第七章 复数 典型易错题集

易错点1．忽视复数$z=a+bi$是纯虚数的充要条件

例题1．（湖南·高一课时练习）求m为何实数时，复数$z=m^2+m-6+\left(m^2-2m-15\right)\mathrm{i}$是纯虚数；

【常见错解】若复数z为纯虚数，则$m^2+m-6=0$解得$m=2$或者$m=-3$

【错因分析】对复数为纯虚数理解不透彻，对于复数$z=a+bi$为纯虚数$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$，在本题中，$z=m^2+m-6+\left(m^2-2m-15\right)\mathrm{i}$，错解只考虑了实部$m^2+m-6=0$，而忽略了考虑虚部$m^2-2m-15\neq 0$而造成错解.

【动手实战】

1．（湖南·高一课时练习）若复数$z=\left(a^2-2a\right)+\left(a^2-a-2\right)\mathrm{i}$对应的点在虚轴上，求实数$a$应满足的条件.

2．（湖南·高一课时练习）当实数a为何值时，复数$z=\left(a^2+2a-3\right)+\left(a+3\right)\mathrm{i}$为纯虚数？

3．（贵州·沿河民族中学高二开学考试（理））已知复数$z=\dfrac{m^2-m-6}{m+2}+(m^2-2m-15)\mathrm{i}$（i是虚数单位），复数$z$是纯虚数，求实数$m$的值.

易错点 2．错误的理解复数比大小

例题 1．（湖南·高一课时练习）求使不等式$\lambda^2-\left(\lambda^2-3\lambda\right)\mathrm{i}<\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\mathrm{i}+10$成立的实数$\lambda$的取值范围.

【常见错解】因为不等式$\lambda^2-\left(\lambda^2-3\lambda\right)\mathrm{i}<\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\mathrm{i}+10$成立，

所以$\begin{cases}\lambda^2<10\\-(\lambda^2-3\lambda)<\lambda^2-4\lambda+3\end{cases}$解得：$-\sqrt{10}<\lambda<\dfrac{1}{2}$或$3<\lambda<\sqrt{10}$

【错因分析】对于复数$a+bi<c+di$错误的理解两个复数比大小，

$a+bi<c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a<c\\b<d\end{cases}$，而造成错误，事实上，两个复数不能直接比大小，但如果

$a+bi<c+di$成立，等价于$\begin{cases}a<c\\b=d=0\end{cases}$，本题是实数比较大小的惯性思维导致的错误.

【动手实战】

1．（全国·）设$z_1=m^2+1+(m^2+m-2)\mathrm{i}$，$z_2=4m+2+(m^2-5m+4)\mathrm{i}$，若$z_1<z_2$，求实数$m$的取值范围.

2．（重庆市万州沙河中学）已知复数$z=(m^2-8m+15)+(m^2-7m+12)\mathrm{i}$（其中 i 为虚数单位），当实数$m$为何值时.复数$z<0$.

3．（上海师范大学第二附属中学）已知复数$z=m^2-5m+6+\left(m^2-m-2\right)\mathrm{i}$（i 为虚数单位）.若$z>0$，求实数$m$的值.

易错点 3．错误的惯性思维理解复数的模

例题 1．（福建宁德·模拟预测）复数 $z_1=\cos x-\mathrm{i}\sin x,z_2=\sin x-\mathrm{i}\cos x$，则 $\left|z_1\cdot z_2\right|=$_________.

【常见错解】 $z_1=\cos x-\mathrm{i}\sin x\Rightarrow|z_1|=\sqrt{\cos^2 x+(-\sin x)^2}=1$，同样，

$z_2=\sin x-\mathrm{i}\cos x\Rightarrow|z_2|=\sqrt{\sin^2 x+(-\cos x)^2}=1$，所以 $\left|z_1\cdot z_2\right|=|z_1|\cdot|z_2|=1$

【错因分析】错误的理解两个复数乘积的模等于两个复数模的积 $\left|z_1\cdot z_2\right|=|z_1|\cdot|z_2|$ 而造成错解.

例题 2．（山东潍坊·高三期末）复数 z 满足 $z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$（其中 i 为虚数单位），则 $|z|=$______.

【常见错解】 $z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}\Rightarrow z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$，所以 $|z|=|-1|+|-2|=3$

【错因分析】错误的理解复数 $z=a+bi$ 的模 $|z|=|a|+|b|$.

【动手实战】

1．（北京师大附中高二期末）已知复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$__________.

易错点 4．误把复数当实数代入计算

例题 1．（全国·高一课时练习）已知 $z\in \mathbf{C}$，且 $|z-2-2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$，（i 为虚数单位），则 $|z|_{\max}=$______.

【常见错解】因为 $|z-2-2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$，所以 $(z-2)^2+4=13$ 解得：$z=5$ 或 $z=-1$，所以 $|z|_{\max}=5$.

【错因分析】本题是极易出错的题目，本题中，由题意知 $z\in \mathbf{C}$，而错解中，把 z 直接当实数参与了复数模的运算，而造成错解，特别题型同学们，当题意出现 $z\in \mathbf{C}$，应首先设出复数 z 的代数形式：$z=a+bi$，再代入运算求解.

【动手实战】

1．（全国·高三专题练习）设 $a\in C$，$a\neq 0$，化简：$\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+a\mathrm{i}}=$______ .

2．（全国·高三专题练习）设 $z\in C$，且 $\dfrac{z-2}{z+2}=\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，则 $\dfrac{3-4\mathrm{i}}{z}$ 的模为__________.

3．（全国·高二课时练习）设 $a,b\in C$，则“$a-b>0$”是“$a>b$”的______条件.

易错点 5．忽视了 $i^2=-1$，习惯性的认为平方是正数

例题 1．（黑龙江·哈尔滨德强学校高三期末（理））复数 $\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}$ 的共轭复数是__________.

【常见错解】由题意得，$\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}=\frac{(2+\mathrm{i})(2\mathrm{i}+1)}{(2\mathrm{i}-1)(2\mathrm{i}+1)}=\frac{2i^2+2+5i}{4i^2-1}=\frac{4+5\mathrm{i}}{3}$，所以 $\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}$ 的共轭复数为 $\frac{4-5i}{3}$

【错因分析】本题错解在于把 $i^2=1$ 代入计算了。

【动手实战】

1．（北京密云·高三期末）在复平面内，复数 $\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 对应的点为 Z，则点 Z 的坐标为________.

2．（天津红桥·高三期中）若 i 是虚数单位，则 $\frac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部为___________.

3．（天津实验中学高三阶段练习）已知复数 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则复数 z 的虚部为________

易错点 6．复数三角形式的标准形式理解错误

例题 1．（全国·高一课时练习）下列各式中已表示成三角形式的复数是（　　）．

A．$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$　　B．$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

C．$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}\right)$　　D．$-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

【常见错解】C

【错因分析】忽略了复数三角表示的标准形式：$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，考生往往只注意到$r\geq 0$，没有注意其它要求，复数三角形式的特点口诀：“模非负，角相同，余弦前，加号连”

【动手实战】

1．（全国·高一课时练习）复数$-\sin 30^{\circ}-i\cos 30^{\circ}$的三角形式为（　　）

A．$\sin 30^{\circ}+i\sin 30^{\circ}$　　B．$\cos 240^{\circ}+i\sin 240^{\circ}$

C．$\cos 30^{\circ}+i\sin 30^{\circ}$　　D．$\sin 240^{\circ}+i\cos 240^{\circ}$

2．（上海·高一课时练习）复数$z=-3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$的三角形式为（　　）

A．$3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$　　B．$3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

C．$3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$　　D．$3\left(\cos\frac{6\pi}{5}-i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$

3．（上海·高一单元测试）复数$z=\mathrm{i}\sin 10^{\circ}$的三角形式为（　　）

A. $\cos10°+\mathrm{i}\sin10°$

B. $\mathrm{i}\sin10°$

C. $\sin10°(\cos90°+\mathrm{i}\sin90°)$

D. $\sin10°(\cos0°+\mathrm{i}\sin0°)$

易错点 7．忽视复数$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$在复平面的位置而求错$\arg z$.

例题 1．（全国·高一课时练习）设$z_1=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_2=\left(\frac{1}{2}z_1\right)^2$，则$\arg z_2=$（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{4}{3}\pi$　　C. $\frac{11}{6}\pi$　　D. $\frac{5}{3}\pi$

【常见错解】A $z_2=\frac{1}{4}z_1^2=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，所以$\arg z_2=\frac{\pi}{3}$.

【错因分析】本题在求辐角的主值时，直接利用公式$\tan\theta=\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，忽略了，复数对应的点$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在第三象限，而造成错解.

【动手实战】

1．（福建安溪·高三期中）任意复数$z=a+b\mathrm{i}$（a、$b\in R$，i 为虚数单位）都可以写成$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的形式，其中$r=\sqrt{a^2+b^2}\ (0\le\theta<2\pi)$该形式为复数的三角形式，其中$\theta$称为复数的辐角主值.若复数$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则$z$的辐角主值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. （山西怀仁·高一期中）已知复数 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$.则 $\arg z=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

3. （重庆巴蜀中学高一期中）复数 $z=\sin 50^{\circ}-i\cos 50^{\circ}$ 的辐角主值是（　　）

A. 50°　　B. 220°　　C. 310°　　D. 320°

易错点 8．忽视复数 $z=a+bi$ 在复平面的位置在转化为复数三角形式时出错.

例题 1．（上海市延安中学高一期末）$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的三角形式是（　　）

A. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

C. $2\left(\sin\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\cos\frac{7\pi}{6}\right)$　　D. $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

【常见错解】错解 1：选 A，由 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 得：$r=2$，$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$，根据复数三角形式的标准形式得：$z=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$，所以 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的三角形式是 $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$；

错解 2：选 **D** $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

【错因分析】错解 1 中忽略了复数 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应点 $Z(-1,-\sqrt{3})$ 在第三象限，所以由 $\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{4\pi}{3}$，错解 **1** 错在忽视了复数对应点的位置；错解 **2** $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$，记错了常见角三角函数值，注意 $\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

【动手实战】

1．（全国·高一课时练习）下列表示复数$1+\mathrm{i}$的三角形式中① $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$；② $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$；③ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$；④ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$；正确的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．（全国·高一课时练习）复数$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$化成三角形式，正确的是（　　）

A．$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$　　B．$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

C．$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$　　D．$\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$

3．（上海·高一课时练习）复数$-1+\sqrt{3}i$的三角形式是

A．$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$　　B．$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

C．$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$　　D．$2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

4．（陕西·西安市第八十九中学高二阶段练习（文））设复数$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$（$i$是虚数单位），则$z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6=$（　　）

A．$6z$　　B．$6z^2$　　C．$6\overline{z}$　　D．$-6z$

易错点 9．复数三角形式的除法没化标准就代入除法运算法

则

1．（湖南·高一课时练习）计算：

$8\left(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ\right)\div 2\left(\cos 150^\circ-i\sin 150^\circ\right)$.

【常见错解】 $8(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)\div 2(\cos 150^\circ-i\sin 150^\circ)=\dfrac{4(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)}{\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ}$

$=4(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=4i$

【错因分析】本题错解在于分母复数的三角形式没有化成标准形式：$2\left(\cos 150^\circ-i\sin 150^\circ\right)$，所以首先要将该式化成标准式为：$2\left(\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ)\right)$，特别注意复数三角形式的标准形式特点："模非负，角相同，余弦前，加号连"

【动手实战】

1．（全国·高一课时练习）计算：

(1) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\times 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\left[\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(4) $(1-i)\div\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$