Correction TD1

Note : Nous ferons le reste des exercices le 22 novembre

Exercice I.1:
Définir l'ensemble des entiers naturels strictements inférieurs à 5.

Solution : $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 5\}$ ou $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

Exercice I.2:
Définir l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3 de deux façons différentes.

Solution :

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 3k\}$

ou

$A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ou encore (en utilisant la fonction partie entière):

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{3} = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor\}$

Exercice I.3:
Définir l'ensemble des nombres impaires strictements supérieurs à 3.

$A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\ et\ k > 0\}$

Exercice II.1
Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Solution :

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

$A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Exercice II.2
Soient $A = \{0, 2, 4\}$ et $B = \{1, 3, 4, 5\}$ dans le référentiel $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Déterminer les ensembles $\overline{A}$,$\overline{B}$,$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A)$ et $A \times B$

Exercice II.3
Soient $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$.

Solution :
$A \cap B = [2, 3]$
$A \cup B = [1, 4]$

Exercice II.4
Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants $A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$, $A_6 = [1, 2[$

Solution :
$\overline{A_1} =]0, +\infty[$
$\overline{A_2} = [0, +\infty[$
$\overline{A_3} =]-\infty, 0]$
$\overline{A_4} =]-\infty, 0[$
$\overline{A_5} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$
$\overline{A_6} =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$

Exercice II.8 :
Soit $C_{red} = [\![0; 2]\!], C_{green} = [\![0; 2]\!], C_{blue} = [\![0; 2]\!],$. Décrire $C_{red} \times C_{green} \times C_{blue}$.

Solution :
$C_{red} \times C_{green} \times C_{blue} = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),\ldots,(2,2,0),(2,2,1),(2,2,2)\}$

Exercice II.8 (complément):
Donner l'ensemble des couleurs possibles en informatique.

Note : En informatique les couleurs sont codés sur 3 octets (1 octet = 8 bits = 256 valeurs possibles). Le premier octet pour le rouge, le deuxième pour le vert et le troisième pour le bleu. Chaque combinaison de 3 octets représente une couleur.

Solution :
Soient les ensembles $R = G = B = [\![0, 255]\!]$.

Les couleurs possibles sont :

$$R \times G \times B = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,0,3),\ldots,(255,255,254),(255,255,255)\}$$

Exercice II.9

Rappel du cours
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.
Egalité : A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.
Inclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Démonstration 1)
Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E.
Montrons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Pour cela on montre qu'il y a double inclusion.

***i)* Montrons que** $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)$

On réalise une disjonction de cas (par rapport au **"ou"**).

1er cas: $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C$
2eme cas: $x \in B \text{ et } x \in C \Rightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C$

Ainsi, $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

On a vérifié la première inclusion $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

***ii)* Montrons désormais que** $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)$

On réalise une disjonction de cas (par rapport aux **"ou"**).

1er cas: $x \in A \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)$
- 1er sous cas: $x \in A \text{ et } x \in A \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$
- 2eme sous cas: $x \in A \text{ et } x \in C \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

2eme cas: $x \in B \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)$
- 1er sous cas: $x \in B \text{ et } x \in A \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$
- 2eme sous cas: $x \in B \text{ et } x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

Ainsi, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

On a vérifié la seconde inclusion $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

La double inclusion est donc bien vérfiée et donc $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration 2)
Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E.
Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(Démonstration que l'on réalisera au prochain cours)