Théorie des ensembles

Fiche d'exercices n°1

Partie I : Définition d'ensembles (~20min)

Exercice I.1
Définir l'ensemble des entiers naturels strictements inférieurs à 5.

Exercice I.2
Définir l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3 de deux façons différentes.

Exercice I.3
Définir l'ensemble des nombres impaires strictements supérieurs à 3.

Exercice I.4
Définir l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r.

Exercice I.5
Définir l'ensemble des points de tous les cercles dont l'aire est égale à 1.

Exercice I.6
Définir l'ensemble des points du disque ouvert $\mathcal{D}$ de centre $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon 2.

Partie II : Relations ensemblistes (~1h40)

Exercice II.1
Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice II.2
Soient $A = \{0,2,4\}$ et $B = \{1,3,4,5\}$ dans le référentiel $E = \{0,1,2,3,4,5\}$.
Déterminer les ensembles $\overline{A}$,$\overline{B}$,$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A)$ et $A \times B$

Exercice II.3
Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice II.4
Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants $A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$, $A_6 = [1, 2[$

Exercice II.5 Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $B = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles $\bar{A}$ et $\bar{B} \cap \bar{C}$

Exercice II.6
Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$

Exercice II.7
Soit $A = \{1, 8, 10\}$. Décrire $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A.

Exercice II.8
Soit $C_{red} = [\![0;2]\!], C_{green} = [\![0;2]\!], C_{blue} = [\![0;2]\!],$. Décrire $C_{red} \times C_{green} \times C_{blue}$.

Exercice II.9 (démo de cours)
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice II.10

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice II.11
On donne la définition suivante $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. Montrer que
   $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
   $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$
2. En déduire que
   $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$

Partie III : Pour aller plus loin (~1h00)

Exercice III.1
Montrez les propriétés de cours suivantes:

$$(i)\ X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$
$$(ii)\ X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

Exercice III.2
Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$
   b) Montrer que :
   $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$
   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$
   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$