Exercices (Théorie des ensembles)

https://f2school.com/theorie-des-ensembles/

I) Définition d'ensembles

Exercice I.1:
Définir l'ensemble des entiers naturels strictements inférieurs à 5.

Solution : $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

Exercice I.2:
Définir l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3 de deux façons différentes.

Solution :
$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{3} - \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \neq 0\right\}$
ou
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$
ou
$A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice I.3:
Définir l'ensemble des nombres impaires strictements supérieurs à 3.

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\ et\ k > 0\}$

Exercice I.4:
Définir l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r.

$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$

Exercice I.5:
Définir l'ensemble des points de tous les cercles dont l'aire est égale à 1.

$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall a, b \in \mathbb{R},\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\ et\ \pi r^2 = 1\right\} = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall a, b \in \mathbb{R},\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = \frac{1}{\pi}\ \right\}$

Exercice I.6:
Définir l'ensemble des points du disque ouvert $\mathcal{D}$ de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon 2.

$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < 4\right\}$

II) Relations ensemblistes

https://f2school.com/wp-content/uploads/2019/10/théorie-des-ensembles-exercice-02.pdf

Exercice II.1 :
Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), \ldots, (3, 3)\}$

Exercice II.2 :
Soient $A = \{0, 2, 4\}$ et $B = \{1, 3, 4, 5\}$ dans le référentiel $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Déterminer les ensembles $\overline{A}$,$\overline{B}$,$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(A)$ et $A \times B$

Exercice II.3 :
Soient $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$.

$A \cap B = [2, 3]$ et $A \cup B = [1, 4]$

Exercice II.4 :
Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants : $A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$, $A_6 = [1, 2[$ 2.

$\bar{A}_1 =]0, +\infty[$ et $A \cup B = [1, 4]$

Exercice II.5 Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $B = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles $\bar{A}$ et $\bar{B} \cap \bar{C}$

Exercice II.6
Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$

Solution
$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]7, +\infty[$
$(A \cap B) \cup (A \cap C) =]-2, 3]\cup]-5, 3] =]-5, 3]$

Exercice II.7 :
Soit $A = \{1, 8, 10\}$. Décrire $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A.

Exercice II.8 :
Soit $C_{red} = [\![0; 2]\!], C_{green} = [\![0; 2]\!], C_{blue} = [\![0; 2]\!],$. Décrire $C_{red} \times C_{green} \times C_{blue}$.

Exercice II.9 (démo de cours)
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Solution
Il s'agit de résultats du cours que l'on peut utiliser sans démonstration mais cet exercice demande de les
redémontrer.

1. Si $x \in A \cup (B \cap C)$
   Alors ($x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$)
   Alors ($x \in A$ ou ($x \in B$ et $x \in C$))
   Si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, par conséquent $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Si ($x \in B$ et $x \in C$) alors ($x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$)
   Donc si ($x \in A$ ou ($x \in B$ et $x \in C$)) alors ($x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$)
   On a montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ alors ($x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$).
   ($x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$) $\Leftrightarrow$ (($x \in A$ ou $x \in B$) et ($x \in A$ ou $x \in C$))
   Si ($x \in A$ et ($x \in A$ ou $x \in C$)) alors $x \in A \cap A$ ou $x \in A \cap C$
   Si ($x \in B$ et ($x \in A$ ou $x \in C$)) alors $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A$ ou $x \in A \cap C \subset A$ ou $x \in B \cap A \subset A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$
   Alors $x \in A \cup (B \cap C)$
   On a montré que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$
   Finalement $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Si $x \in A \cap (B \cup C)$
   Alors ($x \in A$ et $x \in B \cup C$)
   Alors ($x \in A$ et ($x \in B$ ou $x \in C$))
   Alors ($x \in A$ et $x \in B$) ou ($x \in A$ et $x \in C$)
   Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$
   Alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   On a montré que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   Si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$
   Alors ($x \in A$ et $x \in B$) ou ($x \in A$ et $x \in C$)
   Alors ($x \in A$ ou $x \in A$) et ($x \in A$ ou $x \in C$) et ($x \in B$ ou $x \in A$) et ($x \in B$ ou $x \in C$)
   Alors $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ et $x \in B \cup C$
   Comme $x \in A$ et $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup A$ entraine que $x \in A$

   $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A$ et $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$
   On a montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$
   Et finalement $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice II.10

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Solution

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B \cup D}) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice II.11
On donne la définition suivante $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. Montrer que
   $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
   $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$
2. En déduire que
   $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$

Solution

1. $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
   Pour la seconde il suffit d'intervertir B et C
2. $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$
   $= ((A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})) \cup ((A \cap C) \cap (\overline{A \cap B})) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$
   $= A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A \cap (B \Delta C)$

III) Pour aller plus loin

Exercice III.1

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :

   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$

   b) Montrer que :
   $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$

   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$

   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$

   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

1.

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$
$$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \emptyset$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

2.

$$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$$
$$A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$$
$$A\Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}$$

3.

a)

$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{(B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)$$
$$= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap A) \cup (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (B \cap A)$$
$$= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$$

b)

$$(A\Delta B)\Delta C = \left((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\right)\Delta C = \left(\left((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\right) \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})}\right)$$
$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup \left(C \cap \left((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)\right)\right)$$
$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$$

c)

$$(A\Delta B)\Delta C = \left(C \cap \overline{A\Delta B}\right) \cup \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) = \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A\Delta B}\right) = C\Delta(A\Delta B)$$

or $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = B\Delta A$ donc $(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(A\Delta B) = C\Delta(B\Delta A)$

d)

$(C\Delta B)\Delta A = (C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C) = A\Delta(B\Delta C)$, en changeant A et C.

e)

$(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(B\Delta A)$ d'après d) or $C\Delta(B\Delta A) = A\Delta(B\Delta C)$ d'après c).
Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Exercice III.2 (démo de cours)
Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$
4. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

Solution

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Soit $x \in \overline{(A \cap B)}$, $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
   Cela montre que $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$ ce qui entraine que $x \in \overline{(A \cap B)}$.
   Cela montre que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{(A \cap B)}$.
   Et finalement $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque : On aurait raisonner par équivalence.
2. Soit $x \in \overline{(A \cup B)}$, $x \notin A \cup B$ et donc $x \notin A$ et $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
   Cela montre que $\overline{(A \cup B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \notin A \cup B$ ce qui entraine que $x \in \overline{(A \cup B)}$.
   Cela montre que $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$.
   Et finalement $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   Remarque : On aurait raisonner par équivalence.

Exercice III.3
Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap \overline{G} = \emptyset$

Solution

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Supposons que $F \subset G$.
   Si $x \in F \cup G$ alors $x \in F \subset G$ ou $x \in G$ alors $x \in G$. Donc $F \cup G \subset G$.
   Si $x \in G$ alors $x \in F \cup G$, par conséquent $F \cup G = G$.
   On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$
   Supposons que $F \cup G = G$.
   Soit $x \in F$, $x \in F \cup G = G$ donc $x \in G$.
   On a montré que $F \cup G = G \Rightarrow F \subset G$.
   Finalement $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$.
2. Supposons que $F \subset G$.
   Si $x \in F \cap CE\ G$, $x \in F$ et $x \notin G \supset F$ donc $x \in F$ et $x \notin F$ ce qui est impossible par conséquent
   $F \cap CEG = \emptyset$.
   On a montré que $F \subset G \Rightarrow F \cap CE\ G = \emptyset$
   Supposons que $F \cap CE\ G = \emptyset$.