

Théorie des ensembles

Fiche d'exercices n°1

Partie I : Définition d'ensembles (~20min)

Exercice I.1

Définir l'ensemble des entiers naturels strictements inférieurs à 5.

Exercice I.2

Définir l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3 de deux façons différentes.

Exercice I.3

Définir l'ensemble des nombres impaires strictements supérieurs à 3.

Exercice I.4

Définir l'ensemble des points du cercle \mathcal{C} de centre $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r .

Exercice I.5

Définir l'ensemble des points de tous les cercles dont l'aire est égale à 1.

Exercice I.6

Définir l'ensemble des points du disque ouvert \mathcal{D} de centre $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon 2.

Partie II : Relations ensemblistes (~1h40)

Exercice II.1

Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice II.2

Soient $A = \{0,2,4\}$ et $B = \{1,3,4,5\}$ dans le référentiel $E = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Déterminer les ensembles $\overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \mathcal{P}(A)$ et $A \times B$

Exercice II.3

Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice II.4

Déterminer le complémentaire dans \mathbb{R} des ensembles suivants $A_1 =]-\infty,0]$, $A_2 =]-\infty,0[$, $A_3 =]0,+\infty[$, $A_4 = [0,+\infty[$, $A_5 =]1,2[$, $A_6 = [1,2[$

Exercice II.5 Soient $A =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$, $B =]-\infty,1[$ et $B = [2,+\infty[$. Comparer les ensembles \overline{A} et $\overline{B} \cap \overline{C}$

Exercice II.6

Soient $A =]-\infty,3]$, $B =]-2,7]$ et $C =]-5,+\infty[$ trois parties de \mathbb{R} .

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B))$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$

Exercice II.7

Soit $A = \{1,8,10\}$. Décrire $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A .

Exercice II.8

Soit $C_{red} = \llbracket 0;2 \rrbracket$, $C_{green} = \llbracket 0;2 \rrbracket$, $C_{blue} = \llbracket 0;2 \rrbracket$,. Décrire $C_{red} \times C_{green} \times C_{blue}$.

Exercice II.9 (démonstration de cours)

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice II.10

- Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice II.11

On donne la définition suivante $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

- Montrer que
$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$$
- En déduire que
$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$