

# Implementación eficiente del tipo de dato Conjunto en Java

Algoritmos y Estructuras de Datos

1<sup>er</sup> cuatrimestre 2025

## Introducción

Vamos a implementar `Conjunto.java`  
mediante estructuras de datos eficientes.

## Introducción

Vamos a implementar Conjunto.java mediante estructuras de datos eficientes.

```
interface Conjunto<T> {  
    public int cardinal();  
    public void insertar(T elem);  
    public boolean pertenece(T elem);  
    public void eliminar(T elem);  
    public String toString();  
    public T minimo();  
    public T maximo();  
}
```

## Cualidades del software

Fundamentales:

- ▶ Correcto con respecto a una especificación.

Más o menos importantes, dependiendo del **contexto de uso**:

- ▶ Eficiente (tiempo, memoria, consumo de energía, ...).
- ▶ Reutilizable.
- ▶ Extensible / modificable.
- ▶ Usable.
- ▶ Legible.
- ▶ Predecible.
- ▶ ...

El **diseño** consiste en organizar el programa de tal manera que cumpla con las cualidades requeridas, en algún contexto de uso.

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|----------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece |                |                   |                            |  |
| insertar  |                |                   |                            |  |
| borrar    |                |                   |                            |  |
| max/min   |                |                   |                            |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada   | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|------------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$ |                   |                            |  |
| insertar  |                  |                   |                            |  |
| borrar    |                  |                   |                            |  |
| max/min   |                  |                   |                            |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada   | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|------------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$ |                   |                            |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$ |                   |                            |  |
| borrar    |                  |                   |                            |  |
| max/min   |                  |                   |                            |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada   | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|------------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$ |                   |                            |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$ |                   |                            |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$ |                   |                            |  |
| max/min   |                  |                   |                            |  |



## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                |                   |                            |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                |                   |                            |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                |                   |                            |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                   |                            |  |

# Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$  |                            |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                |                   |                            |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                |                   |                            |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                   |                            |  |

# Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$  |                            |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$  |                            |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                |                   |                            |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                   |                            |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|-------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$  |                            |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$  |                            |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$  |                            |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                   |                            |  |

# Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |                            |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |                            |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |                            |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                            |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$           |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |                            |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |                            |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                            |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$           |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$           |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |                            |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                            |  |

# Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$           |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$           |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$           |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |                            |  |



## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable      | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |  |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |  |

# Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable      | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(\log N)$                    |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |  |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable      | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(\log N)$                    |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                         |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                |  |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable      | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(\log N)$                    |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                         |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                         |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ |  |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo<br>redimensionable      | Arreglo<br>redimensionable<br>(ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(\log N)$                    |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                         |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                         |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(1)$                         |

## Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

|           | Lista enlazada                  | Lista bi-enlazada               | Arreglo redimensionable         | Arreglo redimensionable (ordenado) |
|-----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| pertenece | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(\log N)$              |
| insertar  | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                   |
| borrar    | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                | $\mathcal{O}(N)$                   |
| max/min   | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$ | $\mathcal{O}(1)$                   |

Podemos hacer algo mejor

Sabemos que dado un arreglo de tamaño  $N$  ordenado podemos verificar pertenencia de un elemento en  $\mathcal{O}(\log N)$  con **búsqueda binaria**

## Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$ ? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado



## Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$ ? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$ . Nos queda  $[2, 5, 8, 12]$  4 posibles, 2 candidatos de cada lado

## Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$ ? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$ . Nos queda  $[2, 5, 8, 12]$  4 posibles, 2 candidatos de cada lado

$2 \leq 5$ . Nos queda  $[2, 5]$  2 posibles, 1 candidato de cada lado

## Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$ ? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$ . Nos queda  $[2, 5, 8, 12]$  4 posibles, 2 candidatos de cada lado

$2 \leq 5$ . Nos queda  $[2, 5]$  2 posibles, 1 candidato de cada lado

$2 \leq 2$ . Nos queda  $[2]$

## Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$ ? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$ . Nos queda  $[2, 5, 8, 12]$  4 posibles, 2 candidatos de cada lado

$2 \leq 5$ . Nos queda  $[2, 5]$  2 posibles, 1 candidato de cada lado

$2 \leq 2$ . Nos queda  $[2]$

Necesitamos a lo sumo  $\lceil \log_2 N \rceil$  preguntas

## Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$ ? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$ . Nos queda  $[2, 5, 8, 12]$  4 posibles, 2 candidatos de cada lado

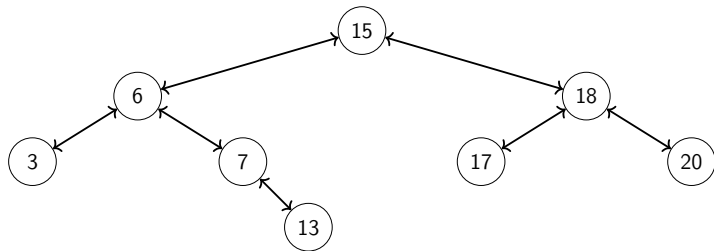
$2 \leq 5$ . Nos queda  $[2, 5]$  2 posibles, 1 candidato de cada lado

$2 \leq 2$ . Nos queda  $[2]$

Necesitamos a lo sumo  $\lceil \log_2 N \rceil$  preguntas

¿Podemos usar esta idea para **implementar** un conjunto eficiente?

## Árboles binarios de búsqueda (ABB)



## Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB  $\iff$

## Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB  $\iff$  es null



## Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB  $\iff$  es null o satisface las siguientes condiciones:

## Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB  $\iff$  es null o satisface las siguientes condiciones:

- Los valores del subárbol izquierdo son menores que el valor de la raíz.

## Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB  $\iff$  es null o satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Los valores del subárbol izquierdo son menores que el valor de la raíz.
- ▶ Los valores del subárbol derecho son mayores que el valor de la raíz.

## Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB  $\iff$  es null o satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Los valores del subárbol izquierdo son menores que el valor de la raíz.
- ▶ Los valores del subárbol derecho son mayores que el valor de la raíz.
- ▶ Los objetos izquierdos y derechos son ABBs.

## Objetivo

Implementar un tipo de datos `Conjunto<T>` en Java usando árboles binarios de búsqueda (ABB)

## Implementación (ABB.java)

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {
```

## Implementación (ABB.java)

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {  
    private Nodo _raiz;
```

## Implementación (ABB.java)

Constructor

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {  
    private Nodo _raiz;  
  
    public ABB() {  
        _raiz = null;  
    }  
}
```



## Implementación (ABB.java)

El único atributo indispensable es `_raiz`. Pero podríamos usar otros (como `_cardinal` o `_altura`) para tener operaciones  $O(1)$ .

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {  
    private Nodo _raiz;  
    private int _cardinal;  
    private int _altura;  
  
    public ABB() {  
        _raiz = null;  
        _cardinal = 0;  
        _altura = 0;  
    }  
}
```

## Representación de los nodos

Definimos la clase Nodo. ¿Cuáles son los atributos?

```
private class Nodo {
```

## Representación de los nodos

Declaramos los atributos

```
private class Nodo {  
    T valor;  
    Nodo izq;  
    Nodo der;  
    Nodo padre;
```

## Representación de los nodos

Definimos el constructor de Nodo (solo recibe un valor  $v$  de tipo  $T$ )

```
private class Nodo {  
    T valor;  
    Nodo izq;  
    Nodo der;  
    Nodo padre;  
  
    Nodo(T v) {
```

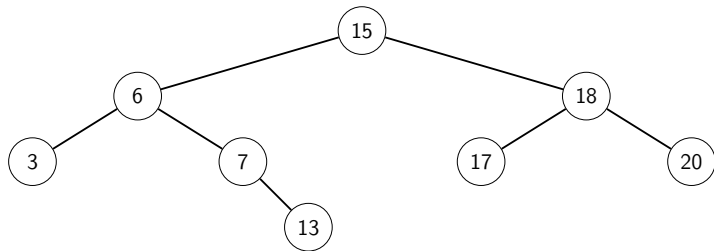
## Representación de los nodos

¿En qué se diferencia con la estructura de la lista doblemente enlazada?

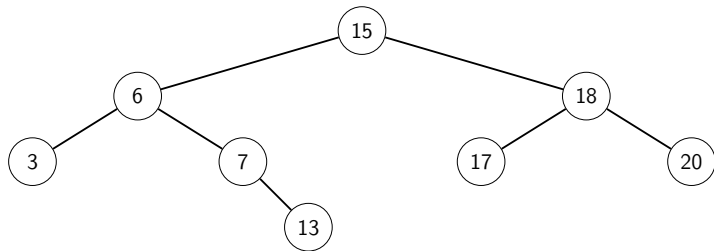
```
private class Nodo {  
    T valor;  
    Nodo izq;  
    Nodo der;  
    Nodo padre;  
  
    Nodo(T v) {  
        valor = v;  
        izq = null;  
        der = null;  
        padre = null;  
    }  
}
```

# Algoritmos

`abb.pertenece(elem)`



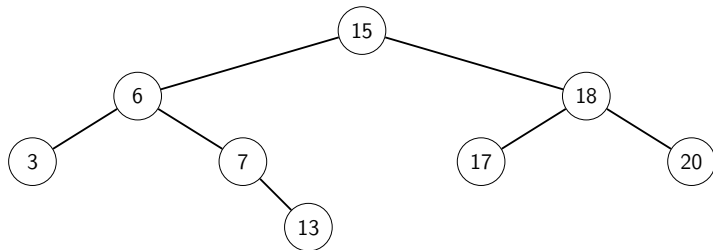
`abb.pertenece(elem)`



`abb.busqueda_recursiva(elem)`



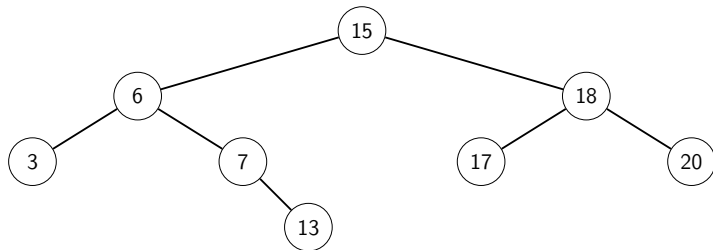
`abb.pertenece(elem)`



`abb.busqueda_recursiva(elem)`

- **Caso Base 1.** Si el ABB es null, devolver false.
- **Caso Base 2.** Si la raíz contiene el elemento, devolver true.

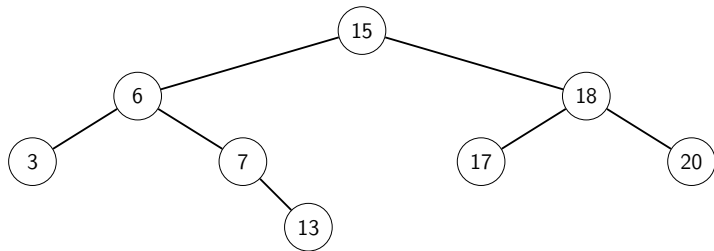
`abb.pertenece(elem)`



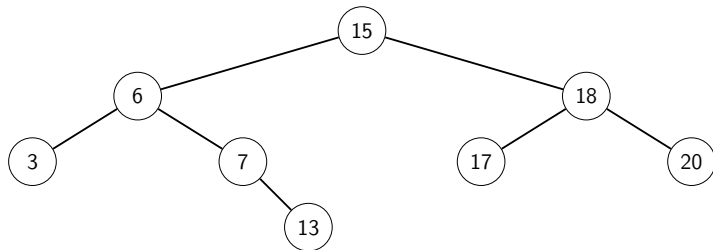
`abb.busqueda_recursiva(elem)`

- **Caso Base 1.** Si el ABB es null, devolver false.
- **Caso Base 2.** Si la raíz contiene el elemento, devolver true.
- **Paso Recursivo.** Si no, continuamos la búsqueda recursiva en el sub-árbol que indique `compareTo()`

`abb.insertar(elem)`



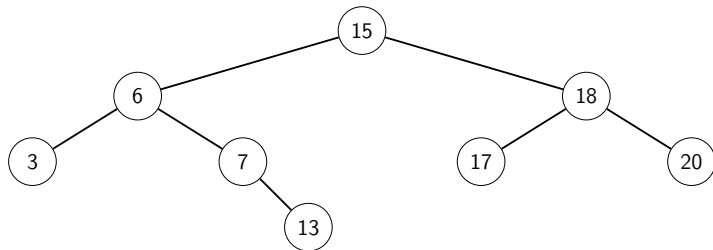
`abb.insertar(elem)`



`ultimo_nodo_buscado = abb.buscar_nodo(elem)`

(un algoritmo parecido al anterior, que devuelve el último nodo de la búsqueda)

`abb.insertar(elem)`

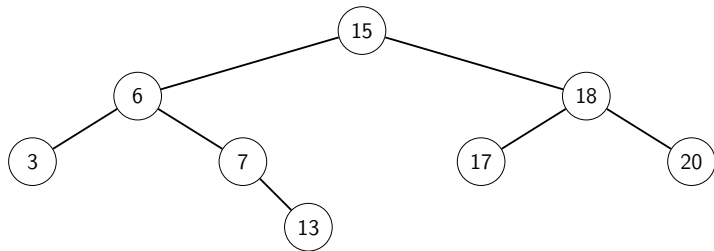


`ultimo_nodo_buscado = abb.buscar_nodo(elem)`

(un algoritmo parecido al anterior, que devuelve el último nodo de la búsqueda)

- SI lo encontramos, no hacemos nada.

`abb.insertar(elem)`

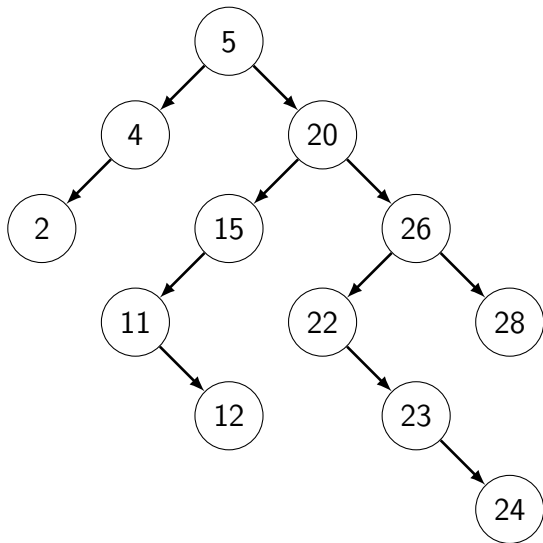


`ultimo_nodo_buscado = abb.buscar_nodo(elem)`

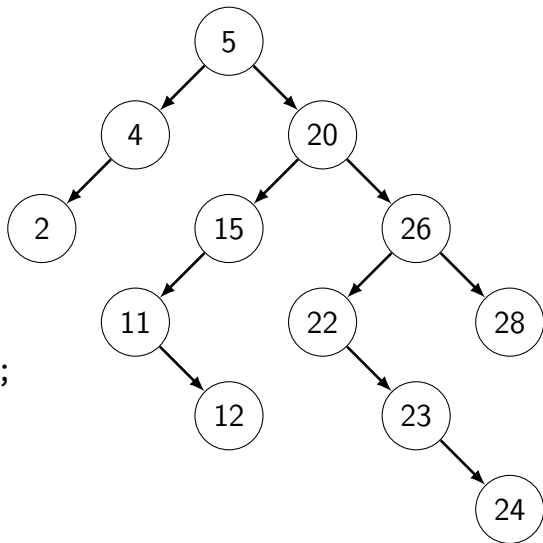
(un algoritmo parecido al anterior, que devuelve el último nodo de la búsqueda)

- SI lo encontramos, no hacemos nada.
- SINO lo insertamos como hijo del último nodo de la búsqueda.

`abb.eliminar(elem)`



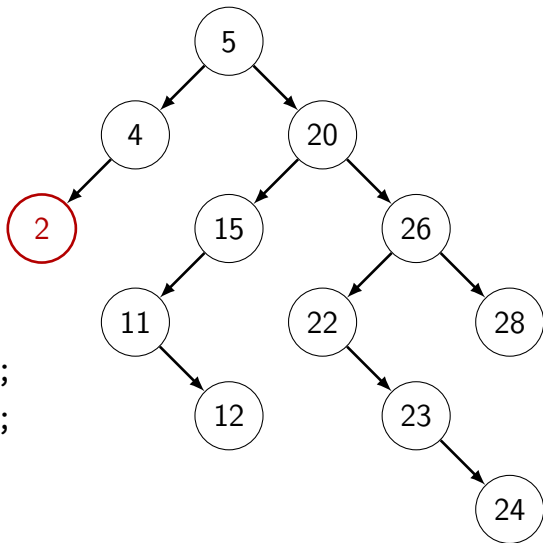
`abb.eliminar(elem)`



`abb.eliminar(3);`



`abb.eliminar(elem)`

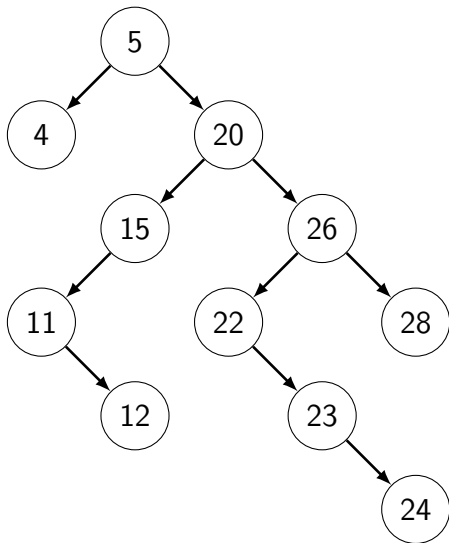


`abb.eliminar(3);`

`abb.eliminar(2);`

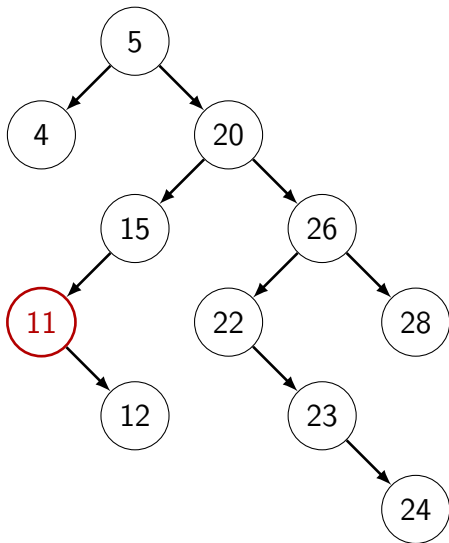
`abb.eliminar(elem)`

`abb.eliminar(3);`  
`abb.eliminar(2);`

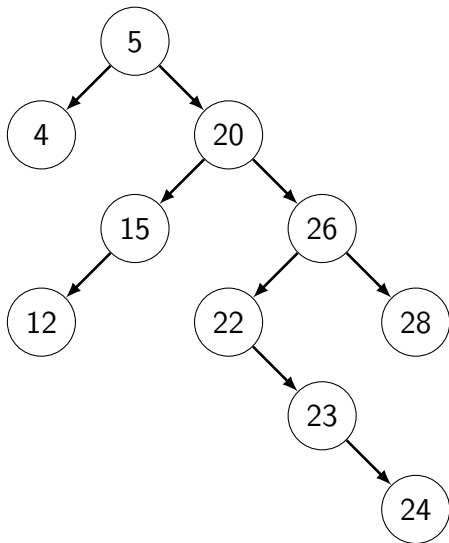


`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);
```



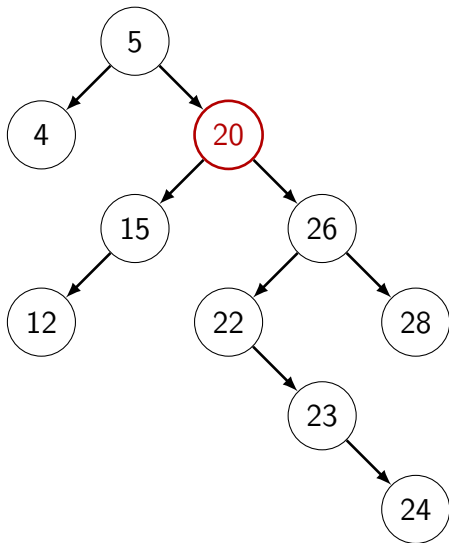
`abb.eliminar(elem)`



```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);
```

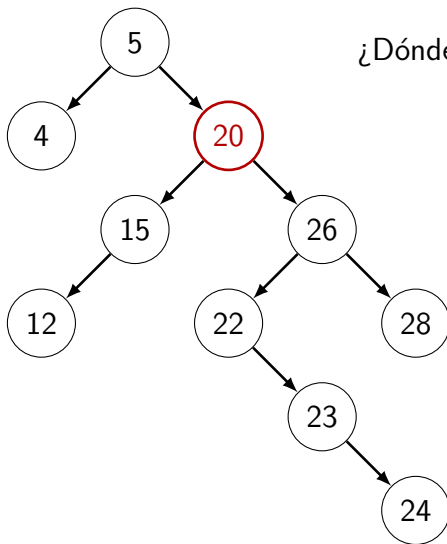
`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



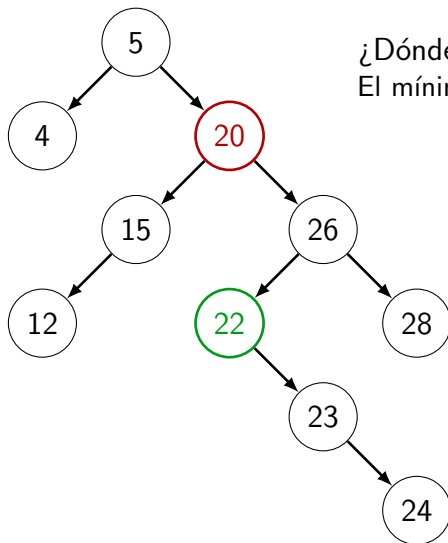
`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



`abb.eliminar(elem)`

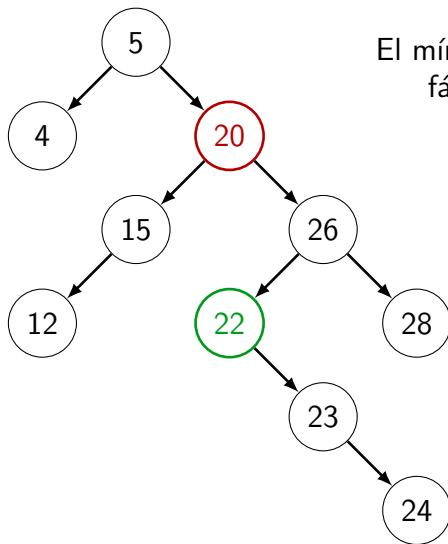
```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



¿Dónde está el sucesor?  
El mínimo de la derecha

`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```

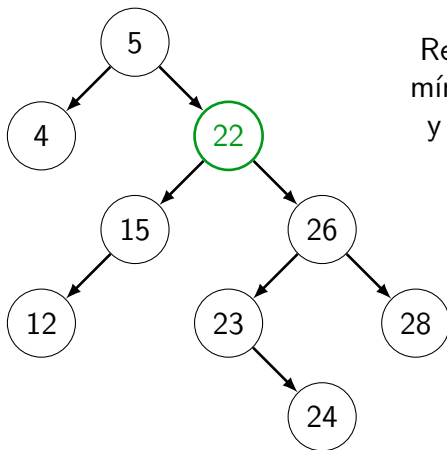


El mínimo siempre es  
fácil sacarlo



`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



Removemos el  
mínimo derecho  
y lo subimos

```
abb.eliminar(elem)
```

- Tenemos 4 casos:

```
abb.eliminar(elem)
```

- Tenemos 4 casos:
  - SI no está, no hacemos nada

`abb.eliminar(elem)`

- Tenemos 4 casos:
  - SI no está, no hacemos nada
  - SI está y no tiene descendencia  
→ Lo borramos.

`abb.eliminar(elem)`

- Tenemos 4 casos:
  - SI no está, no hacemos nada
  - SI está y no tiene descendencia  
→ Lo borramos.
  - SI está y tienen un solo hijo.  
→ El hijo ocupa su lugar.

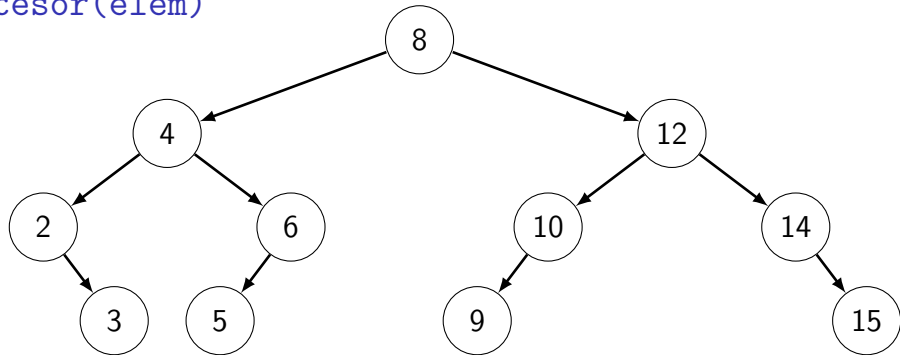
`abb.eliminar(elem)`

- Tenemos 4 casos:
  - SI no está, no hacemos nada
  - SI está y no tiene descendencia  
→ Lo borramos.
  - SI está y tienen un solo hijo.  
→ El hijo ocupa su lugar.
  - SI está y tiene dos hijos.

`abb.eliminar(elem)`

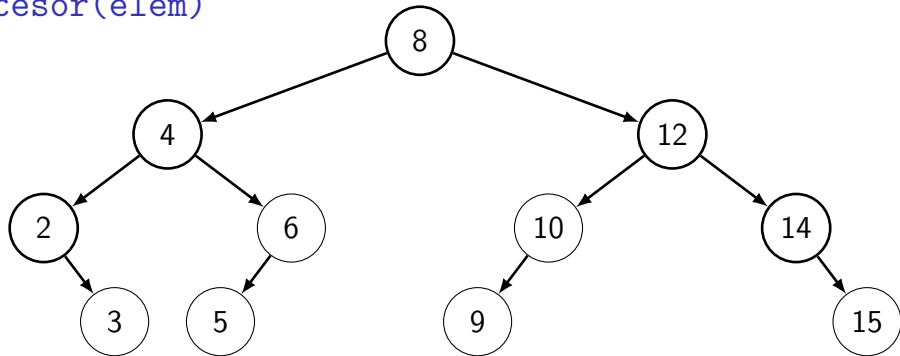
- Tenemos 4 casos:
  - SI no está, no hacemos nada
  - SI está y no tiene descendencia  
→ Lo borramos.
  - SI está y tienen un solo hijo.  
→ El hijo ocupa su lugar.
  - SI está y tiene dos hijos.  
→ Lo remplazamos por el inmediato sucesor (o predecesor).

abb.sucesor(elem)



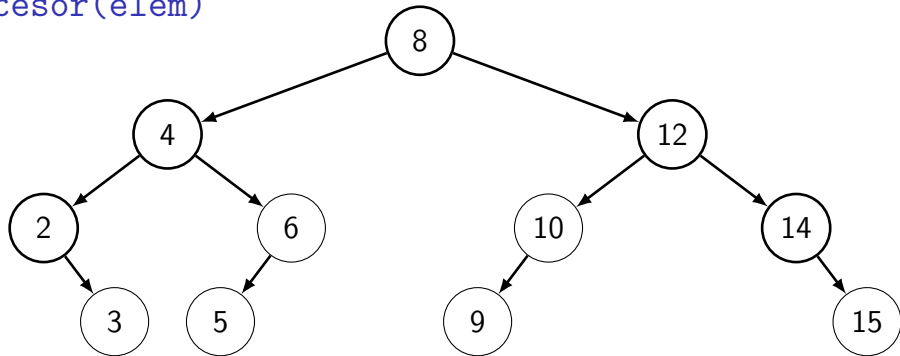


`abb.sucesor(elem)`



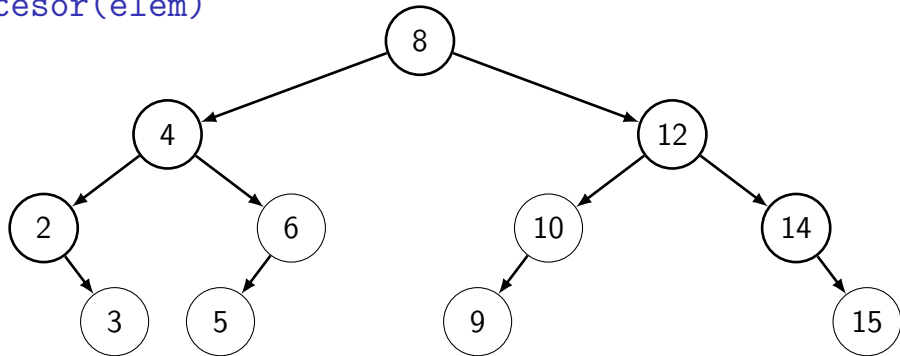
Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:

`abb.sucesor(elem)`



Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:  
    `res = minimo_a_su_derecha(elem)`

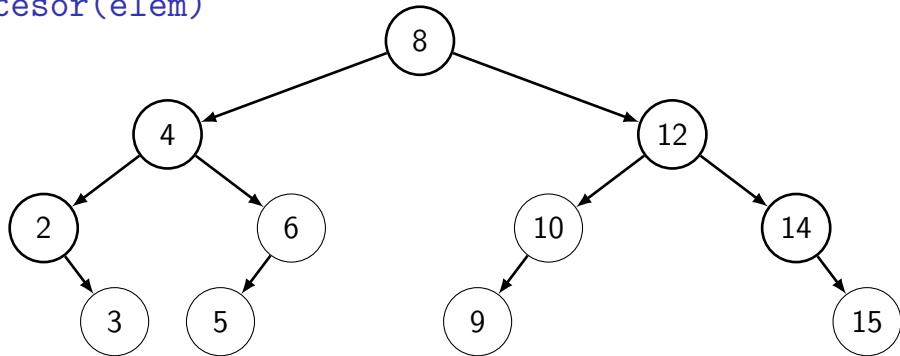
`abb.sucesor(elem)`



Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:  
    `res = minimo_a_su_derecha(elem)`

Si no:

`abb.sucesor(elem)`



Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:

`res = minimo_a_su_derecha(elem)`

Si no:

`res = primer_ancestro_derecho(elem)`

## Iterador<T>

```
private class ABB_Iterador implements Iterador<T> {  
    private Nodo _actual = this.minimo();  
  
    public boolean haySiguiente() {  
        /* ... */  
    }  
  
    public T siguiente() {  
        /* ... */  
    }  
}  
  
public Iterador<T> iterador() {  
    return new ABB_Iterador();  
}
```

## Algoritmos Recursivo

`inorder(ABB) = inorder(ABB.izq) + [ABB.val] + inorder(ABB.der)`

## Algoritmos Recursivo

$\text{inorder(ABB)} = \text{inorder(ABB.izq)} + [\text{ABB.val}] + \text{inorder(ABB.der)}$

Para hacer un iterador necesitamos un algoritmo *iterativo*:

## Algoritmos Recursivo

$\text{inorder(ABB)} = \text{inorder(ABB.izq)} + [\text{ABB.val}] + \text{inorder(ABB.der)}$

Para hacer un iterador necesitamos un algoritmo *iterativo*:

**Constructor:** Crear el iterador apuntando al primer elemento (el mínimo).

**Siguiente:** Devolver el nodo actual y apuntar a su sucesor.



## Complejidades

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem):`
- ▶ `abb.insertar(elem):`
- ▶ `abb.min(elem):`
- ▶ `abb.sucesor(elem):`
- ▶ `abb.borrar(elem):`

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:
- ▶ `abb.min(elem)`:
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`:
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$

Rebalanceando (AVL) tendríamos complejidades  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(\log N)$

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`:  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$

Rebalanceando (AVL) tendríamos complejidades  $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(\log N)$

Agregando un atributo privado, `abb.min(elem)` podría ser  $\mathcal{O}(1)$



# ¡A programar!

En `ABB.java` está la declaración de la clase, los métodos públicos y la definición de `Nodo` y de `ABB_Iterador`.

Complementos:

<https://visualgo.net/en/bst>.

<https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html>