Correction Exercices (Arithmetique modulaire)

Partie I: Divisibilité

https://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/3.nombrespremiers.cours-2.pdf

http://www.jaicompris.com/lycee/math/arithmetique/pgcd.php

Exercice I.1
Construire un nombre divisible par 2,3,4,5,9 et 10 en se basant uniquement sur les critère de divisibilité.

Solution

- 2 160 est divisible par 2, par 5, par 10. En effet, le chiffre des unités est 0.
- 2 160 est divisible par 4. En effet, 60 est divisible par 4.
- 2 160 est divisible par 3 et 9. En effet, $2+1+6+0=9$ et 9 est divisible par 3 et par 9

Exercice I.2
...
...

Exercice I.3 Soient x et y des entiers. Montrer que $2x+3y$ est divisible par 7 si et seulement si $5x+4y$ l'est.

Solution : Supposons que 7 divise 2x + 3y, alors il divise 6 (2x + 3y) − 7 (x + 2y) = 5x + 4y.
Réciproquement si 7 divise 5x + 4y, il divise 6 (5x + 4y) − 7 (4x + 3y) = 2x + 3y.

Exercice I.4 : Pour quels entiers n strictement positifs, le nombre n^2+1 divise-t-il $n+1$?

Solution : Si n^2+1 divise $n+1$, comme tout est positif, on doit avoir $n^2+1 \leq n+1$, ce qui n'est vérifié que pour $n=1$. On vérifie ensuite que n = 1 est bien solution.

Partie II: PGCD et nombres premiers (~2h00)

Exercice II.1
Donner la définition d'un nombre premier puis donner la liste des 20 premiers nombres premiers.

Solution
Voir le cours.

Exercice II.2
Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier. $0,1,2,3,4,91,123$

Solution

$0,1,2,3,4 \Rightarrow$ voir le cours

91 n'est pas premier car il est divisible par 7 et 13

123 n'est pas premier car il est divisible par 3 et 41

Exercice II.3
Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants : $12,17,84,2520$

Exercice II.4
Trouver la fraction irréductible égale à $\frac{84}{30}$ et $\frac{2520}{77}$.

Indice: on peut décomposer le numérateur et le dénominateur de la fraction en produit de facteurs premiers

Exercice 3 : $12 = 2\times 6 = 2\times 2\times 3 = 2^2\times 3$

$17 = 17 \Rightarrow$ pas de décomposition car 17 est premier

$84 = 2\times 42 = 2\times 2\times 21 = 2^2\times 3\times 7$

$2520 = 20\times(5\times 25+1) = 20\times 126 = 2^2\times 5\times 2\times 63$

$= 2^3\times 5\times 7\times 9 = 2^3\times 3^2\times 5\times 7$

Exercice 5 : * $84 = 2^2\times 3\times 7$ et $30 = 2\times 3\times 5$

donc $\frac{84}{30} = \frac{2^{\cancel{2}}\times\cancel{3}\times 7}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times 5} = \frac{14}{5}$

* $\frac{2520}{77} = \frac{2^3\times 3^2\times 5\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times 11} = \frac{8\times 45}{11} = \frac{360}{11}$

Exercice II.5
Déterminer le PGCD de 4480 et 400 à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice II.6
Déterminer le PGCD de 3045 et 300 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Partie III : Congruences

http://www.jaicompris.com/lycee/math/arithmetique/congruence-Z.php

https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/arithm/congruence&type=fexo

Exercice XX.YY

1. Montrer que tout entier naturel est congru modulo 9 à la somme des chiffres de son écriture décimale.
2. En déduire que, quels que soient les entiers naturels $x=\overline{a_n...a_0}$, $y=\overline{b_m...b_0}$ et $z=\overline{c_p...c_0}$, si $xy=z$, alors $\left(\sum_{i=0}^n a_i\right)\left(\sum_{i=0}^m b_i\right)\equiv\left(\sum_{i=0}^p c_i\right)$ [9]

Enoncé

Montrer que tout entier naturel est congru modulo 9 à la somme des chiffres de son écriture décimale. En déduire que, quels que soient les entiers naturels $x=\overline{a_n\dots a_0}$, $y=\overline{b_m\dots b_0}$ et $z=\overline{c_p\dots c_0}$, si $xy=z$, alors $\left(\sum_{i=0}^n a_i\right)\left(\sum_{i=0}^m b_i\right)\equiv\left(\sum_{i=0}^p c_i\right)$ [9].

Indication

A quoi est congru 10 modulo 9?

Corrigé

Le point crucial est que 10 est congru à 1 modulo 9. Ainsi, $10^2=10\times 10\equiv 1\times 1=1[9]$, et une récurrence facile montre que pour tout entier k, alors 10^k est congru à 1 modulo 9. Notons $x=\overline{a_n\dots a_0}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} x &\equiv 10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\dots+10a_1+a_0\ [9]\\ &\equiv a_n+a_{n-1}+\dots+a_0\ [9]. \end{aligned}$$

La deuxième partie de l'exercice s'en déduit aisément. En effet, on écrit que

$$xy=z\implies xy\equiv z\ [9]\implies\left(\sum_{i=0}^n a_i\right)\left(\sum_{i=0}^m b_i\right)\equiv\left(\sum_{i=0}^p c_i\right)\ [9].$$

Exercice XX.YY
Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se lPes partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exemple : Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates?

Si x est ce nombre, x est le plus petit entier positif tel que :

$$\begin{cases} x & \equiv & 3\ [17] \\ x & \equiv & 4\ [11] \\ x & \equiv & 5\ [6] \end{cases}$$

On applique le théorème chinois : on a $M = 17 \times 11 \times 6 = 1122$, $M_1 = 66$, $M_2 = 102$, $M_3 = 187$. L'inversion de chaque M_i modulo m_i (par l'algorithme d'Euclide) donne $y_1 = 8$, $y_2 = 4$, $y_3 = 1$.

On obtient donc :

$$x \equiv 3 \times 66 \times 8 + 4 \times 102 \times 4 + 5 \times 187 \times 1\ [1122] \equiv 785\ [1122].$$

Le gain minimal est de 785 pièces d'or, voila qui est particulièrement motivant!