3 dimenziós D-szimbólumok és a Thurston-sejtés

Boróczki Lajos

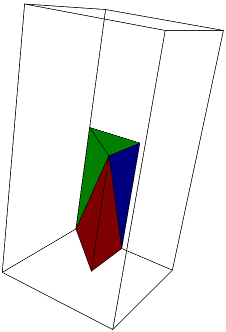
2011. október 25.

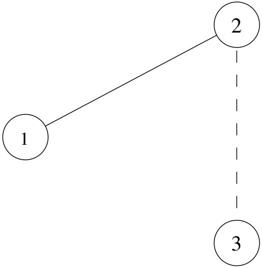
Kivonat

D-szimbólum, mint új nyelvezet

- Kompakt alaptartományú kövezés baricentrikus felbontása
- Szomszédsági operációk
  Jelölés:
  σ_0: $\cdots\cdots$, σ_1: $----$, σ_2: ———, σ_3: $-\cdot-\cdot-\cdot$
- Egybevágóság csoport szerinti szimplex pályák halmaza
- $(d-2)$-lap körüli szimplex pályák.
- Egyértelműség: A baricentrikus felbontásban csak az alaptartomány csúcspontjaihoz tartozó szimplex csúcsok lehetnek végtelen távoli pontok, ezért minden kövezés leírható D-szimbólummal és ez permutáció erejéig egyértelmű. FIXME: Miért nem foglalkozunk azzal az esettel, amikor egy egész él végtelen távol van?

Az $\mathbb{E}^3$ tér négyzetes hasábbal történő egyik legegyszerűbb térkitöltése. Baricentrikus felbontása és a szimplex pályákhoz tartozó multigráf:





A mátrixfüggvények ($\mathcal{D}$ a szimplex pályák halmaza, $D_i \in \mathcal{D}$):

$$\mathcal{R}(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}(D_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}(D_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall D_i \in \mathcal{D}: \ \mathcal{M}(D_i) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

D-szimbólum: $(\Sigma_I, \mathcal{D}, \mathcal{M})$ hármasok.

- Természetes feltételek D-diagramokra
  :
  1. $\mathcal{D}$ véges
  2. A szimplex pályákon értelmezett szomszédsági operációk involutív permutációk
  3. Nem szomszédos operáció-párokat alkalmazva legfeljebb 2 lépésből visszajutunk a kiindulási csúcsba
- Bevezetjük a szimplex pályákon (D-diagram csúcsokon) értelmezett $\mathcal{R}$ mátrix-függvényt
- Feltételek a diagramhoz tartozó $\mathcal{M}$ mátrix-függvényre:
  1. Az $\mathcal{R}$ mátrix-függvény minden elemének osztania kell az $\mathcal{M}$ mátrix-függvény megfelelő elemét.
  2. Pálya feltétel
  3. Az $\mathcal{M}$ mátrix-függvény minden mátrixának főátlójától legalább 2 távolságra lévő helyeken 2-esek állnak
  4. A főátlótól 1 távolságra lévő helyeken a mátrix-függvény értékei legyenek nagyobbak vagy egyenlőek, mint 2

Rész D-szimbólum:

- Az i-edik komponens vagy rész D-szimbólum $(\Sigma_I^i, \mathcal{D}^i, \mathcal{M}^i)$ jelentése
- A kombinatorikus görbületi függvény számolható

$$K({}^c\mathcal{D}^i) = \sum_{D \in {}^c\mathcal{D}^i} \left(-1 + \sum_{\substack{0 \le j < k \le d \\ j,k \ne i}} \frac{1}{m_{jk}(D)} \right) \begin{array}{ccc} > & & S^2 \\ = & 0 & \mathbb{E}^2 \\ < & & H^2 \end{array}$$

- Vizuális jelentés
- Jó orbifold feltétel

További követelmények a rész D-szimbólumok alapján:

1. $(\Sigma_I^1, \mathcal{D}^1, \mathcal{M}^1)$ és $(\Sigma_I^2, \mathcal{D}^2, \mathcal{M}^2)$ esetén a görbületi függvény pozitív és a jó orbifold feltétel teljesül
2. $(\Sigma_I^0, \mathcal{D}^0, \mathcal{M}^0)$ és $(\Sigma_I^3, \mathcal{D}^3, \mathcal{M}^3)$ esetén a görbületi függvény pozitív és a jó orbifold feltétel teljesül, vagy a görbületi függvény 0

D-szimbólumok felsorolása:

- Nagyravágyó terv
- Alapvetően nem tűnik lehetetlennek
- Nagyon sok lehetőség van
- Rendezés a D-diagramokon, algoritmus a felsorolásukra
- Rendezés a mátrix-függvényeken, 3-dimenziós esetben algoritmus a lehetséges mátrix-függvények felsorolására
- A 12 elemszámú D-szimbólumokat tudjuk jelenleg felsorolni.

Éltranzitív kövezések kezelése D-szimbólummal

- Egyszerű új feltétel: a diagramban nem lehet 1-es színű (szaggatott) él
- A lehetséges diagramok végigpróbálgatása egyszerűbbé válik
- 18-as elemszámig jutottunk, és ismert, hogy legfeljebb 24 elemszámú ilyen diagramok lehetségesek.

Thurston sejtés:

- Minden irányított, primitív, zárt 3-sokaság felvágható (splitting) tórusz (E^2) felületek mentén úgy, hogy a kapott sokaságok belsejének geometriai struktúrája van, melynek véges a térfogata.
- A következő 8 féle maximális modell-geometria létezik, amihez van kompakt sokaság, ami az adott geometriában modellezhető: S^3, E^3, H^3, $S^2 \times R$, $H^2 \times R$, $\widetilde{SL2R}$, Sol, Nil.

Megjegyzések:

- A nem irányítható eset kezelhető az „irányítható dupla fedés” módszerrel, ami az M sokasághoz rendelt $M \times Z/2Z$ sokaság (értelmes visszahúzó operációval).
- A 2 dimenziós analógia: minden határ nélküli felületnek (2-sokaságnak) geometriai struktúrája van, konstans görbületű metrikával.

Splitting keresése D-szimbólumban

- S^2 jellegű splitting: Ponttá zsugorítható részlet a kövezésben, ezáltal
  kevesebb szimplex-pályából álló kövezéssel ekvivalenset kapunk. (Rossz orbifold probléma itt is felléphet.) FIXME Rajz
- E^2 splitting: A Thurston sejtés-beli splittingnek megfelelő dolog. Végtelen távoli pontba tolható. FIXME Rajz

További feltételek a Thurston sejtés-beli minimális 3-sokaságokra

- Az ábrákon látszik, hogy a megfelelő 2 sokaságokra a kombinatorikus görbület függvényt felírva alsó korlátot is kapunk a paramétereinkre. FIXME Fontos kérdés, hogy ez elég-e.
- A D-diagram alapján felírhatóak a szimplex csúcsok (rész D-diagram) és a szimplex csúcsok közti élek is. Ezeket gráfnak tekintve az összes lehetséges 2 (legalább 2 elemű) partícióra bontást meg kell vizsgálni.
- Az így kapott ”splitting-jelölt” helyet meg kell vizsgálni, hogy megkapjuk az összes alsó korlátot a paraméterekre.
- A kapott D-szimbólumok minimálisak abban az értelemben, hogy nincs bennük se E^2 se S^2 splitting. (Ha találunk köztük olyat, ami nem realizálható a 8-féle geometriában, akkor Thurston-sejtést sikeresen támadtuk.)