运筹学S01E02——单纯形法

四野秋虫
歇一歇

Introduction

上一节中运筹学S01E01——线性规划，我们给出了线性规划的概念与一些相关的性质，最后通过凸集的性质证明出了，最优解一定在凸集的顶点上，但在顶点个数过多时，如何找到最优解又便成了一件麻烦的事情，所以本节介绍一种实用的方法——单纯形法。

2.1 definition

单纯形：n维空间内有n+1个顶点的多面体。

例如0维空间内的点，1维空间内的线段，2维空间内的三角形,高维也是以此类推。也许从物理的角度很难想象高维空间是什么样子的，但这不是我们问题的关键，我们只需从数学角度理解，每当往向量组内加一组线性无关的向量，向量组的维度便增加一。也可以把维度理解为对应矩阵的秩。

单纯形法分为下面几个步骤：①初始基可行解的确定，②求出基可行解，③最优性检验，④换基变量⑤迭代运算。

这样直接看步骤写出来一定很难以理解，它的内在思路是这样的，首先我们可以确定一组基，然后通过这一组基求出基可行解。这是①②步的工作，当我们求出了基可行解之后，我们还需要判断它是不是最优解，这就是第③步的工作最优性检验。假设我们检验后知道，所求的解是最优解，那运气确实很好，倘若不是也没有关系，我们就进入第四步换基变量。这样就可以求出新的一组基可行解，再进行最优性检测，直到找到最优解为止，这叫做迭代运算。

下面通过一个例子来说明单纯形法的是如何工作的。

2.2 example

我们直接给出线性规划的标准型：

$$max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, .., 5 \end{cases}$$

①初始基可行解的确定：

先写出系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,(非负条件不写在内)

可见这个矩阵是5*3维的，根据上一节所讲的知识我们需要找一个3*3维的非奇异子矩阵，观察到他的后三列列向量是相互独立的，可以构成一组基，即为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

,B所对应的基变量分别是 x_3,x_4,x_5 。这时在约束条件上进行变换，把基变量分别表示出来 $\begin{cases} x_3=8-x_1-2x_2 \\ x_4=16-4x_1 \\ x_5=12-4x_2 \end{cases}$,此时基变量表达式带入目标函数之中有：$z=2x_1+3x_2+0$ （目标函数之中基变量的系数均为零），此时我们只改变非基变量，就可以得到不同的基可行解。如当令 x_1,x_2 均等于0时，z=0。此时就得到了一个基可行解X.

$X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^T$ 。这个基可行解的实际意义是有利润的产品1，2均未被生产，故利润也为0。这一个基可行解对应的顶点处无法取到最优解。所以我们要换下一个顶点找。我们可以通过分析解析式来推出顶点需要怎么换。

③最优性检验

我们看目标函数的表达式：$z=2x_1+3x_2+0$ ，非基变量的系数为正，表示只要非基变量增加，z也会增加，代表z并没有达到最优解。同时这样系数为正的表达式并无法反应出约束条件对z的影响，所以我们要想办法去换元，使变量的系数都为负，然后式子中的那个常数就为最优解。

④换基变量

顺着这个思路我们来对我们的式子变换，我们先选择正系数最大的变量 x_2 ，把它转换为其他变量。我们称 x_2 为换入基变量 当 $x_1=0$ ，有 $\begin{cases} x_3=8-2x_2\geq 0 \\ x_4=16\geq 0 \\ x_5=12-4x_2\geq 0 \end{cases}$ ，由非负条件，我们换基时也要保证变量⩾0 。所以 $x_2=min(8/2,12/4)=3$,此时 $x_3,x_4\geq 0,x_5=0$ 均满足非负条件。此时 x_5 为换出基变量。所以现在我们要做的事情就是把所有的 x_2 换为 x_5 。输入基变量换为输出基变量。

原有式子 $\begin{cases} x_3=8-x_1-2x_2 \\ x_4=16-4x_1 \\ x_5=12-4x_2 \end{cases}$ 做简单的变换 $\begin{cases} x_3=2-x_1+1/2x_5 \\ x_4=16-4x_1 \\ x_2=3-1/4x_5 \end{cases}$ 就达到了互换的目的。

下一步再做最优性检测，将上式带入到目标函数中得到：$z=9+2x_1-3/4x_5$ 发现还是存在正系数，说明还不是最优解。我们需要再进行一次迭代。

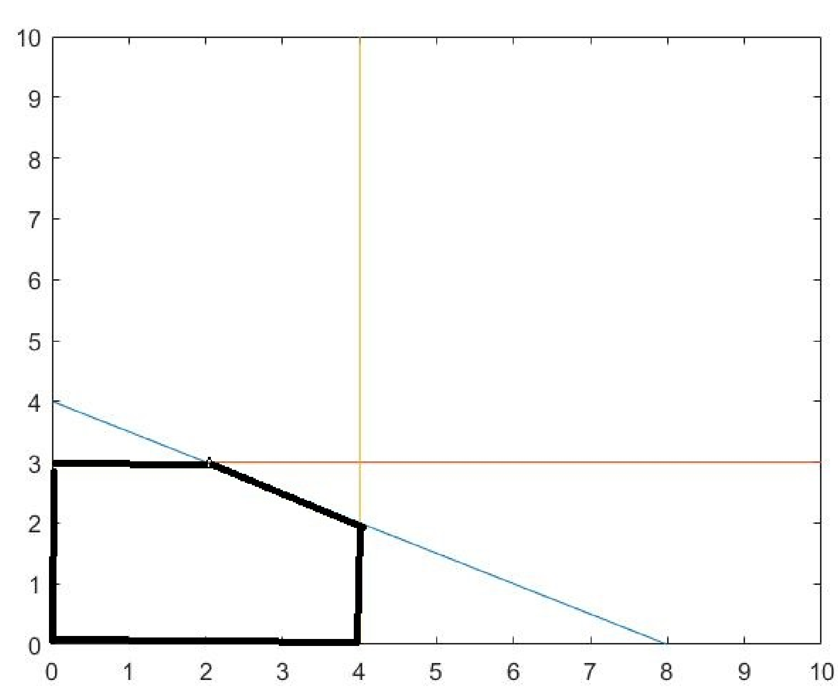
⑤迭代运算。

显然换入基变量为 x_1 ，x_2 ，$x_5=0$ 时，$x_1=min(2,4)=2$,所以换出基变量为 x_3 。作变换有 $\begin{cases} x_1=2-x_3+1/2x_5 \\ x_4=8+4x_3-2x_5 \\ x_2=3-1/4x_5 \end{cases}$ ，得到基可行解 $(2,3,0,8,0)^T$ 带入目标函数发现仍然有正系数，继续进行迭代得出基可行解 $(4,2,0,0,4)^T$ ，此时的目标函数为 $z=14-1.5x_3-0.125x_4$ 。

终于！我们得到了一个想要的函数表达形式。所以最优解就为 $(4,2,0,0,4)^T$ ，对应z的最大值为14。

2.3 *Geometric interpretation*

也许有人要奇怪了这和他的名字单纯形法有什么关系，下面就从几何角度来说明一下这个例子。



用matlab画了一个示意图，黑色框内代表可行域

该坐标轴的横纵坐标分别是x1与x2，在第一次选择基底时，我们选到了(0,0)点，然后继续迭代第二次迭代到了(0,3),第三次迭代到了(2,3),最后一次迭代到了(4,2)。这次便是我们的最优解。

单纯形法就是在任意的n维空间内的单纯形上，从一个顶点移动到另一个更好的顶点。直到找不到更好的顶点时，就说明已经达到最优解。

2.4 Remark

单纯形法很容易被编程实现，我们从算法的角度讨论一下使用这一种算法会有多大的优化效果。假设有n个顶点，最优值在一个顶点之中。

传统方法：计算出每一个，然后排序出所有的找到最大值。复杂度 $O(nlog_2n)$

单纯形法：随机选取一个，然后多次取优，复杂度O(n)。

显然单纯形法要优于传统方法，而且我们的计算是在忽略了每次顶点处计算值的时间，若是考虑进去，尤其是在数据较大，维数较多时，单纯形法的优势会十分明显。

就像你的面前有一百根口红，让你找到价格最贵的一只。假如你对口红完全没有概念，就只能一支一支去猜，直到找到最贵的一只为止。最少试一次，最多试100次，平均是50次。可单纯形法会保证你每一次拿到的都比前一次贵，问平均试多少次可以拿到最贵的那只？有趣的概率论问题，有兴趣的同学可以算一下。

小结

这一节介绍了单纯形法和单纯形法应用的一个实例，单纯形法使用到的数学工具是比较简单，步骤也很好理解。但背后所用的优化思想值得好好体会。运筹学系列继续连载中，观看第三集请点击：运筹学S01E03——数学建模之运输问题

编辑于 2018-02-18 13:16

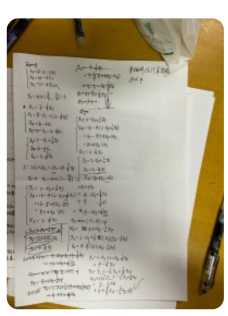
数学 运筹学

34 条评论 默认 最新

小明在线
美中不足的是，第五步的迭代运算可以写的更详细一些吗？
2019-03-04 6

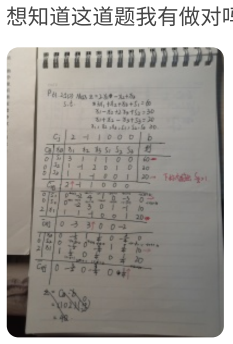
Samantha
感谢！！！ 上课没听懂 你这里五分钟就看懂了
10-11 1

甜心大宝贝
计算过程



2021-10-27 1

Romance
想知道这道题我有做对吗



2021-07-07 3

知乎用户S8o9b0
矩阵不是3*5嘛？
2019-11-14 2

Lucky
是的，应该笔误
2020-03-05 赞

豌豆先生
原来simplex中文叫这个
2018-04-15 2

肉脍吊面貓
感谢

2019-09-16 1