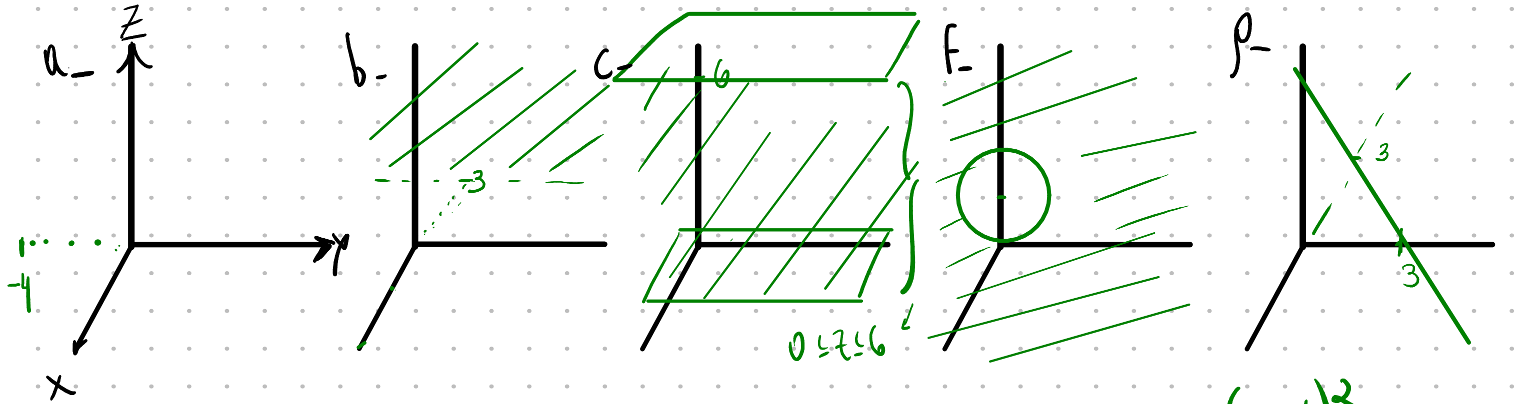
Práctica 1

1. Representar graficamente en $\mathbb{R}^3$ las siguientes ecuaciones e inecuaciones. Se sugiere complementar la resolución de este ejercicio con GeoGebra.

(a) $y = -4$, (b) $x > 3$, (c) $0 \leq z \leq 6$,

(d) $x = z$, (e) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, (f) $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$,

(g) $x^2 + y^2 \leq 9$.



F – $\cdot\; x^2+y^2+z^2 = 2z \Rightarrow x^2+y^2+\underbrace{z^2-2z}_{\text{completo el cuadrado}} = 0 \Rightarrow x^2+y^2+\overbrace{z^2-2z+1}^{(z-1)^2} = 1$

completo el cuadrado $\begin{cases} a = z \\ b = -1 \end{cases}$ $a^2+2ab+b^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ → Recuerdo que la ecuación de una esfera $\in \mathbb{R}^3$ tiene esta pinta: $\cdot\; (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$, donde (a,b,c) es el centro de la esfera y r^2 el radio.

$a=0,\ b=0,\ z=1,\ r=1$

$(0,0,1),\ r=1$.

$\Rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 > 1$ → esfera con centro $p=(0,0,1)$ y $r=1$

en el grafico va todo menos la esfera.

g – $x^2+y^2 \leq 9 \Rightarrow x+y \leq 3$

2. Mostrar que las siguientes ecuaciones representan una esfera. Dar su centro y su radio.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$, (b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$.

→ esfera en $\mathbb{R}^3$: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$

a –

$\cdot\; x^2-6x \Rightarrow a=x,\ b=-3 \Rightarrow (x-3)^2$

$\cdot\; y^2+4y \Rightarrow a=y,\ b=2 \Rightarrow (y+2)^2$

$\cdot\; z^2-2z \Rightarrow a=z,\ b=-1 \Rightarrow (z-1)^2$

$a=3,\ b=-2,\ c=1 \Rightarrow p=(3,-2,1)$

El p es el centro de la esfera.

$\cdot\; r^2 = 11 \Rightarrow r = \sqrt{11} \simeq 3{,}32$

$p=(3,-2,1),\ r \simeq 3{,}32$

Rta.

b -

- $4x^2 - 8x \Rightarrow a = 2x, b = -2 \Rightarrow (2x-2)^2$
- $4y^2 + 16y \Rightarrow a = 2y, b = 4 \Rightarrow (2y+4)^2$
- $4z^2 + 0 \Rightarrow a = 2z, b = 0 \Rightarrow 4z^2$
- $r^2 = 1 \Rightarrow r = \sqrt{1} \Rightarrow r = 1$

$a = 2, b = -4, c = 0 \Rightarrow P = (2, -4, 0).$

$\boxed{P = (2, -4, 0) \wedge r = 1}$

Rta.

8. (a) Encontrar una ecuación paramétrica del plano Π que pasa por los puntos $A = (1,3,1)$, $B = (2,1,1)$ y $C = (3,4,1)$.

- Busco $\overrightarrow{AB}$: $B - A = (2,1,1) - (1,3,1) = (1,-2,0) \rightarrow \vec{v}$
- Busco $\overrightarrow{BC}$: $C - B = (3,4,1) - (2,1,1) = (1,3,0) \rightarrow \vec{w}$

Tengo 2 vectores de un plano.

Rec: paramétrica del plano Π : $\boxed{P_0 + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}}$, $\alpha \wedge \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ vectores y P_0 un punto cualquiera $\in \Pi$.

∴ Utilizo el punto A y $\vec{v}, \vec{w}$ para dar una paramétrica.

$\boxed{\Pi : (1,3,1) + \alpha (1,-2,0) + \beta (1,3,0)}$ Rta.

(b) Hallar N la normal y dar una ecuación implícita de Π.

- Calculo la $\vec{N}$: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \alpha(0-0) - \beta(0-0) + \gamma(3+2)$

$= \boxed{(0,0,5)}$ $\vec{N}$

- Busco la implícita: Rec: $\boxed{\Pi = Ax + By + Cz + D = 0}$, $(A,B,C) \in \vec{N}$

Utilizo $A = (1,3,1)$

$\Rightarrow \Pi = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5$

∴ $\Pi = 5z = 5 \Rightarrow \boxed{\Pi = z = 1}$ Implícita

9. (a) Hallar la intersección de las rectas

$$\mathbb{L}_1 : t(1,-1,2)+(1,1,0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(-1,1,0)+(2,0,2).$$

(b) Encontrar una ecuación del plano que contiene a $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$.

· $\mathbb{L}_1 : t \Rightarrow t(1,-1,2)+(1,1,0)$

· $\mathbb{L}_2 : s \Rightarrow s(-1,1,0)+(2,0,2)$

$\longrightarrow$ $x: t+1 = -s+2 \Rightarrow x: t+s=1$

$y: -t+1 = s \Rightarrow y: -t-s=-1$

$z: 2t = 2 \Rightarrow z: t=1$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} t & s \end{array} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow s=0 \wedge t=1$$

$\therefore \boxed{\text{Punt}: (2,0,2)}$ Rta a

· Calculo $\vec{N}_\pi$ con $(1,-1,2) \times (-1,1,0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-2,2) = \vec{N}_\pi.$$

$\rightsquigarrow$ utilizo cualquier punto de las otras 2 rectas para fabricar el plano.

$M \; \pi : Ax+By+Cz \Rightarrow \pi : -2(x-2) -2y + 2(z-2) \Rightarrow \pi: -2x+4-2y+2z+4$

$\pi: -2x-2y+2z=0$

$\therefore \boxed{\pi: -x-y+z=0}$ Rta b.

6. Dados dos vectores V, W se cumple la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* para el producto interno:

$$|V \cdot W| = \|V\|\,\|W\|\,|\cos\theta| \leq \|V\|\,\|W\|.$$

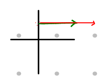
Â¿Hay algún caso en el que la desigualdad $|V \cdot W| \leq \|V\|\,\|W\|$ sea una igualdad?

(visto en clase)

$$\boxed{|V.W| = \|V\| \cdot \|W\| \iff \cos(\theta) = \pm 1 \iff \underbrace{\theta = 0° \vee \theta = 180°}_{\star}}$$ Rta

$\star$: significa que se cumple $\iff$ V y W son colineales.

· $\theta = 0°$: ambos tienen la misma dirección, son paralelos.



· $\theta = 180°$: tienen dirección opuesta, son antiparalelos.