**RR-W1, 07.10.25**

## Wstęp

$y' = y\cos x \quad y(x) = \int y(t)\cos x \, \mathrm{d}t \quad y = C\mathrm{e}^{\sin x}$
$y'' + 9y = 0 \quad y(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$

R.r. zwyczajne – szukana funkcja jednej zmiennej.
R.r. cząstkowe – szukana funkcja wielu zmiennych.

np. $u = u(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ – równanie transportu
$u = u(t, x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$ – równanie przewodnictwa ciepła
$u = u(t, x, y) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$ – równanie falowe

## Definicja (R.r.z. rzędu $n \geq 1$)

R.r.z rzędu $n \geq 1$, to zależność postaci $F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y, t\right) = 0$, gdzie $F$ jest daną funkcją, a $y$ jest szukaną funkcją o wartościach w $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

## Przykład

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $y' = Ay \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
$y(t) = \mathrm{e}^{At} \cdot C$

## Definicja (R.r.z. liniowe)

R.r.z jest **liniowe**, jeżeli $F$ zależy liniowo od $y_l^{(k)}$ dla $k = 0, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$.
np. $y' = y^2$ <u>nie jest liniowe</u>

## R.r. rzędu I (postać uwikłana)

Uwikłane: $F(t, y, y') = 0$
Jawne: $y' = -\frac{F_t}{F_y}$

## R.r. rzędu II (ZDN)

II ZDN: $\quad x''(t) = \frac{1}{m}F(t, x(t), x'(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$

## Przykład

Sprawdzić, że $y^2 + x^2 = 1$ jest rozwiązaniem $yy' + x = 0$

$$y^2(x) + x^2 = 1 \quad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \implies 2y(x)y'(x) + 2x = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2} \quad \implies y(x)y'(x) + x = 0$$

## Definicja (Zagadnienie Cauchy'ego (Zagadnienie Początkowe))

Zagadnienie Cauchy'ego (zagadnienie początkowe) to r.r. rzędu $n \geq 1$ z dodanym warunkiem początkowym:

$$y(t_0) = y_0$$
$$y'(t_0) = y_1$$
$$\ldots$$
$$y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \quad \text{gdzie } y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \text{ dane}$$

## Uwaga

Jeżeli mamy jedno równanie różniczkowe rzędu $n \geq 1$, to możemy je zapisać jako $n$ równań I rzędu.

**Przykład**

$$y''' + (y'')^2 - \sin(y') + \sqrt{|y|} = \ln x$$
$$z_0(x) = y(x)$$
$$z_1(x) = y'(x)$$
$$z_2(x) = y''(x)$$
$$z_0' = y' = z_1$$
$$z_1' = y'' = z_2$$
$$z_2' = y''' = -(z_2)^2 + \sin(z_1) - \sqrt{|z_0|} + \ln x$$

$z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, to $z' = F(x, z)$

$$F(x, z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -(z_2)^2 + \sin(z_1) - \sqrt{|z_0|} + \ln x \end{pmatrix}$$

**Definicja (R.r.z. rzędu I w postaci normalnej)**

R.r.z rzędu **I** w postaci **normalnej**, to równanie $y' = f(t, y)$.

**Uwaga**

Rozpatrzmy równanie różniczkowe:

$$(\star) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad F : U \to \mathbb{R}^m \text{ dana, } U \subset \mathbb{R}^{m+1} \text{ otwarty,} \quad (t_0, y_0) \in U, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Są tylko 2 twierdzenia o istnieniu rozwiązań $(\star)$.

**Twierdzenie Peano (o lokalnym istnieniu rozwiązań)**

Niech $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(y_0, b)}$, $a, b > 0$. Niech $f : Q \to \mathbb{R}^m$ ciągła i $M = \sup_a |f|$.
Wtedy istnieje rozwiązanie $(\star)$ określone co najmniej na przedziale $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, gdzie $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

**Twierdzenie Picarda-Lindelöfa (o lokalnym istnieniu i jednoznaczności)**

Przy założeniach tw. Peano, jeżeli dodatkowo $F$ jest **lipschitzowsko ciągła względem** $y$, to istnieje **dokładnie jedno rozwiązanie** $(\star)$ określone na przedziale $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, gdzie $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$.

(Lipschitzowsko ciągła: $\exists L \geq 0 \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in Q \quad \|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$)

**RR-W2, 14.10.25**

**Przykład**

Równanie:
$y' = \sqrt{|y|}$
$f(t,y) = \sqrt{|y|}$ $\quad$ – ciągła na $\mathbb{R}^2$
Z tw. Peano istnieje rozwiązanie przechodzące przez dowolny ustalony punkt $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

**Co z jednoznacznością rozwiązań?**
Czy jeśli $Q$ - kostka, to czy istnieje $L \geq 0$ takie, że $\forall (t,y_1),(t,y_2) \in Q : |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$?
Rozpatrzmy przypadek $Q \subseteq \{(t,y) : t \in \mathbb{R}, y > 0\}$:

$$|\Delta| = |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| = \left|\frac{y_1 - y_2}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}\right| = \frac{1}{|\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}|} \cdot |y_1 - y_2|$$

Niech $y_0 > 0$. Wtedy w pewnym otoczeniu $(y_0 - b, y_0 + b)$ mamy:
$\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} \geq \sqrt{y_0 - b} + \sqrt{y_0 - b} = 2\sqrt{y_0 - b} > 0$
stąd

$$\frac{1}{|\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}|} \leq \frac{1}{2\sqrt{y_0 - b}} = L$$

W tym przypadku warunek Lipschitza jest spełniony lokalnie.

Rozpatrzmy przypadek $Q \subseteq \{(t,y) : t \in \mathbb{R}, y < 0\}$

$$(\Delta) = |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |\sqrt{-y_1} - \sqrt{-y_2}| = \left|\frac{-y_1 + y_2}{\sqrt{-y_1} + \sqrt{-y_2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{-y_1} + \sqrt{-y_2}} \cdot |y_1 - y_2| \leq L|y_1 - y_2|$$

**Wniosek:**
Na zbiorze $\{(t,y) : t \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$ mamy **jednoznaczność** rozwiązań, tzn. $\forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, takiego że $y_0 \neq 0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie przechodzące przez $(t_0, y_0)$ i określone na pewnym przedziale $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ gdzie $\delta > 0$.

**Spróbujmy rozwiązać to równanie**
$y' = \sqrt{|y|}$

**Przypadek** $y > 0$
$y' = \sqrt{y}$ $\quad$ (nie da się odcałkować)
$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1$
$\left(2\sqrt{y}\right)' = 1$
$\int 2\sqrt{y} = \int 1dt$
$2\sqrt{y} = t + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(t + C), \quad C \in \mathbb{R}$
$y = \frac{1}{4}(t + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}$
$t + C > 0$ $\quad$ (bo y>0)
$t > -C$

**Przypadek** $y < 0$
$y' = \sqrt{-y}$
$\frac{y'}{\sqrt{-y}} = 1$
$(-2\sqrt{-y})' = 1$
$-2\sqrt{-y} = t + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$t + C < 0 \quad t < -C$
$\sqrt{-y} = -\frac{1}{2}(t + C)$
$y = -\frac{1}{4}(t + C)^2$

**Przypadek** $y = 0$
Zauważmy, że $y \equiv 0$ też jest rozwiązaniem równania $y' = \sqrt{|y|}$.

**Powrót do warunku Lipschitza**
Czy jeżeli $Q = \{(t, y) : |t - t_0| \leq a, |y| \leq b\}$ to czy na $Q$ zachodzi warunek Lipschitza?
Gdyby $|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}| \leq L|y_1 - y_2|$ na $Q$, to $y_2 = 0$ i $y_1 = \frac{1}{n}$ $\sqrt{\frac{1}{n}} \leq L\frac{1}{n}$, więc $L$ nie istnieje.

**Uwaga!**
Jeśli $g$ ma ograniczoną pochodną na zbiorze $[a, b]$ to $g$ jest lipschitzowsko ciągła, bo z tw. Lagrange'a o wartości średniej $|g(x) - g(y)| = |g'(c)| \cdot |x - y| \leq M \cdot |x - y|$ (gdzie $M = \sup_{x\in[a,b]} |g'(x)|$).

**Wniosek:** Nie jest spełniony warunek Lipschitza, więc spróbujmy pokazać niejednoznaczność rozwiązań w punktach $(t_0, 0)$ dla $t_0 \in \mathbb{R}$.

$$y_{t_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - t_0)^2 & \text{dla } t \geq t_0 \\ -\frac{1}{4}(t - t_0)^2 & \text{dla } t < t_0 \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0^+} \frac{1}{4}(t - t_0)^2 = 0 = \lim_{t\to t_0^-} -\frac{1}{4}(t - t_0)^2$$

Zadając $y_{t_0}(t_0) = 0$ otrzymujemy funkcję ciągłą.

$$y'_{t_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - t_0) & \text{dla } t > t_0 \\ -\frac{1}{2}(t - t_0) & \text{dla } t < t_0 \end{cases}$$

$y_{t_0}$ jest klasy $C^1$ (ciągła i pochodna również ciągła).

Czy $y_{t_0}$ jest rozwiązaniem $y' = \sqrt{|y|}$? Tak.

Tutaj jest rysunek i z niego wniosek: Stąd przez $(t_0, 0)$ przechodzą przynajmniej 2 rozwiązania

Czy przez $(t_0, 0)$ przechodzi więcej rozwiązań?
Mamy **kontinuum różnych rozwiązań**.
Dla $\tilde{t}_0 < t_0$ określmy funkcję:

$$y_{\tilde{t}_0,t_0}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - \tilde{t}_0)^2 & \text{dla } t \leq \tilde{t}_0 \\ 0 & \text{dla } \tilde{t}_0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{1}{4}(t - t_0)^2 & \text{dla } t > t_0 \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $y_{\tilde{t}_0,t_0}$ jest klasy $C^1$ i spełnia $y' = \sqrt{|y|}$ z warunkiem początkowym $y(t_0) = 0$ i jest tych rozwiązań continuum.

### Definicja (Rozwiązanie osobliwe)

Funkcja $y(t)$ będąca rozwiązaniem równania $y' = f(t, y)$ nazywa się **rozwiązaniem osobliwym**, jeżeli każdy punkt wykresu $y(t)$ jest punktem niejednoznaczności rozwiązań.
Przykład: $y' = \sqrt{|y|}$. Rozwiązanie $y \equiv 0$ jest rozwiązaniem osobliwym.

### Twierdzenie o całkowej postaci równania różniczkowego

Niech $f$ ciągła. Wtedy $y \in C^1(I)$, gdzie $I$ jest przedziałem, spełnia zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \iff y \in C(I) \quad \text{i} \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \quad \text{dla } t \in I$$

**Dowód**

$\Longrightarrow$
$y' = f(t,y) \quad | \int_{t_0}^{t}$
$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$

$\Longleftarrow$
$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$ jest klasy $C^1$
więc różniczkujemy

**Jak rozwiązać równanie całkowe?**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \quad t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) = I$$

gdzie $y(t)$ jest **niewiadomą funkcją**.

Niech $X = \{w \in C(I) \mid w(t_0) = y_0\}$.
Niech $P$ będzie określone na X wzorem $(Pw)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))ds$

Wtedy $P : X \to X$.
Wtedy $y$ jest rozwiązaniem r.r. $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_s) = y_0 \end{cases} \iff y$ jest pkt. stałym $P$ tj. $y = Py$.

Przy odpowiednich założeniach można pokazać, że $P$ jest kontrakcją na pewnej podprzestrzeni $X$.
Zatem z tw. Banacha o punkcie stałym, punkt stały $y$ jest granicą ciągu iteracji $P$ tj.

$$y_{n+1} = Py_n \quad \text{i wtedy} \quad y_n \to y \quad \text{gdy } y = Py$$

Def. Ciąg $y_{n+1} = Py_n$ nazywamy **ciągiem przybliżeń Picarda**.

**Przykład**

**Wyznaczyć ciąg przybliżeń Picarda dla zagadnienia** $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Postać całkowa:
$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)ds$
$f(t,y) = y$
$y_0 = y(0) = 1$
Wzór iteracyjny: $y_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t y_n(s)ds$

$y_0(t) = 1$
$y_1(t) = 1 + \int_0^t 1ds = 1 + t$
$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$
$y_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$
$\vdots$
$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ hipoteza (przez indukcję można dowieść)

Wtedy $y_n \to y$ na $[-a, a]$ $\forall_{a>0}$

Zatem $y(t) = e^t$ *(szereg zbiega do* $e^t$*)*.