Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 2: Curvas y superficies en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Funciones

Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

1. Graficar las siguientes curvas de $\mathbb{R}^2$ dadas de forma paramétrica y decidir si son el gráfico de una función de la forma $y = f(x)$.

   (a) $x = 3 - 4t,\ y = 2 - 3t,$ (b) $x = 1 - t^2,\ y = t - 2, -2 \leq t \leq 2,$

   (c) $x = t^2 + t,\ y = t^2 - t,\ -2 \leq t \leq 2,$ (d) $x = t^2,\ y = t^3 - 4t,\ -3 \leq t \leq 3.$

2. En cada uno de los siguientes casos, describir de forma paramétrica la circunferencia de radio r y centro p.

   (a) $r = 2,\ p = (0, 0),$ (b) $r = 1,\ p = (1, 3),$ (c) $r = 3,\ p = (0, 2).$

3. Graficar la región del plano que consiste en todos los puntos cuyas coordenadas polares verifican las siguientes condiciones.

   (a) $r \geq 1,$ (b) $0 \leq r < 2,\ \pi \leq \theta \leq 3\pi/2,$ (c) $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6.$

4. Graficar las curvas dadas por las siguientes ecuaciones en coordenadas polares.

   (a) $r = -2\sin(\theta),$ (b) $r = 1 - \cos(\theta).$

5. (a) Graficar las siguientes curvas de $\mathbb{R}^2$.

   i. $x^2 + y^2 = 4,$ ii. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,$ iii. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1,$

   iv. $x = y^2.$

   (b) Para $a, b \in \mathbb{R}$, dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

   i. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ ii. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ iii. $x = ay^2.$

6. Graficar las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$.

   (a) $y = 2x + 1,$ (b) $y = x^2,$ (c) $x^2 + y^2 = 1,$

   (d) $4x^2 + y^2 = 4.$

7. (a) Dibujar las curvas de nivel de $z = -1, z = 0, z = 1, x = 0$ de las siguientes superficies. Luego utilizando trazas, graficar las superficies en $\mathbb{R}^3$.

   i. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, ii. $z = x^2 + y^2$, iii. $x = y^2 + 4z^2$,

   iv. $z^2 = x^2 + y^2$, v. $x^2 = y^2 + 4z^2$, vi. $z = x^2 - y^2$,

   vii. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, viii. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, ix. $4x^2 + 9y^2 + z = 0$.

   (b) Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

   i. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, ii. $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, iii. $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$,

   iv. $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$, v. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, vi. $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

8. Graficar la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $1 \leq z \leq 2$.

9. Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones.

   (a) $\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{4 - t^2}, 5t + 1, \ln(t + 1)\right)$, (b) $\mathbf{r}(t) = \left(4t, \dfrac{3t}{t - 2}, e^t\right)$.

10. Graficar la curva imagen de las siguientes funciones.

    (a) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$, (b) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t - t^2)$,

    (c) $\mathbf{r}(t) = (t^2 + t, t^2 - t, (t^2 - t)^2)$.

11. Hallar una función $\mathbf{r}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen describa los siguientes conjuntos.

    (a) el rectángulo de vértices $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(1, 2)$ y $(1, -2)$,
    (b) el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

12. (a) Graficar la curva intersección de las siguientes superficies.

    i. $x^2 + y^2 = 4$ y $z = xy$, ii. $x^2 + y^2 = 1$ y $y + z = 2$,

    iii. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 1 + y$.

    (b) Hallar una función $\mathbf{r}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa las curvas graficadas en el item anterior.

13. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(x-y)^2 + z^2 = 2 \quad \text{y} \quad z = x + y.$$

Dar una parametrización de $\mathcal{C}$.

14. Graficar el dominio de las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = \sqrt{2x - y}$, (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$,

(c) $f(x,y,z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$.

15. Para cada una de las siguientes funciones, calcular dominio, graficar las curvas de nivel y usarlas para graficar la función.

(a) $f(x,y) = 3y$, (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$, (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$,

(d) $f(x,y) = -x^2 - y^2$, (e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, (f) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.