Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 1: Geometría en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Aplicaciones

1. Representar graficamente en $\mathbb{R}^3$ las siguientes ecuaciones e inecuaciones. Se sugiere complementar la resolución de este ejercicio con GeoGebra.

   (a) $y = -4$, (b) $x > 3$, (c) $0 \leq z \leq 6$,

   (d) $x = z$, (e) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, (f) $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$,

   (g) $x^2 + y^2 \leq 9$.

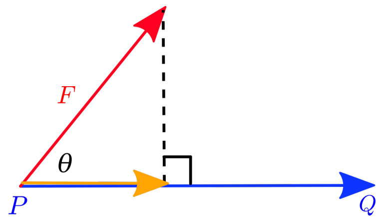
2. Mostrar que las siguientes ecuaciones representan una esfera. Dar su centro y su radio.

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$, (b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$.

3. En física e ingeniería los vectores son útiles en muchos aspectos. Por ejemplo, dado que una fuerza ejercida sobre un objeto está determinada por una magnitud y una dirección, se puede utilizar un vector para representarla. La unidad de medida clásica para la magnitud de una fuerza es newtons (N).

   Si una niña empuja un trineo por la ladera de una montaña con una fuerza de 50 N y la ladera de la montaña tiene una inclinación de 38° sobre la horizontal, calcular la componente horizontal y la vertical de dicha fuerza.

4. Supongamos que para mover un objeto del punto P al punto Q aplicamos una fuerza constante F en una determinada dirección formando un ángulo θ con la horizontal, como muestra la imagen.

   El **trabajo** W realizado por F sobre dicho objeto se define como el producto entre la distancia recorrida ($\|Q - P\|$) y la componente de la fuerza a lo largo de $\overrightarrow{PQ}$ ($\|F\| \cos\theta$), es decir,

   $$W = \|Q - P\| \|F\| \cos\theta = (Q - P) \cdot F.$$

   Hallar el trabajo realizado por una fuerza F con una magnitud de 20 N aplicada en la dirección de 50° sobre la horizontal para desplazar un objeto 4 mts.

5. Hallar el trabajo realizado por una fuerza $F = (8, -6, 9)$ que mueve un objeto del punto $P = (0, 10, 8)$ al punto $Q = (6, 12, 20)$ a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

6. Dados dos vectores V, W se cumple la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* para el producto interno:
$$|V \cdot W| = \|V\| \, \|W\| \, |\cos\theta| \leq \|V\| \, \|W\|.$$
Â¿Hay algún caso en el que la desigualdad $|V \cdot W| \leq \|V\| \, \|W\|$ sea una igualdad?

7. Mostrar gráfica y analÃticamente que cada componente del vector $F = (x, y)$ es menor o igual que la norma de F: esto es que
$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|F\|$$
y similarmente que $|y| \leq \|F\|$. Si $F = (x, y, z)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$, probar que vale lo mismo para las tres coordenadas de F.

8. (a) Encontrar una ecuación paramétrica del plano Π que pasa por los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ y $C = (3, 4, 1)$.
   (b) Hallar N la normal y dar una ecuación implícita de Π.

9. (a) Hallar la intersección de las rectas
$$\mathbb{L}_1 : t(1, -1, 2) + (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(-1, 1, 0) + (2, 0, 2).$$
   (b) Encontrar una ecuación del plano que contiene a $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$.

10. Para $a \in \mathbb{R}$, dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones. Se sugiere complementar la resolución de este ejercicio con GeoGebra (utilizar deslizadores puede ser útil).

    (a) $x + y + z = a$, (b) $x + y + az = 1$, (c) $\cos(a)y + \sin(a)z = 1$.