· Para demostrar que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, se hace por definición:

Ejemplo (con t. de Sandwich):

" Calcular si existe: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$ ", veo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

· Proof:

$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} \right|$ → sé que: $x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$.

$\Rightarrow |f(x,y)| = \underbrace{\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \cdot |\operatorname{sen}(y)| = \underbrace{|\operatorname{sen}(y)|}_{\to 0, \text{ pq } y\to 0.}$ → como $\operatorname{sen}(y) \to 0$, me queda la siguiente expresión:

$0 \leq \operatorname{sen}(y) \leq 0.$

$\boxed{\therefore \text{ Por Sandwich: } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$

Hta

Continuidad

· Dada $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $(x_0,y_0) \in D$: Se dice que f es continua en (x_0,y_0) si:

1. $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$
2. $\boxed{f \text{ es continua en cada } (x_0,y_0) \in D}$

Funciones que ya se saben que son continuas:

· Polinomios. (continuas en $\mathbb{R}^2$)

· Racionales (cociente de polinomios) siempre que denom $\neq 0$.

· Composición de una función continua en una variable con un polinomio.

↳ Ej: $\left. \begin{array}{l} f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2y + xy^5) \\ f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) \end{array} \right\}$ continuas en $\mathbb{R}^2$.

Funciones partidas

· Consultar por el ejemplo 2.

Algebra de Límites

· Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$f = f(x,y)$, $g = g(x,y)$

· Supongamos conocido: $\lim_{(x,y,\ldots) \to (a,b)} f(x,y) = L_1$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$

· **Teorema** (Alg. límites)

1 – $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L_1 \pm L_2$

2 – $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L_1 \cdot L_2$

3 – Si $L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$

Demos en el video (Anexo 2)

Ejemplo

1 – $\lim_{(x,y)\to(1,3)} xy + \frac{x}{y} = \lim xy + \lim \frac{x}{y} = (\lim x \cdot \lim y) + \left(\frac{\lim x}{\lim y}\right) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

2 – Si $p(x,y)$ es un polinomio en 2 variables $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = p(a,b)$.

3 – Si $p(x,y) \wedge q(x,y)$ son 2 polinomios y $q(a,b) \neq 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{p(x,y)}{q(x,y)} = \frac{p(a,b)}{q(a,b)}$

Algebra de Límites (p2)

· Supongo que $\varphi(t)$ es tal que: $\boxed{\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = L}$

Si $f = f(x,y) \Rightarrow$ me construyo $\varphi(f(x,y))$.

Lema

Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = t_0 \wedge \lim_{t\to t_0} \varphi(t) = L$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varphi(f(x,y)) = L$

↳ Demo en video.

Ejemplo

· $\cos(x^2+y)$ → $\varphi(t) = \cos(t)$, $f(x,y) = x^2 + y$

Ejemplo de uso del Lema

1 – $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{x^3 y}$ → $\varphi(t) = \sqrt{t}$; $f(x,y) = x^3 y$ → esta, como es un polinomio, consiste simplemente en evaluar $\Rightarrow f(x,y) = 1^3 \cdot 2 = 2^*$

· $\varphi(t) = \sqrt{t} \to$ si $t \overset{*}{=} 2 \to \sqrt{2}$

$\boxed{\therefore \lim_{(x,y)\to(1,2)} \varphi(f(x,y)) = \sqrt{2}}$ Rta

2 – $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{xy}-1}{xy}$ → $\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t}$; $f(x,y) = xy$ → es un polinomio $\Rightarrow f(x,y) = 0$.

$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}$ → se puede hacer L'H pq es una variable $\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$.

$\boxed{\therefore \lim_{(x,y)\to(0,1)} \varphi(f(x,y)) = 1}$ Rta

Consecuencias sobre f. continuas.

Corolario

· Si $f(x,y) \wedge g(x,y)$ son continuas en (a,b), entonces:

1. $f(x,y)+g(x,y)$ es continua en (a,b) ⟶ Demo en el video.

2. $f(x,y) \cdot g(x,y)$ es continua en (a,b)

3. Si $g(x,y) \neq 0$, $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ es continua en (a,b)

Corolario 2

· Si $f(x,y)$ es continua en (a,b) y $\varphi(t)$ es continua en $t_0 = f(a,b)$

$\Rightarrow \varphi(f(x,y))$ es continua en (a,b).

---

1. Para cada una de las siguientes curvas determinar dominio y conjunto de puntos en los cuales resulta continua.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))$,

(b) $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{\sin(t)}{t}, \ln(t^2 - t), t^2\right)$,

a- $Dom(r(t)) = \mathbb{R}$ → también es continua en $\mathbb{R}$. Rta

b. · $\dfrac{\sin(t)}{t}$ → Dom: $\mathbb{R}/\{0\}$

· $\ln(t^2-t)$ → $t^2-t>0 \iff t^2>t \iff \begin{cases} t>1 \\ t<0 \end{cases}$ → Dom: $\mathbb{R}/\{0;1\}$

· t^2 → Dom: $\mathbb{R}$.

· $Dom(r(t)) = \mathbb{R}/\{0;1\}$

· Intervalo de continuidad: $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

Rta

(c) $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$ donde $r_1(t) = \sqrt{t}$ y $r_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$

c- · $r_1(t) = \sqrt{t}$ → $Dom(r_1(t)) = \mathbb{N}_0$

· $r_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

→ · $t \neq 0$: $\dfrac{\sin(t)}{t}$ es continua $\forall t \neq 0$: $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

→ · $t=0$: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$ → es igual a la definición de abajo, $r_2(t) = 1 \iff t=0$, por lo que es continua $\forall \mathbb{R}$.

$\boxed{\begin{array}{l} Dom(r(t)): \mathbb{N}_0 \cup [0;+\infty) \\ \text{Continuidad: todo el Dom.} \end{array}}$ Rta

2. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2.$$

Probar por definición que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L_1 + L_2.$$

· Por def: Quiero dem. que dado $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ tq:

$|(f(x,y)+g(x,y)) - (L_1+L_2)| < \varepsilon$.

$\wedge$

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$.

$= |(f(x,y) - L_1) - (g(x,y) - L_2)| \leq |(f(x,y) - L_1)| + |(g(x,y) - L_2)|$

Desigualdad triang.

Por hip:

1 - $\varepsilon_1 > 0, \exists\, \delta_1 > 0$ tq: $|(f(x,y) - L_1)| < \varepsilon_1$

2 - $\varepsilon_2 > 0, \exists\, \delta_2 > 0$ tq: $|(g(x,y) - L_2)| < \varepsilon_2$

Ahora, si tomo: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, puedo ver que:

$$|(f(x,y) - L_1)| + |(g(x,y) - L_2)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

$\therefore$ Queda demostrado que:

$$\boxed{|(f(x,y) + g(x,y)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.}$$

Rta