Théorie des ensembles

Fiche d'exercices n°1

Partie I : Définition d'ensembles (~20min)

Exercice I.1
Définir l'ensemble des entiers naturels strictements inférieurs à 5.

Exercice I.2
Définir l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3 de deux façons différentes.

Exercice I.3
Définir l'ensemble des nombres impaires strictements supérieurs à 3.

Partie II : Relations ensemblistes (~1h40)

Exercice II.1
Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice II.2
Soient $A = \{0, 2, 4\}$ et $B = \{1, 3, 4, 5\}$ dans le référentiel $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Déterminer les ensembles $\overline{A}$,$\overline{B}$,$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A)$ et $A \times B$

Exercice II.3
Soient $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice II.4
Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants $A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$, $A_6 = [1, 2[$

Exercice II.5 Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles $\bar{A}$ et $\bar{B} \cap \bar{C}$

Exercice II.6
Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$

Exercice II.7
Soit $A = \{1, 8, 10\}$. Décrire $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A.

Exercice II.8
Soit $C_{red} = [\![0; 2]\!], C_{green} = [\![0; 2]\!], C_{blue} = [\![0; 2]\!],$. Décrire $C_{red} \times C_{green} \times C_{blue}$.

Exercice II.9 (démo de cours)
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice II.10

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice II.11
On donne la définition suivante $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. Montrer que
   $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
   $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$
2. En déduire que
   $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$