Лекция 5
Индуктивные расширения

(c) Д.Н. Лавров
2017

Введение

- Многие функции на множестве всех последовательностей не являются индуктивными. Примером может служить функция вычисления среднеарифметического значения.
- Отсутствие индуктивности говорит о том, что по $F(\omega)$ и x не возможно вычислить $F(\omega * x)$, нам не хватает какой-либо информации для этого.
- Так, например, для вычисления среднеарифметического значения элементов последовательности не хватает знаний об их количестве.
- В таких случаях функцию можно расширить снабдив такой информацией и эта расширенная функция уже будет индуктивной.

Индуктивное расширение

- ***Определение***. Индуктивным расширением функции $f : \Omega \to Y_f$ называется функция $F : \Omega \to Y$, обладающая следующими свойствами:
  - F – индуктивна;
  - $\exists \pi : Y \to Y_f : \forall \omega \in \Omega \quad f(\omega) = \pi(F(\omega))$.
- Простыми словами, можно f вычислить, зная F.

Стратегии построения расширений

- Существует две стратегии построения алгоритмов для неиндуктивных функций.
- *Первая стратегия* заключается в прямом представлении неиндуктивной функции в виде композиции нескольких индуктивных. Тогда в качестве индуктивной функции можно будет взять эту композицию.

Стратегии построения расширений

- Существует две стратегии построения алгоритмов для неиндуктивных функций.
- *Первая стратегия* заключается в прямом представлении неиндуктивной функции в виде композиции нескольких индуктивных. Тогда в качестве индуктивной функции можно будет взять эту композицию.

Стратегии построения расширений

- Вторая стратегия заключается в выражении $f(\omega * x)$ через $f(\omega)$ и x. Затем анализируется каких именно данных не хватает для перехода.
- Обозначим их за $f_1(\omega)$. Если $f_1(\omega * x)$ выражается через $f(\omega)$, $f_1(\omega)$ и x , то индуктивное расширение F задаётся как пар $F = (f, f_1)$.
- Если же выразить $f(\omega)$ нельзя, то снова анализируется не достающая информация $f_2(\omega)$. И опять, если $f_2(\omega * x)$ выражается через $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f2(\omega)$ и x, то индуктивное расширение F задаётся как пар $F = (f, f_1, f_2)$.
- И т.д. пока не будет построено индуктивное расширение.
- В этой ситуации отображение $\pi(F)$ выбирает первую компоненту вектора F.
- Вторая стратегия не требует какой-либо «креативности» и производится почти механически.

Пример

- F = «Среднеарифметическое значений последовательности».
- ***Стратегия первая***. Функцию вычисления среднего можно разложить на две индуктивных функции: вычисления суммы элементов F_1 и их количества F_2. Итоговый результат будет вычислен как их отношение
- $F = F_1 / F_2$.
- $F_1(\omega * x) = G_1(F_1(\omega), x) = F_1(\omega) + x;$
- $F_2(\omega * x) = G_2(F_2(\omega), x) = F_2(\omega) + 1;$
- Доопределим F_1 и F_2 на пустых последовательностях:
- $F_1(\Delta) = 0; F_2(\Delta) = 0$

Пример

- Результат реализации на Python

```
omega=[1,2,4,2,3]
F1=0; F2=0
for x in omega:
      F1+=x
      F2+=1
F=F1 / F2
print(F)
```

Пример.

- Вторая стратегия. Посмотрим чего не хватает

$$f(\omega_{k+1}) = f(\omega_k * x) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} x_i = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k} x_i + \frac{1}{k+1}x_{k+1} =$$

$$= \frac{k}{k+1}f(\omega_k) + \frac{1}{k+1}x_{k+1},$$

- где ω_k – последовательность длины k.

Пример.

- Нам не хватает информации о длине последовательности.
- Обозначим эту информацию, f_1 . Эта функция индуктивна и $f_1(\omega * x)$ может быть вычислена при известной $f_1(\omega)$ и x по правилу $f_1(\omega * x) = f_1(\omega) + 1$.
- Тогда положим $F = (f, f_1)$

Пример

$$F(\omega * x) = \frac{f_1(\omega)}{f_1(\omega)+1} f(\omega) + \frac{1}{f_1(\omega)+1} x = \frac{f_1(\omega) * f(\omega) + x}{f_1(\omega)+1}.$$

- Код на Python

```
omega=[1,2,4,2,3]
f=0; f1=0
for x in omega:
        f=(f1*f+x)/(f1+1)
        f1+=1
print(f)
```

Минимальное индуктивное расширение

- Для одной и той же функции можно придумать разные индуктивные расширения. С практической точки зрения интересны минимальные индуктивные расширения. «Минимальное» означает – минимум информации об ω.
- ***Определение***. Пусть даны две функции на $F : \Omega \to Y$ и $G : \Omega \to Z$. Скажем, что

$$F \geq G,$$

если существует $p: Y \to G$: для любой последовательности $\omega \in \Omega$ $G(\omega)=p(F(\omega))$.
- Существование $p(x)$ означает, что $G(\omega)$ можно найти по $F(\omega)$.

Минимальное индуктивное расширение

- ***Определение***. Индуктивное расширение $G : \Omega \rightarrow Z$ функции f называется ***минимальным,*** *если*
- a) $G(\Omega) = Z$ (G полностью заполняет Z),
- b) $\forall F : F \,!= G$, где F – индкутивное расширение f, выполнено

$$F > G$$

Минимальное индуктивное расширение

- ***Утверждение***. Минимальное расширение единственно с точностью до изоморфизма.
- ***Теорема***. Минимальное индуктивное расширение существует!
- ***Определение.*** *Будем говорить, что две последовательности a и b эквивалентны относительно функции f, когда*

$$\forall \omega \in \Omega \qquad f(a * \omega) = f(b * \omega).$$

- *Эквивалентность последовательностей a и b будем обозначать знаком ~ и писать a ~ b.*
- Введённое отношение эквивалентности действительно является отношением эквивалентности в алгебраическом смысле. Оно обладает основными свойствами эквивалентности, перечисленными ниже.
- Рефлексивность: $a \sim a \ \forall a \in \Omega$.
- Симметричность: если $a \sim b$, то $b \sim a$.
- Транзитивность: если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.

Критерий минимальности

- ***Утверждение***. *Критерий минимальности индуктивного расширения*. Индуктивное расширение $F : \Omega \to Y$ функции $f : \Omega \to Y_f$ является минимальным тогда и только тогда, когда
- a) $F(\Omega) = Y$,
- b) $\forall a, b \in \Omega$: $F(a) \mathrel{!=} F(b) \Rightarrow a \mathrel{!\sim} b$,
  где ~ — отношение эквивалентности, введённое выше.

Вывод

- Существование минимального индуктивного расширения означает использование минимума памяти.
- С другой стороны реализация индуктивной функции даёт однопроходный алгоритм.
- Поэтому основной результат данного раздела: для любой функции f на множестве последовательностей Ω существует минимальный по памяти однопроходный алгоритм, вычисляющий f , этот алгоритм единственный с точностью до изоморфизма.

Литература

- Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В. Программирование для математиков: Учебное пособие для вузов. М. : Глав. ред. физ.-мат. лит., 1988. 384с.
- Е.А. Роганов. Основы информатики и программирования: Учебное пособие для программистких специальностей. М. : МГИУ, 2001. 315 с.

Контрольная работа

- Найти минимальное индуктивное расширение для f(n,a)
- Написать программу, вычисляющую по заданым n и a значение функции.

$$f(n,a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$$

Вопросы