AM3-W1, 08.10.25 (niesformatowane z wykładem) (bez uzupełnionych dowodów)

Definicja (przestrzeni topologicznej).

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę $(X, \mathcal{T})$, gdzie X to zbiór, a $\mathcal{T} \subset 2^X$ oraz spełnione są warunki:
(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
(2) $\forall_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in A\} \in \mathcal{T}$,
(3) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Zbiory należące do topologii nazywamy **otwartymi**.
Dopełnienia zbiorów otwartych nazywamy zbiorami **domkniętymi**.

$\mathcal{T} = 2^X \leftarrow$ **topologia dyskretna**
$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \leftarrow$ **topologia antydyskretna**

Definicja (przestrzeni metrycznej).

Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, d), gdzie X to zbiór, a $d : X \times X \to [0, \infty)$ to funkcja, zwana **metryką**, spełniająca następujące warunki:
(1) $d(x, y) = d(y, x)$,
(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Trzecia własność jest równoważna **dolnej nierówności trójkąta**:

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|.$$

Definicja (topologii zadanej przez metrykę, kuli).

Rodzinę $\mathcal{T}_d$ nazywamy **topologią zadaną przez metrykę d**, jeśli zachodzi:

$$U \in \mathcal{T}_d \iff \forall_{x \in U} \exists_{\varepsilon > 0} B(x, \varepsilon) \subset U,$$

gdzie

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Twierdzenie (o topologii zadanej przez metrykę).

Rodzina $\mathcal{T}_d$ jest *topologią*.

Definicja (topologii metryzowalnej).

Jeśli możemy znaleźć metrykę zadającą topologię, to nazywamy tę topologię **metryzowalną**.

Definicja (wnętrza zbioru).

Wnętrzem zbioru A nazwiemy sumę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A:

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup\{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$$

Definicja (domknięcia zbioru).

Domknięciem A nazywamy przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A:

$$\overline{A} = \bigcap\{F : F^c \in \mathcal{T}, F \supset A\}$$

Stwierdzenie (o wnętrzu i domknięciu).

a) $\operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A}$
b) $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}, (\overline{A})^c \in \mathcal{T}$
c) $\operatorname{int} A \supset \{x \in A : \exists_{x \in U \in \mathcal{T}}\ U \subset A\}$
d) $\overline{A} = (\operatorname{int} A^c)^c$

Wniosek

$x \in \overline{A}^c \iff \exists_{U \in \mathcal{T}}\ x \in U \subset A^c$ (wynika z d) i c) stw., bo $\exists_{U\in\mathcal{T}}\ x \in U \subset A^c \iff x \in \operatorname{int} A^c$)

Definicja (Brzegu).

Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$

Wniosek

$x \in \partial A \iff \forall_{x \in U \in \mathcal{T}}\ U \cap A \neq \emptyset, U \cap A^c \neq \emptyset$

Twierdzenie (o trójpodziale).

Dla każdego zbioru A przestrzeń X rozpada się na sumę trzech rozłącznych zbiorów:

$$X = \operatorname{int}(A) \sqcup \operatorname{int}(A^c) \sqcup \partial A.$$

Przykład

$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset, \operatorname{int} \mathbb{Q}^c = \emptyset, \operatorname{int} \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Definicja (zbiór gęsty).

A jest gęsty w $X \iff \overline{A} = X$

Przykład (Zbiór Cantora).

Zbiór Cantora: domknięty, nigdzie gęsty, puste wnętrze (konstr. geom: zaczynamy od $C_0 = \langle 0, 1\rangle$, z C_0 usuwamy środkową $\frac{1}{3}$ i otrzymujemy C_1, z każdego odcinka C_1 robimy to samo, ..., powtarzamy tę procedurę w nieskończoność, zbiór Cantora to zbiór punktów, które pozostaną po wykonaniu ∞ wielu kroków, formalnie $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$

Definicja (zbioru granicznego).

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, a $(x_n) \in X$. Mówimy, że x_0 należy do **zbioru granicznego** ciągu (x_n), jeżeli

$$\forall_{U \in \mathcal{T}, x_0 \in U}\ \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} < \infty.$$

Zbiór graniczny oznaczamy $\Lambda(x_n)$.

Definicja (przeliczalnej bazy otoczeń x_0).

Mówimy, że x_0 ma przeliczalną bazę otoczeń $\iff \exists_{\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}}\ \forall_n\ x_0 \in x_n, \forall_{x \in U \in T}\ \exists_n\ V_n \subset U$

Definicja (przeliczalna baza otoczeń p. topologicznej).

Mówimy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ ma przeliczalną bazę otoczeń (**pierwszy warunek przeliczalności**) $\iff$ każdy punkt $x \in X$ ma przeliczalną bazę otoczeń.

Uwaga

Przestrzenie metryczne mają przeliczalne bazy otoczeń.

Przykłady

1. $\mathcal{T} = 2^X$
$x_k \in \Lambda(x_n) \iff \exists_{n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \geq n_0}\ x_n = x_0$
2. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
$\Lambda(x_n) = X$

Definicja (topologii Hausdorffa).

Parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy **topologią Hausdorffa**, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall_{x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2} \exists_{U_1 \ni x_1, U_2 \ni x_2, U_1, U_2 \in \mathcal{T}} U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Uwaga.

Dla dowolnego ciągu (x_n) w topologii Hausdorffa zachodzi $\#\Lambda(x_n) \leq 1$.

Uwaga.

Dowolna przestrzeń metryczna jest przestrzenią Hausdorffa.

AM3-W2, 08.10.25 (niesformatowane z wykładem) (bez uzupełnionych dowodów)

Definicja (domknięcia ciągowego).

Domknięciem ciągowym A nazywamy zbiór

$$\mathrm{scl}(A) := \{x_0 \in X : \exists_{(x_n)\in A}\ x_0 \in \Lambda((x_n)_{n=1}^{\infty})\}.$$

Twierdzenie (o domknięciu i domknięciu ciągowym).

Zachodzi zawieranie $\mathrm{scl}(A) \subset \overline{A}$, a jeżeli topologia jest metryzowalna, to $\mathrm{scl}(A) = \overline{A}$.

Uwaga.

Bez założenia metryzowalności równość nie jest prawdziwa.

Wniosek

Kryterium domkniętości zbioru w przestrzeni metrycznej: $A = \mathrm{scl}(A)$

Definicja (funkcji ciągłej).

Funkcję $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywamy **ciągłą**, jeżeli przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty, tzn.

$$\forall_{U\in\mathcal{T}_Y}\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Definicja (funkcji ciągłej w sensie Heinego).

Funkcję $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywamy **ciągłą w sensie Heinego**, jeżeli

$$\forall_{(x_n)\in X}\ x_0 \in \Lambda((x_n)_{n=1}^{\infty}) \implies f(x_0) \in \Lambda((f(x_n))_{n=1}^{\infty}),$$

gdzie w przestrzeniach Hausdorffa zbiór graniczny zamieniany jest na granicę.

Twierdzenie (o równoważnych warunkach ciągłości).

Jeśli f jest ciągła, to zachodzi warunek Heinego ciągłości. Jeśli topologia jest metryzowalna, to implikacja zachodzi też w drugą stronę.

Definicja (bazy topologii).

Bazą topologii $\mathcal{T}$ nazywamy taką rodzinę $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, że dowolny zbiór $U \in \mathcal{T}$ ma postać

$$U = \bigcup\{V \in \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}.$$

Stwierdzenie (o bazie topologii $\mathcal{T}_d$).

Kule otwarte stanowią bazę w $\mathcal{T}_d$.

Definicja (podbazy topologii).

Rodzinę $\mathcal{P}$ nazwiemy **podbazą** topologii $\mathcal{T}$, jeżeli zbiór $\mathcal{B}$ taki, że

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcap\{V \in \mathcal{P}' : \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}, \#\mathcal{P}' < \infty\}\right\}$$

jest bazą w $\mathcal{T}$.

Uwaga.

Zbiór $\mathcal{B}$ zawiera całą przestrzeń X jako przecięcie pustej rodziny dla $\mathcal{P}' = \emptyset$. Przestrzeń ta jest również zamknięta ze względu na przecięcie dwóch zbiorów z $\mathcal{B}$. Wynika stąd, że każda rodzina $\mathcal{P} \subset 2^X$ określa pewną topologię na X.

Sposoby zadawania topologii

Przez bazę:
$\mathcal{B} \subset 2^X$. Definiujemy $\mathcal{T}(\mathcal{B}) := \{\bigcup\{V \in \mathcal{B}_0 : \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}\}\}$

Przykłady

W przestrzeni metrycznej $\mathcal{T}(\{B(x,r) : x \in X, r > 0\}) = \mathcal{T}$.
$\mathcal{B} = \{[a,b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.
$(0,1) = \bigcup\{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$.
Topologia nie spełnia c), bo $[a,b] \cap [b,c] = \{b\}$.

Fakt

$\mathcal{T}(\mathcal{B})$ jest topologią $\iff$
a) $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.
b) $\forall_{U,V \in \mathcal{B}}\ U \cap V \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$

Definicja (iloczynu kartezjańskiego).

Iloczyn kartezjański definiujemy jako

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \{\varphi : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : \forall_{\alpha \in A}\ \varphi(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

Pewnik wyboru

$$\forall_{\alpha \in A}\ X_\alpha \neq \emptyset \implies \prod_{\alpha \in A}\{X_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset$$

$\exists_\varphi\ \varphi : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha,\ \forall_{\alpha \in A}\ \varphi(\alpha) \in X_\alpha$ (**selektor**)

AM3-W3, 15.10.25 (bez uzupełnionych dowodów)

$(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$, $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$

Definicja cylindra otwartego

Cylindrem (otwartym) w X nazywamy zbiór:
$C_\alpha(U_\alpha) = \{\varphi \in X : \varphi_\alpha \in U_\alpha\}$, $U_\alpha \in \mathfrak{T}_\alpha$

Definicja Topologii Tichonowa (produktowej)

Topologia Tichonowa na X jest zadana przez podbazę
$\mathcal{P}_X = \{C_\alpha(U_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \in \mathfrak{T}_\alpha\}$
$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(\mathcal{P}_X) = \{\bigcap_{j=1}^n C_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}) : n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_i \in A, U_{\alpha_i} \in \mathfrak{T}_{\alpha_i}\}$
Dla produktu skończenie wielu przestrzeni $X_1, \ldots, X_n$,
$\mathcal{B}_X = \{\prod_{j=1}^n U_j : \forall_j \; U_j \in \mathfrak{T}_j\}$

Stwierdzenie o zbieżności w topologii Tichonowa

Jeśli dany jest ciąg $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ w X, to $\varphi_0 \in \mathrm{Lim}(\varphi_n)_{n=1}^\infty \iff \forall_{\alpha \in A} \; \varphi_0(\alpha) \in \mathrm{Lim}(\varphi_k(\alpha))_{k=1}^\infty$
$(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ - prz. metryczne , gdzie $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathfrak{T}$ - top. Tichonowa

Definicja metryki produktowej

$d_\pi((x_i)_{i=1}^{\hat{n}}, (\hat{x}_i)_{i=1}^{\hat{n}}) = \max\{d_i(x_i, \hat{x}_i) : i = 1, \ldots, \hat{n}\}$

Tw. o równości topologii dla skończonego produktu

$\mathfrak{T}_X = \mathfrak{T}_{d_\pi}$, $x_0 = (x_1, \ldots, x_{\hat{n}})$

Definicja pokrycia i podpokrycia

$(X, \mathfrak{T})$, $Z \subset X$. Podrodzina zbiorów otwartych $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ w X
nazywa się **pokryciem (otwartym)** zbioru $Z \iff Z \subset \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$.
Powiemu, że $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \hat{A}}$ jest **podpokryciem** $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \iff \hat{A} \subset A$ i jest pokryciem

Definicja zbioru zwartego

Zbiór $K \subset X$ nazywamy **zwartym** $\iff$ dla każdego pokrycia otwartego
K istnieje jego podpokrycie skończone.

Twierdzenie o zbiorach zwartych i domkniętych

$K \subset X$, $(X, \mathfrak{T})$
a) Jeśli X jest zwarta, a K domknięty, to K jest zwarty
b) Jeśli X jest Hausdorffa i K jest zwarty, to K jest domknięty

AM3-W4, 15.10.25 (bez uzupełnionych dowodów)

Twierdzenie Tichonowa

Jeśli $\forall_{\alpha \in A}$ $(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ jest zwarta, to $\prod\{X_i : i \in A\}$ jest zwarty.

Twierdzenie o funkcjach ciągłych na zbiorach zwartych

$f : X \to Y$ ciągła, $K \subset X$ jest zwarty.
Wówczas:
a) $f(K)$ jest zwarty w Y.
b) Jeśli $Y = \mathbb{R}$, to f przyjmuje swoje kresy na K:
$\exists_{x_{\min} \in K}\ f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in K\}$
$\exists_{x_{\max} \in K}\ f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in K\}$
c) Jeśli (X, d_X) oraz (Y, d_Y) są prz. met. , to f jest jednostajnie ciągła na K:
$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \forall_{x,y \in K}\ d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

(X, d), $Z \subset X$, ustalmy $\varepsilon > 0$.

Definicja sieci

Zbiór skończony $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset X$ jest **siecią o prześwicie** ε dla
$Z \iff \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \varepsilon) \supset Z.$

Definicja zbioru całkowicie ograniczonego

Zbiór $Z \subset X$ nazywamy **całkowicie ograniczonym** $\iff$
$\iff \forall_{\varepsilon > 0}$ istnieje sieć o prześwicie ε.

Uwaga

Jeśli istnieje sieć o prześwicie ε, to istnieje sieć o prześwicie
2ε taka, że $\forall_i\ x_i \in Z$.

Definicja ciągu zdystansowanego

Ciąg (x_n) nazywamy **zdystansowanym o pewne** $\varepsilon > 0 \iff$
$\forall_{n,\hat{n}}\ n \neq \hat{n}\ d(x_n, x_{\hat{n}}) \geq \varepsilon.$
zdystansowany $\iff \exists_{\varepsilon > 0}$ zdystansowany o ε.

Twierdzenie o kryterium całkowitej ograniczoności

Zbiór jest **całkowicie ograniczony** $\iff$ nie istnieje w nim ciąg zdystansowany.

AM3-W5, 16.10.25 (bez uzupełnionych dowodów)

Definicja punktu skupienia ciągu

$(X, \mathfrak{T})$, (x_n), $x_n \in X$.
Powiemu, że $x_0 \in X$ jest **punktem skupienia ciągu** (x_n) $\iff$
$x_0 \in \mathrm{Acc}(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x \in X : \forall_{x \in U \in \mathfrak{T}} \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} = \infty\}$
Uwaga: $\mathrm{Lim}(x_n) \subset \mathrm{Acc}(x_n)$

Twierdzenie (o warunkach zwartości w przestrzeni metrycznej)

(X, d), $K \subset X$. NWSR:
a) K jest zwarty
b) Każdy ciąg (x_n) o wyrazach z K ma punkt skupienia należący do K.
c) Każdy ciąg (x_n) o wyrazach z K ma podciąg zbieżny do granicy w K.
d) K jest całkowicie ograniczony i zupełny jako przestrzeń użytkowa

Twierdzenie o całkowitej ograniczoności w przestrzeniach $\mathbb{R}^m$

Jeśli $K \subset \mathbb{R}^m$ jest ograniczony, to jest całkowicie ograniczony.

Twierdzenie Heinego-Borela

Zbiór $K \subset \mathbb{R}^m$ jest **zwarty** $\iff$ **ograniczony** i **domknięty**

Definicja cegły w $\mathbb{R}^n$

$C = \prod_{i=1}^{n} [c_i, \hat{c}_i]$, $c_i \leq \hat{c}_i$

Definicja objętości

Objętością cegły nazywamy liczbę: $\mathrm{Vol}(C) = \prod_{i=1}^{n} (\hat{c}_i - c_i)$

Lemat (szkolny)

Zachodzi równość
$(a_{1,1} + \cdots + a_{1,p_1})(a_{2,1} + \cdots + a_{2,p_2}) \ldots (a_{m,1} + \cdots + a_{m,p_m}) = \prod_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p_j} a_{j,k} = \sum_{\varphi \in \prod_{j=1}^{m} \{1, \ldots, p_j\}} \prod_{j=1}^{m} a_{j,\varphi(j)}$
(rozdzielność mnożenia względem dodawania).

AM3-W6, 22.10.25