Inferencia de Tipos
Machete

Paradigmas (de Lenguajes) de Programación

1. Algoritmo de inferencia

Consta de los siguientes pasos:

1. **Rectificación** del término.
2. **Anotación** del término con variables de tipo frescas.
3. **Generación de restricciones** (ecuaciones entre tipos).
4. **Unificación de las restricciones**.

1.1. Rectificación

Decimos que un término está *rectificado* si:

- No hay dos variables ligadas con el mismo nombre.
- No hay una variable ligada con el mismo nombre que una variable libre.

Siempre se puede rectificar un término α-renombrándolo.

1.2. Anotación

Dado un término U, que suponemos ya rectificado, producimos un contexto Γ_0 y un término M_0:

- El contexto Γ_0 le da tipo a todas las variables libres de U.

  El tipo de cada variable es una incógnita *fresca*.
- El término M_0 está anotado de tal modo que $\mathit{Erase}(M_0) = U$.

  Todas las anotaciones son incógnitas frescas.

1.3. Generación de restricciones

1. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{True}) = (\mathsf{Bool} \mid \emptyset)$
2. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{False}) = (\mathsf{Bool} \mid \emptyset)$
3. $\mathcal{I}(\Gamma \mid x) = (\tau \mid \emptyset) \quad$ si $(x : \tau) \in \Gamma$
4. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{if}\ M_1\ \mathsf{then}\ M_2\ \mathsf{else}\ M_3) =$
   $(\tau_2 \mid \{\tau_1 \overset{?}{=} \mathsf{Bool}, \tau_2 \overset{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$
   donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
5. $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1\, M_2) = (X \mid \{\tau_1 \overset{?}{=} (\tau_2 \to X)\} \cup E_1 \cup E_2)$
   donde X es una incógnita fresca
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
6. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \lambda x : \tau.\ M) = (\tau \to \sigma \mid E)$
   donde $\mathcal{I}(\Gamma, x : \tau \mid M) = (\sigma \mid E)$
7. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{zero}) = (\mathit{Nat} \mid \emptyset)$
8. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{succ}(M)) = (\mathit{Nat} \mid \{\tau_1 \overset{?}{=} \mathit{Nat}\} \cup E)$
   donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau_1 \mid E)$
9. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{pred}(M)) = (\mathit{Nat} \mid \{\tau_1 \overset{?}{=} \mathit{Nat}\} \cup E)$
   donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau_1 \mid E)$
10. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{isZero}(M)) = (\mathsf{Bool} \mid \{\tau_1 \overset{?}{=} \mathit{Nat}\} \cup E)$
    donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau_1 \mid E)$

1.4. Unificación de restricciones

Dados Γ y M, resultantes de anotar un término rectificado U, una vez calculado $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$:

1. Calculamos $\mathbf{S} = \mathsf{mgu}(E)$.
2. Si no existe el unificador, el término U no es tipable.
3. Si existe el unificador, el término U es tipable y devolvemos: $\mathbf{S}(\Gamma) \vdash \mathbf{S}(M) : \mathbf{S}(\tau)$

2. Algoritmo de unificación (Martelli-Montanari)

2.1. Reglas

Se enuncian las reglas para constructores de tipo C en general de cualquier aridad, y en particular para los constructores de tipo de λ^b

$$\sigma, \tau ::= X_n \mid Nat \mid Bool \mid \sigma \to \tau$$

1. **Descomposición**

   $\{\sigma_1 \to \sigma_2 \stackrel{?}{=} \tau_1 \to \tau_2\} \cup G \mapsto \{\sigma_1 \stackrel{?}{=} \tau_1, \sigma_2 \stackrel{?}{=} \tau_2\} \cup G$

   $\{Bool \stackrel{?}{=} Bool\} \cup G \mapsto G$

   $\{Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \cup G \mapsto G$

   Caso general

   $\{C(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \stackrel{?}{=} C(\tau_1, \dots, \tau_n)\} \cup G \mapsto \{\sigma_1 \stackrel{?}{=} \tau_1, \dots, \sigma_n \stackrel{?}{=} \tau_n\} \cup G$

2. **Eliminación de par trivial**

   $\{\mathrm{X}_k \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_k\} \cup G \mapsto G$

3. **Swap**: si σ no es una variable

   $\{\sigma \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_k\} \cup G \mapsto \{\mathrm{X}_k \stackrel{?}{=} \sigma\} \cup G$

4. **Eliminación de variable**: si $\mathrm{X}_k \notin FV(\sigma)$

   $\{\mathrm{X}_k \stackrel{?}{=} \sigma\} \cup G \mapsto_{\{\mathrm{X}_k := \sigma\}} G\{\mathrm{X}_k := \sigma\}$

5. **Colisión**

   $\{\sigma \stackrel{?}{=} \tau\} \cup G \mapsto \textbf{falla}$, con $(\sigma, \tau) \in T \cup T^{-1}$ donde

   $T = \{(Bool, Nat), (Nat, \sigma_1 \to \sigma_2), (Bool, \sigma_1 \to \sigma_2)\}$ y T^{-1} representa invertir cada par

   Caso general: si $C \neq C'$ son constructores de tipo diferentes

   $\{C(\dots) \stackrel{?}{=} C'(\dots)\} \cup G \mapsto \textbf{falla}$

6. **Occurs check**: si $\mathrm{X}_k \neq \sigma$ y $\mathrm{X}_k \in FV(\sigma)$

   $\{\mathrm{X}_k \stackrel{?}{=} \sigma\} \cup G \mapsto \textbf{falla}$

2.2. Ejemplos

2.2.1. Secuencia exitosa

$$\begin{array}{ll}
 & \{(Nat \to \mathrm{X}_1) \to (\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_3) \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_2 \to (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4) \to \mathrm{X}_2\} \\
\mapsto^1 & \{Nat \to \mathrm{X}_1 \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_3 \stackrel{?}{=} (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4) \to \mathrm{X}_2\} \\
\mapsto^3 & \{\mathrm{X}_2 \stackrel{?}{=} Nat \to \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_3 \stackrel{?}{=} (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4) \to \mathrm{X}_2\} \\
\mapsto^4_{\{\mathrm{X}_2 := Nat \to \mathrm{X}_1\}} & \{\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_3 \stackrel{?}{=} (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4) \to (Nat \to \mathrm{X}_1)\} \\
\mapsto^1 & \{\mathrm{X}_1 \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4, \mathrm{X}_3 \stackrel{?}{=} Nat \to \mathrm{X}_1\} \\
\mapsto^4_{\{\mathrm{X}_1 := \mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4\}} & \{\mathrm{X}_3 \stackrel{?}{=} Nat \to (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4)\} \\
\mapsto^4_{\{\mathrm{X}_3 := Nat \to (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4)\}} \emptyset &
\end{array}$$

El MGU es

$$\begin{aligned}
&\{\mathrm{X}_3 := Nat \to (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4)\} \circ \{\mathrm{X}_1 := \mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4\} \circ \{\mathrm{X}_2 := Nat \to \mathrm{X}_1\} \\
= &\{\mathrm{X}_2 := Nat \to (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4),\ \mathrm{X}_1 := \mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4,\ \mathrm{X}_3 := Nat \to (\mathrm{X}_4 \to \mathrm{X}_4)\}
\end{aligned}$$

2.2.2. Secuencia fallida

$$\begin{array}{ll}
 & \{\mathrm{X}_1 \to (\mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_1) \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_2 \to ((\mathrm{X}_1 \to Nat) \to \mathrm{X}_1)\} \\
\mapsto^1 & \{\mathrm{X}_1 \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_1 \stackrel{?}{=} (\mathrm{X}_1 \to Nat) \to \mathrm{X}_1\} \\
\mapsto^4_{\{\mathrm{X}_1 := \mathrm{X}_2\}} & \{\mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_2 \stackrel{?}{=} (\mathrm{X}_2 \to Nat) \to \mathrm{X}_2\} \\
\mapsto^1 & \{\mathrm{X}_2 \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_2 \to Nat, \mathrm{X}_2 \stackrel{?}{=} \mathrm{X}_2\} \\
\mapsto^6 & \textbf{falla}
\end{array}$$

2.2.3. Ejemplo con otros constructores

Se usan los constructores de tipos de listas,

$$\sigma ::= \ldots \mid [\sigma]$$

$$\begin{array}{ll}
 & \{(X_3 \to X_4 \to X_4) \to X_4 \to [X_3] \to X_4 \stackrel{?}{=} ((X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2]) \to X_5\} \\
\mapsto^1 & \{X_3 \to X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2], X_4 \to [X_3] \to X_4 \stackrel{?}{=} X_5\} \\
\mapsto^3 & \{X_3 \to X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2],\ X_5 \stackrel{?}{=} X_4 \to [X_3] \to X_4\} \\
\mapsto^4_{\{X_5 := X_4 \to [X_3] \to X_4\}} & \{X_3 \to X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2]\} \\
\mapsto^1 & \{X_3 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_2,\ X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} [X_1] \to [X_2]\} \\
\mapsto^4_{\{X_3 := X_1 \to X_2\}} & \{X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} [X_1] \to [X_2]\} \\
\mapsto^1 & \{X_4 \stackrel{?}{=} [X_1],\ X_4 \stackrel{?}{=} [X_2]\} \\
\mapsto^4_{\{X_4 := [X_1]\}} & \{[X_1] \stackrel{?}{=} [X_2]\} \\
\mapsto^1 & \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2\} \\
\mapsto^4_{\{X_1 := X_2\}} & \emptyset
\end{array}$$

El MGU es

$$\begin{aligned}
&\{X_1 := X_2\} \circ \{X_4 := [X_1]\} \circ \{X_3 := X_1 \to X_2\} \circ \{X_5 := X_4 \to [X_3] \to X_4\} \\
= &\{X_5 := X_{[X_2]} \to [X_2 \to X_2] \to X_{[X_2]},\ X_3 := X_2 \to X_2,\ X_4 := [X_2],\ X_1 := X_2\}
\end{aligned}$$