1】欧拉-拉格朗日方程
178 赞同 · 13 评论 文章



menkez：【变分计算2】多变量系统下的变分方程
49 赞同 · 9 评论 文章



编辑于 2021-03-28 16:12

变分法 数学 微分方程

写下你的评论...

13 条评论 默认 最新

CaiNanDangDao
这么顶的文章竟然没人评论，赞一个~哈哈，已关注

2021-03-16 回复 4

menkez 作者
😊持续更新
2021-03-16 回复 1

事在人为
请问你是学什么专业的?
2022-10-31 回复 2

butterfly
讲得好好，好详细，大赞啊😭🙏🙏🙏🙏
2021-11-21 回复 赞

灿烂小魔王
太顶了，但为想问一下为什么这个曲线一定要过 a和b 点
2021-05-08 回复 赞

menkez 作者
因为实际中的物理问题边界条件一般是给定的，像解微分方程，你得给出边界条件，我才能得到具体的解
2021-05-08 回复 2

wang
很清楚啊，赞一个
2022-09-14 回复 赞

皇阿玛
写的真不错，希望作者持续加油❤️
2022-03-23 回复 赞

yourmarx
具体的解不要。L对广义速度（x对时间的导数），怎么处理。
2022-01-07 回复 赞

丿方可
如果被积函数不含有y对x的导数项，欧-拉方程还有效吗?
2021-12-30 回复 赞

丿方可 ‣ 惡魔城最上階
谢谢讨论。您的结果是运用了欧拉方程之后。我这里可以写F(x,y,y')=x+y，偏导得到F_y=1，然而根据欧拉方程得到F_y(x,y)=0，两者咋矛盾呢?
2022-04-19 回复 赞

惡魔城最上階
没有y‘欧拉-拉格朗日方程就变成了F_y(x,y)=0, 相当于F与y无关，然后J就变成定积分了，被积函数是F (x).