

## Práctica N° 5 - Inferencia de tipos

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Gramáticas a tener en cuenta:

■ Términos **anotados**

$$M ::= x \mid \lambda x:\sigma.M \mid M M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\ \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M)$$

Donde la letra  $x$  representa un *nombre de variable* arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado  $\mathfrak{X} = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$

■ Términos **sin anotaciones**

$$U ::= x \mid \lambda x.U \mid U U \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } U \text{ then } U \text{ else } U \mid \text{zero} \mid \text{succ}(U) \mid \text{pred}(U) \mid \text{isZero}(U)$$

■ Tipos

$$\tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \tau \rightarrow \tau \mid X_n$$

Donde  $n$  es un número natural, de tal modo que  $X_n$  representa una *variable de tipos* arbitraria tomada de un conjunto  $\mathfrak{T} = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ .

**Nota:** también podemos referirnos a las variables de tipos como *incógnitas*.

### Ejercicio 1

Determinar qué expresiones son sintácticamente válidas y, para las que lo sean, indicar a qué gramática pertenecen (tipos, términos anotados o términos sin anotaciones).

- |   |   |
|---|---|
| I. $\lambda x:\text{Bool}.\text{succ}(x)$ | V. $X_1$  |
| II. $\lambda x.\text{isZero}(x)$          | VI. $X_1 \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow X_2)$   |
| III. $X_1 \rightarrow \sigma$             | VII. $\lambda x: X_1 \rightarrow X_2.\text{if zero then True else zero succ(True)}$           |
| IV. $\text{erase}(f y)$                   | VIII. $\text{erase}(\lambda f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}.\lambda y:\text{Bool}.f y)$ |

### Ejercicio 2

Determinar el resultado de aplicar la sustitución  $S$  a las siguientes expresiones

- I.  $S = \{X_1 := \text{Nat}\} \quad S(\{x: X_1 \rightarrow \text{Bool}\})$
- II.  $S = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3, X_4 := \text{Bool}\} \quad S(\{x: X_4 \rightarrow \text{Bool}\}) \vdash S(\lambda x: X_1 \rightarrow \text{Bool}.x): S(\text{Nat} \rightarrow X_2)$

### Ejercicio 3

Unir con flechas los tipos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* (“most general unifier”).

$X_1 \rightarrow X_2$	$\text{Nat}$	$X_2 \rightarrow \text{Bool}$	$X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5$
$X_1$	$\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}$	$(\text{Nat} \rightarrow X_2) \rightarrow \text{Bool}$	$\text{Nat} \rightarrow X_2 \rightarrow \text{Bool}$

#### Ejercicio 4

Decidir, utilizando el algoritmo de inferencia, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquéllas que fallan.

- |  |  |
|--|--|
| I. $\lambda z. \text{if } z \text{ then zero else succ}(\text{zero})$  | V. $\text{if True then } (\lambda x. \text{zero})\text{zero else } (\lambda x. \text{zero})\text{False}$ |
| II. $\lambda y. \text{succ}((\lambda x. x) y)$   | VI. $(\lambda f. \text{if True then } f\text{zero else } f \text{ False}) (\lambda x. \text{zero})$      |
| III. $\lambda x. \text{if isZero}(x) \text{ then } x \text{ else } (\text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)$ | VII. $\lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)$                |
| IV. $\lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(\text{zero})$                            |  |

#### Ejercicio 5 ★

Utilizando el algoritmo de inferencia, inferir el tipo de las siguientes expresiones o demostrar que no son tipables. En cada paso donde se realice una unificación, mostrar el conjunto de ecuaciones a unificar y la sustitución obtenida como resultado de la misma.

- |  |   |
|--|---|
| ■ $\lambda x. \lambda y. \lambda z. z x y z$ | ■ $\lambda x. (\lambda x. x)$                                 |
| ■ $\lambda x. x (w (\lambda y. w y))$        | ■ $\lambda x. (\lambda y. y)x$                                |
| ■ $\lambda x. \lambda y. xy$                 | ■ $(\lambda z. \lambda x. x (z (\lambda y. z))) \text{ True}$ |
| ■ $\lambda x. \lambda y. yx$                 |   |

#### Ejercicio 6 (Numerales de Church)

Indicar tipos  $\sigma$  y  $\tau$  apropiados de modo que los términos de la forma  $\lambda y : \sigma. \lambda x : \tau. y^n(x)$  resulten tipables para todo  $n$  natural. El par  $(\sigma, \tau)$  debe ser el mismo para todos los términos. Observar si tienen todos el mismo tipo. Notación:  $M^0(N) = N, M^{n+1}(N) = M(M^n(N))$ . *Sugerencia:* empezar haciendo inferencia para  $n = 2$  – es decir, calcular el juicio de tipado más general para  $\lambda y. \lambda x. y(yx)$  – y generalizar el resultado.

#### Ejercicio 7

- I. Utilizar el algoritmo de inferencia sobre la siguiente expresión:  $\lambda y. (x y) (\lambda z. x_2)$
- II. Una vez calculado, demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio encontrado es correcto.
- III. ¿Qué ocurriría si  $x_2$  fuera  $x$ ?

#### Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como:  $\tau ::= \dots \mid \tau \times \tau$

Con expresiones nuevas definidas como:  $M ::= \dots \mid \langle M, M \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \tau \times \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \sigma}$$

Se extiende el algoritmo  $\mathcal{I}$  con las siguientes reglas:

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \langle M_1, M_2 \rangle) = (\tau \times \sigma \mid E_1 \cup E_2)$   
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\sigma \mid E_2)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \pi_1(M)) = (\sigma \mid \{\tau \stackrel{?}{=} \sigma \times \rho\} \cup E)$   
donde  $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \pi_2(M)) = (\rho \mid \{\tau \stackrel{?}{=} \sigma \times \rho\} \cup E)$   
donde  $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

- I. Tipar la expresión  $(\lambda f.\langle f, 2 \rangle) (\lambda x.x \ 1)$  utilizando la versión extendida del algoritmo.
- II. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo.  
 $(\lambda f.\langle f \ 2, f \ \text{True} \rangle) (\lambda x.x)$   
Mostrar en qué punto la inferencia falla y por qué motivo.

### Ejercicio 9 ★

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau &::= \dots \mid \tau + \tau \\ M &::= \dots \mid \text{left}_\tau(M) \mid \text{right}_\tau(M) \mid \text{case } M \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M \end{aligned}$$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{left}_\sigma(M)) = (\tau + \sigma \mid E)$   
donde  $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{right}_\sigma(M)) = (\sigma + \tau \mid E)$   
donde  $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{case } M_1 \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M_2 \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} X_x + X_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$   
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma, x : X_x \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
- $\mathcal{I}(\Gamma, y : X_y \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
- $X_x$  y  $X_y$  variables frescas.

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

- I.  $\text{case left}(1) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow \text{True}$
- II.  $\text{case right}(z) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- III.  $\text{case right}(\text{zero}) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- IV.  $\text{case } x \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- V.  $\text{case left}(z) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- VI.  $\text{case } z \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$

### Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau &::= \dots \mid [\tau] \\ M &::= \dots \mid []_\tau \mid M :: M \mid \text{foldr } M \text{ base } \hookrightarrow M; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow M \end{aligned}$$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid []_\tau) = ([\tau] \mid \emptyset)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1 :: M_2) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} [\tau_1]\} \cup E_1 \cup E_2)$   
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{foldr } M_1 \text{ base} \hookrightarrow M_2; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} [X_h], \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3, \tau_3 \stackrel{?}{=} X_r\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$   
donde:

- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
- $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
- $\mathcal{I}(\Gamma, h : X_h, r : X_r \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
- $X_h$  y  $X_r$  variables frescas.

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

- I.  $\text{foldr } x :: [] \text{ base} \hookrightarrow []; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow \text{isZero}(h) :: r$
- II.  $\text{foldr } (\lambda x. \text{succ}(x)) :: [] \text{ base} \hookrightarrow []; \text{rec}(x, r) \hookrightarrow \text{if } p \ x \text{ then } x :: r \text{ else } r$
- III.  $\text{foldr } x \text{ base} \hookrightarrow x; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow \text{isZero}(h) :: r$
- IV.  $\text{foldr } x \text{ base} \hookrightarrow \text{True}; \text{rec}(h, x) \hookrightarrow x$