· Para demostrar que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, se hace por definición:

Ejemplo (con t. de Sandwich):

" Calcular si existe: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$ ", veo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

· Proof:

$0 \le |f(x,y)| = \left| \frac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} \right|$ → sé que: $x^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$.

$\Rightarrow |f(x,y)| = \underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\le 1} \cdot |\operatorname{sen}(y)| = \underbrace{|\operatorname{sen}(y)|}_{\to 0, \text{ pq } y\to 0.}$ → como $\operatorname{sen}(y) \to 0$, me queda la siguiente expresión:

$0 \le \operatorname{sen}(y) \le 0$.

$\boxed{\therefore \text{ Por Sandwich: } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$

Vta

Continuidad

· Dada $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $(x_0,y_0) \in D$: Se dice que f es continua en (x_0,y_0) si:

1. $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$
2. $\boxed{f \text{ es continua en cada } (x_0,y_0) \in D}$

Funciones que ya se saben que son continuas:

· Polinomios. (continuos en $\mathbb{R}^2$)

· Racionales (cociente de polinomios) siempre que denom $\neq 0$.

· Composición de una función continua en una variable con un polinomio.

↳ Ej: $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2y + xy^5) \\ f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) \end{array}\right\}$ continuas en $\mathbb{R}^2$.

Funciones partidas

· Consultar por el ejemplo 2.

Álgebra de Límites

· Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$f = f(x,y)$, $g = g(x,y)$

· Supongamos conocido $\begin{cases} \lim\limits_{(x,y,\dots)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_2 \end{cases}$

· Teorema (Alg. límites)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L_1 \pm L_2$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L_1 \cdot L_2$
3. Si $L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

Demos en el video (Anexo 2)

Ejemplo

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} xy + \dfrac{x}{y} = \lim xy + \lim \dfrac{x}{y} = (\lim x \cdot \lim y) + \left(\dfrac{\lim x}{\lim y}\right) = 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$

2. Si $p(x,y)$ es un polinomio en 2 variables $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = p(a,b)$.

3. Si $p(x,y) \wedge g(x,y)$ son 2 polinomios y $g(a,b) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{p(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{p(a,b)}{g(a,b)}$

Álgebra de Límites (p2)

· Supongo que $\varphi(t)$ es tal que: $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = L}$

Si $f = f(x,y) \Rightarrow$ me construyo $\varphi(f(x,y))$.

Lema

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = t_0 \wedge \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = L$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \varphi(f(x,y)) = L$

↳ Demo en video.

Ejemplo

· $\cos(x^2+y)$ → $\varphi(t) = \cos(t)$, $f(x,y) = x^2 + y$

Ejemplo de uso del Lema

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{x^3 y}$ → $\varphi(t) = \sqrt{t}$; $f(x,y) = x^3 y$ → esta, como es un polinomio, consiste simplemente en evaluar $\Rightarrow f(x,y) = 1^3 \cdot 2 = 2$ *

· $\varphi(t) = \sqrt{t}$ → si $t = 2$* $\to \sqrt{2}$

$\boxed{\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \varphi(f(x,y)) = \sqrt{2}}$ Rta

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^{xy}-1}{xy}$ → $\varphi(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$; $f(x,y) = xy$ → es un polinomio $\Rightarrow f(x,y) = 0$.

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t}$ → se puede hacer L'H pq es una variable $\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$.

$\boxed{\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \varphi(f(x,y)) = 1}$ Rta

Consecuencias sobre f. continuas.

Corolario

· Si $f(x,y)$ ∧ $g(x,y)$ son continuas en (a,b), entonces:

1 - $f(x,y)+g(x,y)$ es continua en (a,b) ⟶ Demo en el video.

2 - $f(x,y) \cdot g(x,y)$ es continua en (a,b)

3 - Si $g(x,y) \neq 0$, $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ es continua en (a,b)

Corolario 2

· Si $f(x,y)$ es continua en (a,b) y $\varphi(t)$ es continua en $t_0 = f(a,b)$

$\Rightarrow \varphi(f(x,y))$ es continua en (a,b).

1. Para cada una de las siguientes curvas determinar dominio y conjunto de puntos en los cuales resulta continua.

 (a) $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))$,

 (b) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}, \ln(t^2 - t), t^2\right)$,

a - $\mathrm{Dom}(r(t)) = \mathbb{R}$ → también es continua en $\mathbb{R}$. Rta

b - · $\frac{\sin(t)}{t}$ → Dom: $\mathbb{R}/\{0\}$

· $\ln(t^2 - t)$ → $t^2 - t > 0 \Leftrightarrow t^2 > t \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < 0 \end{cases}$ → Dom: $\mathbb{R}/\{0;1\}$

· t^2 → Dom: $\mathbb{R}$.

· $\mathrm{Dom}(r(t)) = \mathbb{R}/\{0;1\}$

· Intervalo de continuidad: $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

Rta

(c) $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$ donde $r_1(t) = \sqrt{t}$ y $r_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$

c - · $r_1(t) = \sqrt{t} \to \mathrm{Dom}(r_1(t)) = \mathbb{N}_0$

· $r_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

· $t \neq 0$: $\frac{\sin(t)}{t}$ es continua $\forall t \neq 0$: $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

· $t = 0$: $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ → es igual a la definición de abajo, $r_2(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$, por lo que es continua $\forall \mathbb{R}$.

$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Dom}(r(t)): \mathbb{N}_0 \cup [0;+\infty) \\ \text{Continuidad: todo el Dom.} \end{array}}$ Rta

2. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2.$$

Probar por definición que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L_1 + L_2.$$

· Por def: Quiero dem. que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq:

$|(f(x,y)+g(x,y)) - (L_1+L_2)| < \varepsilon$.

∧

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$.

$= |(f(x,y) - L_1) - (g(x,y) - L_2)| \leq |(f(x,y) - L_1)| + |(g(x,y) - L_2)|$

Desigualdad triang.

Por hip:

1 - $\varepsilon_1 > 0, \exists\, \delta_1 > 0$ tq: $|(f(x,y) - L_1)| < \varepsilon_1$

2 - $\varepsilon_2 > 0, \exists\, \delta_2 > 0$ tq: $|(g(x,y) - L_2)| < \varepsilon_2$

Ahora, si tomo: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, puedo ver que:

$|(f(x,y) - L_1)| + |(g(x,y) - L_2)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$

$\boxed{\therefore \text{ Queda demostrado que: } |(f(x,y) + g(x,y)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.}$

Rfa

5. Analizar la existencia de los siguientes límites.

(a) $\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy$, (b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy}$,

(c) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$, (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x + y}$,

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$, (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$,

(g) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2}$, (h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$, (j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4 + 2y^4}$,

(k) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2(y-3)^2 e^x}{x^2 + (y-3)^2}$. (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{e^x x^2 + 2y^4}$.

a. $\lim_{(x,y)\to(7,2)} 49 + 4 - 14 = 39 \to$ existe, es un pol que es continuo en todo su dominio.

b. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0 \to$ existe, es continua en todo su dominio.

c. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2} = \frac{2}{7} \to$ existe, ya que el denom $\neq 0$.

d. $\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x + y}} = \frac{0}{0} \to$ Ind, debo analizar otros caminos.

· $y = x$: $\frac{x - x}{x + x} = \frac{0}{2x} = 0$

· $x = -y$: $\frac{-2x}{0} =$ ind

como ambos son $\neq$, $\boxed{\nexists \lim}$

e - $\underbrace{\lim_{(x,y)\ (0,0)} \frac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2}} = \frac{0}{0}$ ind

· $x = 0$: $\frac{0 - y}{1 + y^2} = -\frac{y}{1 + y^2}$

· $y = 0$: $\frac{0}{(x-1)^2} = 0$

son $\neq \Rightarrow \boxed{\nexists \lim}$

f - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$ ind

· $x = 0$: $\frac{0}{y^2} = 0$

· $y = 0$: $\frac{0}{x^2} = 0$

son $= \Rightarrow \boxed{\exists \lim}$

g - $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{0}{0}$ ind

· $x = 0$: $-\frac{y}{1 + y^2}$

· $y = 0$: $\frac{0}{(x-1)^2}$

son $\neq \Rightarrow \boxed{\nexists \lim}$

h - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{0}{0}$ ind

$x = 0$: $\frac{0}{y} = 0$

$y = 0$: $\frac{0}{x} = 0$

son $= \Rightarrow \boxed{\exists \lim}$

i - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$ ind

· $x = 0$: $-\frac{y^4}{y^2} = -y^2$

· $y = 0$: $\frac{x^4}{\cancel{x^2}} = x^2$

· $y = x$: $\frac{x^4 - x^4}{x^2 + x^2} = \frac{0}{2x^2}$

son $\neq \Rightarrow \boxed{\nexists \lim}$

j - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4 + 2y^4} = \frac{0}{0}$ ind

· $x = 0$: $\frac{0}{2y^4} = 0$

· $y = 0$: $\frac{0}{x^4} = 0$

· $y = x$: $\frac{y^2 \sin^2(y)}{y^4 + 2y^4} \to$ a medida que $y \to 0$, el lim $\to 0$.

son $= \Rightarrow \boxed{\exists \lim}$

k- $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2(y-3)^2}{x^2+(y-3)^2} = \frac{0}{0}$ Ind $\Big]$ $\cdot\ \underline{x=0}$: $\frac{0}{(4-3)^2} = 0$

$\cdot\ \underline{y=0}$: $\frac{9x^2}{x^2+9} \neq 0.$

$\cdot\ \underline{y=x}$: $\frac{x^2(x-3)^2}{x^2+(x-3)^2} \longrightarrow$ a medida que $x\to 0$, es : $\frac{0}{9} = 0$

son $\neq \Rightarrow \boxed{\nexists \lim}$

l- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{e^x x^2+2y^4} = \frac{0}{0}$ Ind $\Big]$ $\cdot\ \underline{x=0}$: $\frac{0}{2y^4} = 0$

$\cdot\ \underline{y=0}$: $\frac{0}{e^x x^2} = 0$

$\cdot\ \underline{y=x}$: $\frac{x^3}{e^x x^2+2x^4} = \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(e^x+2x^2)} = \frac{x}{e^x+2x^2} \longrightarrow$ a medida que $x\to 0$, es : $\frac{0}{1} = 0$

$\therefore$ Todos los caminos son $=$ (dan todos 0) $\Rightarrow \boxed{\exists \lim}$

6. Utilizar coordenadas polares para analizar la existencia de los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

$\cdot\ \underline{\text{Rec}}$: $\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow r^2 = x^2+y^2$

a- $\frac{(r\cos(\alpha))^3+(r\sin(\alpha))^3}{(r\cos(\alpha))^2+(r\sin(\alpha))^2} = \frac{r^3\cos(\alpha)^3+r^3\sin(\alpha)^3}{r^2\cos(\alpha)^2+r^2\sin(\alpha)^2} = \frac{r^{\cancel{3}}(\cos(\alpha)^3+\sin(\alpha)^3)}{\cancel{r^2}(\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2)} = \frac{r(\cos(\alpha)^3+\sin(\alpha)^3)}{\underbrace{\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2}_{=1}}$

$\frac{r(\cos(\alpha)^3+\sin(\alpha)^3)}{1}$ $\Big\}$ esta es una exp a evaluar. | sí que si $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow r\to 0$.

$\therefore$ $\underline{\text{Evaluo}}$: $\lim_{r\to 0} r(\cos(\alpha)^3+\sin(\alpha)^3) = 0 \Rightarrow \boxed{\exists \lim}$, ya que la exp original, cuando $(x,y)\to(0,0)$ tendría también a 0.

b- $((r\cos(\alpha))^2+(r\sin(\alpha))^2)\ln((r\cos(\alpha))^2+(r\sin(\alpha))^2) = (r(\underbrace{\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2}_{=1})\ln(r(\underbrace{\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2}_{=1}))$

$= \boxed{r\ln(r)}$ una exp a evaluar.

$\therefore$ $\underline{\text{Evaluo}}$: $\lim_{r\to 0} r\ln(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\exists \lim}$, ya que si evaluo la exp original cuando $(x,y)\to(0,0)$, también tiende a 0.

c- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{e^{(x^2+y^2)}}-1}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$ Ind.

$\cdot$ puedo reescribir la exp. de la siguiente forma:

$\cdot\ \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{e^{r^2}}-1}{r^2} = \frac{0}{0}$ sigue siendo una Ind, pero en una sola variable, por lo que puedo usar L'H!

$\underline{\text{reescribo}}$: $\frac{e^{-r^2}-1}{r^2} \overset{L'H}{=} \frac{-\cancel{2r}e^{-r^2}}{\cancel{2r}} = -e^{-r^2} = -1$ $\therefore$ $\boxed{\exists \lim \wedge \lim = -1}$

d- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$ Ind

pero lo reescribo: $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \overset{L'H}{=} \frac{\cancel{2r}\cos(r^2)}{\cancel{2r}} = 1.$ $\therefore$ $\boxed{\exists \lim}$