UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 3: Límites y continuidad

1. Para cada una de las siguientes curvas determinar dominio y conjunto de puntos en los cuales resulta continua.

   (a) $\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t))$,

   (b) $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{\sin(t)}{t}, \ln(t^2 - t), t^2\right)$,

   (c) $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$ donde $r_1(t) = \sqrt{t}$ y $r_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$

2. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \qquad y \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2.$$

   Probar por definición que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L_1 + L_2.$$

3. Probar por definición que

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} (x-2)\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

4. Encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$\|(x,y) - (-1,8)\| < \delta \Longrightarrow |xy + 8| < \varepsilon,$$

   para cada caso particular $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = 1/100$.

5. Analizar la existencia de los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2+y^2-xy$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy}$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$,

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2}$, (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$, (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$, (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sin^2(x)}{x^4+2y^4}$,

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2(y-3)^2e^x}{x^2+(y-3)^2}$. (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{e^xx^2+2y^4}$.

6. Utilizar coordenadas polares para analizar la existencia de los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

7. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$, (b) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$.

8. Determinar el conjunto de puntos en los cuales las siguientes funciones son continuas.

(a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+e^{x-y}}$,

(b) $f(x,y)=\dfrac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$,

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - \sin(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

9. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^3\cos(y)}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0), \\ a & \text{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

Hallar, si es posible, $a \in \mathbb{R}$ de manera que f resulte continua en $(1,0)$.

10. Sea

$$f(x,y) = \frac{20}{1-x^2-y^2}.$$

(a) Calcular el dominio de f.

(b) Graficar f utilizando GeoGebra.

(c) ¿Es posible extender f a la circunferencia $\mathcal{C} = \{x^2+y^2=1\}$ de manera continua? ¿Por qué?

11. Probar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

12. Demostrar que si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a,y). Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = \sin(x)$, (b) $f(x,y) = \sin(x^2) + e^y$.

13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

(a) $f(x,y) = (x^2, e^x)$ (b) $f(x,y) = \left(\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \right)$.

Es posible extender la función de (b) al $(0,0)$ de manera continua?