Paradigmas de Programación

Sistemas deductivos
Deducción natural para lógica proposicional

2do cuatrimestre de 2025

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Sistemas deductivos

Deducción natural para lógica proposicional

Semántica bivaluada

Motivación

Queremos poder hacer **afirmaciones matemáticamente precisas** sobre programas en distintos lenguajes de programación.

Ejemplos de afirmaciones que querríamos hacer

- El tipo `(Bool -> Int)` está sintácticamente bien formado.
- La expresión `map` tiene tipo `((a -> b) -> [a] -> [b])`.
- La expresión `map` tiene tipo `((a -> a) -> [a] -> [a])`.
- La expresión `map` tiene tipo `Bool`.
- El programa `while (true) {}` no termina.
- El resultado de evaluar `(factorial 7)` es 5040.
- Los algoritmos `quickSort` y `mergeSort` son indistinguibles.

Queremos tener mecanismos para demostrar dichas afirmaciones.

En este contexto, las afirmaciones se llaman **juicios**.

Sistemas deductivos

Un **sistema deductivo** sirve para razonar acerca de **juicios**.

Está dado por **reglas de inferencia**, de la forma:

$$\frac{\langle \text{premisa}_1 \rangle \quad \langle \text{premisa}_2 \rangle \quad \ldots \quad \langle \text{premisa}_n \rangle}{\langle \text{conclusión} \rangle} \langle \text{nombre de la regla} \rangle$$

Las reglas que no tienen premisas ($n = 0$) se llaman **axiomas**.

Las premisas son **condiciones suficientes** para la conclusión.

- Lectura de arriba hacia abajo:
  si tenemos evidencia de que valen las premisas,
  podemos deducir que vale la conclusión.
- Lectura de abajo hacia arriba:
  si queremos demostrar que vale la conclusión,
  alcanza con demostrar que valen las premisas.

Sistemas deductivos

Ejemplo — el sistema deductivo $\mathcal{A}$

El sistema $\mathcal{A}$ predica sobre juicios de la forma "$X > Y$".
Incluye tres axiomas:

$$\frac{}{\bigstar > \blacksquare}\,\text{ax1} \qquad \frac{}{\blacksquare > \blacktriangle}\,\text{ax2} \qquad \frac{}{\blacktriangle > \bullet}\,\text{ax3}$$

y un *esquema* de regla, donde X, Y, Z son variables esquemáticas (que se pueden instanciar de manera arbitraria):

$$\frac{X > Y \quad Y > Z}{X > Z}\,\text{trans}$$

- Demostrar el juicio $\bigstar > \bullet$ de dos maneras distintas.

Sistemas deductivos

Una **derivación** es un árbol finito formado por reglas de inferencia. Parte de ciertas premisas y llega a una conclusión.

Un juicio es **derivable** si hay alguna derivación sin premisas que lo concluye.

Sistemas deductivos

Ejemplo — fórmulas

Suponemos dado un conjunto infinito de *variables proposicionales*:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$$

El siguiente sistema predica sobre juicios de la forma "X FORM".

$$\frac{P \in \mathcal{P}}{P \text{ FORM}}\mathsf{FP} \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \qquad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \wedge \sigma) \text{ FORM}}\mathsf{F}\wedge \qquad \frac{\tau \text{ FORM} \qquad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \Rightarrow \sigma) \text{ FORM}}\mathsf{F}\Rightarrow$$

$$\frac{\tau \text{ FORM} \qquad \sigma \text{ FORM}}{(\tau \vee \sigma) \text{ FORM}}\mathsf{F}\vee \qquad \frac{}{\bot \text{ FORM}}\mathsf{F}\bot \qquad \frac{\tau \text{ FORM}}{\neg\tau \text{ FORM}}\mathsf{F}\neg$$

1. Derivar el juicio $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$ FORM.
2. Demostrar que si τ FORM es un juicio derivable, entonces τ tiene el mismo número de "(" que de ")".
   Proceder por inducción estructural en la derivación.

Sistemas deductivos

Deducción natural para lógica proposicional

Semántica bivaluada

Fórmulas de la lógica proposicional

Las **fórmulas** son las expresiones que se pueden generar a partir de la siguiente gramática:

$$\tau, \sigma, \rho, \ldots ::= \; P \;\mid\; (\tau \wedge \sigma) \;\mid\; (\tau \Rightarrow \sigma) \;\mid\; (\tau \vee \sigma) \;\mid\; \bot \;\mid\; \neg\tau$$

Observación

La gramáticas definen sistemas deductivos de manera abreviada.

Una expresión τ se puede generar a partir de la gramática de arriba si y sólo si el juicio $\tau\ \textsc{form}$ es derivable en el sistema de antes.

Convenciones de notación

1. Omitimos los paréntesis más externos de las fórmulas.

   $$\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho) \;=\; (\tau \wedge \neg(\sigma \vee \rho))$$

2. La implicación es asociativa a derecha.

   $$\tau \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho \;=\; (\tau \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho))$$

3. Ojo: los conectivos $(\wedge, \vee)$ **no** son conmutativos ni asociativos.

   $$\tau \vee (\sigma \vee \rho) \;\neq\; (\tau \vee \sigma) \vee \rho \qquad\qquad \tau \wedge \sigma \;\neq\; \sigma \wedge \tau$$

Contextos y juicios

Un **contexto** es un conjunto finito de fórmulas.
Los notamos con letras griegas mayúsculas $(\Gamma, \Delta, \Sigma, \ldots)$.
Por ejemplo:

$$\Gamma = \{P \Rightarrow Q, \neg Q\}$$

Generalmente omitimos las llaves; p. ej.: $P \Rightarrow Q, \neg Q$.

El sistema de **deducción natural** predica sobre juicios de la forma:

$$\Gamma \quad \vdash \quad \tau$$

Informalmente, un juicio afirma que a partir de las hipótesis en el contexto Γ es posible deducir la fórmula de la tesis.

Por ejemplo, los siguientes van a ser juicios derivables:

$$P \Rightarrow Q \vdash \neg Q \Rightarrow \neg P \qquad\qquad P, Q \wedge R \vdash R \wedge P$$

Reglas de inferencia — axioma

El sistema de deducción natural tiene muchas reglas de inferencia.

(Vamos de a poco)

Axioma

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\mathsf{ax}$$

Ejemplo

$$\frac{}{P \vdash P}\,\mathsf{ax} \qquad \frac{}{P \Rightarrow Q, R \vdash P \Rightarrow Q}\,\mathsf{ax} \qquad \frac{}{P, Q \wedge R, S \vdash Q \wedge R}\,\mathsf{ax}$$

Los siguientes juicios **no** se deducen de la regla ax:

$$P, Q \vdash R \qquad \vdash P \Rightarrow P \qquad P \wedge Q \vdash Q \wedge P \qquad \neg\neg P \vdash P$$

Reglas de inferencia — conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

Eliminación de la conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e_2}$$

1. Dar una derivación de $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.
2. Dar una derivación de $P \wedge (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \wedge R$.

Reglas de inferencia — implicación

Introducción de la implicación

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i$$

Eliminación de la implicación

(*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow P$
2. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow (Q \wedge P)$
3. Dar una derivación de $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R$.

Reglas de inferencia — disyunción

Introducción de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i_2}$$

Eliminación de la disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$.
2. Dar una derivación de $\vdash (P \vee P) \Rightarrow P$.
3. Dar una derivación de $P \vee Q \vdash Q \vee P$.

Reglas de inferencia — falsedad

El conectivo $\bot$ representa la falsedad (contradicción, absurdo).

El conectivo $\bot$ **no** tiene reglas de introducción.

Eliminación del falso

(principio de explosión o *ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\,\bot_e$$

1. Dar una derivación de $(P \vee Q) \Rightarrow \bot \vdash P \Rightarrow Q$
2. Dar una derivación de $(P \wedge Q) \Rightarrow \bot \vdash P \Rightarrow Q \Rightarrow R$
3. Mostrar que hay infinitas derivaciones de $\bot \vdash \bot$.

Reglas de inferencia — negación

Introducción de la negación

(reducción al absurdo intuicionista)

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$$

Eliminación de la negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$$

1. Dar una derivación de $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$.
2. Dar una derivación de $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$.
3. Dar una derivación de $P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$.

Deducción natural **intuicionista** (**NJ**) — reglas completas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\mathsf{ax}$$

	Introducción	Eliminación
$\land$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \land \sigma}\land_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \land \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\land_{e_1}$ $\quad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \tau \land \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\land_{e_2}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\Rightarrow_e$
$\lor$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \lor \sigma}\lor_{i_1}$ $\quad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \lor \sigma}\lor_{i_2}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \lor \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\lor_e$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\bot_e$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$

Propiedades del sistema

Teorema (Debilitamiento) (*weakening*)

Si $\Gamma \vdash \tau$ es derivable, entonces $\Gamma, \sigma \vdash \tau$ es derivable.

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma, \sigma \vdash \tau}\text{W}$$

Se puede demostrar por inducción estructural en la derivación.
(Se hará como ejercicio en la práctica).

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q}\text{ax}}{P \wedge Q, R \vdash Q}\wedge_{e_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R \vdash P \wedge Q}\text{ax}}{P \wedge Q, R \vdash P}\wedge_{e_1}}{\dfrac{P \wedge Q, R \vdash Q \wedge P}{R \vdash (P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)}\Rightarrow_i}\wedge_i$$

Reglas derivadas

Veamos que las siguientes reglas se deducen de las anteriores.
(No es necesario agregarlas al sistema deductivo).

Modus tollens

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\,\mathsf{MT}$$

Introducción de la doble negación

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\,\neg\neg_i$$

Principios de razonamiento clásicos

Eliminación de la doble negación

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

Principio del tercero excluido

(*Law of Excluded Middle*)

¿Se puede deducir la siguiente regla a partir de las anteriores?

$$\frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\mathsf{LEM}$$

No es posible deducir estas reglas de las anteriores.

Sin embargo, se pueden deducir la una de la otra. Veamos que:

1. Usando la regla LEM se puede deducir la regla $\neg\neg_e$.
2. Usando la regla $\neg\neg_e$ se puede deducir la regla LEM.

Principios de razonamiento clásicos

Las reglas $\neg\neg_e$ y LEM son principios de razonamiento **clásicos**.
Otro principio de razonamiento clásico, equivalente a $\neg\neg_e$ y LEM:

Reducción al absurdo clásico (*Proof by Contradiction*)

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\text{PBC}$$

Ejercicio

Ver que usando PBC se puede deducir LEM y viceversa.

Lógica intuicionista vs. lógica clásica

Dos sistemas deductivos

NJ	sistema de deducción natural intuicionista.
NK	sistema de deducción natural clásica.

- **NK** extiende a **NJ** con principios de razonamiento clásicos.
  Alcanza con agregar uno de ellos, por ejemplo $\neg\neg_e$.
- Si un juicio es derivable en **NJ**, también es derivable en **NK**.
- **NJ** es más restrictiva. No permite usar $\neg\neg_e$, LEM, PBC, etc.
- Para hacer matemática, comúnmente usamos lógica clásica.

Interés de la lógica intuicionista en computación

- Permite razonar acerca de **información**.
  ¿Qué significa (hay vida en Marte $\vee$ $\neg$hay vida en Marte)?
- Las derivaciones en **NJ** se pueden entender como programas.
  NJ es la base de un lenguaje de programación funcional.

Deducción natural **clásica** (**NK**) — reglas completas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\neg\neg_e$$

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\wedge_{e_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge_{e_2}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\Rightarrow_e$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_1} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_2}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\vee_e$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\bot_e$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\neg_e$

Sistemas deductivos

Deducción natural para lógica proposicional

Semántica bivaluada

Valuaciones

Una valuación es una función $v : \mathcal{P} \to \{\mathtt{V}, \mathtt{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales.

Una valuación v **satisface** una fórmula τ si $v \models \tau$, donde:

$$
\begin{array}{rll}
v \models P & \text{si y sólo si} & v(P) = \mathtt{V} \\
v \models \tau \wedge \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ y } v \models \sigma \\
v \models \tau \Rightarrow \sigma & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \tau \vee \sigma & \text{si y sólo si} & v \models \tau \text{ o } v \models \sigma \\
v \models \bot & \text{nunca vale} & \\
v \models \neg\tau & \text{si y sólo si} & v \not\models \tau
\end{array}
$$

Una valuación v satisface un contexto Γ (notación: $v \models \Gamma$) si y sólo si v satisface a todas las fórmulas de Γ.

Un contexto Γ satisface una fórmula τ (notación: $\Gamma \models \tau$) si y sólo si cualquier valuación v que satisface a Γ también satisface a τ.

Valuaciones

Ejemplo

1. Probar que $P \wedge Q \models P$.
2. Probar que $P \vee Q, \neg Q \models P$.
3. Probar que no vale $P \vee Q \models Q$.
4. Probar que $P \models Q \vee \neg Q$.

Corrección y completitud

Teorema (Corrección y completitud)

Son equivalentes:

1. $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. $\Gamma \models \tau$

Demostración de corrección $\quad \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau$ implica $\Gamma \models \tau$

Supongamos que $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
Demostramos que $\Gamma \models \tau$ por inducción estructural en la derivación.

Hay que analizar 13 casos, uno por cada regla de **NK**.

Por ejemplo, para la regla $\Rightarrow_e$:

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Queremos ver que $\Gamma \models \sigma$.
Sea v tal que $v \models \Gamma$ y veamos que $v \models \sigma$.
Por HI sabemos que $\Gamma \models \tau \Rightarrow \sigma$ y que $\Gamma \models \tau$.
Como $v \models \Gamma$ tenemos que $v \models \tau \Rightarrow \sigma$ y $v \models \tau$.
Por definición de $v \models \tau \Rightarrow \sigma$, tenemos entonces que $v \not\models \tau$ o $v \models \sigma$.
Pero teníamos $v \models \tau$, con lo cual concluímos $v \models \sigma$.

- Intentar probar los 12 casos restantes.

Demostración de completitud $(\Gamma \vDash \tau$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Definición

1. Un contexto Γ **determina** una variable $P \in \mathcal{P}$ si vale que $P \in \Gamma$ o que $\neg P \in \Gamma$.
2. Un contexto Γ **determina** un conjunto de variables $X \subseteq \mathcal{P}$ si determina a todas las variables de X.

Para probar el teorema de completitud, necesitamos:

Lema principal

Si Γ determina a todas las variables que aparecen en τ, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Asumamos que el lema vale, lo demostraremos después.

Demostración de completitud $\quad (\Gamma \models \tau \text{ implica } \Gamma \vdash_{\mathbf{NK}} \tau)$

Supongamos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \models \tau$.
Queremos ver que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$ es derivable en **NK**.

Sea $\rho = (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau$. Sabemos que $\models \rho$. ¿Por qué?
Alcanza con probar que $\vdash \rho$ es derivable en **NK**. ¿Por qué?

Sea $X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ el conjunto de variables que aparecen en ρ.
Usando LEM y $\vee_e$ podemos considerar 2^n casos, de la forma:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$$

donde cada $\tilde{P}_i$ es o bien P_i o bien $\neg P_i$.
Por el lema principal, se da uno de los dos casos siguientes:

1. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \rho$ es derivable en **NK** (y listo).
2. O bien $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK**.
   Por corrección vale $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \models \neg\rho$.
   Sea v una valuación tal que $v(P_i) = \mathtt{V}$ si y sólo si $\tilde{P}_i = P_i$.
   Luego $v \models \neg\rho$. Absurdo pues sabíamos $\models \rho$.

Demostración del lema principal

Recordemos el enunciado:

Lema principal

Si Γ determina a todas las variables que aparecen en τ, entonces:

1. O bien $\Gamma \vdash \tau$ es derivable en **NK**.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\tau$ es derivable en **NK**.

Lo demostramos por inducción estructural en τ.
Hay 6 casos (P, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\bot$, $\neg$).

Por ejemplo, supongamos que $\tau = (\sigma \wedge \rho)$.
Por hipótesis inductiva sobre σ, sabemos que:

1. O bien $\Gamma \vdash \sigma$ es derivable en **NK**.
   Por hipótesis inductiva sobre ρ, sabemos que:
   1.1 O bien $\Gamma \vdash \rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho$.
   1.2 O bien $\Gamma \vdash \neg\rho$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.
2. O bien $\Gamma \vdash \neg\sigma$ es derivable en **NK** y tenemos $\Gamma \vdash \neg(\sigma \wedge \rho)$.

- Intentar probar los 5 casos restantes.

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿? ? ? ? ? ? ? ? ?

Lectura recomendada

Capítulos 2 y 6 del libro de Sørensen y Urzyczyn.

Morten Sørensen y Paweł Urzyczyn. *Lectures on the Curry–Howard Isomorphism*
Elsevier, 2006.