Búsqueda digital, tries, etc.

Texto predictivo y autocompletar

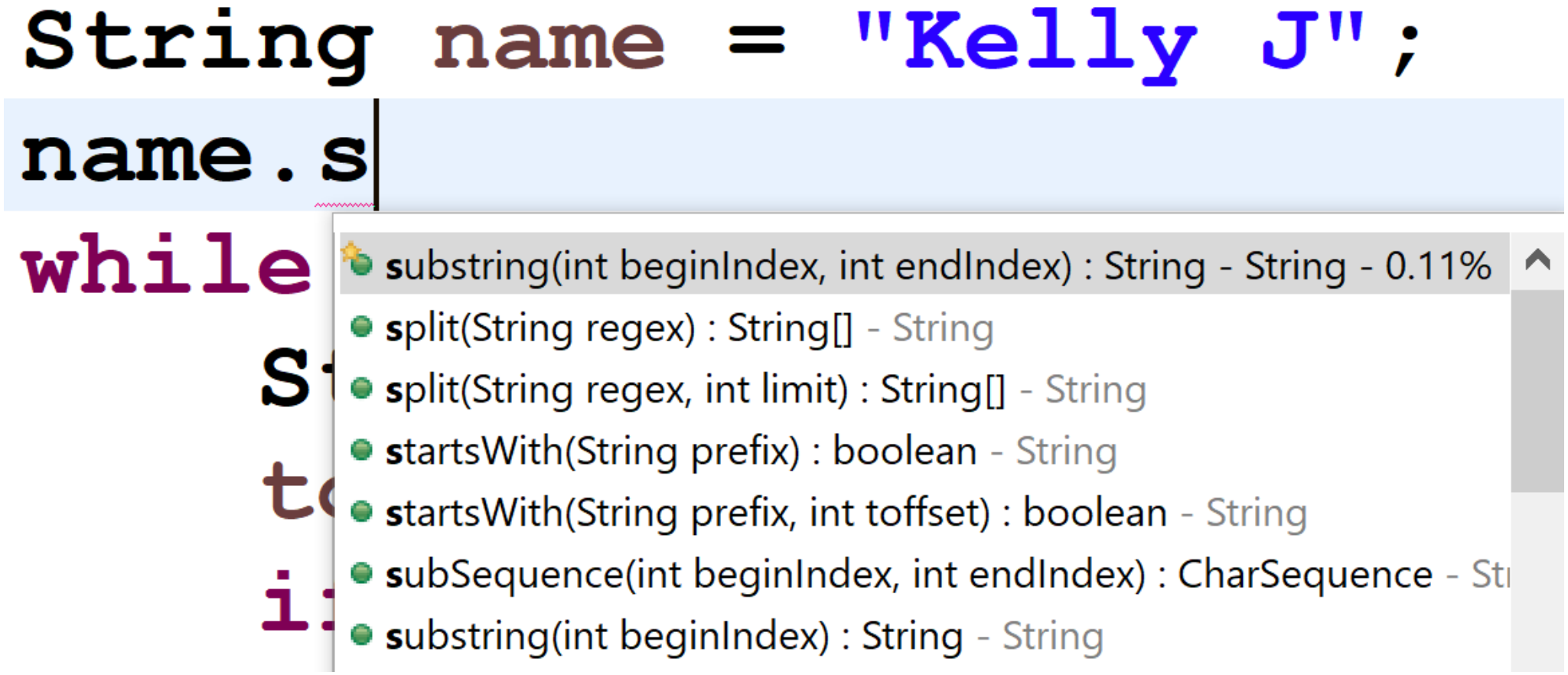
- Los motores de búsqueda y las aplicaciones de mensajes de texto adivinan lo que quieres después de escribir solo unos pocos caracteres

Hel

hello
hellboy
hello fresh
helen keller
helena christensen
hello may
hell or high water
hello neighbor
helzberg
help synonym

Autocompletar

- programas como los IDE



Buscar en un diccionario

¿Cómo?

Podría buscar en un conjunto todos los valores que comiencen con el prefijo dado.

Ingenuamente O(N) (busca toda la estructura de datos).

Podría mejorar, si es posible, hacer una búsqueda binaria de prefijo y luego localizar la búsqueda en esa ubicación.

Motivación

- Podemos resolverlo con ABB/AVL?
- Tiempo menos dependiente de la cantidad de claves
- Rendimiento razonable en el peor caso
- Rápidos en la práctica
- Adecuados para claves de tamaño variable
- Adecuados para otro tipo de aplicaciones (por ej. pattern matching, indexación, en general “text retrieval”, compresión de textos

Idea:

- No hacer comparaciones de claves completas, sino de partes de ellas
- Requiere: poder hacer operaciones sobre esas partes.
- Por ejemplo:
  - si las claves son strings, vamos a trabajar con caracteres
  - si las claves son enteros, vamos a trabajar con dígitos, o bits.

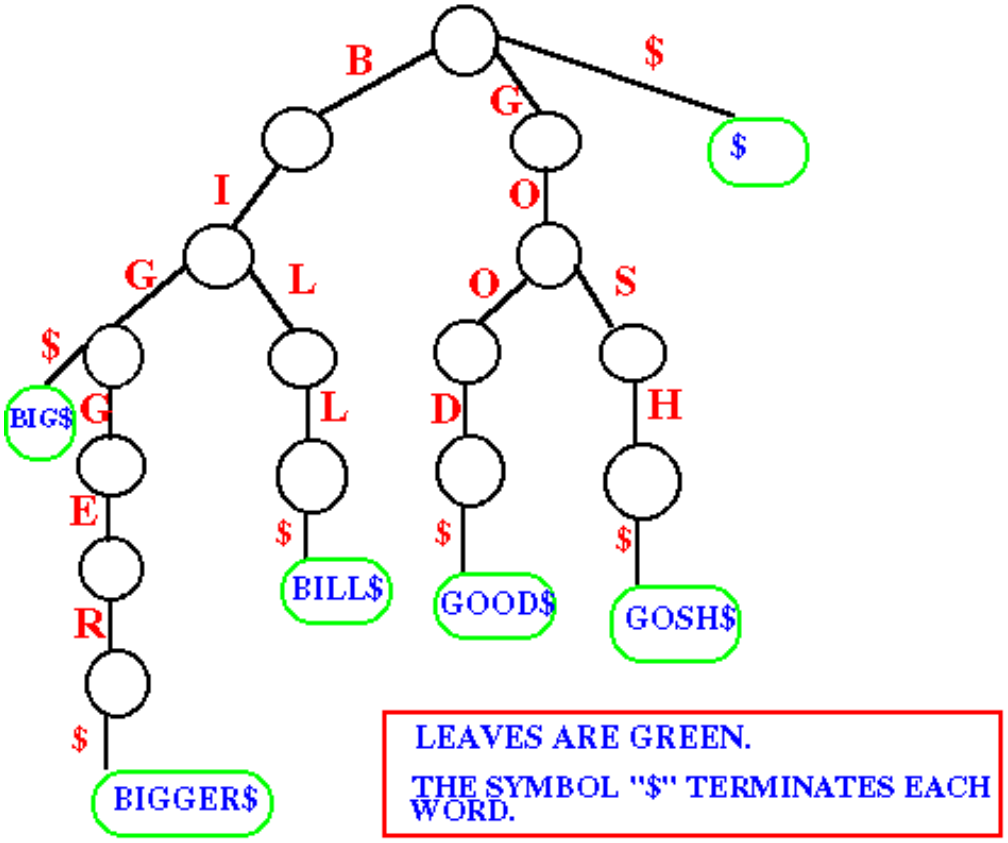
Desventajas

- Algunas implementaciones pueden requerir mucha memoria
- Las operaciones sobre las componentes de las claves puede no ser fácil, o ser muy ineficiente en algunos lenguajes de alto nivel.

Tries

- Debidos a Friedkin, años `60
- Nombre proviene de “retrieval”
- Árbol (k+1)-ario para alfabetos de k elementos.
- Los ejes del árbol toman interés: representan componentes de las claves
- Por ejemplo:
  - si las claves son strings, los ejes representan caracteres
  - si las claves son enteros, los ejes representan dígitos, o bits.
- Cada subárbol representa al conjunto de claves que comienza con las etiquetas de los ejes que llevan hasta él
- Los nodos internos no contienen claves.
- Las claves o los punteros a la info, se almacenan en las hojas (a veces ni eso es necesario).

Ejemplo



BIG
BIGGER
BILL
GOOD
GOSH

In this figure, the strings either start with B or G. Therefore, the root of the trie is connected to 3 edges called B, G and $.

Otro ejemplo

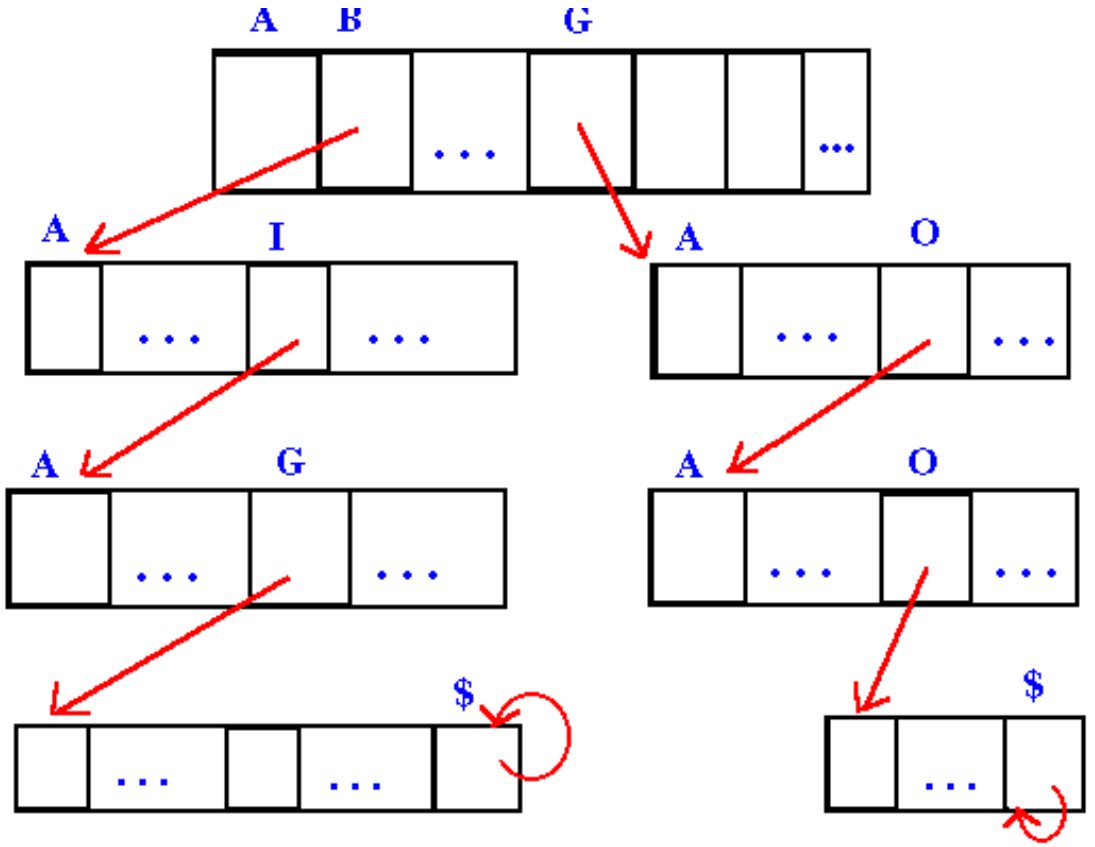
E	00101
J	01010
M	01101
P	10000
L	01100
O	01111
D	00100
B	00010
U	10101
S	10011
Q	10001
A	00001

Propiedades

- A lo sumo una comparación de clave completa (cuando llego a una hoja)
- La estructura del trie es la misma independientemente del orden en el que se insertan las claves (o sea...hay un único trie para un conjunto de claves)
- Búsqueda/inserción en un trie construido a partir de *n* claves de *b* bits, necesita ~*log n* comparaciones de bits en promedio (suponiendo bla bla bla….) y *b* comparaciones en el peor caso.

Implementación de tries

- Primera posibilidad: en cada nodo interno, un arreglo de punteros

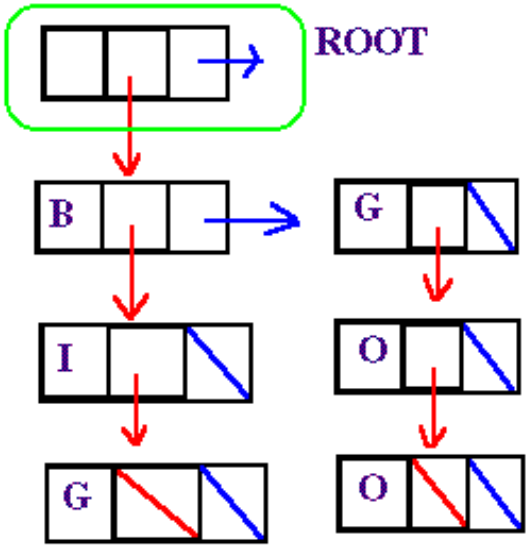


Trie representation for words BIG and GOO using array of pointers

- Muy eficiente en términos de tiempo
- Algoritmo simple
- ¡Puede ser extremadamente ineficiente en términos de memoria!
- Especialmente cuando:
  - Alfabeto grande
  - Diccionario chico
- Mitigaciones posibles:
  - Por ejemplo, agrupar caracteres poco frecuentes
  - (ver ejemplo con bits)

Implementación de tries

- Segunda posibilidad: hijos de un nodo representados a través de una lista encadenada.



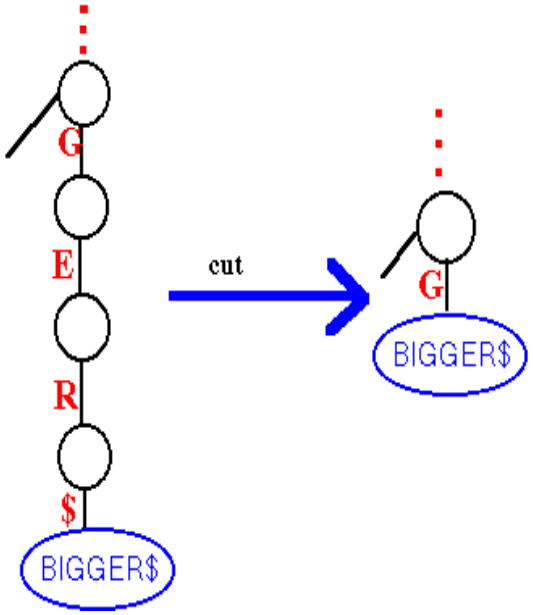
Trie representation for words BIG and GOO using linked lists

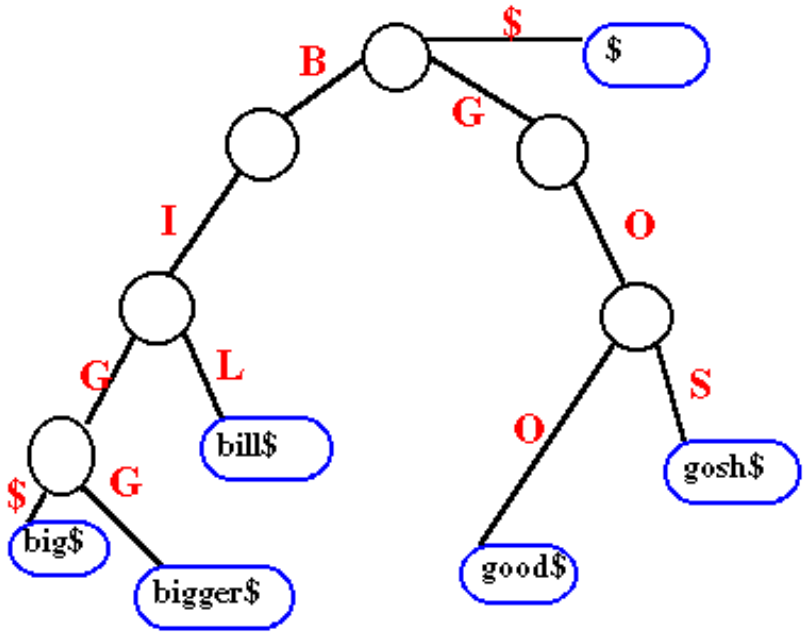
pointer to child pointer to sibling

- Eficiente en términos de tiempo sólo si hay pocas claves
- Requiere algoritmos sobre listas
- Mucho más eficiente en términos de memoria

Tries Compactos

- Parecidos, pero…..colapsamos las cadenas que llevan hacia hojas

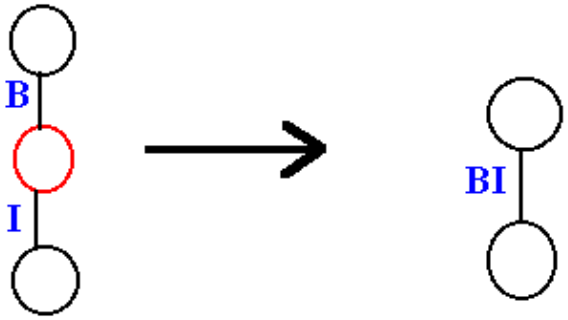




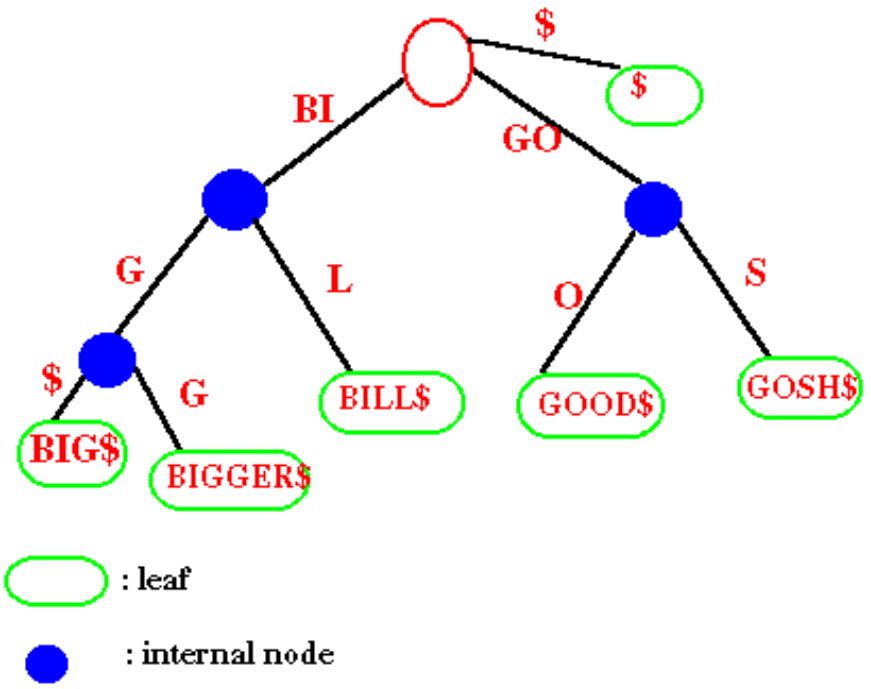
Trie for strings big, bigger, bill, good, gosh
This trie is more compact than the trie in figure 2.

Tries más compactos: Patricia

- Patricia = Practical Algorithm To Retrieve Information Coded In Alphanumeric
- Debidos a D.R. Morrison
- Ahora colapsamos todas las cadenas
- Un eje puede representar más de un caracter.



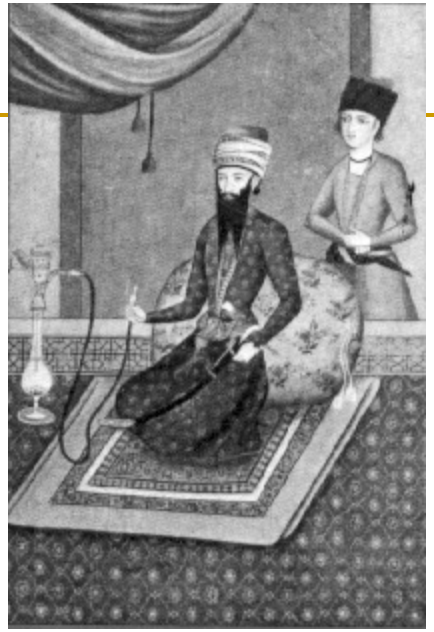
Before, one edge is used to represent a character.
Now, the red node (unary node) is collapsed and
one edge can hold more than one character.



Para terminar

- La altura de un árbol Patricia binario está acotada por n (el número de claves).
- Eso no sucede con los modelos anteriores.
- En realidad, Patricia es un poco más elaborado, y hay numerosas variantes de los métodos vistos hoy.

Diseño de Conjuntos y Diccionarios con Hashing



Representación de Conjuntos y Diccionarios

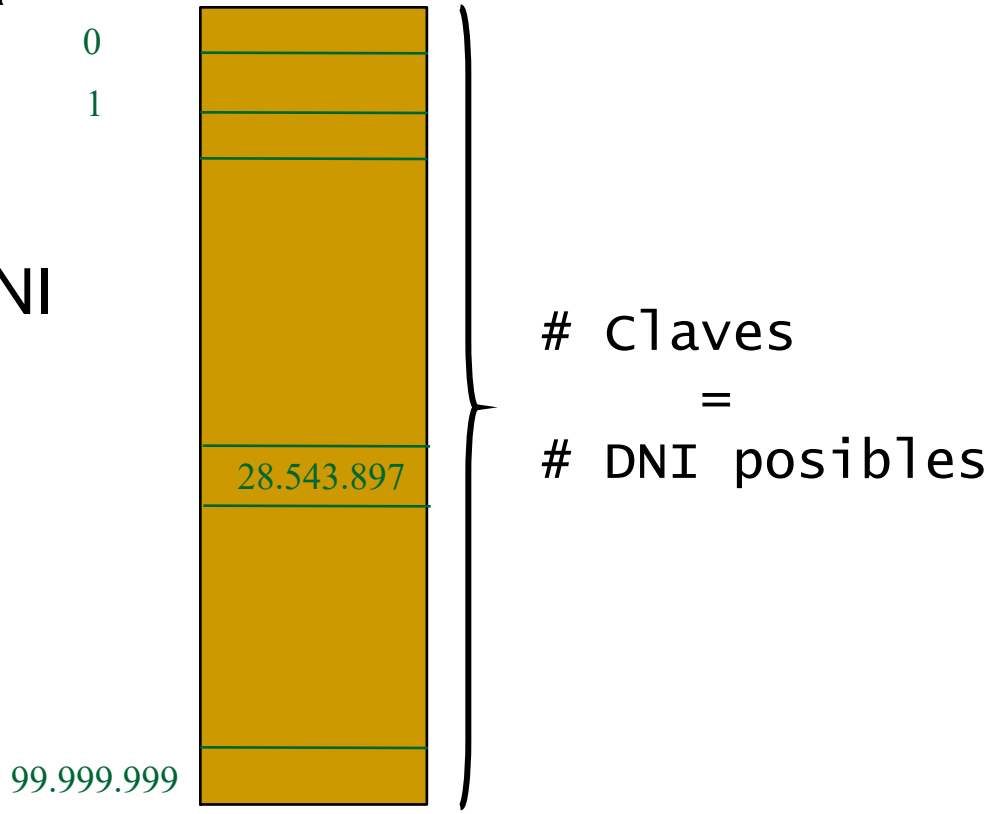
```
TAD Conjunto<T> {
  obs elems: conj<T>

proc conjVacio(): Conjunto<T>
  asegura res.elems == {}
proc pertenece(in c: Conjunto<T>, in T e): bool
  asegura res = true <==> e in c.elems
proc agregar(input c: Conjunto<T>, in e: T)
  asegura c.elems = old(c).elems + {e}
proc sacar(inout c: Conjunto<T>, in e: T)
  asegura c.elems = old(c).elems - {e}
proc unir(inout c: Conjunto<T>, in c': Conjunto<T>)
  asegura c.elems = old(c).elems + c'.elems
proc restar(inout c: Conjunto<T>, in c': Conjunto<T>)
  asegura c.elems = old(c).elems - c'.elems
}
```

Tablas hash

- Adecuadas para representar diccionarios/conjuntos
- Generalización del concepto de arreglo
- Importantes para el acceso a datos en memoria secundaria
  - Los accesos se dan en memoria secundaria
  - El costo de los accesos es el predominante
- Otras aplicaciones muy importantes: criptografía / firma digital

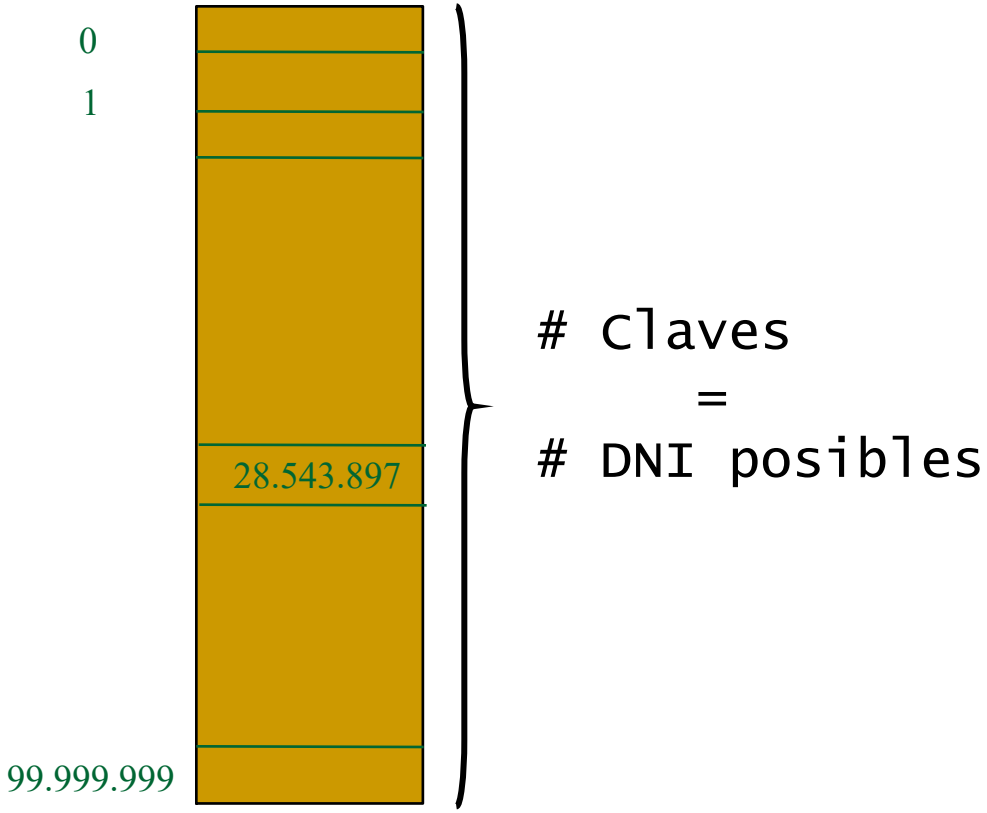
Direccionamiento directo

- Se asocia a cada valor de la clave un índice de un arreglo
- Por ejemplo, 10000=10^4 clientes, clave=número de DNI (nro. entre 0 y 10^{8-1})
- Búsqueda en tiempo *O*(1)!
- ¿Problema? Mucho desperdicio de memoria!



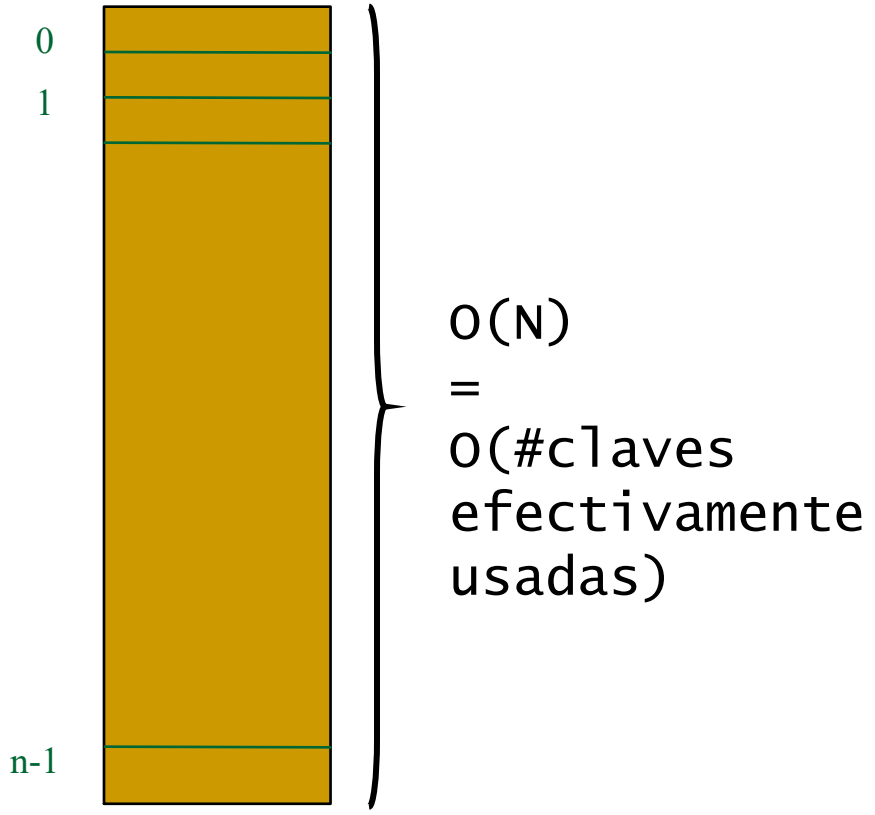
Problemas

1. Sólo sirve para claves que son enteros no negativos.
2. Mucho desperdicio de memoria!



Objetivos

- Indexar otros tipos de datos (no sólo enteros).
- n = # claves efectivamente usadas
- Tiempo de búsqueda O(1)
- ¿Será posible?
- Nota: # claves posibles puede ser >> n



Pre-hashing

- Indexar otros tipos de datos (no sólo enteros).
- Necesidad de una función de correspondencia entre cualquier tipo de datos y un entero.

Pre-hashing

- Indexar otros tipos de datos (no sólo enteros).
- Necesidad de una función de correspondencia entre cualquier tipo de datos y un entero.

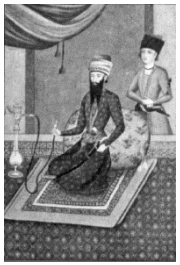
- Dos posibles alternativas:
  - En teoría:
  - ”hola” -> 10011101 -> 157
  - ”casa” -> 1100101 -> ….

Pre-hashing

- Indexar otros tipos de datos (no sólo enteros).
- Necesidad de una función de correspondencia entre cualquier tipo de datos y un entero.

- Dos posibles alternativas:
  - En teoría:
  - ”hola” -> 10011101 -> 157
  - ”casa” -> 1100101 -> ….
  - No es tan simple! En la práctica, depende de la implementación de cada lenguaje de programación.
  - hash(key) -> int
  - hash(x) = hash(y) <-> x=y (idealmente)

Tabla hash



- Representaremos un diccionario con una tupla <T, h>
- Donde T es un arreglo con N=tam(T) celdas
- h: K → {0,...,N-1} es la función hash (o de hash, o de hashing)
  - K conjunto de claves posibles
  - {0,...,N-1} conjunto de las posiciones de la tabla (a veces llamadas *pseudoclaves*)
  - La posición del elemento en el arreglo se calcula a través de la función h.

Tabla hash

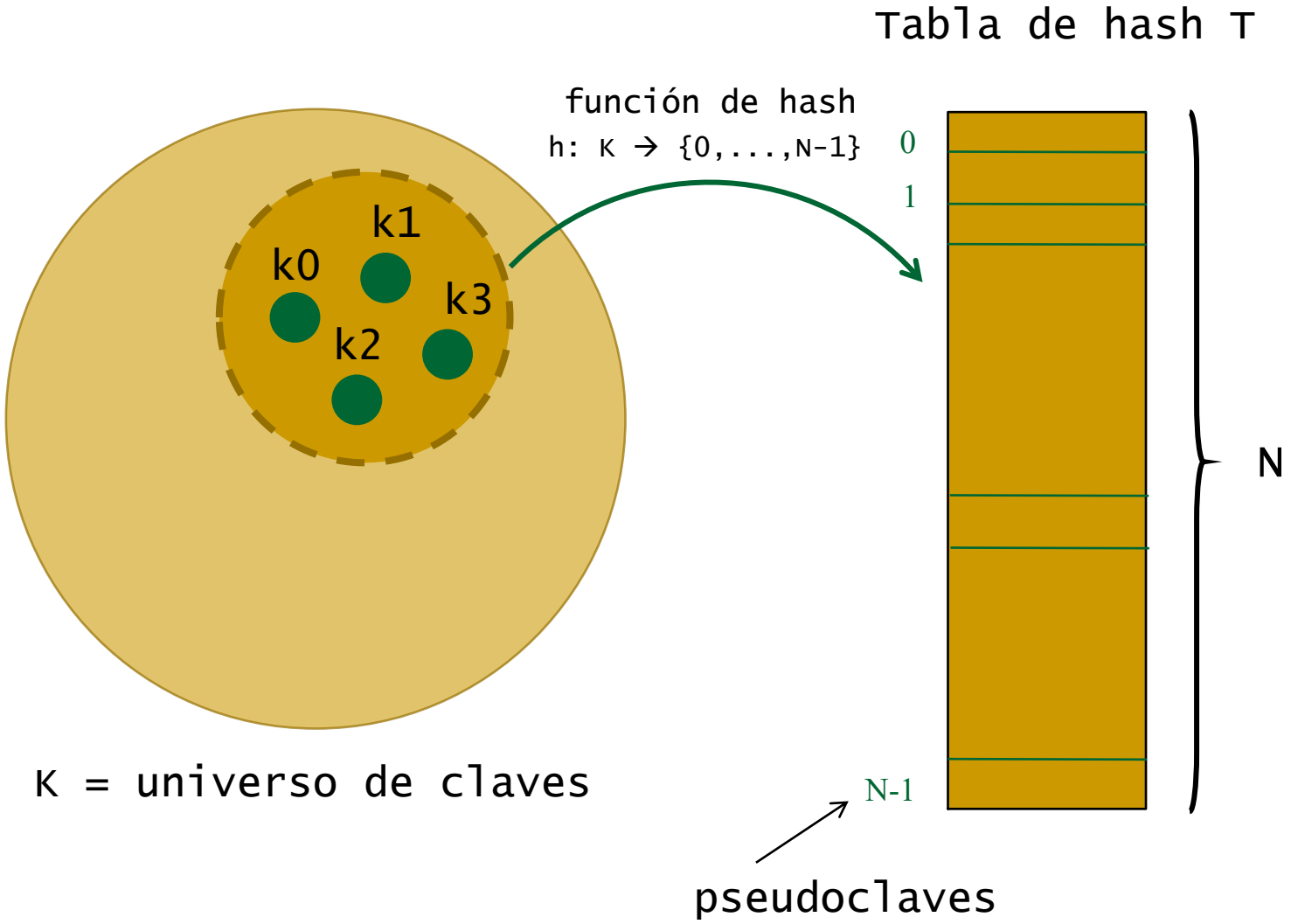


Tabla de hash T
función de hash
h: K → {0,...,N-1}
0
1
N-1
N
k0
k1
k2
k3
K = universo de claves
pseudoclaves

Tabla hash

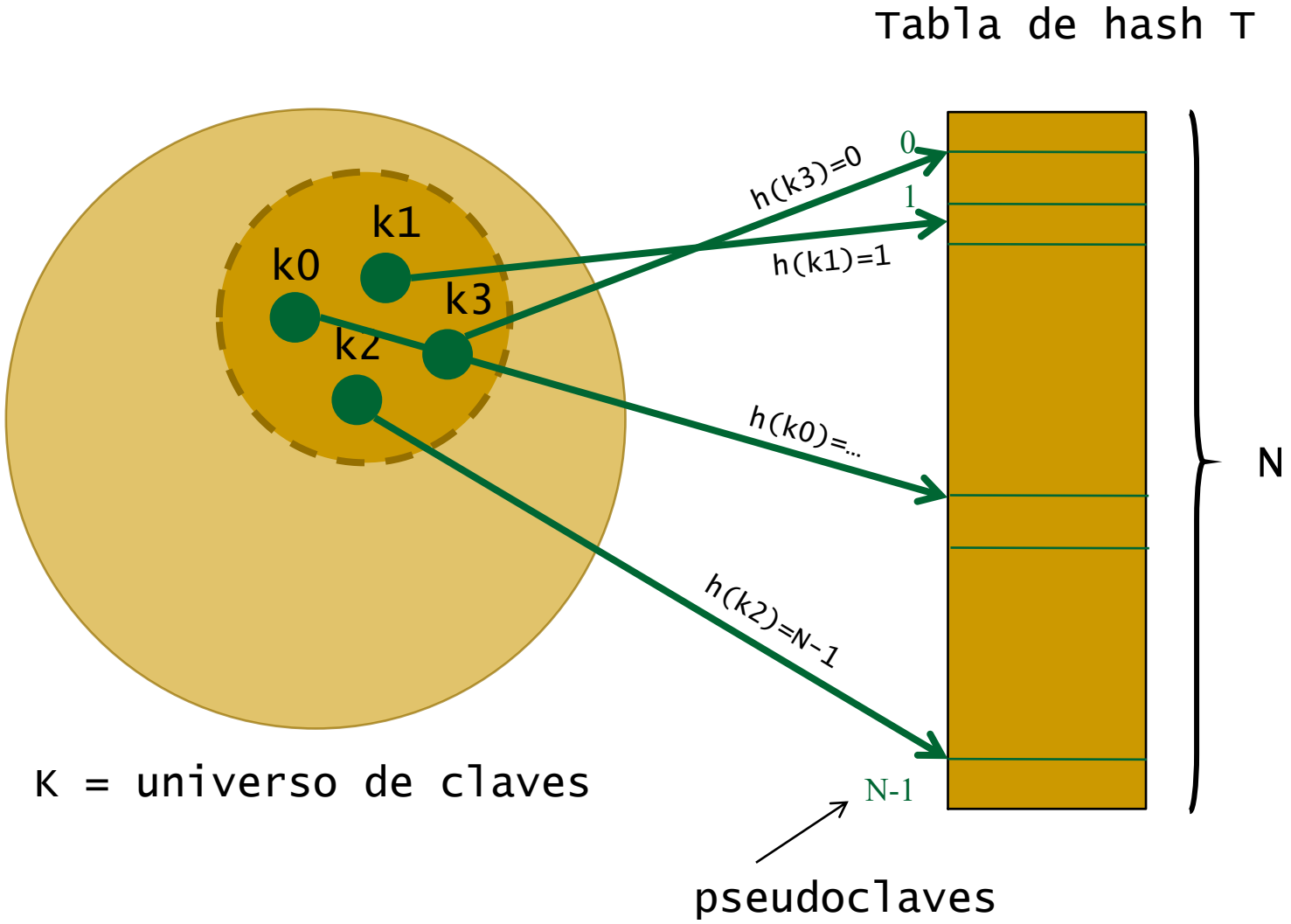


Tabla de hash T
k1
k0
k3
k2
h(k3)=0
h(k1)=1
h(k0)=...
h(k2)=N-1
0
1
N-1
N
K = universo de claves
pseudoclaves

Tabla hash

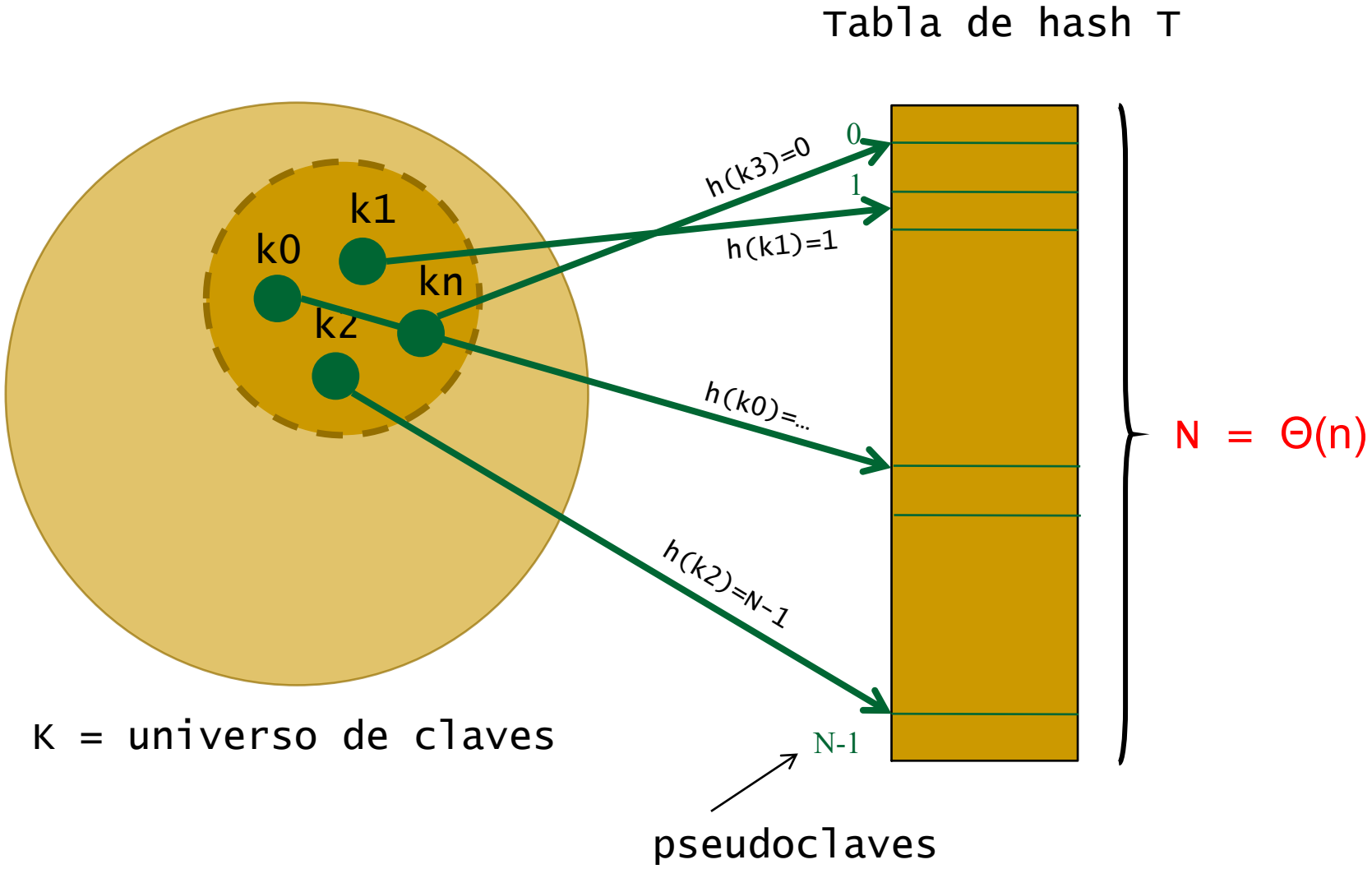


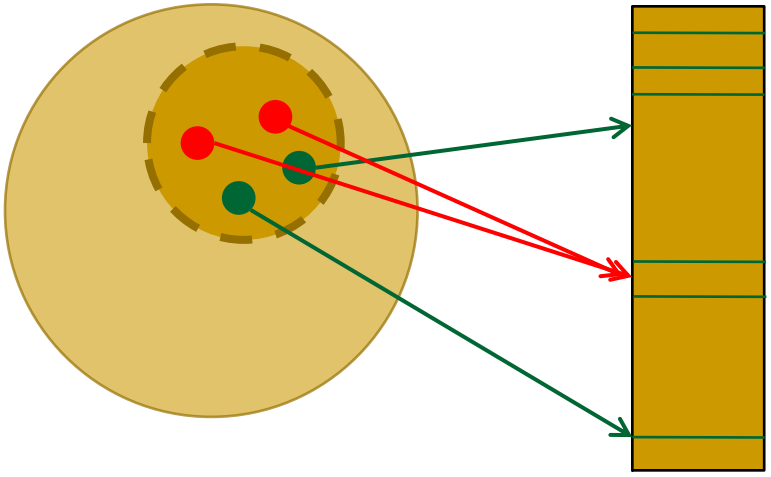
Tabla de hash T
k1
k0
kn
k2
h(k3)=0
h(k1)=1
h(k0)=...
h(k2)=N-1
0
1
N-1
N = Θ(n)
K = universo de claves
pseudoclaves

Hashing perfecto y colisiones

- función hash perfecta:
  - $k_1 != k_2$ ➔ $h(k_1) != h(k_2)$
  - Requiere N >= |K|
  - Raramente razonable en la práctica
- En general N < |K| (muy habitualmente N << |K|)

Hashing perfecto y colisiones

- función hash perfecta:
  - $k_1 != k_2 \rightarrow h(k_1) != h(k_2)$
  - Requiere N >= |K|
  - Raramente razonable en la práctica
- En general N < |K| (muy habitualmente N << |K|)



$h(k_1) == h(k_2)$ aún si $k_1 != k_2$:

Hashing perfecto y colisiones

- función hash perfecta:
  - $k_1 != k_2$ ➔ $h(k_1) != h(k_2)$
  - Requiere N >= |K|
  - Raramente razonable en la práctica
- En general N < |K| (muy habitualmente N << |K|)
  - Consecuencia: Es posible que $h(k_1) == h(k_2)$ aún con $k_1 != k_2$: colisión
  - Colisiones son más frecuentes que lo intuitivo, ver la paradoja del cumpleaños
- Ejercicio: proponer una función hash perfecta para el caso in que las claves sean strings de largo 3 en el alfabeto {a, b, c}

Resolución de colisiones

- Los métodos se diferencian por la forma de ubicar a los elementos que dan lugar a colisión. Dos familias principales:
- Direccionamiento cerrado o Concatenación : a la i-ésima posición de la tabla se le asocia la lista de los elementos tales que h(k)=i.
- Direccionamiento abierto: todos los elementos se guardan en la tabla (luego veremos cómo).

Paradoja del cumpleaños

- Si elegimos 23 personas al azar, la probabilidad de que dos de ellos cumplan años el mismo día es > ½ (aprox. 50.7%)
  - ¡Demostrar!
- En términos de hashing, aún suponiendo una distribución uniforme entre las pseudoclaves, la probabilidad de que con 23 inserciones en una tabla de 365 posiciones se genere una colisión es mayor que ½.

Requisitos de una función hash

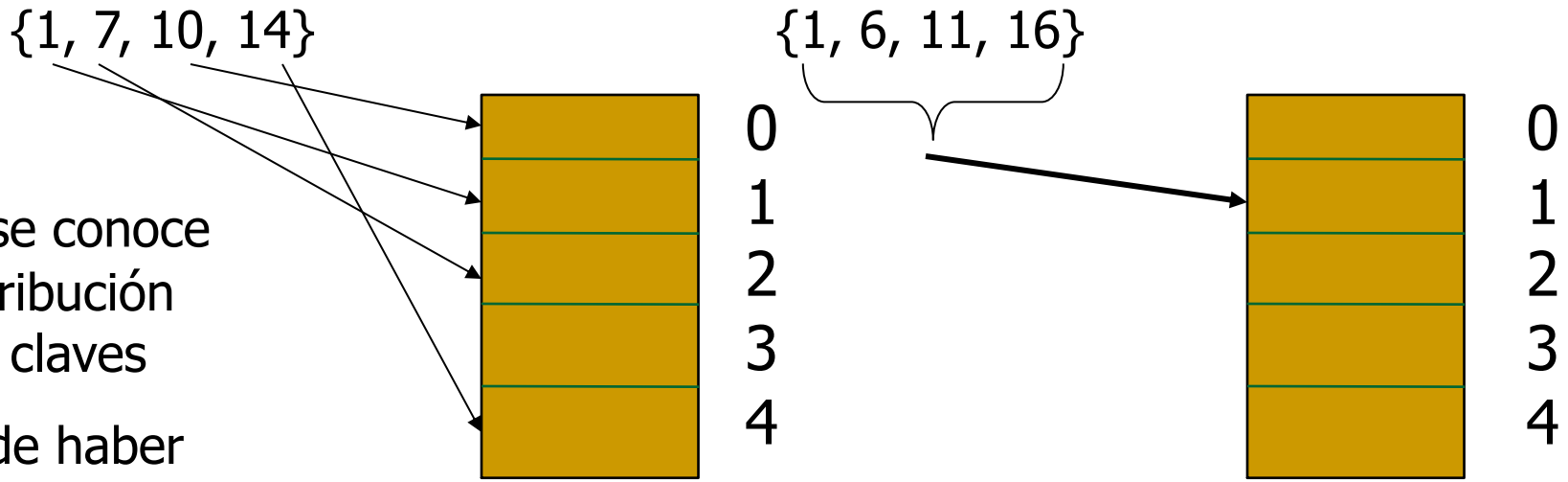
- Distribución de probabilidad de las claves:
  - P(k) = probabilidad de la clave k
- Uniformidad simple:

$$\forall j \quad \sum_{k \in K : h(k) = j} P(k) \approx 1 / |N|$$

- Intuitivamente, se quiere que los elementos se distribuyan en el arreglo en manera uniforme (pensar en el caso P(k)=1/|K|)
- Difícil construir funciones que satisfagan la uniformidad simple: P generalmente es desconocida!

Requisitos de una función hash/2

- Ejemplo: sea |T|=5 y h(k)=k mod 5

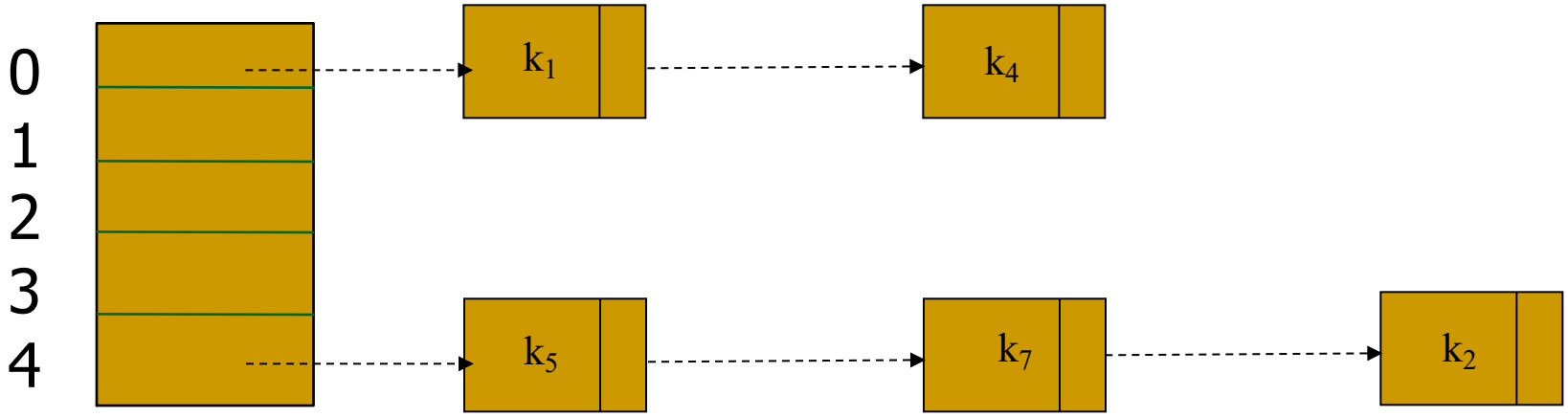


- No se conoce la distribución de las claves
- Puede haber aglomeración de elementos

En la práctica: se trata de tener independencia de la distribución de los datos

Concatenación

- $h(k_1)= h(k_4)=0$
- $h(k_5)= h(k_7)=h(k_2)=4$



- Ej.: h(k)=k mod 5
- k1=0, k4=10
- k5=9, k7=14, k2=4

Concatenación: complejidad

- insert(el, k): inserción al principio de la lista asociada a la posición h(k): costo *O*(1)
- buscar(k): búsqueda linear en la lista asociada a la posición h(k): costo *O*(longitud de la lista asociada a h(k))
- delete(k): búsqueda en la lista asociada a la posición h(k): costo *O*(longitud de la lista asociada a h(k))
- Pero ¿cuánto miden las listas?

Concatenación: ¿cuánto miden las listas?

- n = #elementos en la tabla
- α = n/|T|: factor de carga
- Teorema: bajo la hipótesis de simplicidad uniforme de la función de hash, si las colisiones se resuelven por concatenación, en promedio
  - una búsqueda fallida requiere tiempo $\Theta(1+\alpha)$
  - una búsqueda exitosa requiere tiempo $\Theta(1+\alpha/2)$
- No lo demostramos formalmente, pero debería ser intuitivo...
- O(1) si n~|T| $\rightarrow$ ¡dimensionar bien T es importante!

Direccionamiento abierto

- Todos los elementos se almacenan en la tabla
- Las colisiones se resuelven dentro de la tabla
  - Si la posición calculada está ocupada, hay que buscar una posición libre.
  - Los distintos métodos con direccionamiento abierto se distinguen por el método de barrido que utilzan.
  - La función hash pasa a depender también del número de intentos realizados
  - Dirección=h(k, i) para el i-ésimo intento
  - h(k,i) debe generar todas las posiciones de T
  - Problemas con el borrado! (Ya van a ver...)

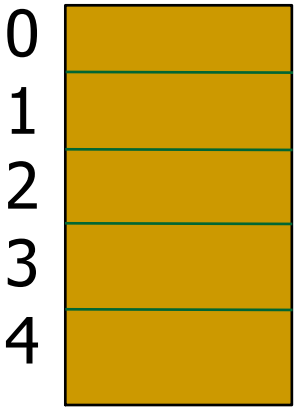
Algoritmos: Inserción

```
insertar (el, k, T) es
   i ← 0;
   mientras (T[h(k, i)] está ocupada e (i<|T|))
       incrementar i;
   si (i < |T|), hacer T[h(k, i)] ← (el,k)
   en caso contrario <overflow>
```

- Ojo: ¡Podemos tener overflow!

Algoritmos: Inserción

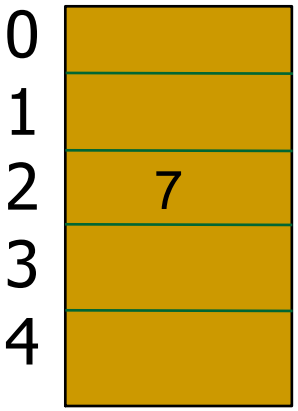
Insertar: 7,10,2,12



Algoritmos: Inserción

Insertar: 7,10,2,12

Insertar (7): $h_0(7) = 7\ mod\ 5 = 2$

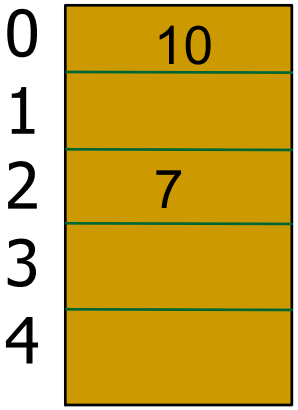


Algoritmos: Inserción

Insertar: 7,10,2,12

Insertar (7): $h_0(7) = 7 \; mod \; 5 = 2$

Insertar (10): $h_0(10) = 10 \; mod \; 5 = 0$



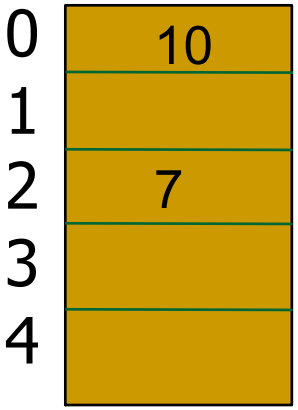
Algoritmos: Inserción

Insertar: 7,10,2,12

Insertar (7): $h_0(7) = 7\ mod\ 5 = 2$

Insertar (10): $h_0(10) = 10\ mod\ 5 = 0$

Insertar (2): $h_0(2) = 2\ mod\ 5 = 2$



Algoritmos: Inserción

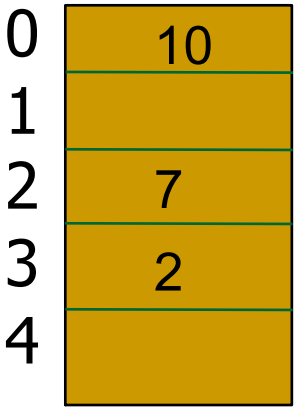
Insertar: 7,10,2,12

Insertar (7): $h_0(7) = 7\ mod\ 5 = 2$

Insertar (10): $h_0(10) = 10\ mod\ 5 = 0$

Insertar (2): $h_0(2) = 2\ mod\ 5 = 2$

$h_1(2) = (2 + 1)\ mod\ 5 = 3$



Algoritmos: Inserción

Insertar: 7,10,2,12

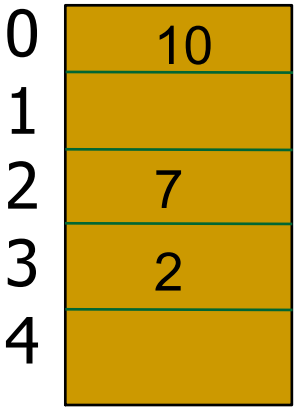
Insertar (7): $h_0(7) = 7 \; mod \; 5 = 2$

Insertar (10): $h_0(10) = 10 \; mod \; 5 = 0$

Insertar (2): $h_0(2) = 2 \; mod \; 5 = 2$

$h_1(2) = (2 + 1) \; mod \; 5 = 3$

Insertar (12): $h_0(12) = 12 \; mod \; 5 = 2$



Algoritmos: Inserción

Insertar: 7,10,2,12

Insertar (7): $h_0(7) = 7 \; mod \; 5 = 2$

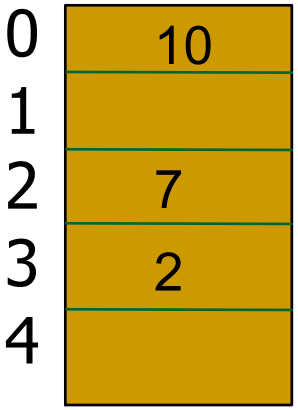
Insertar (10): $h_0(10) = 10 \; mod \; 5 = 0$

Insertar (2): $h_0(2) = 2 \; mod \; 5 = 2$

$h_1(2) = (2 + 1) \; mod \; 5 = 3$

Insertar (12): $h_0(12) = 12 \; mod \; 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1) \; mod \; 5 = 3$



Algoritmos: Inserción

Insertar: 7,10,2,12

Insertar (7): $h_0(7) = 7 \; mod \; 5 = 2$

Insertar (10): $h_0(10) = 10 \; mod \; 5 = 0$

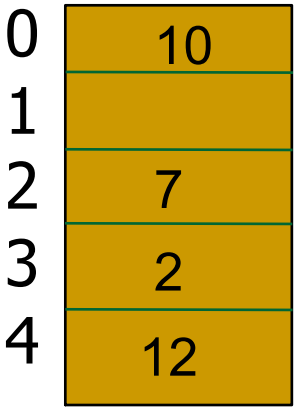
Insertar (2): $h_0(2) = 2 \; mod \; 5 = 2$

$h_1(2) = (2 + 1) \; mod \; 5 = 3$

Insertar (12): $h_0(12) = 12 \; mod \; 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1) \; mod \; 5 = 3$

$h_2(12) = (12 + 2) \; mod \; 5 = 4$



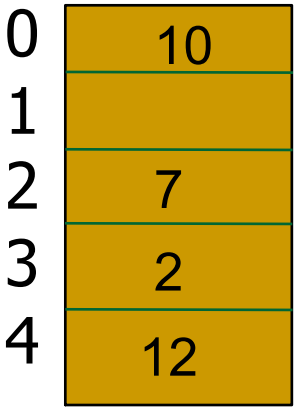
Algoritmos: búsqueda

```
buscar (k,T)
  i=0;
  mientras ((k!= T[h(k, i)].clave) y T[h(k,i)]!=null
  e (i<|T|)) incrementar i;
  Si (i < |T|) y T[h(k, i)]!=null entonces T[h(k,i)]
  en casocontrario <no está>
```

- Ojo: T[h(k, i)]!=null ¿Entonces, cómo borramos?
- Podemos marcar los elementos como “borrados, en lugar de “null”, pero....

Algoritmos: búsqueda

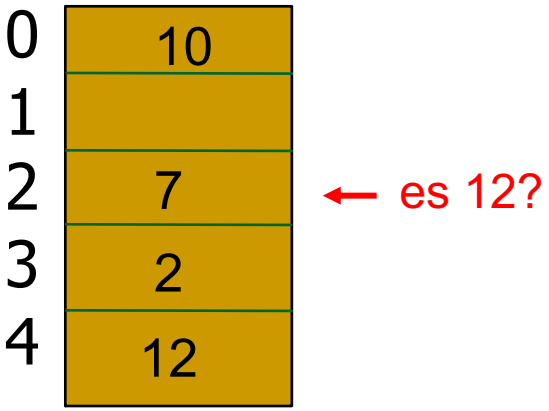
Buscar: 12,30



Algoritmos: búsqueda

Buscar: 12,30

Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

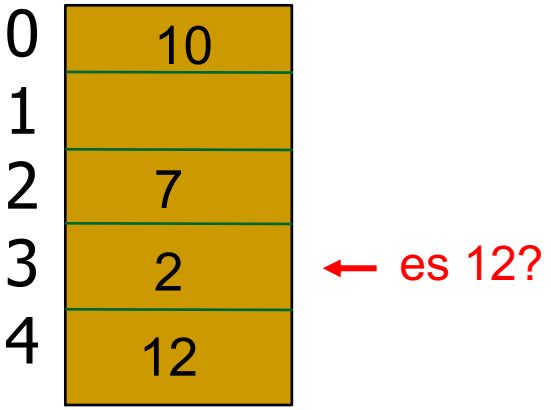


Algoritmos: búsqueda

Buscar: 12,30

Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1)\ mod\ 5 = 3$



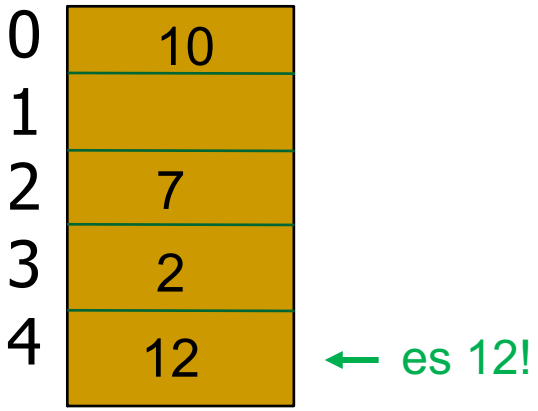
Algoritmos: búsqueda

Buscar: 12,30

Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1)\ mod\ 5 = 3$

$h_2(12) = (12 + 2)\ mod\ 5 = 4$



Algoritmos: búsqueda

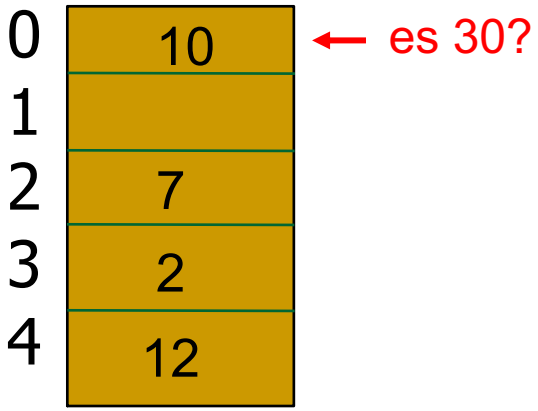
Buscar: 12,30

Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1)\ mod\ 5 = 3$

$h_2(12) = (12 + 2)\ mod\ 5 = 4$

Buscar (30): $h_0(30) = 30\ mod\ 5 = 0$



Algoritmos: búsqueda

Buscar: 12,30

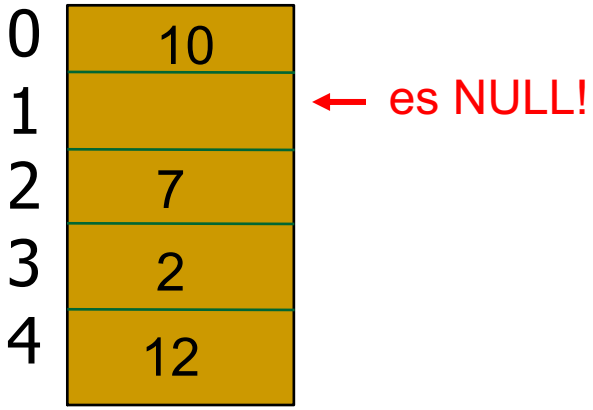
Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1)\ mod\ 5 = 3$

$h_2(12) = (12 + 2)\ mod\ 5 = 4$

Buscar (30): $h_0(30) = 30\ mod\ 5 = 0$

$h_1(30) = (30 + 1)\ mod\ 5 = 1$



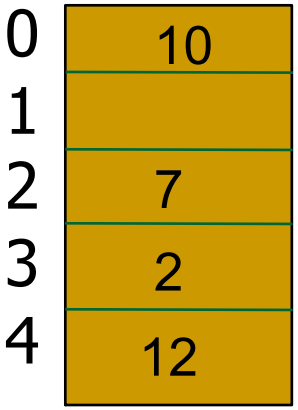
Algoritmos: búsqueda

Buscar: 12,30

Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1)\ mod\ 5 = 3$

$h_2(12) = (12 + 2)\ mod\ 5 = 4$



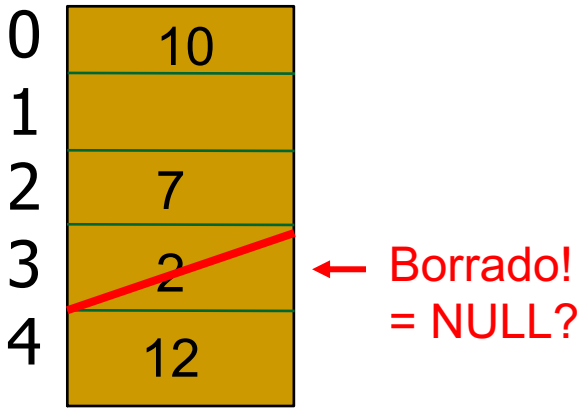
Algoritmos: búsqueda

Buscar: 12,30

Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1)\ mod\ 5 = 3$

$h_2(12) = (12 + 2)\ mod\ 5 = 4$



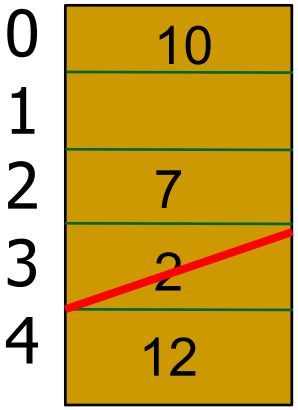
Algoritmos: búsqueda

Buscar: 12,30

Buscar (12): $h_0(12) = 12\ mod\ 5 = 2$

$h_1(12) = (12 + 1)\ mod\ 5 = 3$

$h_2(12) = (12 + 2)\ mod\ 5 = 4$



Algoritmos: búsqueda

```
buscar (k,T)
  i=0;
  mientras ((k!= T[h(k, i)].clave) y T[h(k,i)]!=null
  e (i<|T|)) incrementar i;
  Si (i < |T|) y T[h(k, i)]!=null entonces T[h(k,i)]
  en casocontrario <no está>
```

- Ojo: T[h(k, i)]!=null ¿Entonces, cómo borramos?
- Podemos marcar los elementos como “borrados, en lugar de “null”, pero....

Barrido

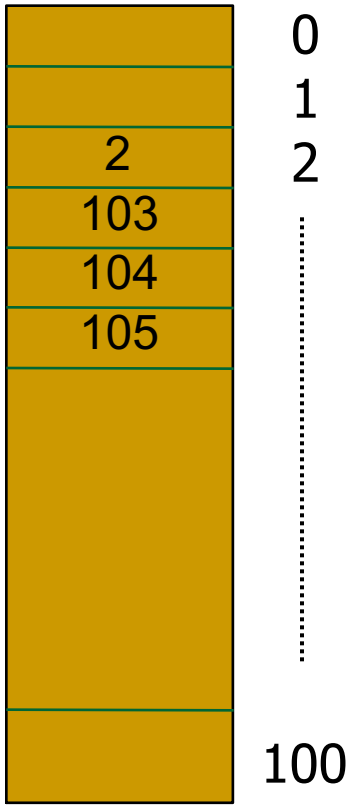
- La función h(k, i) debe recorrer todas las posiciones de la tabla
- Varias formas típicas para la función h(k,i)
  - Barrido linear
  - Barrido cuadrático
  - Hashing doble
- Se diferencian entre sí por su complejidad de cálculo y por el comportamiento respecto a los fenómenos de aglomeración.

Barrido linear

- h(k, i) = (h'(k)+i) mod |T|, donde h'(k) es una función de hashing
- Se recorren todas las posiciones en la secuencia T[h'(k)], T[h'(k)+1], ... T[|T|], 0, 1, ..., T[h'(k)-1]
- Posibilidad de aglomeración primaria: dos secuencias de barrido que tienen una colisión, siguen colisionando
- Los elementos se aglomeran por largos tramos

Aglomeración primaria

- h(k, i) = (h'(k)+i) mod 101
- h'(k)=k mod 101
- Secuencia de inserciones {2, 103, 104, 105,....}
- Caso extremo, pero el problema existe!



Barrido cuadrático

- $h(k, i) = (h'(k)+c_1 i+c_2 i^2) \bmod |T|$, donde $h'(k)$ es una función de hashing, c_1 y c_2 son constantes
- Ejemplos:
  - $h(k, i) = h'(k)+i^2$, $h(k, i+1) = h'(k)+(i+1)^2$, $i=1,..., (|T|-1)/2$
  - $h(k, i) = h'(k)+i/2+i^2/2$, $|T|=2^x$
- Posibilidad de aglomeración secundaria: si hay colisión en el primer intento....sigue habiendo colisiones ($h'(k_1)= h'(k_2) \rightarrow h'(k_1,i)= h'(k_2,i)$)
- Describir $h(k, i)$ cuando $h'(k)=k \bmod |5|$

Hashing doble

- Idea: que el barrido también dependa de la clave
- $h(k, i) = (h_1(k)+ih_2(k)) \bmod |T|$, donde $h_1(k)$ y $h_2(k)$ son funciones de hashing
- El hashing doble reduce los fenómenos de aglomeración secundaria
- Y no tiene aglomeración primaria

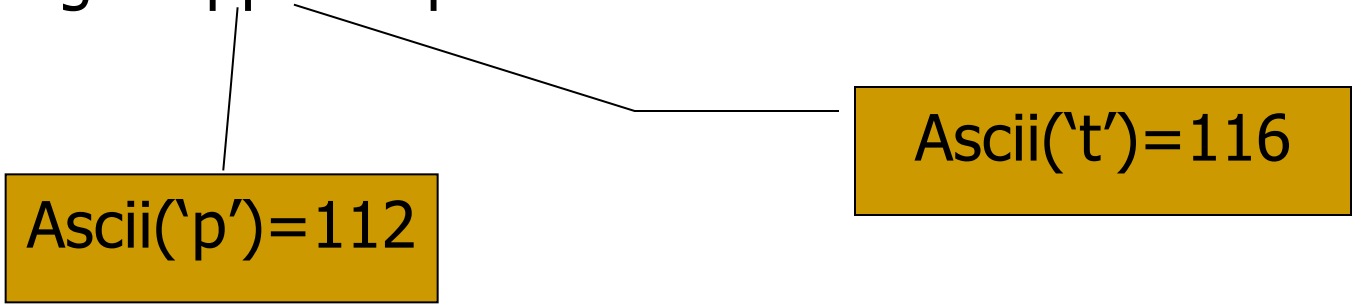
Construcción de funciones de Hash

- Recordemos que las claves no son necesariamente números naturales
- Por ejemplo, las claves podrían ser strings
- Solución: asociar a cada clave un entero
- ¿Cómo? Depende de la aplicación, de las claves, etc.

Ejemplo: strings

- Posible método: asociar a cada caracter su código ASCII y a la cadena el número entero obtenido en una determinada base
- Ejemplo: base 2, posición menos significativa a la derecha

String = "ppt" → pseudoclave = $112*2^2+112*2^1+116*2^0=788$



Funciones hash

- Múchos métodos
  - División
  - Partición
  - Mid-square
  - Extracción
  - .....
- Objetivo: distribución lo más uniforme posible...
- Diferencias:
  - Complejidad
  - Tratamiento de los fenómenos de aglomeración

División

- h(k)=k mod |T|
- Baja complejidad
- Aglomeraciones
  - No potencias de 2: si $|T| = 2^p$ entonces todas las claves con los p bits menos significativos iguales, colisionan
  - No potencias de 10 si las claves son números decimales (mismo motivo)
  - En general, la función debería depender de todas las cifras de la clave, cualquiera sea la representación
  - Una buena elección en la práctica: un número primo no demasiado cercano a una potencia de 2 (ejemplo: h(k)=k mod 701 para |K|=2048 valores posibles)

Partición

- Particionar la clave k en $k_1,k_2,....,k_n$
- $h(k)=f(k_1,k_2,....,k_n)$
- Ejemplo: la clave es un No. de tarjeta de crédito. Posible función hash:

4772 6453 7348 → {477, 264, 537, 348}

f(477,264,537,348) = (477+264+537+348) mod 701
= 224

Extracción

- Se usa solamente una parte de la clave para calcular la dirección
- Ejemplo: Las 6 cifras centrales del número de tarjeta de crédito
  - 4772 6453 7348 → 264537

- El número obtenido puede ser manipulado ulteriormente
- La dirección puede depender de una parte de la clave