

3 dimenziós D-szimbólumok és a Thurston-sejtés

Boróczki Lajos

2011. október 25.

Tartalomjegyzék

1. D-szimbólum felépítése	2
1.1. Példa	2
2. Lehetséges D-szimbólumok	3
2.1. Feltételek	3
2.2. Rész D-szimbólum	5
3. D-szimbólumok felsorolása	6
4. Éltranszitiv kövezések	7
5. Splitting probléma és a Thurston-sejtés (támadása)	7

1. D-szimbólum felépítése

D-szimbólum, mint új nyelvezet .

- Kompakt alaptartományú kövezés baricentrikus felbontása
- Szomszédsági operációk Következő lépésként bevezetünk szomszédsági operációkat az előbb előállított baricentrikus szimplexekre: $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d$. Az operációk jelentése: $\sigma_i(C)$ a $C \in \mathcal{C}$ szimplex azon szomszédja, amely az i -lapja, azaz az i . csúccsal szemközti lap mentén szomszédos C -vel. Minden σ_i operáció egy involúció a fent leírt szimplexek \mathcal{C} halmazán.

Jelölés:

$\sigma_0: \cdots \cdots \cdots$, $\sigma_1: - - - -$, $\sigma_2: \text{————}$, $\sigma_3: - \cdot - \cdot - \cdot$

- Egybevágóság csoport szerinti szimplex pályák halmaza Általában megkövetelhetjük, hogy a kövezésnek egy egybevágóság csoportja változatlanul hagyja a kövezés kombinatorikus struktúráját, így a baricentrikus felbontást is. Vethetjük az egybevágóság csoport szerinti szimplex pályák halmazát, ezeken is jól értelmezett lesz a szomszédsági operáció.
- $(d - 2)$ -lap körüli szimplex pályák. Következő lépésként vizsgáljuk meg, hogy egy $(d - 2)$ -lap körül (3 dimenzióban él körül) hány baricentrikus szimplex (\mathcal{M} mátrix-függvény értékeinek duplája) illetve hány szimplex pálya (\mathcal{R} mátrix-függvény értékek duplája) csatlakozik.
- Egyértelműség: A baricentrikus felbontásban csak az alaptartomány csúcspontjaihoz tartozó szimplex csúcsok lehetnek végtelen távoli pontok, ezért minden kövezés leírható D-szimbólummal és ez permutáció erejéig egyértelmű. FIXME: Miért nem foglalkozunk azzal az esettel, amikor egy egész él végtelen távol van?

1.1. Példa

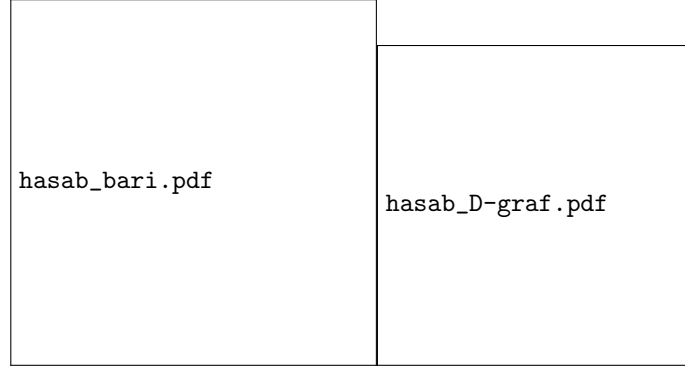
Az \mathbb{E}^3 tér négyzetes hasábbal történő egyik legegyszerűbb térkitöltése. Baricentrikus felbontása és a szimplex pályákhoz tartozó multigráf: 1. ábra. Mivel minden szimplex pályára definiálva van minden szomszédsági reláció, ezért az áttekinthetőség kedvéért azokat a hurok relációkat nem ábrázoljuk, melyek sík tükrözéssel önmagára képezik le a pályát.

A mátrixfüggvények (\mathcal{D} a szimplex pályák halmaza, $D_i \in \mathcal{D}$):

$$\mathcal{R}(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}(D_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ábra. Piros:1, kék:2, zöld:3



$$\mathcal{R}(D_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall D_i \in \mathcal{D} : \mathcal{M}(D_i) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Lehetséges D-szimbólumok

2.1. Feltételek

D-szimbólum: $(\Sigma_I, \mathcal{D}, \mathcal{M})$ hármasok. Az alábbi feltételeknek megfelelő $(\Sigma_I, \mathcal{D}, \mathcal{M})$ hármasokat nevezzük Delone-Delaney-Dress szimbólumnak, röviden D-szimbólumnak.

- Természetes feltételek D-diagramokra (mivel kövezések baricentrikus felbontásainak leírására használjuk őket.):

1. \mathcal{D} véges
2. A szimplex pályákon értelmezett szomszédsági operációk involutív permutációk, vagyis $\forall i \in I, \sigma_i \in \Sigma_I, \forall D \in \mathcal{D}$:

$$\sigma_i \sigma_i(D) = D$$

A diagram minden csúcsában az azonos színű élek foka 1 vagy 2. A fok pontosan akkor 2, ha az él egy hurok (kezdő és végpontja azonos.)

3. Nem szomszédos operáció-párokat alkalmazva legfeljebb 2 lépésből visszajutunk a kiindulási csúcsba.

$$\forall i, j \in I, \forall D \in \mathcal{D}:$$

$$|i - j| \geq 2 \Rightarrow (\sigma_j \sigma_i)^2(D) = D$$

- Bevezetjük a szimplex pályákon (D-diagram csúcsokon) értelmezett \mathcal{R} mátrix-függvényt.

$$\forall i, j \in I, \forall D \in \mathcal{D}:$$

$$r_{ij}(D) = r_{ji}(D) = \min \{r \in \mathbb{N}^+ | (\sigma_j \sigma_i)^r(D) = D\}$$

A D-diagram feltételei \mathcal{R} mátrix-függvényre vetítve: $r_{ii}(D) = 1$, illetve $|i - j| \geq 2 \Rightarrow r_{ij}(D) \leq 2$

- Feltételek a diagramhoz tartozó \mathcal{M} mátrix-függvényre:

1. Az \mathcal{R} mátrix-függvény minden elemének osztania kell az \mathcal{M} mátrix-függvény megfelelő elemét. Csak így biztosítható, hogy egy $d - 2$ dimenziós lap (3 dimenzióban él) teljes körüljárásakor azonos szimplex pályába érkezünk; ami pedig szükséges ahhoz, hogy azonos szimplexbe érkezhessünk. Az \mathcal{M} és \mathcal{R} mátrix-függvények értékeinek hányadosa a kövezés periodicitását mutatja az adott él körül.

$$\forall i, j \in I, \forall D \in \mathcal{D}: r_{ij}(D) | m_{ij}(D)$$

2. Pálya feltétel. Minden operáció-párhoz és kiindulási diagram-csúcsához definiálhatjuk a hozzá tartozó pályát: az összes diagram-csúcs, amit érintünk miközben az operációkat elvégezzük. Az \mathcal{M} mátrix-függvény értékeinek egy-egy pályán belül meg kell egyeznie, különben a kapott kövezésben függne az él körüli szimplexek száma a kezdő szimplextől. A pályát visszafelé bejárva is ugyanazt az utat kell megtennünk, ezért az \mathcal{M} mátrix-függvény mátrixai szimmetrikusak.

$$\forall i, j \in I, \forall D \in \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}' = \{(\sigma_j \sigma_i)^k(D) | k \in \mathbb{N}\} \cup \{\sigma_i(\sigma_j \sigma_i)^k(D) | k \in \mathbb{N}\}$$

$$\forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}'$$

$$m_{ij}(D_1) = m_{ij}(D_2) = m_{ji}(D_1) = m_{ji}(D_2)$$

3. Az \mathcal{M} mátrix-függvény minden mátrixának főátlójától legalább 2 távolságra lévő helyeken 2-esek állnak, különben nem kapjuk vissza a baricentrikus felbontást.

$$\forall i, j \in I, \forall D \in \mathcal{D}:$$

$$m_{ij}(D) = 2$$

4. A főátlótól 1 távolságra lévő helyeken a mátrix-függvény értékei legyenek nagyobbak vagy egyenlőek, mint 2. Egyenlőség esetén degenerált, illetve mesterkélt esetekhez jutunk, melyekben például digonok

is lehetnek lapok. (Szép kövezés esetén egy 3 dimenziós poliéder bármely csúcsában legalább 3 él és 3 lap találkozik, minden lapnak legalább 3 oldaléle van, minden élnél legalább 3 test és 3 lap fut össze.)

$\forall i \in I - \{0\}, \forall D \in \mathcal{D}$:

$$m_{i(i-1)}(D) \geq 2$$

Az eddigi megállapítások szükséges (de nem mindig elégséges) feltételek olyan d dimenziós (nem feltétlenül euklideszi) térkitöltés létezésére (amelynek D -szimbóluma $(\Sigma_I, \mathcal{D}, \mathcal{M})$.) Most nézzük speciálisan a 3 dimenziós eset további követelményeit.

2.2. Rész D-szimbólum

Rész D-szimbólum:

- Az i -edik komponens vagy rész D-szimbólum $(\Sigma_I^i, \mathcal{D}^i, \mathcal{M}^i)$ jelentése: az i -edik operációt elhagyjuk a diagramból illetve a mátrix-függvény soraiból és oszlopaiból is.
- A kombinatorikus görbületi függvény számolható. A rész D-szimbólum komponenseihez tartozó kövezésben a D-szimbólum alapján felírható a kombinatorikus görbületi függvény:

$$K({}^c\mathcal{D}^i) = \sum_{D \in {}^c\mathcal{D}^i} \left(-1 + \sum_{\substack{0 \leq j < k \leq d \\ j, k \neq i}} \frac{1}{m_{jk}(D)} \right) \begin{matrix} > & S^2 \\ = & 0 \quad \mathbb{E}^2 \\ < & H^2 \end{matrix}$$

Ez alapján eldönthető, hogy a 3 lehetséges felület közül melyiken valósul meg.

- Vizuális jelentés: A rész D-szimbólum vizuális jelentése az adott i -indexű csúcs körüli 1-gyel kisebb dimenziós felületen létrehozott $(3-1)$ -dimenziós kövezés D-szimbóluma az i -indexű csúcs stabilizátora szerint. Ezért egy i -indexű valódi szimplex-csúcs körüli rész D-szimbólum egy szférikus kövezéshez kell tartozzon, egy ideális szimplex-csúcs körül euklideszi kövezés alakul ki pl. a hiperbolikus tér paraszféra (horoszféra) felületén; a hiperbolikus síkkövezéseket kizárjuk, mert modellen kívüli (végtelennél távolabbi) pontot, mint i -csúcsot jellemezne.
- Jó orbifold feltétel: Szférikus síkon történő kövezésnek további feltétele, hogy az úgy nevezett rossz orbifoldokat kizárjuk, azaz a következő lehető-

ségek hibásak (Conway illetve Macbeath-féle jelöléseik alapján):

$$\begin{array}{ll}
u = (+, 0; [u]; \{\}), & 1 < u; \\
*u = (+, 0; []; \{(u)\}), & 1 < u; \\
uv = (+, 0; [u, v]; \{\}), & 1 < u < v; \\
*uv = (+, 0; []; \{(u, v)\}), & 1 < u < v.
\end{array}$$

Ezek a csepp felületekre illetve az észak-déli póluson nem azonosan viselkedő gömb felületekre utalnak.

További követelmények a rész D-szimbólumok alapján:

1. $(\Sigma_I^1, \mathcal{D}^1, \mathcal{M}^1)$ és $(\Sigma_I^2, \mathcal{D}^2, \mathcal{M}^2)$ esetén a görbületi függvény pozitív és a jó orbifold feltétel teljesül. Élközépponthez és lapközépponthez tartozó szimplex csúcs valódi csúcs kell legyen, ezért egy S^2 -n megvalósuló kövezést kell kapjunk.
2. $(\Sigma_I^0, \mathcal{D}^0, \mathcal{M}^0)$ és $(\Sigma_I^3, \mathcal{D}^3, \mathcal{M}^3)$ esetén a görbületi függvény pozitív és a jó orbifold feltétel teljesül, vagy a görbületi függvény 0. Csúcshoz és testközépponthez tartozó szimplex csúcs lehet valódi, ekkor egy S^2 -n megvalósuló kövezést kell kapjunk; vagy lehet ideális, ekkor \mathbb{E}^2 -n megvalósuló kövezést kell kapjunk. (Az ideális test-középpont esetét a dualitás miatt meghagyjuk; de megjegyezzük, hogy a végtelen poliéderekkel történő kövezés nem igazán érdekes (egy kisebb dimenziós felület kövezésének felel meg.))

3. D-szimbólumok felsorolása

D-szimbólumok felsorolása:

- Nagyravágyó terv: Az összes n -dimenziós geometriában az összes lehetséges véges alaptartományú kövezés felsorolásához szeretnénk a D-szimbólumokat felhasználni.
- Alapvetően nem tűnik lehetetlennek, mivel a D-szimbólumokat minden olyan kövezésre értelmezhetjük, ahol tudunk baricentrikus felbontást végezni.
- Nagyon sok lehetőség van: a dimenzió és a D-diagram elemszámának mértékében is exponenciális
- Rendezés a D-diagramokon, algoritmus a felsorolásukra
- Rendezés a mátrix-függvényeken, 3-dimenziós esetben algoritmus a lehetséges mátrix-függvények felsorolására az előző fejezetben felsorolt feltételeknek megfelelően. A két kulcs a paraméteres megadás és a rész D-szimbólum által indukált felső korlát (de a végtelen láncokat kezelni kell.)
- A 12 elemszámú D-szimbólumokat tudjuk jelenleg felsorolni.

4. Éltranszitiv kövezések

Éltranszitiv kövezések kezelése D-szimbólummal

- Egyszerű új feltétel: a diagramban nem lehet 1-es színű (szaggatott) él
- A lehetséges diagramok végigpróbálgatása egyszerűbbé válik
- 18-as elemszámig jutottunk, és ismert, hogy legfeljebb 24 elemszámú ilyen diagramok lehetségesek.

5. Splitting probléma és a Thurston-sejtés (támadása)

Thurston sejtés:

- Minden irányított, primitív, zárt 3-sokaság felvágható (splitting) tórusz (E^2) felületek mentén úgy, hogy a kapott sokaságok belsejének geometriai struktúrája van, melynek véges a térfogata.
- A következő 8 féle maximális modell-geometria létezik, amihez van kompakt sokaság, ami az adott geometriában modellezhető: S^3 , E^3 , H^3 , $S^2 \times R$, $H^2 \times R$, $\widehat{SL_2R}$, Sol, Nil.

Megjegyzések:

- A nem irányítható eset kezelhető az „irányítható dupla fedés” módszerrel, ami az M sokasághoz rendelt $M \times Z/2Z$ sokaság (értelmes visszahúzó operációval). Például Möbius szalaghoz rendelhetünk egy dupla Möbius szalagot úgy, hogy felvágjuk valahol és betoldunk még egy Möbius szalagot. Ezzel egy gyűrű alakot kapunk.
- A 2 dimenziós analógia: minden határ nélküli felületnek (2-sokaságnak) geometriai struktúrája van, konstans görbületű metrikával.

Splitting keresése D-szimbólumban

- S^2 jellegű splitting: Ponttá zsugorítható részlet a kövezésben, ezáltal kevesebb szimplex-csúcsból, így kevesebb szimplex-pályából álló kövezéssel ekvivalenset kapunk. (Rossz orbifold probléma itt is felléphet.) FIXME Rajz
- E^2 splitting: A Thurston sejtés-beli splittingnek megfelelő dolog. Végtelen távoli pontba tolható. FIXME Rajz

További feltételek a Thurston sejtés-beli minimális 3-sokaságokra

- Az ábrákon látszik, hogy a megfelelő 2 sokaságokra a kombinatorikus görbület függvényt felírva alsó korlátot is kapunk a paramétereinkre. FIXME Fontos kérdés, hogy ez elég-e.

- A D-diagram alapján felírhatóak a szimplex csúcsok (rész D-diagram) és a szimplex csúcsok közti élek is. Ezeket gráfnak tekintve az összes lehetséges 2 (legalább 2 elemű) partícióra bontást meg kell vizsgálni.
- Az így kapott "splitting-jelölt" helyet meg kell vizsgálni, hogy megkapjuk az összes alsó korlátot a paraméterekre.
- A kapott D-szimbólumok minimálisak abban az értelemben, hogy nincs bennük se E^2 se S^2 splitting. (Ha találunk köztük olyat, ami nem realizálható a 8-féle geometriában, akkor Thurston-sejtést sikeresen támadtuk.)