

ANÁLISIS DE DATOS MASIVOS

DESCOMPOSICIÓN CUR

Blanca Vázquez

23 de enero de 2025

- Surge en los años 1997-1998 por Stewart Stewart y Goreinov-Tyrtysnikov-Zamarashkin.
- Este método se formaliza en el 2004 por Drineas-Kannan-Mahoney
- Surge como una alternativa a las descomposiciones deterministas para grandes volúmenes de datos.

¿POR QUÉ SURGE LA DESCOMPOSICIÓN CUR?

Bolsa de palabras

| | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 | w_5 | ... | w_n |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| doc_1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| doc_2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| doc_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| doc_4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| doc_n | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

¡El reto de las matrices dispersas!

- Es un método de reducción, que se expresa en términos de un sub-conjunto de las variables originales.
- Es una alternativa aleatoria para SVD
- A diferencia de SVD que genera una descomposición exacta, CUR realiza una aproximación.

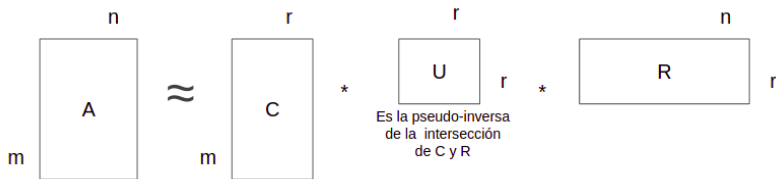
Dada una matriz A de $m \times n$, se define la descomposición de CUR de A como:

$$M \approx CUR$$

Donde:

- C es una selección aleatoria de r columnas de A , y forma la matriz de $m \times r$
- R es una selección aleatoria de r filas de A , y forma la matriz de $r \times n$
- U es una matriz que se construye a partir de C y R

DESCOMPOSICIÓN DE CUR



- La selección de filas y columnas se hace de manera aleatoria (se deben mantener las F y C más importantes).
- La medida de importancia es el cuadrado de la norma de Frobenius

$$f = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

Para construir U, deben seguirse estos pasos:

- Generar la matriz W de $r \times r$ que es la intersección de las columnas escogidas para C y de las filas escogidas para R.
- Calcular la SVD para W, es decir: $W = X\Sigma Y^T$
- Calcular la pseudo-inversa de Moore-Penrose (Σ^+) de la diagonal de la matriz Σ
- Calcular $U = Y(\Sigma^T)^2 X^T$

EJERCICIO¹

| | Matrix | Alien | Star Wars | Casablanca | Titanic |
|-------|--------|-------|-----------|------------|---------|
| Joe | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jim | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| John | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| Jill | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| Jane | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |

¹Ejemplo tomado de Jure Leskovec, 2011.

EJERCICIO

| | Matrix | Alien | Star Wars | Casablanca | Titanic |
|-------|--------|-------|-----------|------------|---------|
| Joe | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jim | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| John | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| Jill | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| Jane | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |

- La suma de los cuadrados de los elementos de $M = 243$

| | Matrix | Alien | Star Wars | Casablanca | Titanic |
|-------|--------|-------|-----------|------------|---------|
| Joe | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jim | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| John | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| Jill | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| Jane | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |

- Cada una de las columnas de M, A y S tiene una norma cuadrada de Frobenius de $1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 51$
- La probabilidad de cada una de las columnas para ser seleccionada es: $51/243 = 0.210$

EJERCICIO

| | Matrix | Alien | Star Wars | Casablanca | Titanic |
|-------|--------|-------|-----------|------------|---------|
| Joe | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jim | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| John | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| Jill | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| Jane | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |

- Cada una de las columnas de C y T tiene una norma cuadrada de Frobenius de $4^2 + 5^2 + 2^2 = 45$
- La probabilidad de cada una de las columnas para ser seleccionada es: $45/243 = 0.185$

EJERCICIO

| | Matrix | Alien | Star Wars | Casablanca | Titanic |
|-------|--------|-------|-----------|------------|---------|
| Joe | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jim | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| John | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| Jill | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| Jane | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |

- La probabilidad queda de la siguiente manera:

$$P(M) = 0.210, P(A) = 0.210, P(S) = 0.210$$

$$P(C) = 0.185, P(T) = 0.185$$

EJERCICIO

| | Matrix | Alien | Star Wars | Casablanca | Titanic |
|-------|--------|-------|-----------|------------|---------|
| Joe | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jim | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| John | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| Jill | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| Jane | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |

- Para la fila 1 (Joe) $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$
- La probabilidad de que la fila sea seleccionada es $3/243 = 0.012$

EJERCICIO

| | Matrix | Alien | Star Wars | Casablanca | Titanic | Frobenius | Prob |
|-----------|--------|-------|-----------|------------|---------|-----------|-------|
| Joe | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0.12 |
| Jim | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 | 27 | 0.111 |
| John | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 | 48 | 0.198 |
| Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 75 | 0.309 |
| Jill | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 32 | 0.132 |
| Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 50 | 0.206 |
| Jane | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 8 | 0.033 |
| Frobenius | 51 | 51 | 51 | 45 | 45 | | |
| Prob | 0.210 | 0.210 | 0.210 | 0.185 | 0.185 | | |

SELECCIÓN DE COLUMNAS

- La selección de columnas es aleatoria, sin embargo no es una probabilidad uniforme.
- Recordemos que la j th columna se selecciona con una probabilidad de q_j
- Cada columna de C se escoge independientemente de las columnas M , hay una probabilidad de escoger una columna más de una vez.
- Supongamos que $r = 2$ (no. columnas y filas a seleccionar)
- Cada columna seleccionada debe escalarse: dividiendo sus elementos entre $\sqrt{rq_j}$

$$\textit{Alien} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \textit{Casablanca} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alien} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\sqrt{rq_2}$

Por lo tanto: $\sqrt{rq_2} = \sqrt{2 * 0.210} = 0.648$

$$Alien = \begin{bmatrix} 1/0.648 \\ 3/0.648 \\ 4/0.648 \\ 5/0.648 \\ 0/0.648 \\ 0/0.648 \\ 0/0.648 \end{bmatrix}, Alien_{esc} = \begin{bmatrix} 1.54 \\ 4.63 \\ 6.17 \\ 7.72 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Alien_{esc}$ es la primera columna de la matriz C .

$$\text{Casablanca} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\sqrt{rq_4}$

Por lo tanto: $\sqrt{rq_4} = \sqrt{2 * 0.185} = 0.608$

$$Casablanca = \begin{bmatrix} 0/0.608 \\ 0/0.608 \\ 0/0.608 \\ 0/0.608 \\ 4/0.608 \\ 5/0.608 \\ 2/0.608 \end{bmatrix}, Casablanca_{esc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.58 \\ 8.22 \\ 3.29 \end{bmatrix}$$

$Casablanca_{esc}$ es la segunda columna de la matriz C .

1ER RESULTADO: MATRIZ C

$$C = \begin{bmatrix} 1.54 & 0 \\ 4.63 & 0 \\ 6.17 & 0 \\ 7.72 & 0 \\ 0 & 6.58 \\ 0 & 8.22 \\ 0 & 3.29 \end{bmatrix}$$

- Supongamos que $r = 2$ (no. columnas y filas a seleccionar)
- Cada fila seleccionada debe escalarse: dividiendo sus elementos entre $\sqrt{rp_i}$

$$Jenny = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Jack = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jenny = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\sqrt{rp_6}$

Por lo tanto: $\sqrt{rp_6} = \sqrt{2 * 0.206} = 0.642$

$$Jenny = \begin{bmatrix} 0/0.642 & 0/0.642 & 0/0.642 & 5/0.642 & 5/0.642 \end{bmatrix}$$

$$Jenny_{esc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7.79 & 7.79 \end{bmatrix}$$

$Jenny_{esc}$ es la primera fila de la matriz R.

$$Jack = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\sqrt{rp_4}$

Por lo tanto: $\sqrt{rp_4} = \sqrt{2 * 0.309} = 0.786$

$$Jack = \begin{bmatrix} 5/0.786 & 5/0.786 & 5/0.786 & 0/0.786 & 0/0.786 \end{bmatrix}$$

$$Jack_{esc} = \begin{bmatrix} 6.36 & 6.36 & 6.36 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Jack_{esc}$ es la segunda fila de la matriz R.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7.79 & 7.79 \\ 6.36 & 6.36 & 6.36 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONSTRUYENDO LA MATRIZ U

- U es una matriz de $r \times r$
- Para construir U, es necesario construir la matriz W.
- W es la intersección resultante entre filas y columnas que se usaron para construir C y R.
- W es una muestra de las filas y columnas de M con la mayor probabilidad
- Una vez construida W, se calcula su SVD, es decir:
$$W = X\Sigma Y^T$$
- Cada elemento de la matriz Σ debe reemplazarse usando la pseudoinversa de Moore-Penrose
- Para obtener U, se calcula

$$U = Y(\Sigma^+)^2 X^T$$

CONSTRUYENDO LA MATRIZ U

| | | Columnas para construir C | | | | |
|------------------------|-------|---------------------------|-------|-----------|------|---------|
| | | Matrix | Alien | Star Wars | Casa | Titanic |
| Filas para construir R | Jenny | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| | Jack | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 |

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso es calcular la SVD de W

$$W = X\Sigma Y^T$$

La SVD de $W = X\Sigma Y^T$:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando la matriz Σ , calculamos la pseudoinversa de Moore-Penrose² Σ^+

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Cada elemento de la diagonal de Σ se reemplaza por $1/\sigma_i$
- Si el elemento de la diagonal es 0, se deja igual.

²Es una generalización de una matriz inversa, desarrollada en 1920

Usando la matriz Σ , calculamos la pseudoinversa de Moore-Penrose Σ^+

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Para calcular U, debemos calcular:

$$U = Y(\Sigma^+)^2 X^T$$

$$(X) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, (\Sigma^+) \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}, (Y^T) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular U, debemos calcular:

$$U = Y(\Sigma^+)^2 X^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

CONSTRUYENDO LA MATRIZ U

Para calcular U, debemos calcular:

$$U = Y(\Sigma^+)^2 X^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/25 & 0 \\ 0 & 1/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/25 & 0 \\ 0 & 1/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1/25 \\ 1/25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1/25 \\ 1/25 & 0 \end{bmatrix}$$

DESCOMPOSICIÓN CUR DE M

Dada una matriz M de $m \times n$, se define la descomposición de CUR de M como:

$$M \approx CUR$$

$$M \approx \begin{bmatrix} 1.54 & 0 \\ 4.63 & 0 \\ 6.17 & 0 \\ 7.72 & 0 \\ 0 & 6.58 \\ 0 & 8.22 \\ 0 & 3.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/25 \\ 1/25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7.79 & 7.79 \\ 6.36 & 6.36 & 6.36 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La descomposición CUR es un método de aproximación de la matriz original, construida a partir de un subconjunto de valores originales.
- Es un método de reducción de variables
- Es un método alternativo para SVD para matrices dispersas.

- Reconocimiento y análisis de imágenes
- Análisis término-documento
- Análisis de sistemas de recomendación
- Análisis de microarrays genómicos de ADN