· Para demostrar que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, se hace por definición:

Ejemplo (con t. de Sandwich):

"Calcular si existe: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$", veo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

· Proof:

$$0 \le |f(x,y)| = \left| \frac{x^2 \operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} \right|$$

sé que: $x^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$.

$$\Rightarrow |f(x,y)| = \underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\le 1} \cdot |\operatorname{sen}(y)| = \underbrace{|\operatorname{sen}(y)|}_{\to 0, \text{ pq } y\to 0.}$$

como $\operatorname{sen}(y) \to 0$, me queda la siguiente expresión:

$$0 \le \operatorname{sen}(y) \le 0.$$

$\boxed{\therefore \text{ Por Sandwich: } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$

Kta

Continuidad

· Dada $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $(x_0,y_0) \in D$: Se dice que f es continua en (x_0,y_0) si:

1. $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$
2. $\boxed{f \text{ es continua en cada } (x_0,y_0) \in D}$

Funciones que ya se saben que son continuas:

· Polinomios. (continuos en $\mathbb{R}^2$)

· Racionales (cociente de polinomios) siempre que denom $\neq 0$.

· Composición de una función continua en una variable con un polinomio.

↳ Ej: $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2y + xy^5) \\ f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) \end{array}\right\}$ continuas en $\mathbb{R}^2$.

Funciones partidas

· Consultar por el ejemplo 2.

Álgebra de Límites

· Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$f = f(x,y)$, $g = g(x,y)$

· Supongamos conocido $\begin{cases} \lim\limits_{(x,y,\dots)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_2 \end{cases}$

· Teorema (Alg. límites)

1- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) \pm g(x,y) \right] = L_1 \pm L_2$

2- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) \cdot g(x,y) \right] = L_1 \cdot L_2$

3- Si $L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

Demos en el vídeo (Anexo 2)

Ejemplo

1- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} xy + \dfrac{x}{y} = \lim xy + \lim \dfrac{x}{y} = (\lim x \cdot \lim y) + \left(\dfrac{\lim x}{\lim y} \right) = 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$

2- Si $p(x,y)$ es un polinomio en 2 variables $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} p(x,y) = p(a,b)$.

3- Si $p(x,y) \wedge g(x,y)$ son 2 polinomios y $g(a,b) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{p(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{p(a,b)}{g(a,b)}$

Álgebra de Límites (p2)

· Supongo que $\varphi(t)$ es tal que: $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = L}$

Si $f = f(x,y) \Rightarrow$ me construyo $\varphi(f(x,y))$.

Lema

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = t_0 \wedge \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = L$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \varphi(f(x,y)) = L$

↳ Demo en vídeo.

Ejemplo

· $\cos(x^2+y)$ → $\varphi(t) = \cos(t)$, $f(x,y) = x^2 + y$

Ejemplo de uso del Lema

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{x^3 y}$ → $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $f(x,y) = x^3 y$ → esta, como es un polinomio, consiste simplemente en evaluar $\Rightarrow f(x,y) = 1^3 \cdot 2 = 2$ *

· $\varphi(t) = \sqrt{t}$ → si $t = 2$ * $\to \sqrt{2}$

$\boxed{\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \varphi(f(x,y)) = \sqrt{2}}$ Rta

2- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^{xy}-1}{xy}$ → $\varphi(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$, $f(x,y) = xy$ → es un polinomio $\Rightarrow f(x,y) = 0$.

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t}$ → se puede hacer L'H pq es una variable $\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$.

$\boxed{\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \varphi(f(x,y)) = 1}$ Rta

Consecuencias sobre f. continuas.

Corolario

· Si $f(x,y) \wedge p(x,y)$ son continuas en (a,b), entonces:

1. $f(x,y) + p(x,y)$ es continua en (a,b) $\longrightarrow$ Demo en el vídeo.
2. $f(x,y) \cdot p(x,y)$ es continua en (a,b)
3. Si $p(x,y) \neq 0$, $\dfrac{f(x,y)}{p(x,y)}$ es continua en (a,b)

Corolario 2

· Si $f(x,y)$ es continua en (a,b) y $\varphi(t)$ es continua en $t_0 = f(a,b)$

$\Rightarrow$ $\varphi(f(x,y))$ es continua en (a,b).