Mathématiques pour l'informatique

#3 Suites

par David Albert

GEMA GRANDES ÉCOLES DES MÉTIERS D'AVENIR

2023

Table des matières

00 Notations

u_n notation utilisée pour les suites

$\sum$ symbole de sommation

$\prod$ symbole de produit

01

Suites numériques

Suites numériques

Definition - Suite numérique

Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$\quad n \to u(n)$, aussi noté u_n

Exemple :

La liste 5; 10; 12; 20; 21; ... correspond à la suite (u_n) telle que :
$u_0 = 5;\ u_1 = 10;\ u_2 = 12;\ u_3 = 20;\ u_4 = 21;\ \ldots$

On dit que 5 est le terme initial ou terme de rang 0.
10 est le terme de rang 1.
12 est le terme de rang 2.

Suites numériques

définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

Definition - Suite définie par une formule explicite

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n
Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.

Exemple :

Pour tout entier naturel n, on a $u_n = \sqrt{2n+1} = f(n)$.

Alors:

$$u_0 = \sqrt{2 \times 0 + 1} = \sqrt{1}$$
$$u_1 = \sqrt{2 \times 1 + 1} = \sqrt{3}$$
$$u_2 = \sqrt{2 \times 2 + 1} = \sqrt{5}$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$u_{32} = \sqrt{2 \times 32 + 1} = \sqrt{65}$$

Suites numériques

définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Definition - Suite définie par une relation de récurrence

Une suite est définie par une **relation de récurrence** quand elle est définie par la donnée de :

- son **premier terme**
- une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent

Exemple : Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$

$$\begin{aligned}
&u_0 = 2 \\
&u_1 = 2^2 - 1 = 3 \\
&u_2 = 3^2 - 1 = 8 \\
&u_3 = 8^2 - 1 = 63 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Contrairement à une suite définie grâce à sa forme explicite, une relation de récurrence ne permet pas de calculer un terme de rang donné sans avoir calculé tous les termes précédents.

Suites numériques

Exercices

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $u_n = 3n + 21$. Donner $u_0, u_1, u_2, u_5, u_{10}$ et u_{100}.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2$. Donnez u_0, u_1, u_2, u_5 et u_{10}.

02

Suites arithmétiques

Suites arithmétiques

Definition - Suite arithmétique

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Exemple : Soit la suite (u_n) définit par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

Suites arithmétiques

Propriétés

Propriété

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + n \times r$

Démonstration :
D'après la définition, une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$. En calculant les premiers termes :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$
...
$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$

Suites arithmétiques

Propriétés

Propriété

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

- si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite est croissante.
- si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite est décroissante.

Suites arithmétiques

Exercices

1. La suite (u_n) définie par $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

2. La suite (v_n) définie par $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

03

Suites géométriques

Suites géométriques

Definition - Suites géométriques

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple :
Soit la suite (u_n) définit par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n \end{cases}$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 3.

Suties géométriques

Propriétés

Propriété

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration :
D'après la définition, la suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = q \times u_n$.

En calculant les premiers termes :
$u_1 = q \times u_0$
$u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$
$u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^3 \times u_0$
...
$u_n = q \times u_{n-1} = q \times (q^{n-1} \times u_0) = q^n \times u_0$

Suites géométriques

Propriétés

Propriétés

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.

Pour :

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour :

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Suites géométriques

Exercices

1. La suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

04

Démonstration par récurrence

Démonstration par récurrence

Méthode

Pour démontrer par récurrence une propriété $P(n)$ on procède en 2 étapes:

1. **Initialisation :** On vérifie que $P(n)$ est vraie pour une certaine valeur de n. Notons cette valeur n_0. On choisit pour n_0, la plus petite valeur de n possible.

i

La plupart du temps, on vérifie que $P(0)$, $P(1)$ ou $P(2)$ est vraie.

1. **Hérédité :** On suppose que $P(n)$ est vraie pour **UN** entier $n \geq n_0$

   On rédige toujours de la façon suivante:
   Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que cela entraine que $P(n+1)$ est vraie.

2. **Conclusion :** On rédige la conclusion toujours de la même façon:
   Comme $P(n_0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire pour tout entier $n \geq n_0$, donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n0$.

Démonstration par récurrence

Exercices

Montrer que si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = u_0 + n \times r$

Démonstration par récurrence

Exercices (suite)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$