# Théorie des ensembles

**Fiche d'exercices n°1**

## *Partie I : Définition d'ensembles (~20min)*

**Exercice I.1**
Définir l'ensemble des entiers naturels strictements inférieurs à $5$.

**Exercice I.2**
Définir l'ensemble des entiers relatifs divisibles par $3$ de deux façons différentes.

**Exercice I.3**
Définir l'ensemble des nombres impaires strictements supérieurs à $3$.

**Exercice I.4**
Définir l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r$.

**Exercice I.5**
Définir l'ensemble des points de tous les cercles dont l'aire est égale à $1$.

**Exercice I.6**
Définir l'ensemble des points du disque ouvert $\mathcal{D}$ de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $2$.

## *Partie II : Relations ensemblistes (~1h40)*

**Exercice II.1**
Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

**Exercice II.2**
Soient $A = \{0, 2, 4\}$ et $B = \{1, 3, 4, 5\}$ dans le référentiel $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Déterminer les ensembles $\overline{A}$,$\overline{B}$,$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A)$ et $A \times B$

**Exercice II.3**
Soient $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$.

**Exercice II.4**
Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants $A_1 = ]-\infty, 0]$, $A_2 = ]-\infty, 0[$, $A_3 = ]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 = ]1, 2[$, $A_6 = [1, 2[$

**Exercice II.5** Soient $A = ]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B = ]-\infty, 1[$ et $B = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles $\bar{A}$ et $\bar{B} \cap \bar{C}$

**Exercice II.6**
Soient $A = ]-\infty, 3]$, $B = ]-2, 7]$ et $C = ]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$

**Exercice II.7**
Soit $A = \{1, 8, 10\}$. Décrire $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de $A$.

**Exercice II.8**
Soit $C_{red} = [\![0; 2]\!], C_{green} = [\![0; 2]\!], C_{blue} = [\![0; 2]\!],$. Décrire $C_{red} \times C_{green} \times C_{blue}$.

**Exercice II.9 (démo de cours)**
Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$. Montrer que

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Exercice II.10**

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

**Exercice II.11**
On donne la définition suivante $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. Montrer que
   $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
   $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$
2. En déduire que
   $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$

## *Partie III : Pour aller plus loin (~1h00)*

**Exercice III.1**

Soit $E$ un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$.
Pour $A$ et $B$ dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de $A$ par $B$ l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous $A$, $B$ et $C$ dans $\mathcal{P}(E)$, on a :

   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$

   b) Montrer que :
   $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$

   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$

   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$

   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

**Exercice III.2 (démo de cours)**

Soit $E$ un ensemble et $F$ et $G$ deux parties de $E$. Démontrer que :

1. $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$

**Exercice III.3**

Soit $E$ un ensemble et $F$ et $G$ deux parties de $E$. Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap \overline{G} = \emptyset$