Práctica N° 3 - Demostración en Lógica Proposicional

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Semántica

Ejercicio 1

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (fórmulas):

I. $(\neg P \vee Q)$

II. $(P \vee (S \wedge T) \vee Q)$

III. $\neg(Q \vee S)$

IV. $(\neg P \vee S) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg S)$

V. $((P \vee S) \wedge (T \vee Q))$

VI. $(((P \vee S) \wedge (T \vee Q)) \Leftrightarrow (P \vee (S \wedge T) \vee Q))$

VII. $(\neg Q \wedge \neg S)$

cuando el valor de verdad de P y Q es V, mientras que el de S y T es F.

Ejercicio 2

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\Rightarrow$ (implicación) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$. **Sugerencia:** hacer inducción en la estructura de la fórmula.

Ejercicio 3

Sean τ, σ, ρ y ζ proposiciones tales que $\tau \Rightarrow \sigma$ es tautología y $\rho \Rightarrow \zeta$ es contradicción. Determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias y demostrarlo:

I. $(\tau \Rightarrow \sigma) \vee (\rho \Rightarrow \zeta)$

II. $(\tau \Rightarrow \rho) \vee (\sigma \Rightarrow \zeta)$

III. $(\rho \Rightarrow \sigma) \vee (\zeta \Rightarrow \sigma)$

Ejercicio 4

Probar que cualquier fórmula que sea una tautología contiene un $\neg$ o una $\Rightarrow$.

Deducción natural

Ejercicio 5 ★

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Recordemos que una fórmula σ es un teorema si y sólo si vale $\vdash \sigma$:

I. *Modus ponens* relativizado: $(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \rho \Rightarrow \tau$

II. Reducción al absurdo: $(\rho \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\rho$

III. Introducción de la doble negación: $\rho \Rightarrow \neg\neg\rho$

IV. Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg\rho \Rightarrow \neg\rho$

V. Contraposición: $(\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\neg\sigma \Rightarrow \neg\rho)$

VI. Adjunción: $((\rho \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Leftrightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)$

VII. de Morgan (I): $\neg(\rho \vee \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$

VIII. de Morgan (II): $\neg(\rho \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \vee \neg\sigma)$. Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

IX. Conmutatividad ($\wedge$): $(\rho \wedge \sigma) \Rightarrow (\sigma \wedge \rho)$

X. Asociatividad ($\wedge$): $((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \Leftrightarrow (\rho \wedge (\sigma \wedge \tau))$

XI. Conmutatividad ($\vee$): $(\rho \vee \sigma) \Rightarrow (\sigma \vee \rho)$

XII. Asociatividad ($\vee$): $((\rho \vee \sigma) \vee \tau) \Leftrightarrow (\rho \vee (\sigma \vee \tau))$

¿Encuentra alguna relación entre teoremas de adjunción, asociatividad y conmutatividad con algunas de las propiedades demostradas en la práctica 2?

Ejercicio 6 ★

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas. Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

I. Absurdo clásico: $(\neg\tau \Rightarrow \bot) \Rightarrow \tau$

II. Ley de Peirce: $((\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$

III. Tercero excluido: $\tau \vee \neg\tau$

IV. Consecuencia milagrosa: $(\neg\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$

V. Contraposición clásica: $(\neg\rho \Rightarrow \neg\tau) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho)$

VI. Análisis de casos: $(\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\neg\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$

VII. Implicación vs. disyunción: $(\tau \Rightarrow \rho) \Leftrightarrow (\neg\tau \vee \rho)$

Ejercicio 7

Probar las siguientes propiedades:

I. **Debilitamiento.** Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.
Sugerencia: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.

II. **Regla de corte.** Si $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido y $\Gamma \vdash \tau$ es válido, entonces $\Gamma \vdash \sigma$ es válido.

III. $\Rightarrow_i^{-1}$: Si $\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma$ es válido, entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ también lo es.

Ejercicio 8

Si $[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ es una lista de fórmulas, definimos la notación $[\tau_1, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ inductivamente:

$$\begin{array}{lcl} ([] \Rightarrow^* \sigma) & = & \sigma \\ ([\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) & = & \tau_1 \Rightarrow ([\tau_2, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) \end{array}$$

Probar por inducción en n que $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$ es válido si y sólo si $\vdash [\tau_1, \ldots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ es válido.

Ejercicio 9

Probar los siguientes teoremas:

I. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow P)$

II. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$

Ejercicio 10

Demostrar las siguientes tautologías utilizando deducción natural.

I. $(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

II. $(R \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((R \wedge Q) \Rightarrow P)$

III. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg(R \wedge Q)$

Ejercicios extra de deducción natural

Ejercicio 11

Probar que los siguientes secuentes son válidos sin usar principios de razonamiento clásicos:

I. $(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$
II. $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$
III. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q), P \vdash Q$
IV. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R), \neg R, Q \vdash \neg P$
V. $\vdash (P \wedge Q) \Rightarrow P$
VI. $P \Rightarrow \neg Q, Q \vdash \neg P$
VII. $P \Rightarrow Q \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge R)$
VIII. $Q \Rightarrow R \vdash (P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)$
IX. $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$
X. $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
XI. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$
XII. $\neg P \vee Q \vdash P \Rightarrow Q$
XIII. $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q \vdash \neg P$
XIV. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), P, \neg R \vdash \neg Q$

Ejercicio 12

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

I. $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R, \neg R, P \vdash Q$
II. $\neg P \Rightarrow Q \vdash \neg Q \Rightarrow P$
III. $P \vee Q \vdash R \Rightarrow (P \vee Q) \wedge R$
IV. $(P \vee (Q \Rightarrow P)) \wedge Q \vdash P$
V. $P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)$
VI. $P \Rightarrow Q \vdash ((P \wedge Q) \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow (P \wedge Q))$
VII. $P \Rightarrow (Q \wedge R) \vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
VIII. $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow (Q \wedge R)$
IX. $P \vee (P \wedge Q) \vdash P$
X. $P \Rightarrow (Q \vee R), Q \Rightarrow S, R \Rightarrow S \vdash P \Rightarrow S$
XI. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$

Ejercicio 13

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

I. $\neg P \Rightarrow \neg Q \vdash Q \Rightarrow P$
II. $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$
III. $\neg P, P \vee Q \vdash Q$
IV. $P \vee Q, \neg Q \vee R \vdash P \vee R$
V. $P \wedge \neg P \vdash \neg(R \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)$
VI. $\neg(\neg P \vee Q) \vdash P$
VII. $\vdash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$
VIII. $P \wedge Q \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$
IX. $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$