Datos Masivos II

Descomposición de valores singulares

Blanca Vázquez-Gómez y Gibran Fuentes-Pineda

15 de agosto de 2022

Un poco de historia

- La descomposición de valores singulares (SVD) fue propuesta por Beltrani (1873) y por Jordan (1874).
- Fue hasta 1907 por Smith y en 1912 por Weyl que fue planteado como una generalización de la descomposición propia de matrices.
- En la década de los 60 y 70, cuando consigue popularidad para el tratamiento de imágenes.

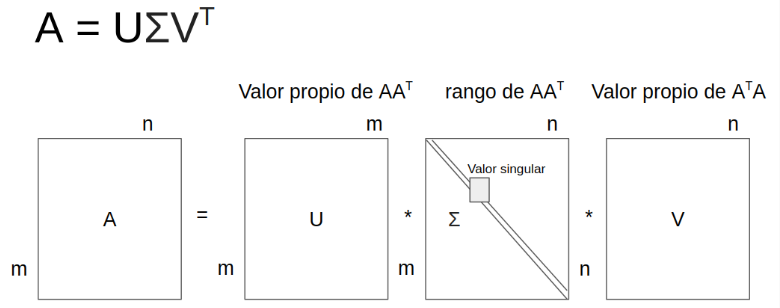
Definición

Dada una matriz A de m x n, una descomposición de valores singulares de A es una **factorización** del tipo:

$$A = U\Sigma V^T$$

Dónde:
U es una matriz ortogonal de tamaño m x m
Σ es una matriz diagonal de tamaño m x n
V es una matriz ortogonal de tamaño n x n

Descomposición de valores singulares



Descomposición de valores singulares

- Los elementos de la matriz Σ se les conoce como los valores singulares de A , se denotan por (σ_i)
- Los vectores $u_i, .., u_m$ que conforman la matriz U se les conoce como vectores singulares de A por la izquierda.
- Los vectores $v_i, .., v_m$ que conforman la matriz V se les conoce como vectores singulares de A por la derecha.
- Las matrices U y V son unitarias
- El término $\sigma_i u_i v_i$ se conoce también como tripleta singular.

Ejercicio

Encontrar la descomposición de valores singulares de A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: para obtener las matrices U, Σ y V, es necesario calcular:

$$AA^T$$
$$A^TA$$

Posteriormente, se deben calcular los valores propios para cada una de estas matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz Σ

Dada la matriz AA^T calcular los valores propios:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

Recordemos, cómo se hace la descomposición propia de una matriz:

$$\begin{gathered} Av = \lambda v \\ Av = (\lambda I)v \\ Av - (\lambda I)v = 0 \\ A - (\lambda I)v = 0 \end{gathered}$$

$$\left| \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$|A-(\lambda I)| = (17-\lambda)(17-\lambda) - 64 = 0$$
$$|A-(\lambda I)| = 289 - 17\lambda - 17\lambda + \lambda^2 - 64 = 0$$
$$|A-(\lambda I)| = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = 0$$

Usamos la función cuadrática para resolver la ecuación:

$$\lambda^2 - 34\lambda + 225 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4(1 \cdot 225)}}{2 \cdot 1}$$

Los valores propios quedan:

$$\lambda_1 = \frac{34 + 16}{2} = 25$$

$$\lambda_2 = \frac{34 - 16}{2} = 9$$

Los valores singulares de la matriz Σ son las raíces cuadradas de los valores propios:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Entonces:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz diagonal de tamaño de A.

Cálculo de la matriz U

Es necesario calcular los vectores propios de la matriz de AA^T:

Para $\lambda_1 = 25$

$$\begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 25 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$\begin{aligned} 17x + 8y &= 25x \\ 8x + 17y &= 25y \end{aligned}$$

Calculando el vector propio de λ_1

Posible vector propio cuando λ_1=25:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos el vector unitario: $1^2 + 1^2 = 2$, tal que el vector propio cuando $\lambda_1 = 25$ es:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Calculando el vector propio de λ_2

Para $\lambda_2 = 9$

$$\begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones y se resuelve:

$$17x + 8y = 9x$$
$$8x + 17y = 9y$$

Calculando el vector propio de λ_2

El vector propio cuando $\lambda_2 = 9$ es:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2do resultado: matriz U

Los vectores propios para $\lambda_1 = 25$ y $\lambda_2 = 9$ son:

$$u_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, u_2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Dada la matriz $A^T A$ calcular el determinante:

$$\left| \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 13-\lambda & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Dada la matriz A^TA calcular el determinante:

$$\left|\begin{bmatrix} 13-\lambda & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$|A-(\lambda I)| = 13-\lambda((13-\lambda)(8-\lambda)-4) - 12(12(8-\lambda)-(-4)) - 2(2(13-\lambda)-(-24))$
Se factoriza la ecuación y se obtiene:

$$\lambda^2 - 34\lambda + 225 = 0$$

Cálculo de los valores propios

Dada la ecuación:

$$\lambda^2 - 34\lambda + 225 = 0$$

se calculan los valores propios usando la función cuadrática:

Los valores propios quedan:

$$\lambda_1 = \frac{34 + 16}{2} = 25$$

$$\lambda_2 = \frac{34 - 16}{2} = 9$$

$$\lambda_3 = 0$$

3er resultado: matriz V^T

Los vectores propios para $\lambda_1 = 25$, y $\lambda_2 = 9$ y $\lambda_3 = 0$ son:

$$v_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{bmatrix}, v_3 \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Dada la matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La descomposición de valores singulares es:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Recuerda

- SVD es la descomposición de una matriz *mxn* en 3 matrices: U, Σ, V
- Σ es una matriz diagonal compuesta de los valores singulares
    - Son los valores importantes en una matriz, nos indica la fuerza de cada concepto.
- Los vectores propios de una matriz son direcciones de máxima dispersión o varianza de datos

Compresión de imágenes

- Trasmitir / enviar imágenes por medios electrónicos
- *¿Cuál es la cantidad mínima de información que se debe almacenar?* (Sin perder información valiosa y que ahorre espacio).

Ventajas en la compresión de imágenes

- Una imagen contiene información redundante, que puede ser eliminada sin afectar a la información importante.
- Observamos que es posible descomponer una imagen en una matriz y calcular sus SVD.
- A partir de los valores singulares, es posible reconstruir la imagen original
- Mientras mayor sea k, mayor será la calidad y menor la compresión.

Relación de compresión

Para aproximar cuanto espacio se reduce una imagen usando SVD, se usa la siguiente relación de compresión:

$$r = (n + m + 1)k \; / \; nm$$

Dónde:
n y m es el tamaño de la imagen
k es el número de valores singulares a usar

Una imagen de 480 x 640 pixeles está compuesta de 307,200 puntos $\approx$ 0.3 MB, calcular la relación de compresión, si únicamente usamos 50 valores singulares para reconstruir la imagen:

$$r = (n + m + 1)k \ / \ nm$$

$$r = (480 + 640 + 1)50 \ / \ 480*640$$

$$r = 0.18$$

Una imagen reconstruida con 50k, únicamente requiere el 18 % de la información original $\approx$ 0.05 MB

Resolución de mínimos cuadrados

- Se requiere resolver $Ax = b$
- Se multiplica en ambos lados de la ecuación por A^T y se obtiene: $A^TA = A^Tb$
- Se calcula SVD de $A = U\Sigma V^T$

Reducción de dimensionalidad en datos dispersos

- Sistemas de puntajes (películas, canciones)
- Bolsa de palabras
- Codificación *One-hot*

Otras aplicaciones de la SVD

- Reducción de ruido
- Cálculos estadísticos
- Procesamiento de señales

Truncamiento de SVD

- En la práctica, puede ser muy costoso el cómputo de la versión completa de SVD

- En la versión truncada, solo se calculan las k vectores columna de U y los k vectores fila de V asociados a los k valores singulares más grandes en Σ
  - U_k es de tamaño $m \times k$
  - V_k es de tamaño $k \times n$
  - Σ_k es de tamaño $k \times k$

- La versión truncada es una aproximación de SVD

$$\tilde{\mathsf{A}} \approx \mathsf{U}_k \Sigma_k \mathsf{V}_k^\top$$

LOBPCG

El gradiente conjugado precondicionado de bloque localmente óptimo (LOBPCG, por sus siglas en ingles) permite el cálculo de valores y propios:

- Es un método libre de matrices.
- Calcula un solo par propio extremo de una matriz simétrica (más grande).
- Bibliotecas disponibles con la implementación del método:*Blopex* [1].

[1] https://github.com/lobpcg/blopex