Arithmétique modulaire

Fiche d'exercices n°1

Partie I: Divisibilité (~30min)

Exercice I.1
Construire un nombre divisible par $2,3,4,5,9$ et 10 en se basant uniquement sur les critère de divisibilité.

Exercice I.2 Soient x et y des entiers. Montrer que $2x+3y$ est divisible par 7 si et seulement si $5x+4y$ l'est.

Partie II: PGCD et nombres premiers (~2h30)

Exercice II.1
Donner la définition d'un nombre premier puis donner la liste des 20 premiers nombres premiers.

Exercice II.2
Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier. $0, 1, 2, 3, 4, 91, 123$

Exercice II.3
Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants : $12, 17, 84, 2520$

Exercice II.4
Trouver la fraction irréductible égale à $\frac{84}{30}$ et $\frac{2520}{77}$.

Exercice II.5
Déterminer le PGCD de 4480 et 400 à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice II.6
Déterminer le PGCD de 3045 et 300 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Exercice II.7
Déterminer tous les diviseurs communs à 60 et 100.
Indice: On pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers

Exercice II.7 (bis)
Déterminer tous les diviseurs communs à 168 et 204.

Exercice II.8
Déterminer le PGCD de 621 et 50 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Exercice II.9
Déterminer le PGCD de 1056 et 140 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Propriété très utile pour la suite :

$$PGCD(a,b) = PGCD(a, b-ka)$$

Exercice II.11
Soit n un entier naturel.
Déterminer le PGCD de $9n+4$ et de $2n+1$.

Exercice II.12
Soit n un entier naturel.
Déterminer le PGCD de $n+4$ et de $3n+7$.

Exercice II.13
Déterminer l'ensemble des naturels n tel que la fraction $\frac{3n+2}{n+2}$ soit irréductible.

Exercice II.14
Trouvez les entiers naturels a et b avec $a<b$ tels que : $ab = 7776$ et $PGCD(a,b) = 18$.

Exercice II.15 (facultatif)
Trouvez les entiers naturels a et b tels que : $ab - b^2 = 2028$ et $PGCD(a,b) = 13$.

Exercice II.16 (facultatif)

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $PGCD(2n+3, n) = 3$.
2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $PGCD(2n+3, n) = 1$

Exercice II.17
Si on divise 4294 et 3521 par un même entier naturel n, les restes respectifs sont 10 et 11. Quel est cet entier ?

Exercice II.18
Un boîte parallélépipédique rectangle de dimensions intérieures $31,2cm$, $13cm$ et $7,8cm$ est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres. Quel est le nombre minimal de cubes que peut contenir cette boîte ?

Exercice II.19 (facultatif)
On pose $a = 588$ et $b = 616$.

1. Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
2. En déduire $PGCD(a, b)$
3. Déduire également de la première question $PPCM(a, b)$

Exercice II.20 - l'algorithme d'Euclide (facultatif)
Soient a et b deux entiers naturels, on note $\mathcal{D}(a, b)$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Dans la suite, on considère que $a \geq b > 0$.

1. Donner $\mathcal{D}(120, 24)$.
2. Montrer que $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a - b, b)$.
3. En déduire que $PGCD(a, b) = PGCD(a - b, b)$
4. Soit r le reste dans la division euclidienne de a par b. Montrer, en vous aidant de la question précédente, que $PGCD(a, b) = PGCD(r, b)$.
5. En vous aidant des divisions euclidiennes ci-dessous:
$$416 = 2 \times 182 + 52$$
$$182 = 3 \times 52 + 26$$
$$56 = 2 \times 26 + 0$$
Déterminer $PGCD(416, 182)$
6. Ecrire en langage naturel un algorithme permettant de déterminer le $PGCD$ de a et b.

<u>Partie III : Décomposition en base b (~30min)</u>

Exercice III.1
Calculez les 10 premières puissances de 2.

Exercice III.2
Donnez les écritures des nombres entiers suivants dans la base binaire (*b=2*) : 5, 54, 127, 256, 501, 1010

Exercice III.3
Calculez les 5 premières puissances de 3.

Exercice III.4
Donnez les écritures des nombres entiers suivants dans la base ternaire (*b=3*): 54, 127, 256, 501, 1010

Exercice III.5
Calculez les 3 premières puissances de 16.

Exercice III.6
Donnez les écritures des nombres entiers suivants dans la base hexadécimale (*b=16*): 54, 127, 256, 501, 1010

Partie IV : Congruences (~2h30)

Exercice IV.1
Les propositions suivantes sont-elles vraies ?
$(a)\ 37 \equiv 4[3] \quad (b)\ 101 \equiv 1[5] \quad (c)\ -16 \equiv 0[6] \quad (d)\ -15 \equiv 6[7]$

Exercice IV.2
Simplifier les congruences suivantes:

1. $22 \equiv ?[2]$, $83 \equiv ?[2]$, $3125 \equiv ?[2]$
2. $33 \equiv ?[5]$, $3132 \equiv ?[5]$, $4729 \equiv ?[5]$
3. En déduire, $3132 + 4729 \equiv ?[5]$
4. $7^4 \equiv ?[10]$
5. En déduire le chiffre des unités (dans l'écriture décimale) de 7^{98} ?

Exercice IV.3
Trouvez les valeurs de x tels que $x - 4 \equiv 3[5]$.

Exercice IV.4 (Pièges et erreurs classiques sur les congruences) :
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant:

1. $Si\ a \times b \equiv 0[6]\ alors\ a\ \equiv 0[6]\ ou\ b \equiv 0[6]$
2. $Si\ 2x \equiv 4[12]\ alors\ x \equiv 2[12]$
3. $Si\ 2x \equiv 4[12]\ alors\ x \equiv 2[6]$
4. $Si\ 7 - x \equiv 5[3]\ alors\ x \equiv 2[3]$
5. $Pour\ tout\ entier\ x,\ x^5 \equiv x[4]$

Exercice IV.5 (facultatif)

1. Démontrer que $115 \equiv 27[11]$ et que $-39 \equiv 27[11]$
2. Trouver un entier naturel n inférieur à 100 qui vérifie :

$$\begin{cases} n \equiv 27[11] \\ n \equiv 4[7] \end{cases}$$

3. Combien d'entiers naturels inférieurs à 1000 sont congrus à 27 modulo 11 ?

Exercice IV.6 (facultatif)
A l'aide des congruences, quel est le dernier chiffre dans l'écriture décimale de 3^{2023}?

Exercice IV.7
Déterminer le reste de la division euclidienne de 2024^{2024} par 5.

Exercice IV.8 (facultatif)
Démontrer les propriétés de cours suivantes.

1. Démontrer que $a \equiv b\,[n] \Leftrightarrow n \text{ divise } a - b$
2. Démontrer la propriété de cours (1) (i.e. $a + a' \equiv b + b'\,[n]$)
3. Démontrer la propriété de cours (3) (i.e. $a \times a' \equiv b \times b'\,[n]$)

Exercice IV.9

1. Compléter la table des restes dans la congruence modulo 9 :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4x \equiv$									

2. Résoudre alors l'équation $4x \equiv 5[9]$
3. En remarquant que $4 \times 7 \equiv 1[9]$, résoudre sans utiliser de table des restes l'équation :

$$7x \equiv 8[9]$$

4. Résoudre enfin l'équation $3x \equiv 6[9]$

Exercice IV.10
Démontrer les propositions suivantes:
a. $\forall n \in \mathbb{N},\ n\left(n^2 + 11\right) \text{ est divisible par } 3$
b. $\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 + 5n \text{ est divisible par } 6$
c. $\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 - n \text{ est divisible par 2 et par } 3$
d. $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n+1)(2n+1) \text{ est divisible par } 6$

Exercice IV.11 (facultatif)
Démontrer que pour tout entier naturel n impair, $n^2 - 1$ est divisible par 8

Exercice IV.12
On considère un entier naturel a défini par son écriture décimale $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ avec $a_n \neq 0$.
On a donc : $a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$

1. Montrer que l'entier a est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
2. Montrer que l'entier a est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
3. $817631245910253521462$1 est-il divisible par 3 ? Par 9 ?

Exercice IV.13
Résoudre le système suivant, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv 2[11] \end{cases}$$

Exercice IV.14 (facultatif)

Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Indice : Pour cet exercice, on se basera sur le théorème ci-dessous.

Théorème des restes chinois

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des entiers strictement positifs deux à deux premiers entre eux, et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des entiers quelconques. Le système d'équations :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \, [n_1] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x \equiv a_k \, [n_k] \end{cases}$$

admet une unique solution modulo $N = n_1 \times \ldots \times n_k$ donnée par la formule :

$$x = a_1 N_1 y_1 + \ldots + x = a_k N_k y_k$$

où $N_i = \frac{N}{n_i}$ et $y_i \equiv \frac{1}{N_i} [n_i]$ pour i compris entre 1 et k.