# 参数估计(一).矩估计法

雨林丶
又胖又瘦的人



本人最近在整理概率论与数理统计的相关知识，为防止遗忘，会将一些重要知识点写成文章，大家走过路过多给给意见与批评~

这篇文章大致介绍了矩估计法的原理与例题，另外还写有其他参数估计方法的文章（极大似然估计、贝叶斯估计等），见最后的传送门。觉得有用的点个赞支持下～

## 1.参数估计

设总体 $X$ 的分布函数的形式已知，但它的一个或多个参数未知，借助于总体的一个样本来估计总体未知参数的值的问题称为参数的**点估计问题**。$F(x;\theta)$ 表示在待估参数 $\theta$ 下的一个分布函数。 $f(x;\theta),p(x;\theta)$ 同理。

## 2.矩估计

设$X$ 是一随机变量，若 $E(X^k)$ 存在，则称它为 $X$ 的 $k$ 阶原点矩，简称 $k$ 阶矩。

我们称 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 为样本 $k$ 阶矩。 样本 $k$ 阶矩 $A_k$ 是 $k$ 阶总体矩 $\mu_k=E(X^k)$ 的无偏估计量。这也正是矩估计法的原理。

设 $X$ 为连续型随机变量，概率密度为 $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$ ；或 $X$ 为离散型随机变量， 其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 。 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 为待估参数， $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $X$ 的样本。假设总体 $X$ 的前 $k$ 阶矩为：

$$\mu_l=E(X^l)=\int_{-\infty}^{\infty}x^lf(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)dx\quad(\text{连续型})$$

或

$$\mu_l=E(X^l)=\sum x^lp(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)\quad(\text{离散型})$$

通过式子可以看出，前 $k$ 阶矩是对于 $\theta_1,\cdots,\theta$ 的函数。而样本 $k$ 阶矩是 $k$ 阶矩的无偏估计，故我们可以得到思路：

1. 假设我们有 $k$ 个待估参数，连立1阶矩、2阶矩、直到 $k$ 阶矩，我们就得到了 $k$ 个方程， $k$ 个未知量（待估参数）；
2. 解得每个待估参数，接着用样本 $k$ 阶矩替换 $k$ 阶矩即完成估计。

例如：

有两个未知量，故我们需要列出 1 阶矩和 2 阶矩：

$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = (a+b)/2 \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \\ b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$$

由于样本$k$阶矩是$k$阶矩的无偏估计量，故用$A_1, A_2$代替$\mu_1, \mu_2$得到$a, b$的矩估计量为：

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \\ A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \bar{X} - \sqrt{3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2\right)} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\ b = \bar{X} + \sqrt{3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2\right)} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \end{cases}$$



## 3.参考资料

1. 《概率论与数理统计》第四版

## 4.传送门

最大似然估计：zhuanlan.zhihu.com/p/55...

贝叶斯估计：zhuanlan.zhihu.com/p/72...

编辑于 2020-06-09 23:58

概率论与数理统计　参数估计　矩估计