第七章 复数 典型易错题集

易错点 1．忽视复数$z=a+bi$是纯虚数的充要条件

例题 1．（湖南·高一课时练习）求m为何实数时，复数$z=m^2+m-6+\left(m^2-2m-15\right)\mathrm{i}$是纯虚数；

【常见错解】若复数z为纯虚数，则$m^2+m-6=0$解得$m=2$或者$m=-3$

【错因分析】对复数为纯虚数理解不透彻，对于复数$z=a+bi$为纯虚数$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$，在本题中，$z=m^2+m-6+\left(m^2-2m-15\right)\mathrm{i}$，错解只考虑了实部$m^2+m-6=0$，而忽略了考虑虚部$m^2-2m-15\neq 0$而造成错解.

【正解】$m=2$；

【解析】解：若复数z为纯虚数，则$\begin{cases}m^2+m-6=0\\m^2-2m-15\neq 0\end{cases}$，解得$m=2$.

【动手实战】

1．（湖南·高一课时练习）若复数$z=\left(a^2-2a\right)+\left(a^2-a-2\right)\mathrm{i}$对应的点在虚轴上，求实数$a$应满足的条件.

【答案】$a=2$或$a=0$

【详解】

∵复数$z=\left(a^2-2a\right)+\left(a^2-a-2\right)\mathrm{i}$对应的点在虚轴上，

∴$a^2-2a=0$，解得$a=2$或$a=0$.

2．（湖南·高一课时练习）当实数a为何值时，复数$z=\left(a^2+2a-3\right)+\left(a+3\right)\mathrm{i}$为纯虚数？

【答案】1

【详解】

若复数$z=\left(a^2+2a-3\right)+\left(a+3\right)\mathrm{i}$为纯虚数，且$a\in\mathbf{R}$，

则$a^2+2a-3=0$且$a+3\neq 0$，

解得$a=1$.

3．（贵州·沿河民族中学高二开学考试（理））已知复数$z=\dfrac{m^2-m-6}{m+2}+(m^2-2m-15)\mathrm{i}$（i是虚数单位），复数$z$是纯虚数，求实数$m$的值.

【答案】$m=3$.

复数是纯虚数，则$\begin{cases}m^2-m-6=0\\m+2\neq 0\\m^2-2m-15\neq 0\end{cases}$，

公众号
好学熊资料库

解得 $m=3$.

易错点 2．错误的理解复数比大小

例题 1．（湖南·高一课时练习）求使不等式 $\lambda^2-\left(\lambda^2-3\lambda\right)\mathrm{i}<\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\mathrm{i}+10$ 成立的实数 λ 的取值范围.

【常见错解】因为不等式 $\lambda^2-\left(\lambda^2-3\lambda\right)\mathrm{i}<\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\mathrm{i}+10$ 成立，

所以 $\begin{cases}\lambda^2<10\\-(\lambda^2-3\lambda)<\lambda^2-4\lambda+3\end{cases}$ 解得：$-\sqrt{10}<\lambda<\dfrac{1}{2}$ 或 $3<\lambda<\sqrt{10}$

【错因分析】对于复数 $a+bi<c+di$ 错误的理解两个复数比大小，

$a+bi<c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a<c\\b<d\end{cases}$，**而造成错误，事实上，两个复数不能直接比大小，但如果**

$a+bi<c+di$ **成立，等价于** $\begin{cases}a<c\\b=d=0\end{cases}$，**本题是实数比较大小的惯性思维导致的错误.**

【正解】$\lambda=3$

因为不等式 $\lambda^2-\left(\lambda^2-3\lambda\right)\mathrm{i}<\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\mathrm{i}+10$ 成立，

所以 $\begin{cases}\lambda^2-3\lambda=0\\\lambda^2-4\lambda+3=0\\\lambda^2<10\end{cases}$，解得：$\lambda=3$

即实数 λ 的取值范围为 $\lambda=3$.

【动手实战】

1．（全国·）设 $z_1=m^2+1+(m^2+m-2)\mathrm{i}$，$z_2=4m+2+(m^2-5m+4)\mathrm{i}$，若 $z_1<z_2$，求实数 m 的取值范围.

【答案】$m=1$.

【详解】

由于 $z_1<z_2$，$m\in$R，

∴$z_1\in$R 且 $z_2\in$R，

当 $z_1\in$R 时，$m^2+m-2=0$，$m=1$ 或 $m=-2$，

当 $z_2\in$R 时，$m^2-5m+4=0$，$m=1$ 或 $m=4$，

∴当 $m=1$ 时，$z_1=2$，$z_2=6$，满足 $z_1<z_2$

∴$z_1<z_2$ 时，实数 m 的取值范围为 $m=1$.

2．（重庆市万州沙河中学）已知复数 $z=(m^2-8m+15)+(m^2-7m+12)\mathrm{i}$（其中 i 为虚数单位），当实数 m 为何值时.复数 $z<0$.

【答案】4.

【详解】

公众号
好学熊资料库

因为$z<0$，所以$\begin{cases} m^2-8m+15<0 \\ m^2-7m+12=0 \end{cases} \Rightarrow m=4$.

3．（上海师范大学第二附属中学）已知复数$z=m^2-5m+6+\left(m^2-m-2\right)\mathrm{i}$（i为虚数单位）．若$z>0$，求实数$m$的值．

【答案】$m=-1$.

【详解】

解：因为$z>0$，

所以$\begin{cases} m^2-5m+6>0 \\ m^2-m-2=0 \end{cases}$，解得$m=-1$.

易错点3．错误的惯性思维理解复数的模

例题1．（福建宁德·模拟预测）复数$z_1=\cos x-\mathrm{i}\sin x, z_2=\sin x-\mathrm{i}\cos x$，则$|z_1\cdot z_2|=$________．

【常见错解】$z_1=\cos x-\mathrm{i}\sin x\Rightarrow |z_1|=\sqrt{\cos^2 x+(-\sin x)^2}=1$，**同样，**

$z_2=\sin x-\mathrm{i}\cos x\Rightarrow |z_2|=\sqrt{\sin^2 x+(-\cos x)^2}=1$，**所以**$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=1$

【错因分析】错误的理解两个复数乘积的模等于两个复数模的积$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$**而造成错解.**

【正解】1

【详解】

$z_1\cdot z_2=(\cos x-\mathrm{i}\sin x)(\sin x-\mathrm{i}\cos x)=-\mathrm{i}(\sin^2 x+\cos^2 x)=-\mathrm{i}$，

故$|z_1\cdot z_2|=1$

故答案为：1

例题2．（山东潍坊·高三期末）复数z满足$z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$（其中i为虚数单位），则$|z|=$______．

【常见错解】$z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}\Rightarrow z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$，**所以**$|z|=|-1|+|-2|=3$

【错因分析】错误的理解复数$z=a+bi$**的模**$|z|=|a|+|b|$**.**

【正解】$\sqrt{5}$

【详解】

$\because z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$，$\therefore |z\mathrm{i}|=|2-\mathrm{i}|\Rightarrow |z||\mathrm{i}|=\sqrt{5}\Rightarrow |z|=\sqrt{5}$.

另解：$z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}\Rightarrow z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}\Rightarrow |z|=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

【动手实战】

公众号
好学熊资料库

1．（北京师大附中高二期末）已知复数$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则$|z|=$__________.

【答案】$\sqrt{2}$

【详解】

由$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，得$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，

所以$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$

易错点 4．误把复数当实数代入计算

例题 1．（全国·高一课时练习）已知$z\in\mathbf{C}$，且$|z-2-2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$，（i 为虚数单位），则$|z|_{\max}=$______.

【常见错解】因为$|z-2-2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$，所以$(z-2)^2+4=13$解得：$z=5$或$z=-1$，所以$|z|_{\max}=5$.

【错因分析】本题是极易出错的题目，本题中，由题意知$z\in\mathbf{C}$，而错解中，把z直接当实数参与了复数模的运算，而造成错解，特别题型同学们，当题意出现$z\in\mathbf{C}$，应首先设出复数z的代数形式：$z=a+bi$，再代入运算求解.

【正解】设$z=a+bi$由题意$|z-2-2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$，得到$|a+bi-2-2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$得到：

$(a-2)^2+(b-2)^2=13$表示以$C(2,2)$为圆心，$r=\sqrt{13}$为半径的圆，

则圆心C到点$O(0,0)$的距离$=d=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

则$|z|_{\max}$的最大值为$d+r=2\sqrt{2}+\sqrt{13}$.

故答案为：$d+r=2\sqrt{2}+\sqrt{13}$.

【动手实战】

1．（全国·高三专题练习）设$a\in C$，$a\neq 0$，化简：$\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+a\mathrm{i}}=$______.

【答案】$-\mathrm{i}$

【详解】

$\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+a\mathrm{i}}=\dfrac{(a-\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})}{(1+a\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})}=\dfrac{a-a^2\mathrm{i}-\mathrm{i}-a}{1+a^2}=\dfrac{-(1+a^2)\mathrm{i}}{1+a^2}=-\mathrm{i}$，

故答案为：$-\mathrm{i}$.

公众号
好学熊资料库

2．（全国·高三专题练习）设$z\in C$，且$\dfrac{z-2}{z+2}=\mathrm{i}$，其中i为虚数单位，则$\dfrac{3-4\mathrm{i}}{z}$的模为__________.

【答案】$\frac{5}{2}$##2.5

【详解】

由题意，由$\frac{z-2}{z+2}=\mathrm{i}$，可得$z-2=\mathrm{i}(z+2)$

$\therefore z=\frac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=2\mathrm{i}$

$\therefore \frac{3-4\mathrm{i}}{z}=\frac{3-4\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\frac{(3-4\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=-2-\frac{3}{2}\mathrm{i}$

$\therefore |\frac{3-4\mathrm{i}}{z}|=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$

故答案为：$\frac{5}{2}$

3．（全国·高二课时练习）设$a,b\in C$，则“$a-b>0$”是“$a>b$”的______条件.

【答案】必要不充分

【详解】

当$a=1+\mathrm{i},b=\mathrm{i}$时，满足 $a-b>0$，得不到$a>b$，故不充分；

当$a>b$时，则$a,b\in \mathbf{R}$，且$a-b>0$，故必要；

所以“$a-b>0$”是“$a>b$”的必要不充分条件，

故答案为：必要不充分

易错点5．忽视了$i^2=-1$，习惯性的认为平方是正数

例题1．（黑龙江·哈尔滨德强学校高三期末（理））复数$\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}$的共轭复数是__________.

【常见错解】由题意得，$\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}=\frac{(2+\mathrm{i})(2\mathrm{i}+1)}{(2\mathrm{i}-1)(2\mathrm{i}+1)}=\frac{2i^2+2+5i}{4i^2-1}=\frac{4+5\mathrm{i}}{3}$**，所以**$\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}$**的共轭复数为**$\frac{4-5i}{3}$

【错因分析】本题错解在于把$i^2=1$**代入计算了。**

【正解】i

【详解】

由题意得，$\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}=\frac{(2+\mathrm{i})(2\mathrm{i}+1)}{(2\mathrm{i}-1)(2\mathrm{i}+1)}=\frac{5\mathrm{i}}{-5}=-\mathrm{i}$，

所以其共轭复数为i.

故答案为：i.

【动手实战】

公众号
好学熊资料库

1．（北京密云·高三期末）在复平面内，复数$\frac{3+i}{2-i}$对应的点为Z，则点Z的坐标为________.

【答案】(1,1)

【详解】

$\because \frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$，

$\therefore Z(1,1)$.

故答案为：(1,1).

2．（天津红桥·高三期中）若i是虚数单位，则$\frac{1+2i}{2+i}$的虚部为___________.

【答案】$\frac{3}{5}$##0.6

【详解】

因为$\frac{1+2i}{2+i}=\frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4+3i}{5}$，

所以虚部为$\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$##0.6.

3．（天津实验中学高三阶段练习）已知复数$z=\frac{2+i}{1-i}$，则复数z的虚部为________

【答案】$\frac{3}{2}$##1.5

【详解】

解：$z=\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

所以复数z的虚部为$\frac{3}{2}$

故答案为：$\frac{3}{2}$

公众号 好学熊资料库

易错点6．复数三角形式的标准形式理解错误

例题1．（全国·高一课时练习）下列各式中已表示成三角形式的复数是（　　）．

A．$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$　　B．$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

C．$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$　　D．$-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

【常见错解】C

【错因分析】忽略了复数三角表示的标准形式：$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，考生往往只注意到 $r\geq 0$，没有注意其它要求，复数三角形式的特点口诀：“模非负，角相同，余弦前，加号连”

【正解】B

复数的三角表示为：$z=r\left(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\right)$，其中 $r\geq 0$，B 选项满足.

故选：B.

【动手实战】

1．（全国·高一课时练习）复数 $-\sin 30^{\circ}-i\cos 30^{\circ}$ 的三角形式为（　　）

A． $\sin 30^{\circ}+i\sin 30^{\circ}$　　　B． $\cos 240^{\circ}+i\sin 240^{\circ}$

C． $\cos 30^{\circ}+i\sin 30^{\circ}$　　　D． $\sin 240^{\circ}+i\cos 240^{\circ}$

【答案】B

【详解】

由诱导公式可知 $-\sin 30^{\circ}=-\sin\left(90^{\circ}-60^{\circ}\right)=-\cos 60^{\circ}=\cos\left(180^{\circ}+60^{\circ}\right)=\cos 240$,

$-\cos 30^{\circ}=-\cos\left(90^{\circ}-60^{\circ}\right)=-\sin 60^{\circ}=\sin\left(180^{\circ}+60^{\circ}\right)=\sin 240^{\circ}$ ，

因此，$-\sin 30^{\circ}-i\cos 30^{\circ}=\cos 240^{\circ}+i\sin 240^{\circ}$.

故选：B.

2．（上海·高一课时练习）复数 $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ 的三角形式为（　　）

A． $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$　　　B． $3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

C． $3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$　　　D． $3\left(\cos\frac{6\pi}{5}-i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$

【答案】C

【详解】

因为 $|z|=3$，辐角主值为 $\frac{4\pi}{5}$，所以 $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)=3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

故选：C.

3．（上海·高一单元测试）复数 $z=\mathrm{i}\sin 10^{\circ}$ 的三角形式为（　　）

A． $\cos 10^{\circ}+\mathrm{i}\sin 10^{\circ}$　　　B． $\mathrm{i}\sin 10^{\circ}$

C． $\sin 10^{\circ}\left(\cos 90^{\circ}+\mathrm{i}\sin 90^{\circ}\right)$　　　D． $\sin 10^{\circ}\left(\cos 0^{\circ}+\mathrm{i}\sin 0^{\circ}\right)$

【答案】C

【详解】

因为 $z=\mathrm{i}\sin 10^{\circ}$，所以 $|z|=\sin 10^{\circ}$，辐角为 90°，所以复数 $z=\mathrm{i}\sin 10^{\circ}$ 的三角形式为

公众号
好学熊资料库

$\sin 10^\circ\left(\cos 90^\circ+\mathrm{i}\sin 90^\circ\right)$，

故选：C.

易错点 7．忽视复数$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$在复平面的位置而求错$\arg z$.

例题 1．（全国·高一课时练习）设$z_1=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_2=\left(\frac{1}{2}z_1\right)^2$，则$\arg z_2=$（　　）

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{4}{3}\pi$　　C．$\frac{11}{6}\pi$　　D．$\frac{5}{3}\pi$

【常见错解】A $z_2=\frac{1}{4}z_1^2=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，所以$\arg z_2=\frac{\pi}{3}$.

【错因分析】本题在求辐角的主值时，直接利用公式$\tan\theta=\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，忽略了，复数对应的点$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在第三象限，而造成错解.

【正解】B

【详解】

$z_2=\frac{1}{4}z_1^2=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，复数对应的点是$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，位于第三象限，且$\tan\theta=\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以$\arg z_2=\frac{4\pi}{3}$.

故选：B

【动手实战】

1．（福建安溪·高三期中）任意复数$z=a+b\mathrm{i}$（a、$b\in R$，i为虚数单位）都可以写成$z=r\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)$的形式，其中$r=\sqrt{a^2+b^2}\left(0\le\theta<2\pi\right)$该形式为复数的三角形式，其中$\theta$称为复数的辐角主值.若复数$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则$z$的辐角主值为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

公众号

【答案】A

【详解】

好学熊资料库

复数$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$，因此，复数$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$的辐角主值为$\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

2．（山西怀仁·高一期中）已知复数$z=\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$.则$\arg z=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】D

【详解】

由 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$.设复数的辐角为$\theta$，

则 $\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$，

又复数在复平面内对应的点为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，在第二象限，

所以$\theta=\frac{2\pi}{3}$，即 $\arg z=\frac{2\pi}{3}$.

故选：D

3．（重庆巴蜀中学高一期中）复数$z=\sin 50^{\circ}-i\cos 50^{\circ}$的辐角主值是（　　）

A. 50°　　B. 220°　　C. 310°　　D. 320°

【答案】D

【详解】

$\because z=\sin 50^{\circ}-i\cos 50^{\circ}=\cos\left(90^{\circ}-50^{\circ}\right)-i\sin\left(90^{\circ}-50^{\circ}\right)=\cos 40^{\circ}-i\sin 40$

$=\cos\left(360^{\circ}-40^{\circ}\right)+i\sin\left(360^{\circ}-40^{\circ}\right)=\cos 320^{\circ}+i\sin 320^{\circ}$，

因此，复数z的辐角主值为320°.

故选：D.

易错点 8．忽视复数$z=a+bi$在复平面的位置在转化为复数三角形式时出错.

例题 1．（上海市延安中学高一期末）$-1-\sqrt{3}i$的三角形式是（　　）

A. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

C. $2\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\frac{7\pi}{6}\right)$　　D. $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

公众号
好学熊资料库

【常见错解】错解 1：选 A，由$-1-\sqrt{3}i$得：$r=2$，$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$，根据复数三角形式的标准形式得：$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，所以$-1-\sqrt{3}i$的三角形式是$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$；

错解 2：选 D $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

【错因分析】错解 1 中忽略了复数 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ **对应点** $Z(-1,-\sqrt{3})$ **在第三象限，所以由** $\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{4\pi}{3}$**，错解 1 错在忽视了复数对应点的位置；错解 2** $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$**，记错了常见角三角函数值，注意** $\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$**，**$\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

【正解】B

【详解】

解：$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

故选：B.

【动手实战】

1. （全国·高一课时练习）下列表示复数$1+\mathrm{i}$的三角形式中① $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；② $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$；③ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$；④ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$；正确的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【详解】

解：∵ $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴辐角主值为$\frac{\pi}{4}$，

∴ $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$，

故①③的表示是正确的，②④的表示不正确，

故选：B．

公众号
好学熊资料库

2. （全国·高一课时练习）复数$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$化成三角形式，正确的是（　　）

A．$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$　　B．$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

C．$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$　　D．$\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$

【答案】B

【详解】

解：因为$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

故选：B

3．（上海·高一课时练习）复数$-1+\sqrt{3}i$的三角形式是

A．$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$　　B．$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

C．$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$　　D．$2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

【答案】A

【详解】

解法一：设复数的三角形式为$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,则$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,$\tan\theta=-\sqrt{3}$,可取$\theta=\arg z=\frac{2\pi}{3}$,从而复数$-1+\sqrt{3}i$的三角形式为$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

解法二：$-1+\sqrt{3}i=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\times\left[\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}\right]$

$2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

故选：A

4．（陕西·西安市第八十九中学高二阶段练习（文））设复数$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$（$i$是虚数单位），则$z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6=$（　　）

A．$6z$　　B．$6z^2$　　C．$6\overline{z}$　　D．$-6z$

【答案】C

【详解】

解：由题意知$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z^3=-1$，$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z^6=1$，

$\therefore$原式$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)+(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})+(-3)+(-2-2\sqrt{3}\mathrm{i})+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6$

$=3-3\sqrt{3}i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\overline{z}$.

故选：C

公众号
好学熊资料库

易错点 9．复数三角形式的除法没化标准就代入除法运算法则

1．（湖南·高一课时练习）计算：

$8\left(\cos 240°+\mathrm{i}\sin 240°\right)\div 2\left(\cos 150°-\mathrm{i}\sin 150°\right)$．

【常见错解】 $8(\cos 240°+\mathrm{i}\sin 240°)\div 2(\cos 150°-\mathrm{i}\sin 150°)=\dfrac{4(\cos 240°+\mathrm{i}\sin 240°)}{\cos 150°+\mathrm{i}\sin 150°}$

$=4(\cos 90°+\mathrm{i}\sin 90°)=4i$

【错因分析】本题错解在于分母复数的三角形式没有化成标准形式：$2\left(\cos 150°-\mathrm{i}\sin 150°\right)$，所以首先要将该式化成标准式为：$2\left(\cos(-150°)+\mathrm{i}\sin(-150°)\right)$，特别注意复数三角形式的标准形式特点：“模非负，角相同，余弦前，加号连”

【正解】$2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$．

$8(\cos 240°+\mathrm{i}\sin 240°)\div 2(\cos 150°-\mathrm{i}\sin 150°)=\dfrac{4(\cos 240°+\mathrm{i}\sin 240°)}{\cos(-150°)+\mathrm{i}\sin(-150°)}$

$=4(\cos 390°+\mathrm{i}\sin 390°)=4(\cos 30°+\mathrm{i}\sin 30°)=2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$．

【动手实战】

1．（全国·高一课时练习）计算：

(1) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\times 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\left[\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\times\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(4) $(1-\mathrm{i})\div\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

【答案】(1) 6 (2) $\sqrt{2}i$ (3) i (4) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}$

(1)

$3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\times 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=6\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\times\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$=6\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=6$

(2)

$\left[\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

公众号
好学熊资料库

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\div\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}.$$

(3)

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

(4)

$$(1-i)\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)i\right]=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i.$$

公众号
好学熊资料库