AM3-W1, 08.10.25

Topologia

Def.
X – zbiór. Rodzinę zbiorów $\mathcal{T} \subset 2^X$ nazywamy topologią $\Leftrightarrow$
a) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
b) $\forall_{\alpha \in A}\, U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\} \in \mathcal{T}$
c) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

Zbiory należące do $\mathcal{T}$ nazywamy otwartymi.
$A^c \in \mathcal{T} \Rightarrow A$ jest domknięty.

Przykład
$\mathcal{T} = 2^X \leftarrow$ topologia dyskretna
$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \leftarrow$ topologia antydyskretna

Przestrzeń metryczna

Def.
Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, d), gdzie X to zbiór, a $d : X \times X \to [0, \infty)$ to funkcja, zwana metryką, spełniająca następujące warunki:
(1) $d(x, y) = d(y, x)$,
(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.
$A \subset X$ jest otwarty, gdy
$$\forall_{x_0 \in A}\, \exists_{r>0}\, B(x_0, r) \subset A.$$

ad.b.
$x_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Leftrightarrow \exists_{\alpha_0 \in A}\, x_0 \in U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists_{r>0}\, B(x_0, r) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$

ad.c.
$x_0 \in U \cap \widehat{U} \Rightarrow \exists_{r, \widehat{r}>0}\, B(x_0, r) \subset U,\ B(x_0, \widehat{r}) \subset \widehat{U} \Rightarrow B(x_0, \min\{r, \widehat{r}\}) \subset U \cap \widehat{U}.$

($\mathcal{T}_d$ nazywamy topologią zadaną przez metrykę d, jeśli zachodzi: $U \in \mathcal{T}_d \iff \forall_{x \in U} \exists_{\varepsilon>0} B(x, \varepsilon) \subset U$)

Wnętrze i dokmnięcie zbioru

Def.
Wnętrzem zbioru A nazwiemy sumę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A:
$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$$

Def.
Domknięciem A nazywamy przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A:
$$\overline{A} = \bigcap \{F : F^c \in \mathcal{T}, F \supset A\}$$

Stwierdzenie o wnętrzu i domknięciu

a) $\operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A}$
b) $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}, (\overline{A})^c \in \mathcal{T}$
c) $\operatorname{int} A \supset \{x \in A : \exists_{x \in U \in \mathcal{T}}\, U \subset A\}$
d) $\overline{A} = (\operatorname{int} A^c)^c$

ad. a
$x \in \operatorname{int} A \Rightarrow \exists_{U \in \mathcal{T}}\, x \in U \subset A$
$\overline{A} = \bigcap\{F : F^c \in \mathcal{T},\, F \supset A\} \Rightarrow A \subset \overline{A} \Rightarrow \operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A}.$

ad. b
$\operatorname{int} A = \bigcup\{U \in \mathcal{T} : U \subset A\} \in \mathcal{T}$
$\overline{A}^c = (\bigcap\{F : F^c \in \mathcal{T},\, F \supset A\})^c = \bigcup\{F^c : F^c \in \mathcal{T},\, F^c \subset A^c\} = \bigcup\{U \in \mathcal{T} : U \subset A^c\} = \operatorname{int} A^c$

ad. c
$x \in \operatorname{int} A \Leftrightarrow x \in \bigcup\{U \in \mathcal{T} : U \subset A\} \Rightarrow \exists_{U \in \mathcal{T}}\, x \in U \subset A.$
$\exists_{U \subset A, U \in \mathcal{T}}\, x \in U \Rightarrow x \in \bigcup\{U \in \mathcal{T} : x \in U \subset A\} = \operatorname{int} A.$

ad. d
Rachunek z ad.b. pokazuje $\overline{A} = (\operatorname{int} A^c)^c$.

Wniosek

$x \in \overline{A}^c \iff \exists_{U \in \mathcal{T}}\, x \in U \subset A^c$ (wynika z d) i c) stw., bo $\exists_{U \in \mathcal{T}}\, x \in U \subset A^c \iff x \in \operatorname{int} A^c$)

Brzeg

Def.
Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$

Wniosek
$x \in \partial A \iff \forall_{x \in U \in \mathcal{T}}\, U \cap A \neq \emptyset, U \cap A^c \neq \emptyset$

Dowód
$x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$, *ale* $x \notin \operatorname{int} A$.
Gdyby $\exists_{x \in U \in \mathcal{T}}\, U \cap A = \varnothing \Rightarrow U \subset A \Rightarrow x \in \operatorname{int} A \Rightarrow x \in \overline{A}^c$ sprzeczność
$U \cap A^c = \varnothing \Rightarrow U \subset A \Rightarrow x \in U \subset A \Rightarrow x \in \operatorname{int} A$ sprzeczność $\square$

Twierdzenie o trichotomii

Tw.
Dla każdego zbioru A przestrzeń X rozpada się na sumę trzech rozłącznych zbiorów:

$$X = \operatorname{int}(A) \sqcup \operatorname{int}(A^c) \sqcup \partial A.$$

Przykład
$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset, \operatorname{int} \mathbb{Q}^c = \emptyset, \operatorname{int} \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Zbiór gęsty

Def.
A jest gęsty w $X \iff \overline{A} = X$

Zbiór graniczny

Def.
Zbiorem granicznym nazywamy $Lim(x_n)_{n=1}^{\infty} := \{x_0 \in X : \forall_{x_0 \in U \in \mathcal{T}}\, \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} < \infty\}.$

Przeliczalna baza otoczeń

Def.
Mówimy, że x_0 ma przeliczalną bazę otoczeń $\iff \exists_{\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}}\, \forall_n\, x_0 \in x_n \,\wedge\, \forall_{x \in U \in \mathcal{T}}\, \exists_n\, V_n \subset U$

Def.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ ma przeliczalną bazę otoczeń (pierwszy warunek przeliczalności) $\iff$ każdy punkt $x \in X$ ma przeliczalną bazę otoczeń.

Uwaga
Przestrzenie metryczne mają przeliczalne bazy otoczeń.

Przykłady
1. $\mathcal{T} = 2^X$
$x_k \in \Lambda(x_n) \iff \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0}\ x_n = x_0$
2. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
$\Lambda(x_n) = X$

Topologia Hausdorffa

Def.
Parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy **topologią Hausdorffa**, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall_{x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2}\ \exists_{U_1 \ni x_1, U_2 \ni x_2, U_1, U_2 \in \mathcal{T}}\ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Uwaga
Kada przestrzeń metryczna jest przestrzenią Hausdorffa.

$d_0 = d(x, \hat{x}) > 0$
$U = B(x, \frac{d_0}{3}),\ \ \hat{U} = B(\hat{x}, \frac{d_0}{3})$.

Fakt
Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest prz. Hausdorffa, to dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $\#Lim(x_n) \leq 1$.

Dowód
Przypuśćmy, że $x, \hat{x} \in Lim(x_n),\ x \neq \hat{x}$. Wybieramy $U, \hat{U}$.

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \wedge \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \hat{U}\} = \varnothing \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \hat{U}\} = \mathbb{N}.$$

Wobec tego jeden z tych zbiorów jest nieskończony, przez co odpowiedni punkt nie należy do $Lim(x_n)$. $\square$

AM3-W2, 08.10.25

Domknięcie ciągowe

Def.
Domknięciem ciągowym zboru A nazywamy:

$$\mathrm{scl}(A) := \{x_0 \in X : \exists_{(x_n)_{n=1}^{\infty}} \forall_n x_n \in A,\ x_0 \in Lim(x_n)\}.$$

Uwaga

$$A \subset scl(A)$$

Twierdzenie o domknięciu ciągowym
Dla dowolnego zbioru A, $\mathrm{scl}(A) \subset \overline{A}$, a jeśli (X, d) jest prz. metryczną, to $\mathrm{scl}(A) = \overline{A}$.

Dowód

Przypuśćmy, że $\overline{A}^c = \mathrm{int}\, A^c$. Przypuśćmy, że $x_0 \in \overline{A}^c = \mathrm{int}\, A^c$.
Wtedy $\exists_{\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}}\ \mathcal{U} \cap A = \emptyset$.
$\forall (x_n):\ \forall x_n \in A\ \ \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin \mathcal{U}\} = \mathbb{N}$, czyli $x_0 \notin \mathrm{Lim}(x_n)$.
($\overline{A}^c \subset (\mathrm{scl}\, A)^c \quad \wedge \quad \overline{A} \supset \mathrm{scl}\, A$)

W drugą stronę:

$x_0 \in \overline{A}$, $\{V_n\}$ – jest bazą otoczeń x_0.
Z tw. o trichotomii $\overline{A} = \mathrm{int}\, A \sqcup \partial A$, stąd wynika, że
$\forall x_0 \in \mathcal{U} \in \mathcal{T}\ \ \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$. Dla każdego n wybieramy $x_n \in V_n \cap A$ (pewnik wyboru).
Pokażemy, że $x_0 \in \mathrm{Lim}(x_n)$. Weźmy dowolne $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{U} \ni x_0$.
Z założenia PBO, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : V_{n_0} \subset \mathcal{U}$.
Załóżmy też uwagę, że V_n jest ciągiem zstępujących otoczeń: $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \ldots$
Wobec tego $\mathcal{U} \supset V_n$ dla wszystkich $n \geq n_0$.
Wobec tego $x_n \notin \mathcal{U} \Rightarrow \forall_{n \geq n_0}\ x_n \notin V_n$.
Ale z definicji ciągu (x_n) widzimy, że $x_n \in V_n$. Wobec tego $x_n \notin \mathcal{U} \Rightarrow n < n_0$
$\Rightarrow \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin \mathcal{U}\} < n_0 < \infty \Rightarrow x_0 \in \mathrm{Lim}(x_n)$ $\square$

Wniosek
Kryterium domkniętości zbioru w przestrzeni metrycznej: $A = \mathrm{scl}(A)$

Funkcja ciągła

Def.
Funkcję $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywamy **ciągłą**, jeżeli przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty, tzn.

$$\forall_{U \in \mathcal{T}_Y}\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Tw. o równowanych warunkach ciągłości
Jeśli $f : X \to Y$ jest ciągła, to dla dowolnego $x \in X$ spełniony jest war. Heinego:
(H) $\forall (x_n)\, \forall n\ x_n \in X,\ x_0 \in \mathrm{Lim}(x_n) \ \Rightarrow\ f(x_0) \in \mathrm{Lim}(f(x_n))$.
Jeśli dodatkowo topologia X pochodzi od pewnej metryki, to war. Heinego implikuje ciągłość.

Dowód:

Weźmy dowolne otoczenie otwarte $V = f(x_0)$.
$\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \notin V\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin f^{-1}(V)\}$.
Ale $f^{-1}(V)$ jest otwartym otoczeniem x_0, i wobec tego
$\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin f^{-1}(V)\} < \infty$. Zatem $f(x_0) \in \mathrm{Lim}(f(x_n))$.

$(H) \Rightarrow (C)$ przy założeniu metryczności:
Pokażemy, że dla dowolnego $H \subset Y$ domkniętego $f^{-1}(H) = (f^{-1}(H))^c$ to otrzymujemy warunek ciągłości.
$f(H^c) \supset (f(H))^c$.
Pokażemy, że $\mathrm{scl}(f^{-1}(H)) \subset f^{-1}(H)$.
Przypuśćmy, że $x_0 \in \mathrm{scl}(f^{-1}(H))$.
$\exists_{(x_n)} \forall_n \ x_n \in f^{-1}(H), \ x_0 \in \mathrm{Lim}(x_n)$.
Z warunku Heinego $f(x_0) \in \mathrm{Lim}(f(x_n))$.
Ale punkty $f(x_n)$ należą do H dla dowolnego n. Wobec tego $f(x_0) \in \mathrm{Lim}(f(x_n)) \subset \mathrm{scl}\, H \subset \overline{H} = H$.
Pokazaliśmy zatem, że $\mathrm{scl}(f^{-1}(H)) \subset f^{-1}(H)$.
Ponieważ X jest metryzowalne, to z tw. o domknięciu ciągowym:
$\mathrm{scl}(f^{-1}(H)) = \overline{f^{-1}(H)} \subset f^{-1}(H)$, co implikuje $f^{-1}(H) = \overline{f^{-1}(H)}$ $\square$

Sposoby zadania topologii

Def.
Bazą topologii $\mathcal{T}$ nazywamy taką rodzinę $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, że dowolny zbiór $U \in \mathcal{T}$ ma postać

$$U = \bigcup\{V \in \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}.$$

Zadawanie topologii przez bazę
$\mathcal{B} \subset 2^X$. Definiujemy $\mathcal{T}(\mathcal{B}) := \{\bigcup\{V \in \mathcal{B}_0 : \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}\}\}$

Przykłady
- W przestrzeni metrycznej $\mathcal{T}(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}) = \mathcal{T}$.
- $\mathcal{B} = \{[a, b] : a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$: A i B tak, C nie, bo $[a, b] \cap [b, c] = \{b\} \notin \mathcal{B}$.

Fakt
$\mathcal{T}(\mathcal{B})$ jest topologią $\Leftrightarrow$
a. $\bigcup\{U \in \mathcal{B}\} = X$
b. $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}, \quad U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$

Podbaza
Rozważmy rodzinę $\mathcal{P} \subset 2^X$.
$\mathcal{B} := \left\{\bigcap_{i=1}^n V_i : V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{P}\right\}$

Uwaga
Wtedy $\mathcal{P}(B)$ jest zawsze topologią.

Iloczyn kartezjański

Def.
$(X_\alpha)_{\alpha \in A}$

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{\varphi : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : \varphi_\alpha \in X_\alpha\right\}$.

Przypuśćmy, że $\forall \alpha \ X_\alpha = X$. Wtedy $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = X^A$.

Pewnik wyboru:
$\forall_{\alpha \in A} \ X_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$.

$\exists \varphi : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha, \ \forall \alpha \in A \ \varphi_\alpha \in X_\alpha$ (detektor)

AM3-W3, 15.10.25 (bez uzupełnionych dowodów)

$(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$, $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$

Definicja cylindra otwartego

Cylindrem (otwartym) w X nazywamy zbiór:
$C_\alpha(U_\alpha) = \{\varphi \in X : \varphi_\alpha \in U_\alpha\}$, $U_\alpha \in \mathfrak{T}_\alpha$

Definicja Topologii Tichonowa (produktowej)

Topologia Tichonowa na X jest zadana przez podbazę
$\mathcal{P}_X = \{C_\alpha(U_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \in \mathfrak{T}_\alpha\}$
$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(\mathcal{P}_X) = \{\bigcap_{j=1}^n C_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}) : n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_i \in A, U_{\alpha_i} \in \mathfrak{T}_{\alpha_i}\}$
Dla produktu skończenie wielu przestrzeni $X_1, \ldots, X_n$,
$\mathcal{B}_X = \{\prod_{j=1}^n U_j : \forall_j\ U_j \in \mathfrak{T}_j\}$

Stwierdzenie o zbieżności w topologii Tichonowa

Jeśli dany jest ciąg $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ w X, to $\varphi_0 \in \mathrm{Lim}(\varphi_n)_{n=1}^\infty \iff \forall_{\alpha \in A}\ \varphi_0(\alpha) \in \mathrm{Lim}(\varphi_k(\alpha))_{k=1}^\infty$
$(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ - prz. metryczne , gdzie $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathfrak{T}$ - top. Tichonowa

Definicja metryki produktowej

$d_\pi((x_i)_{i=1}^{\hat{n}}, (\hat{x}_i)_{i=1}^{\hat{n}}) = \max\{d_i(x_i, \hat{x}_i) : i = 1, \ldots, \hat{n}\}$

Tw. o równości topologii dla skończonego produktu

$\mathfrak{T}_X = \mathfrak{T}_{d_\pi}$, $x_0 = (x_1, \ldots, x_{\hat{n}})$

Definicja pokrycia i podpokrycia

$(X, \mathfrak{T})$, $Z \subset X$. Podrodzina zbiorów otwartych $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ w X
nazywa się **pokryciem (otwartym)** zbioru $Z \iff Z \subset \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$.
Powiemu, że $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \hat{A}}$ jest **podpokryciem** $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \iff \hat{A} \subset A$ i jest pokryciem

Definicja zbioru zwartego

Zbiór $K \subset X$ nazywamy **zwartym** $\iff$ dla każdego pokrycia otwartego
K istnieje jego podpokrycie skończone.

Twierdzenie o zbiorach zwartych i domkniętych

$K \subset X$, $(X, \mathfrak{T})$
a) Jeśli X jest zwarta, a K domknięty, to K jest zwarty
b) Jeśli X jest Hausdorffa i K jest zwarty, to K jest domknięty

AM3-W4, 15.10.25 (bez uzupełnionych dowodów)

Twierdzenie Tichonowa

Jeśli $\forall_{\alpha\in A}$ $(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ jest zwarta, to $\prod\{X_i : i \in A\}$ jest zwarty.

Twierdzenie o funkcjach ciągłych na zbiorach zwartych

$f : X \to Y$ ciągła, $K \subset X$ jest zwarty.
Wówczas:
a) $f(K)$ jest zwarty w Y.
b) Jeśli $Y = \mathbb{R}$, to f przyjmuje swoje kresy na K:
$\exists_{x_{\min}\in K}\ f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in K\}$
$\exists_{x_{\max}\in K}\ f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in K\}$
c) Jeśli (X, d_X) oraz (Y, d_Y) są prz. met. , to f jest jednostajnie ciągła na K:
$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in K}\ d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

(X, d), $Z \subset X$, ustalmy $\varepsilon > 0$.

Definicja sieci

Zbiór skończony $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset X$ jest **siecią o prześwicie** ε dla
$Z \iff \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \varepsilon) \supset Z.$

Definicja zbioru całkowicie ograniczonego

Zbiór $Z \subset X$ nazywamy **całkowicie ograniczonym** $\iff$
$\iff \forall_{\varepsilon>0}$ istnieje sieć o prześwicie ε.

Uwaga

Jeśli istnieje sieć o prześwicie ε, to istnieje sieć o prześwicie
2ε taka, że $\forall_i\ x_i \in Z$.

Definicja ciągu zdystansowanego

Ciąg (x_n) nazywamy **zdystansowanym o pewne** $\varepsilon > 0 \iff$
$\forall_{n,\hat{n}}\ n \neq \hat{n}\ d(x_n, x_{\hat{n}}) \geq \varepsilon.$
zdystansowany $\iff \exists_{\varepsilon>0}$ zdystansowany o ε.

Twierdzenie o kryterium całkowitej ograniczoności

Zbiór jest **całkowicie ograniczony** $\iff$ nie istnieje w nim ciąg zdystansowany.

AM3-W5, 16.10.25 (bez uzupełnionych dowodów)

Definicja punktu skupienia ciągu

$(X, \mathfrak{T})$, (x_n), $x_n \in X$.
Powiemu, że $x_0 \in X$ jest **punktem skupienia ciągu** $(x_n) \iff$
$x_0 \in \mathrm{Acc}(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x \in X : \forall_{x \in U \in \mathfrak{T}} \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} = \infty\}$
Uwaga: $\mathrm{Lim}(x_n) \subset \mathrm{Acc}(x_n)$

Twierdzenie (o warunkach zwartości w przestrzeni metrycznej)

(X, d), $K \subset X$. NWSR:
a) K jest zwarty
b) Każdy ciąg (x_n) o wyrazach z K ma punkt skupienia należący do K.
c) Każdy ciąg (x_n) o wyrazach z K ma podciąg zbieżny do granicy w K.
d) K jest całkowicie ograniczony i zupełny jako przestrzeń użytkowa

Twierdzenie o całkowitej ograniczoności w przestrzeniach $\mathbb{R}^m$

Jeśli $K \subset \mathbb{R}^m$ jest ograniczony, to jest całkowicie ograniczony.

Twierdzenie Heinego-Borela

Zbiór $K \subset \mathbb{R}^m$ jest **zwarty** $\iff$ **ograniczony** i **domknięty**

Definicja cegły w $\mathbb{R}^n$

$C = \prod_{i=1}^{n}[c_i, \hat{c}_i]$, $c_i \leq \hat{c}_i$

Definicja objętości

Objętością cegły nazywamy liczbę: $\mathrm{Vol}(C) = \prod_{i=1}^{n}(\hat{c}_i - c_i)$

Lemat (szkolny)

Zachodzi równość
$(a_{1,1}+\cdots+a_{1,p_1})(a_{2,1}+\cdots+a_{2,p_2})\ldots(a_{m,1}+\cdots+a_{m,p_m}) = \prod_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_j} a_{j,k} = \sum_{\varphi \in \prod_{j=1}^{m}\{1,\ldots,p_j\}} \prod_{j=1}^{m} a_{j,\varphi(j)}$
(rozdzielność mnożenia względem dodawania).

AM3-W6, 22.10.25

AM3-W7, 22.10.25

AM3-W8, 23.10.25

AM3-W9, 29.10.25

AM3-W10, 29.10.25

AM3-W11, 30.10.25

X