1. Sea $f(x,y)=\sqrt{y+(x-1)^2}$.

(a) Determinar y graficar el Dominio de f.

(b) Sea C la curva de nivel 3 de f. Dar una parametrización de C.

(c) Hallar la recta normal a la curva C en el punto (3,5).

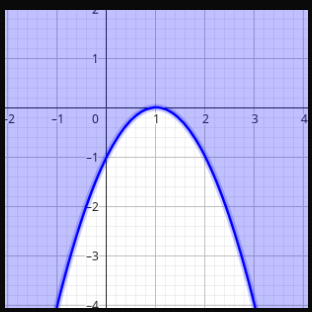
· En $\mathbb{R}$ no se puede tomar raíz de números negativos.

$\Rightarrow y+(x-1)^2 \geq 0 \iff y \geq -(x-1)^2$
$\iff y \geq -(x^2-2x+1)$
$\iff y \geq -x^2+2x-1$.

$\therefore \underline{\mathrm{Dom}(f)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \geq -x^2+2x-1\}$

Rta a1

· Gráfico del Dominio de f:



Rta a2

· Si C es la curva de nivel 3 $\Rightarrow 3 = \sqrt{y+(x-1)^2} \iff 9 = y+(x-1)^2$
$\iff y = 9-(x-1)^2$

· Si lo acomodo de esta forma, tiene la forma de una parábola, la cual sé cómo parametrizar.

NOMBRE	ECUACIÓN IMPLÍCITA	ECUACIONES PARAMÉTRICAS
Elipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\,\mathrm{sen}\,t \end{array}\right\}, 0 \leq t < 2\pi$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\left.\begin{array}{l} x=a\,\mathrm{ch}\,t \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right\}, -\infty < t < \infty$
Parábola	$y^2=2px$	$\left.\begin{array}{l} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{array}\right\}, -\infty < t < \infty$

$\boxed{C = (t, 9-(t-1)^2)}$
$\boxed{-\infty < t < \infty}$

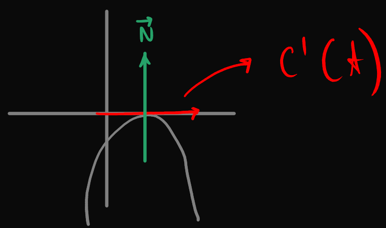
Rta b

$(t-1)^2 = t^2-2t+1$

· Normal en $p=(3,5)$.

· $3 = t$

· $9-(t-1)^2 = 5 \longrightarrow 9-2^2 = 5 \iff 5=5$ ✓



· $c'(t) = (1, -2t+2)$ y sé que $3=t$.

$\Rightarrow c'(t) = (1,-4)$. $\longrightarrow$ es el vector director de la tangente, y como se ve en el gráfico, para buscar la $\vec{N}$ debo encontrar un $\vec{v} \perp$ al que ya tengo.

$\vec{u} \cdot (1,-4) = 0 \Rightarrow (\alpha, -4\beta) = 0 \longrightarrow$ sé que $\alpha = 4 \wedge \beta = 1$ lo cumplen.

· La recta $\vec{N}$ debe pasar por p y el $\vec{v}$ que acabo de encontrar.

$L_{\vec{N}} : \lambda(4,1)+(3,5) \Rightarrow \boxed{L_{\vec{N}} : (\lambda 4+3, \lambda+5)}$

Rta c

2. Analizar la existencia de los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+\operatorname{sen}(x))\,xy}{2x^2+y^2}$.

a -

$\cdot \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(0)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)(y-2)}{0^2+(y-2)^2} = 0$

$\cdot \displaystyle\lim_{y\to 2} \frac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{-2}\right)\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$

$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow y = x+2$

$\cdot \displaystyle\lim_{y\to x+2} \frac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)x}{2x^2}$, cuando x es pequeño, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)\simeq\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cdot x^{\cancel{3}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2\cancel{x}} = \dfrac{\underbrace{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cdot x^2}_{\to 0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotado: }[-1;1]}}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

· Como todos los límites me dieron iguales, supongo que existe.

· Pruebo por Sandwich.

$\cdot\ \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right) \le \left|\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right| \le |x'^3|$

$\cdot\ \cos\left(\frac{1}{y-2}\right) \le \left|\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)\right| \le 1$

$\cdot\ {}^{\star}(y-2) \le |(y-2)|\ \forall y\neq 2.$

Para hacerlo más simple, reduzco el lim a $(x',y')\to(0,0)$

$\left\{\begin{array}{l} x'=0 \\ y=2 \Rightarrow y'=y-2 \end{array}\right.$

$\star$ Ahora $(y')\le|y'|$

Teniendo en cuenta estas acotaciones, defino una $h(x)$.

$\cdot\ h(x) = \dfrac{|y'||x'^3|}{x'^2+y'^2} = \dfrac{|y'||x'^3|}{\|(x',y')\|^2}$

$\star_2$: $g(x)\le f(x)\le h(x)$

Por Sandwich:

$\star_2\quad 0 \le \dfrac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)(y-2)}{x^2+(y-2)^2} \le \dfrac{|y'||x'^3|}{\|(x',y')\|^2}$

sé que: $|y|^n \le \|(x,y)\|^n$

$\wedge$

$|x|^n \le \|(x,y)\|^n$

$\Rightarrow |y'||x'^3| \le \|(x',y')\|^4$

Mi exp $h(x)$ queda como: $\dfrac{\|(x',y')\|^{\cancel{4}}}{\cancel{\|(x',y')\|^2}} = \|(x',y')\|^2$

Ahora tengo:

$0 \le \dfrac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)(y-2)}{x^2+(y-2)^2} \le \|(x',y')\|^2 \longrightarrow$ pero sé que: $\displaystyle\lim_{(x',y')\to(0,0)}\|(x',y')\|^2 = 0$

o, lo que es lo mismo: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)}\|(x,y-2)\|^2 = 0.$

$(\Rightarrow)$

$0 \le \dfrac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)(y-2)}{x^2+(y-2)^2} \le \underbrace{\|(x,y-2)\|^2}_{\to 0}$

$\therefore$ Como mi $f(x)$ quedó acotada por 2 exp. que tienden a 0, por Sandwich puedo asegurar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x) = 0.$