$\vdash$ Sistemas deductivos

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Buenos Aires

19 de septiembre de 2025

Vamos a ver

- ✨ Sistemas deductivos
- ✨ Deducción natural
- ✨ Lógica intuicionista vs. clásica
- ✨ Demo de weakening por inducción en la derivación

Lógica proposicional

Sintaxis

$$\tau ::= P \mid \bot \mid \neg\tau \mid \tau \wedge \tau \mid \tau \vee \tau \mid \tau \Rightarrow \tau$$

Valuaciones

Una valuación es una función $v : \mathcal{V} \to \{V, F\}$.
Una valuación v satisface una proposición τ si $v \vDash \tau$, donde:

$$\begin{array}{rclll}
v \vDash P & \text{sii} & v(P) = V & & \\
v \vDash \neg\tau & \text{sii} & v \nvDash \tau & & \\
v \vDash \tau \wedge \sigma & \text{sii} & v \vDash \tau & \text{y} & v \vDash \sigma \\
v \vDash \tau \vee \sigma & \text{sii} & v \vDash \tau & \text{o} & v \vDash \sigma \\
v \vDash \tau \Rightarrow \sigma & \text{sii} & v \nvDash \tau & \text{o} & v \vDash \sigma \\
v \nvDash \bot & \text{siempre} & & &
\end{array}$$

Lógica proposicional

Valuaciones

Una valuación v satisface una proposición τ si $v \models \tau$, donde:

$$\begin{array}{rcl}
v \models P & \text{sii} & v(P) = V \\
v \models \neg\tau & \text{sii} & v \not\models \tau \\
v \models \tau \wedge \sigma & \text{sii} & v \models \tau \quad \text{y} \quad v \models \sigma \\
v \models \tau \vee \sigma & \text{sii} & v \models \tau \quad \text{o} \quad v \models \sigma \\
v \models \tau \Rightarrow \sigma & \text{sii} & v \not\models \tau \quad \text{o} \quad v \models \sigma \\
v \not\models \bot & \text{siempre} &
\end{array}$$

Equivalencia de fórmulas

τ es lógicamente equivalente a σ cuando $v \models \tau$ sii $v \models \sigma$ para toda valuación v.

Ejercicio de la guía:

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\Rightarrow$ (implicación) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Sistemas deductivos

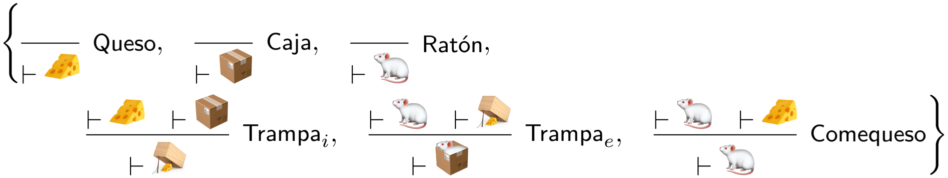
- ✨ Definidos por un **conjunto de reglas**
- ✨ Las reglas son de la forma:

$$\dfrac{\text{Premisa}_1 \quad \text{Premisa}_2 \quad \dots \quad \text{Premisa}_n}{\text{Conclusión}}\ \begin{array}{c}\text{Nombre de}\\ \text{la regla}\end{array}$$

- ✨ Un caso particular: $n = 0$

$$\dfrac{}{\text{Conclusión}}\ \begin{array}{c}\text{Nombre de}\\ \text{la regla}\end{array}$$

- ✨ Por ejemplo,[1]



[1]Ningún animal fue dañado durante la producción de este sistema deductivo.

Un sistema deductivo: deducción natural

Secuentes:

$$\text{Fórmula}_1, \ldots, \text{Fórmula}_n \vdash \text{Fórmula}_{n+1}$$

Una regla de deducción

$$\dfrac{\text{Premisa}_1 \quad \text{Premisa}_2 \quad \ldots \quad \text{Premisa}_n}{\text{Conclusión}}\ \text{Nombre de la regla}$$

intuitivamente se puede pensar que expresa:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Premisa}_1\\ \text{Premisa}_2\\ \vdots\\ \text{Premisa}_n\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Conclusión}$$

Por ejemplo...

$$P, Q \vdash P \wedge Q$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i \qquad \dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \text{ax}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma \vdash \tau\\ \Gamma \vdash \sigma\end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \vdash \tau \wedge \sigma$$

$$\text{True} \Longrightarrow \Gamma, \tau \vdash \tau$$

La demostración de un secuente es un árbol formado por reglas de deducción:

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \text{ax} \quad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge_i$$

Deducción natural

Reglas básicas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \mathsf{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\ \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\ \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \bot_e$$

Lógica intuicionista (LJ)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

Lógica clásica (LK)

Deducción natural

Reglas derivadas

Reglas intuicionistas

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \text{MT}$$

Reglas clásicas

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \text{LEM}$$

- ✨ Todas las reglas derivadas, incluyendo las que hayan probado en la guía de ejercicios, pueden usarse para resolver otros ejercicios y los parciales.
- ✨ Recuerden que en la sección Útil del campus tienen el Machete de Deducción Natural con todas las reglas.

Deducción natural en lógica intuicionista

Ejercicio de la guía

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Una fórmula τ es un teorema cuando el juicio $\vdash \tau$ es derivable.

- ✨ Reducción al absurdo: $(\rho \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\rho$
- ✨ Introducción de la doble negación: $\rho \Rightarrow \neg\neg\rho$
- ✨ Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg\rho \Rightarrow \neg\rho$
- ✨ de Morgan (II): $\neg(\rho \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \vee \neg\sigma)$
  Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
- ✨ Conmutatividad ($\vee$): $(\rho \vee \sigma) \Rightarrow (\sigma \vee \rho)$

Deducción natural en lógica clásica

Veamos que las reglas $\neg\neg_e$, PBC y LEM son equivalentes.

Deducción natural en lógica clásica

Ejercicio de la guía
Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas. Para cada una de ellas es imprescindible **usar lógica clásica**:

- ✨ Absurdo clásico: $(\neg\tau \Rightarrow \bot) \Rightarrow \tau$
- ✨ Ley de Peirce: $((\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$
- ✨ Análisis de casos: $(\tau \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\neg\tau \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma$

Debilitamiento o weakening

Ejercicio de la guía
Probar la siguiente propiedad:
Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.
Pista: utilizar inducción estructural sobre la derivación o inducción global sobre su tamaño.

✨ Por ejemplo,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,\mathsf{ax} \quad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,\mathsf{ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i}{P, Q \vdash (P \wedge Q) \vee R}\,\vee_{i_1} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q, S \vdash P}\,\mathsf{ax} \quad \dfrac{}{P, Q, S \vdash Q}\,\mathsf{ax}}{P, Q, S \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i}{P, Q, S \vdash (P \wedge Q) \vee R}\,\vee_{i_1}$$

✨ Para usar esta propiedad como regla en otras derivaciones:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\,\mathsf{W}$$

Debilitamiento o weakening

En la sección Útil del campus pueden encontrar una Demostración (parcial) de Weakening para Deducción Natural, hecha con inducción estructural sobre la derivación.

Deducción natural

Último ejercicio

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash (\rho \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \tau) \Rightarrow \tau \vee (\rho \wedge \sigma)$.

¿Preguntas?