

Práctica 2: Curvas y superficies en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 - Funciones

Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

- ✓ 1. Graficar las siguientes curvas de \mathbb{R}^2 dadas de forma paramétrica y decidir si son el gráfico de una función de la forma $y = f(x)$.
 - (a) $x = 3 - 4t, y = 2 - 3t,$
 - (b) $x = 1 - t^2, y = t - 2, -2 \leq t \leq 2,$
 - (c) $x = t^2 + t, y = t^2 - t, -2 \leq t \leq 2,$
 - (d) $x = t^2, y = t^3 - 4t, -3 \leq t \leq 3.$
- ✓ 2. En cada uno de los siguientes casos, describir de forma paramétrica la circunferencia de radio r y centro p .
 - (a) $r = 2, p = (0, 0),$
 - (b) $r = 1, p = (1, 3),$
 - (c) $r = 3, p = (0, 2).$
- ✓ 3. Graficar la región del plano que consiste en todos los puntos cuyas coordenadas polares verifican las siguientes condiciones.
 - (a) $r \geq 1,$
 - (b) $0 \leq r < 2, \pi \leq \theta \leq 3\pi/2,$
 - (c) $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6.$
- ✓ 4. Graficar las curvas dadas por las siguientes ecuaciones en coordenadas polares.
 - (a) $r = -2 \sin(\theta),$
 - (b) $r = 1 - \cos(\theta).$
- ✓ 5. (a) Graficar las siguientes curvas de \mathbb{R}^2 .
 - i. $x^2 + y^2 = 4,$
 - ii. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$
 - iii. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$
 - iv. $x = y^2.$

(b) Para $a, b \in \mathbb{R}$, dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

 - i. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$
 - ii. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$
 - iii. $x = ay^2.$
- ✓ 6. Graficar las siguientes superficies de \mathbb{R}^3 .
 - (a) $y = 2x + 1,$
 - (b) $y = x^2,$
 - (c) $x^2 + y^2 = 1,$
 - (d) $4x^2 + y^2 = 4.$

7. (a) Dibujar las curvas de nivel de $z = -1, z = 0, z = 1, x = 0$ de las siguientes superficies. Luego utilizando trazas, graficar las superficies en \mathbb{R}^3 .

$$\begin{array}{lll} \text{i. } x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, & \text{ii. } z = x^2 + y^2, & \text{iii. } x = y^2 + 4z^2, \\ \text{iv. } z^2 = x^2 + y^2, & \text{v. } x^2 = y^2 + 4z^2, & \text{vi. } z = x^2 - y^2, \\ \text{vii. } x^2 + y^2 - z^2 = 1, & \text{viii. } -x^2 - y^2 + z^2 = 1, & \text{ix. } 4x^2 + 9y^2 + z = 0. \end{array}$$

- (b) Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, & \text{ii. } z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, & \text{iii. } z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \\ \text{iv. } z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, & \text{v. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, & \text{vi. } -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{array}$$

8. Graficar la región de \mathbb{R}^3 acotada por las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $1 \leq z \leq 2$.

9. Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones.

$$\text{(a) } \mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{4 - t^2}, 5t + 1, \ln(t + 1) \right), \quad \text{(b) } \mathbf{r}(t) = \left(4t, \frac{3t}{t - 2}, e^t \right).$$

10. Graficar la curva imagen de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1), & \text{(b) } \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t - t^2), \\ \text{(c) } \mathbf{r}(t) = (t^2 + t, t^2 - t, (t^2 - t)^2). \end{array}$$

11. Hallar una función $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen describa los siguientes conjuntos.

- (a) el rectángulo de vértices $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(1, 2)$ y $(1, -2)$,
 (b) el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

12. (a) Graficar la curva intersección de las siguientes superficies.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } x^2 + y^2 = 4 \text{ y } z = xy, & \text{ii. } x^2 + y^2 = 1 \text{ y } y + z = 2, \\ \text{iii. } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } z = 1 + y. \end{array}$$

- (b) Hallar una función $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa las curvas graficadas en el ítem anterior.

13. Sea \mathcal{C} la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(x - y)^2 + z^2 = 2 \quad \text{y} \quad z = x + y.$$

Dar una parametrización de \mathcal{C} .

14. Graficar el dominio de las siguientes funciones.

(a) $f(x, y) = \sqrt{2x - y},$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2},$

(c) $f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2).$

15. Para cada una de las siguientes funciones, calcular dominio, graficar las curvas de nivel y usarlas para graficar la función.

(a) $f(x, y) = 3y,$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x},$

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2,$

(d) $f(x, y) = -x^2 - y^2,$ (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$ (f) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$