Algoritmos y Estructuras de Datos

Repaso de Lógica Proposicional

2025

Bibliografía

- Michael Huth y Mark Ryan, Logic in computer science. Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press, 2004.
- Dirk Van Dalen, Logic and Structure, Series Universitext, Springer, 4th edition, 2008.
- Steve Reeves y Michael Clarke, Logic for computer science, Addison-Wesley, 1990.
- Michael Genesereth y Eric Kao (Synthesis Lectures on Computer Science), Introduction to Logic, Morgan & Claypool Publishers, 2012.

Por qué estudiar lógica

- Queremos usar lógica en nuestras especificaciones.
- Usamos lógica en nuestros programas.
- Queremos lenguajes para modelar situaciones.
- Queremos poder razonar y argumentar.
- Queremos poder hacer esto formalmente.
- Y vamos a entender más sobre la computación y sus raíces

Lógica proposicional (PROP) - Sintaxis

- Símbolos

$$\neg \; , \; \wedge \; , \; \vee \; , \; \rightarrow \; , \; \leftrightarrow \; , \; (, \;)$$

- Variables proposicionales (infinitas)

$$p \; , \; q \; , \; r \; , \; \ldots$$

- Fórmulas
  - combinaciones apropiadas de símbolos y variables proposicionales
  - Ejemplo de combinación inapropiada: $(\wedge p(($

Lógica proposicional (PROP) - Sintaxis

Fórmulas

1. Cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si ϕ es una fórmula, $(\neg\phi)$ es una fórmula
3. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula
4. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \vee \psi)$ es una fórmula
5. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \rightarrow \psi)$ es una fórmula
6. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ es una fórmula

- Muy entre paréntesis: Las fórmulas son un ejemplo de un conjunto inductivo
- Vienen provistos de
  - Esquema de prueba para probar propiedades sobre ellos (inducción estructural)
  - Esquema de recursión para definir funciones sobre el conjunto (recursión estructural)
- No es tema primario del curso, quizás lo veremos de pasada, pero es importante que lo sepan.

Lógica proposicional - Sintaxis

Ejemplos

$$((p \wedge q) \to r) \quad (p \vee p)$$

- ¿Y estas expresiones son fórmulas?

$$p(\wedge q),\ \neg p$$

- Convenciones de notación
  - Precedencia: $\wedge$ y $\vee$ ligan más fuerte que $\to$ y $\leftrightarrow$, $\neg$ liga más fuerte que los demás
  - Omisión de paréntesis más externos y los de negaciones
  - Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

Semántica clásica

- Consiste en asignarle valores de verdad a las fórmulas
- El conjunto de valores de verdad es

$$\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

- Dos enfoques para darle semántica a las fórmulas de PROP
  1. Tablas de verdad
  2. Valuaciones
- Son equivalentes

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Ejemplo: tabla de verdad para $((p \wedge q) \rightarrow r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**T**

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

"Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Solución 1:

p = Juan está cursando
q= Juan no conoce a nadie
r= Juan no tiene grupo

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Solución 2:

p = Juan está cursando
q= Juan conoce a alguien
r= Juan tiene grupo

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$$

Valuaciones

- Una valuación es una función $v : \mathcal{V} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales
- Una valuación satisface una proposición ϕ si $v \models \phi$ donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models p & \textit{sii} & v(p) = \mathbf{T} \\
v \models \neg\phi & \textit{sii} & v \not\models \phi \ (\textit{i.e.} \text{ no } v \models \phi) \\
v \models \phi \vee \psi & \textit{sii} & v \models \phi \text{ o } v \models \psi \\
v \models \phi \wedge \psi & \textit{sii} & v \models \phi \text{ y } v \models \psi \\
v \models \phi \to \psi & \textit{sii} & v \not\models \phi \text{ o } v \models \psi \\
v \models \phi \leftrightarrow \psi & \textit{sii} & (v \models \phi \text{ sii } v \models \psi)
\end{array}
$$

Tautologías y satisfactibilidad

Dadas fórmulas ϕ y ψ

- ϕ es lógicamente equivalente a ψ cuando $v \models \phi$ sii $v \models \psi$

Una fórmula ϕ es

- una tautología si $v \models \phi$ para toda valuación v
- satisfactible si existe una valuación v tal que $v \models \phi$
- insatisfactible si no es satisfactible

Un conjunto de fórmulas S es

- satisfactible si existe una valuación v tal que para todo $\phi \in S$, se tiene $v \models \phi$
- insatisfactible si no es satisfactible

Ejemplos

Tautologías

- $p \to p$
- $\neg\neg p \to p$
- $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Fórmulas insatisfactibles

- $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q) \land p$
- $(p \to q) \land p \land \neg q$

Tautologías e insatisfactibilidad

Teorema

Una fórmula ϕ es una tautología sii $\neg\phi$ es insatisfactible

Demostración.

$\rightarrow$. Si ϕ es tautología, para toda valuación v, $v \models \phi$. Entonces, $v \not\models \neg\phi$ (i.e. v no satisface $\neg\phi$).

$\leftarrow$. Si $\neg\phi$ es insatisfactible, para toda valuación v, $v \not\models \neg\phi$. Luego $v \models \phi$. $\square$

Observación

Este resultado sugiere un método indirecto para probar que una fórmula ϕ es una tautología, que es probar que $\neg\phi$ es insatisfactible

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
v_1	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
v_2	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
v_3	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
v_4	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
v_5	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**
v_6	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
v_7	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
v_8	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Equivalencias entre fórmulas

- **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

1. Idempotencia
   $(p \wedge p) \leftrightarrow p$
   $(p \vee p) \leftrightarrow p$
2. Asociatividad
   $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3. Conmutatividad
   $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
   $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
4. Distributividad
   $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. Reglas de De Morgan
   $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
   $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Algoritmos y Estructuras de Datos

Lógica de predicados

Primer Cuatrimestre 2025

Repaso - Lógica Proposicional (PROP)

Lógica de Primer Orden (PRED)

- Sintaxis de PRED
- Semántica de PRED

Semántica trivaluada

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

- símbolos

$$\neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \leftrightarrow\ ,\ (,\ )$$

- variables proposicionales (infinitas)

$$p\ ,\ q\ ,\ r\ ,\ \ldots$$

- fórmulas
  - combinaciones apropiadas de símbolos y variables proposicionales
  - Ejemplo de combinación inapropiada: $(\wedge p(($

Semántica clásica

- Consiste en asignarle valores de verdad a las fórmulas
- El conjunto de valores de verdad es
$$\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$
- Dos enfoques para darle semántica a las fórmulas de PROP
  1. Tablas de verdad
  2. Valuaciones
- Son equivalentes

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Repaso - Lógica Proposicional (PROP)

Lógica de Primer Orden (PRED)
- Sintaxis de PRED
- Semántica de PRED

Semántica trivaluada

Predicados

Consideremos la siguiente afirmación:

Todo estudiante es más joven que algún profesor

- En PROP lo representaríamos con una variable proposicional p
- Se pierde información sobre la estructura lógica de la frase
  - ser estudiante
  - ser profesor
  - ser más joven que
  - todo
  - algún

Individuos, predicados, variables y cuantificadores

Todo estudiante es más joven que algún profesor

$$(\forall x)(E(x) \to (\exists y(P(y) \land J(x, y))))$$

- Individuos (entidad distintiva e indivisible):
  - Estudiantes y profesores
  - Denotados por las variables x e y
- Predicados (predican sobre individuos):
  - $E(x)$: x es estudiante
  - $P(x)$: x es profesor
  - $J(x, y)$: x es más joven que y
- Cuantificadores
  - $\forall$: Para todo
  - $\exists$: Existe (para algún)

Funciones

Toda persona es menor que su madre biológica

- $G(x)$: x es persona
- $M(y, x)$: y es la madre de x

$$(\forall x)(\forall y)(G(x) \wedge M(y, x) \rightarrow J(x, y))$$

Funciones:

- Permiten representar objetos de manera más directa
- En lugar de escribir $M(y, x)$ podemos denotar a y con $m(x)$

$$(\forall x)(G(x) \rightarrow J(x, m(x)))$$

Otro ejemplo: *Andrea y Pedro tienen la misma abuela materna*

$$m(m(andrea)) = m(m(pedro))$$

Términos y fórmulas

La lógica de predicados habla sobre dos clases de cosas:

- Individuos: Personas, números, colores, bolitas, grafos, árboles, etc.
  - Las expresiones que denotan individuos se llaman términos
  - Ej: las variables
  - Ej: Constantes como $andrea$ y expresiones como $m(andrea)$
- Valores de verdad
  - Las expresiones que denotan valores de verdad se llaman fórmulas
  - Ej: $J(x, y)$

Cuantificadores

- $(\forall x)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **todos** los elementos cumplen la propiedad P.
  - Se lee "Para todo x se cumple $P(x)$"
  - Se lo llama Cuantificador Universal
- $(\exists x)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **al menos un** elemento cumple la propiedad P.
  - Se lee "Existe al menos un x que cumple $P(x)$"
  - Se lo llama Cuantificador Existencial

Cuantificadores tipados

Syntax sugar para nuestro lenguaje de especificación (más en la próxima clase): vamos a aplicar cuantificadores a elementos de un tipo de datos.

- $(\forall x : T)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **todos** los elementos de tipo T cumplen la propiedad P.
  - Se lee "Para todo x de tipo T se cumple $P(x)$"
- $(\exists x : T)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **al menos un** elemento de tipo T cumple la propiedad P.
  - Se lee "Existe al menos un x de tipo T que cumple $P(x)$"

Ejemplos

- ¿qué dice el siguiente predicado?

  $$n > 1 \;\wedge\; (\forall n' : \mathbb{Z})(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$$

  Observación: `x mod y` se indefine si $y = 0$

  Respuesta (literal): "Dado un n mayor a 1, Para todos los n' enteros se cumple que si son mayores a 1 y menores a n, entonces n no es múltiplo de n' "

  Respuesta (corta): "Ningún entero positivo es múltiplo de un entero positivo menor"
- Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:
  $(\forall n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0)$.
- Existe un entero entre 1 y 10 que es par:
  $(\exists n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \wedge n \bmod 2 = 0)$.
- En general, si queremos decir que todos los enteros x que cumplen $P(x)$ también cumplen $Q(x)$, escribimos:
  $(\forall x : \mathbb{Z})(P(x) \rightarrow Q(x))$.
- Para decir que existe un entero que cumple $P(x)$ y que también cumple $Q(x)$, escribimos: $(\exists x : \mathbb{Z})(P(x) \wedge Q(x))$.

Algunas reglas de deducción

- La negación del cuantificador universal es el cuantificador existencial de la negación, y viceversa:

  $\neg(\forall n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\exists n)\neg P(n).$

  $\neg(\exists n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\forall n)\neg P(n).$

- El cuantificador universal generaliza la conjunción:

  $(\forall n : \mathbb{Z})P(n) \leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots$

- El cuantificador universal generaliza la disyunción:

  $(\exists n : \mathbb{Z})P(n) \leftrightarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee \ldots$

Repaso - Lógica Proposicional (PROP)

Lógica de Primer Orden (PRED)

- Sintaxis de PRED
- Semántica de PRED

Semántica trivaluada

Lenguaje de primer orden

Un lenguaje de primer orden (LPO) $\mathcal{L}$ consiste en:

1. Un conjunto numerable $\mathcal{C}$ de constantes: $c_0, c_1, \ldots$
2. Un conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos de función cada uno con aridad[1] $n > 0$: $f_0, f_1, \ldots, f_k$
3. Un conjunto $\mathcal{P}$ de símbolos de predicado cada uno con aridad $n \geq 0$: $P_0, P_1, \ldots, P_m, \doteq$.
   - El símbolo de predicado $\doteq$ denotará igualdad.

Ejemplo: Lenguaje de primer orden para la aritmética

1. Constantes: 0
2. Símbolos de función: $S, +, *$
3. Símbolos de predicado: $\doteq, <$

[1] Aridad=Número de argumentos que toman

Términos de primer orden

Sea $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, \ldots\}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un LPO. El conjunto de $\mathcal{L}$-términos se define inductivamente como:

1. Toda constante de $\mathcal{L}$ y toda variable es un $\mathcal{L}$-término
2. Si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{L}$-términos y f es un símbolo de función de aridad n, entonces $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{L}$-términos

En notación abreviada:

$$t ::= c \mid x \mid f(t, \ldots, t)$$

Ejemplo: Aritmética (cont.)

- $S(0)$
- $+(S(0), S(S(0)))$
- $*(S(x_1), +(x_2, S(x_3)))$

Fórmulas atómicas

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un LPO. El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas se define inductivamente como:

1. Todo símbolo de predicado de aridad 0 es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica
2. Si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{L}$-términos y P es un símbolo de predicado de aridad n, entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica
   Por ejemplo: Si $t_1, t_2 \in \mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 \doteq t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica

Ejemplo: Aritmética (cont.)

- $< (0, S(0))$
- $< (x_1, +(S(0), x_2))$
- $\doteq (0, S(S(x_1)))$

Fórmulas de primer orden

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un LPO. El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas se define inductivamente como:

1. Toda $\mathcal{L}$-fórmula atómica es una $\mathcal{L}$-fórmula
2. Si $\phi, \psi \in \mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ y $(\neg \phi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas
3. Para toda variable x_i y cualquier $\mathcal{L}$-fórmula ϕ, $(\forall x_i)(\phi)$ y $(\exists x_i)(\phi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas

Variables libres y ligadas

- Una ocurrencia de x en ϕ es ligada si x ocurre en un subtérmino de la forma $(\forall x)(\psi)$ o $(\exists x)(\psi)$.
- Una ocurrencia es libre si no es ligada.
- Una variable es libre (ligada) en una fórmula si ocurre libre (ligada) en la fórmula.

Ejemplo

$P(x) \wedge (\forall x)(R(x, y) \rightarrow (\exists z)P(z))$

- y es libre
- z es ligada
- x es libre y ligada

Variables libres y ligadas

- Usamos $FV(\phi)$ y $BV(\phi)$ para referirnos al conjunto de las variables libres y ligadas de ϕ, respectivamente (Free y Bounded)
- $FV(\phi)$ y $BV(\phi)$ se pueden definir por inducción estructural en ϕ

Ejemplo

Si $\phi = (\forall x)(R(x, y) \to P(x))$,
entonces $FV(\phi) = \{y\}$ y $BV(\phi) = \{x\}$

- Sentencia: fórmula cerrada (i.e. sin variables libres)

Repaso - Lógica Proposicional (PROP)

Lógica de Primer Orden (PRED)

- Sintaxis de PRED
- Semántica de PRED

Semántica trivaluada

Estructura de primer orden

Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, una estructura para $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, es un par

$$\mathcal{M} = (M, I)$$

donde

- M (universo) es un conjunto no vacío
- I (función de interpretación) asigna funciones y predicados sobre M a símbolos de $\mathcal{L}$ de la siguiente manera:
  1. Para toda constante c, $I(c) \in M$
  2. Para todo f de aridad $n > 0$, $I(f) : M^n \to M$
  3. Para todo predicado P de aridad $n \geq 0$ $I(P) \subseteq M^n$
  4. $I(\doteq)$ es la relación de identidad sobre M

Ejemplo Aritmética

Para nuestro lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$podría ser

$$\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, I)$$

donde

- El universo es el conjunto de los enteros
- I se define como:
  1. $I(0) = 0$ (la interpretación de la constante 0 es el número 0)
  2. $I(S)$ es la función "sucesor"
  3. $I(+)$ es la función "suma"
  4. $I(*)$ es la función "producto"
  5. $I(<)$ es la relación "menor"
  6. $I(\doteq)$ es la relación de identidad sobre M

Ejemplo: Aritmética (cont.)

- $S(0)$
- $+(S(0), S(S(0)))$
- $*(S(x_1), +(x_2, S(x_3)))$

Asignación

Asignación

Sea $\mathcal{M}$ una estructura para $\mathcal{L}$. Una asignación es una función $s : \mathcal{V} \to M$

Dado s podemos definir $\widehat{s}$ que se puede aplicar a términos para obtener el individuo del universo que denota

Extensión de una asignación a términos

$$\begin{aligned}
\widehat{s}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} s(x) \\
\widehat{s}(c) &\stackrel{\text{def}}{=} I(c) \\
\widehat{s}(f(t_1, \ldots, t_n)) &\stackrel{\text{def}}{=} I(f)(\widehat{s}(t_1), \ldots, \widehat{s}(t_n))
\end{aligned}$$

Nota: a veces abusamos de la notación y escribimos simplemente s en lugar de $\widehat{s}$

Satisfactibilidad

Satisfactibilidad

La relación $s \models_{\mathcal{M}} \phi$ establece que la asignación s satisface la fórmula ϕ en la estructura $\mathcal{M}$

- Vamos a definir la relación $s \models_{\mathcal{M}} \phi$ de manera formal usando inducción estructural en ϕ
- Si s es una asignación y $a \in M$, usamos la notación $s[x \leftarrow a]$ para denotar la asignación que se comporta igual que s salvo en el elemento x, en cuyo caso retorna a

Satisfactibilidad

La relación $s \models_{\mathcal{M}} \phi$ se define inductivamente como:

$$\begin{array}{rcl}
s \models_{\mathcal{M}} P(t_1, \ldots, t_n) & \textit{sii} & (\widehat{s}(t_1), \ldots, \widehat{s}(t_n)) \in I(P) \\
s \models_{\mathcal{M}} \neg\phi & \textit{sii} & s \not\models_{\mathcal{M}} \phi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \wedge \psi) & \textit{sii} & s \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ y } s \models_{\mathcal{M}} \psi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \vee \psi) & \textit{sii} & s \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ o } s \models_{\mathcal{M}} \psi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \rightarrow \psi) & \textit{sii} & s \not\models_{\mathcal{M}} \phi \text{ o } s \models_{\mathcal{M}} \psi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \leftrightarrow \psi) & \textit{sii} & (s \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ sii } s \models_{\mathcal{M}} \psi) \\
s \models_{\mathcal{M}} (\forall x_i)\phi & \textit{sii} & s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ para todo } a \in M \\
s \models_{\mathcal{M}} (\exists x_i)\phi & \textit{sii} & s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ para algún } a \in M
\end{array}$$

Validez

- Una fórmula ϕ es satisfactible en $\mathcal{M}$ sii existe una asignación s tal que
$$s \models_{\mathcal{M}} \phi$$
- Una fórmula ϕ es satisfactible sii existe un $\mathcal{M}$ tal que ϕ es satisfactible en $\mathcal{M}$. En caso contrario se dice que ϕ es insatisfactible.
- Una fórmula ϕ es válida o verdadera en $\mathcal{M}$ sii
$$s \models_{\mathcal{M}} \phi, \text{ para toda asignación } s$$
- Una fórmula ϕ es válida sii es válida en toda estructura $\mathcal{M}$.
- **Nota:** ϕ es válida sii $\neg\phi$ es insatisfactible.

Ejemplos de fórmulas válidas

- $\phi \wedge \neg\phi$
- $(\forall x)\phi(x) \rightarrow (\exists x)\phi(x)$
- $(\forall x)\phi(x) \rightarrow \neg(\forall x)\neg\phi(x)$
- $(\forall x)\forall y.\phi(x, y) \rightarrow (\forall y)(\forall x)\phi(x, y)$
- $(\forall x)(\phi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow (\forall x)\phi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$
- y las que vimos antes...

Resumen de PRED

- Sintaxis
  - Lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$
  - Términos sobre $\mathcal{L}$ (denotan individuos)
  - Fórmulas sobre $\mathcal{L}$ (denotan valores de verdad)
- Semántica
  - Estructuras: universo+interpretación de los símbolos de $\mathcal{L}$

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Semántica trivaluada

- Supongamos que contamos con un símbolo relacional $==$ que nos permite comparar números reales
- ¿Valor de verdad de las siguientes fórmulas?

$$1 == 1 \qquad (1+1) == 2 \qquad 0{,}5 == 2/4$$

- ¿Y esta?

$$1/0 == 2$$

Semántica trivaluada

Pasos para determinar si $e_1 == e_2$ es verdadero o falso

1. Obtener el número real r_1 denotado por e_1
2. Obtener el número real r_2 denotado por e_2
3. Comparar r_1 con r_2 para determinar si son iguales o no

Consideremos

$$1/0 == 2$$

- Trabado en paso 1
- Expresión $1/0$ no denota ningún número
- $1/0 == 2$ no es ni verdadera ni falsa porque no contamos con los números a comparar
- Le damos un valor especial: $\perp$ (indefinido)

Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama secuencial porque ...

- los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos $\wedge_L$ (y-luego, o *conditional and*, o **cand**), $\vee_L$ (o-luego o *conditional or*, o **cor**), y , $\rightarrow_L$ (implica-luego).

p	q	$(p \wedge_L q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F
T	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	F
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	q	$(p \vee_L q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F
T	$\perp$	T
F	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	q	$(p \rightarrow_L q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T
T	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$