

Definicja (przestrzeni topologicznej).

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę (X, \mathcal{T}) , gdzie X to zbiór, a $\mathcal{T} \subset 2^X$ oraz spełnione są warunki:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- (2) $\forall_{\alpha \in A} U_{\alpha} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \{U_{\alpha} : \alpha \in A\} \in \mathcal{T}$,
- (3) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Zbiory należące do topologii nazywamy **otwartymi**.

Dopełnienia zbiorów otwartych nazywamy zbiorami **domkniętymi**.

$\mathcal{T} = 2^X \leftarrow$ **topologia dyskretna**

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \leftarrow$ **topologia antydyskretna**

Definicja (przestrzeni metrycznej).

Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, d) , gdzie X to zbiór, a $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ to funkcja, zwana **metryką**, spełniająca następujące warunki:

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Trzecia własność jest równoważna **dolnej nierówności trójkąta**:

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|.$$

Definicja (topologii zadanej przez metrykę, kuli).

Rodzinę \mathcal{T}_d nazywamy **topologią zadaną przez metrykę d** , jeśli zachodzi:

$$U \in \mathcal{T}_d \iff \forall_{x \in U} \exists_{\varepsilon > 0} B(x, \varepsilon) \subset U,$$

gdzie

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Twierdzenie (o topologii zadanej przez metrykę).

Rodzina \mathcal{T}_d jest *topologią*.

Definicja (topologii metryzowalnej).

Jeśli możemy znaleźć metrykę zadającą topologię, to nazywamy tę topologię **metryzowalną**.

Definicja (wnętrza zbioru).

Wnętrzem zbioru A nazwiemy sumę wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A :

$$\text{int}(A) = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$$

Definicja (domknięcia zbioru).

Domknięciem A nazywamy przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A :

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F^c \in \mathcal{T}, F \supset A\}$$

Stwierdzenie (o wnętrzu i domknięciu).

- a) $\text{int } A \subset A \subset \overline{A}$
- b) $\text{int } A \in \mathcal{T}, (\overline{A})^c \in \mathcal{T}$
- c) $\text{int } A \supset \{x \in A : \exists_{x \in U \in \mathcal{T}} U \subset A\}$
- d) $\overline{A} = (\text{int } A^c)^c$

Wniosek

$$x \in \overline{A}^c \iff \exists_{U \in \mathcal{T}} x \in U \subset A^c \quad (\text{wynika z d) i c) stw., bo } \exists_{U \in \mathcal{T}} x \in U \subset A^c \iff x \in \text{int } A^c)$$

Definicja (Brzegu).

Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int } A$

Wniosek

$$x \in \partial A \iff \forall_{x \in U \in \mathcal{T}} U \cap A \neq \emptyset, U \cap A^c \neq \emptyset$$

Twierdzenie (o trójkpodziale).

Dla każdego zbioru A przestrzeń X rozpada się na sumę trzech rozłącznych zbiorów:

$$X = \text{int}(A) \sqcup \text{int}(A^c) \sqcup \partial A.$$

Przykład

$$\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset, \text{int } \mathbb{Q}^c = \emptyset, \text{int } \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Definicja (zbiór gęsty).

$$A \text{ jest gęsty w } X \iff \overline{A} = X$$

Przykład (Zbiór Cantora).

Zbiór Cantora: domknięty, nigdzie gęsty, puste wnętrze (konstr. geom: zaczynamy od $C_0 = \langle 0, 1 \rangle$, z C_0 usuwamy środkową $\frac{1}{3}$ i otrzymujemy C_1 , z każdego odcinka C_1 robimy to samo, \dots , powtarzamy tę procedurę w nieskończoność, zbiór Cantora to zbiór punktów, które pozostaną po wykonaniu ∞ wielu kroków, formalnie $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$

Definicja (zbioru granicznego).

Niech (X, \mathcal{T}) będzie przestrzenią topologiczną, a $(x_n) \in X$. Mówimy, że x_0 należy do **zbioru granicznego** ciągu (x_n) , jeżeli

$$\forall_{U \in \mathcal{T}, x_0 \in U} \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} < \infty.$$

Zbiór graniczny oznaczamy $\Lambda(x_n)$.

Definicja (przeliczalnej bazy otoczeń x_0).

$$\text{Mówimy, że } x_0 \text{ ma przeliczalną bazę otoczeń} \iff \exists_{\{V_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}} \forall_n x_0 \in x_n, \forall_{x \in U \in \mathcal{T}} \exists_n V_n \subset U$$

Definicja (przeliczalna baza otoczeń p. topologicznej).

Mówimy, że przestrzeń topologiczna (X, \mathcal{T}) ma przeliczalną bazę otoczeń (**pierwszy warunek przeliczalności**) \iff każdy punkt $x \in X$ ma przeliczalną bazę otoczeń.

Uwaga

Przestrzenie metryczne mają przeliczalne bazy otoczeń.

Przykłady

1. $\mathcal{T} = 2^X$
 $x_k \in \Lambda(x_n) \iff \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} x_n = x_0$
2. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
 $\Lambda(x_n) = X$

Definicja (topologii Hausdorffa).

Parę (X, \mathcal{T}) nazywamy **topologią Hausdorffa**, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall_{x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2} \exists_{U_1 \ni x_1, U_2 \ni x_2, U_1, U_2 \in \mathcal{T}} U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Uwaga.

Dla dowolnego ciągu (x_n) w topologii Hausdorffa zachodzi $\#\Lambda(x_n) \leq 1$.

Uwaga.

Dowolna przestrzeń metryczna jest przestrzenią Hausdorffa.

Definicja (domknięcia ciągłego).

Domknięciem ciągłym A nazywamy zbiór

$$\text{scl}(A) := \{x_0 \in X : \exists_{(x_n) \in A} x_0 \in \Lambda((x_n)_{n=1}^\infty)\}.$$

Twierdzenie (o domknięciu i domknięciu ciągłym).

Zachodzi zawieranie $\text{scl}(A) \subset \overline{A}$, a jeżeli topologia jest metryzowalna, to $\text{scl}(A) = \overline{A}$.

Uwaga.

Bez założenia metryzowalności równość nie jest prawdziwa.

Wniosek

Kryterium domkniętości zbioru w przestrzeni metrycznej: $A = \text{scl}(A)$

Definicja (funkcji ciągłej).

Funkcję $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywamy **ciągłą**, jeżeli przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty, tzn.

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Definicja (funkcji ciągłej w sensie Heinego).

Funkcję $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywamy **ciągłą w sensie Heinego**, jeżeli

$$\forall_{(x_n) \in X} x_0 \in \Lambda((x_n)_{n=1}^\infty) \implies f(x_0) \in \Lambda((f(x_n))_{n=1}^\infty),$$

gdzie w przestrzeniach Hausdorffa zbiór graniczny zamieniany jest na granicę.

Twierdzenie (o równoważnych warunkach ciągłości).

Jeśli f jest ciągła, to zachodzi warunek Heinego ciągłości. Jeśli topologia jest metryzowalna, to implikacja zachodzi też w drugą stronę.

Definicja (bazy topologii).

Bazą topologii \mathcal{T} nazywamy taką rodzinę $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, że dowolny zbiór $U \in \mathcal{T}$ ma postać

$$U = \bigcup \{V \in \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}.$$

Stwierdzenie (o bazie topologii \mathcal{T}_d).

Kule otwarte stanowią bazę w \mathcal{T}_d .

Definicja (podbazy topologii).

Rodzinę \mathcal{P} nazwiemy **podbazą** topologii \mathcal{T} , jeżeli zbiór \mathcal{B} taki, że

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap \{V \in \mathcal{P}' : \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}, \#\mathcal{P}' < \infty\} \right\}$$

jest bazą w \mathcal{T} .

Uwaga.

Zbiór \mathcal{B} zawiera całą przestrzeń X jako przecięcie pustej rodziny dla $\mathcal{P}' = \emptyset$. Przestrzeń ta jest również zamknięta ze względu na przecięcie dwóch zbiorów z \mathcal{B} . Wynika stąd, że każda rodzina $\mathcal{P} \subset 2^X$ określa pewną topologię na X .

Sposoby zadawania topologii

Przez bazę:

$\mathcal{B} \subset 2^X$. Definiujemy $\mathcal{T}(\mathcal{B}) := \{\bigcup\{V \in \mathcal{B}_0 : \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}\}\}$

Przykłady

W przestrzeni metrycznej $\mathcal{T}(\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}) = \mathcal{T}$.

$\mathcal{B} = \{[a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

$(0, 1) = \bigcup\{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$.

Topologia nie spełnia c), bo $[a, b] \cap [b, c] = \{b\}$.

Fakt

$\mathcal{T}(\mathcal{B})$ jest topologią \iff

a) $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$.

b) $\forall U, V \in \mathcal{B} \quad U \cap V \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$

Definicja (iloczynu kartezjańskiego).

Iloczyn kartezjański definiujemy jako

$$\prod_{\alpha \in A} X_{\alpha} := \{\varphi : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha} : \forall \alpha \in A \quad \varphi(\alpha) \in X_{\alpha}\}.$$

Pewnik wyboru

$$\forall \alpha \in A \quad X_{\alpha} \neq \emptyset \implies \prod_{\alpha \in A} \{X_{\alpha} : \alpha \in A\} \neq \emptyset$$

$\exists_{\varphi} \varphi : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha}, \forall \alpha \in A \quad \varphi(\alpha) \in X_{\alpha}$ (**selektor**)

$$(X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha), X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$$

Definicja cylindra otwartego

Cylindrem (otwartym) w X nazywamy zbiór:

$$C_\alpha(U_\alpha) = \{\varphi \in X : \varphi_\alpha \in U_\alpha\}, U_\alpha \in \mathfrak{T}_\alpha$$

Definicja Topologii Tichonowa (produktowej)

Topologia Tichonowa na X jest zadana przez podbazę

$$\mathcal{P}_X = \{C_\alpha(U_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \in \mathfrak{T}_\alpha\}$$

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(\mathcal{P}_X) = \{\bigcap_{j=1}^n C_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}) : n = 0, 1, 2, \dots, \alpha_i \in A, U_{\alpha_i} \in \mathfrak{T}_{\alpha_i}\}$$

Dla produktu skończenie wielu przestrzeni X_1, \dots, X_n ,

$$\mathcal{B}_X = \{\prod_{j=1}^n U_j : \forall_j U_j \in \mathfrak{T}_j\}$$

Stwierdzenie o zbieżności w topologii Tichonowa

Jeśli dany jest ciąg $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ w X , to $\varphi_0 \in \text{Lim}(\varphi_n)_{n=1}^\infty \iff \forall_{\alpha \in A} \varphi_0(\alpha) \in \text{Lim}(\varphi_k(\alpha))_{k=1}^\infty$
 $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ - prz. metryczne, gdzie $X = \prod_{i=1}^n X_i$, \mathfrak{T} - top. Tichonowa

Definicja metryki produktowej

$$d_\pi((x_i)_{i=1}^{\hat{n}}, (\hat{x}_i)_{i=1}^{\hat{n}}) = \max\{d_i(x_i, \hat{x}_i) : i = 1, \dots, \hat{n}\}$$

Tw. o równości topologii dla skończonego produktu

$$\mathfrak{T}_X = \mathfrak{T}_{d_\pi}, x_0 = (x_1, \dots, x_{\hat{n}})$$

Definicja pokrycia i podpokrycia

(X, \mathfrak{T}) , $Z \subset X$. Podrodzina zbiorów otwartych $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ w X

nazywa się **pokryciem (otwartym)** zbioru $Z \iff Z \subset \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$.

Powiemu, że $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \hat{A}}$ jest **podpokryciem** $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \iff \hat{A} \subset A$ i jest pokryciem

Definicja zbioru zwartego

Zbiór $K \subset X$ nazywamy **zwartym** \iff dla każdego pokrycia otwartego K istnieje jego podpokrycie skończone.

Twierdzenie o zbiorach zwartych i domkniętych

$K \subset X, (X, \mathfrak{T})$

a) Jeśli X jest zwarta, a K domknięty, to K jest zwarty

b) Jeśli X jest Hausdorffa i K jest zwarty, to K jest domknięty

Twierdzenie Tichonowa

Jeśli $\forall_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha)$ jest zwarta, to $\prod \{X_i : i \in A\}$ jest zwarty.

Twierdzenie o funkcjach ciągłych na zbiorach zwartych

$f : X \rightarrow Y$ ciągła, $K \subset X$ jest zwarty.

Wówczas:

a) $f(K)$ jest zwarty w Y .

b) Jeśli $Y = \mathbb{R}$, to f przyjmuje swoje kresy na K :

$$\exists_{x_{\min} \in K} f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in K\}$$

$$\exists_{x_{\max} \in K} f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in K\}$$

c) Jeśli (X, d_X) oraz (Y, d_Y) są prz. met., to f jest jednostajnie ciągła na K :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x, y \in K} d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(X, d) , $Z \subset X$, ustalmy $\varepsilon > 0$.

Definicja sieci

Zbiór skończony $\{x_1, \dots, x_p\} \subset X$ jest **siecią o prześwicie ε** dla

$$Z \iff \bigcup_{j=1}^p B(x_j, \varepsilon) \supset Z.$$

Definicja zbioru całkowicie ograniczonego

Zbiór $Z \subset X$ nazywamy **całkowicie ograniczonym** \iff

$$\iff \forall_{\varepsilon > 0} \text{ istnieje sieć o prześwicie } \varepsilon.$$

Uwaga

Jeśli istnieje sieć o prześwicie ε , to istnieje sieć o prześwicie

2ε taka, że $\forall_i x_i \in Z$.

Definicja ciągu zdystansowanego

Ciąg (x_n) nazywamy **zdystansowanym o pewne $\varepsilon > 0$** \iff

$$\forall_{n, \hat{n}} n \neq \hat{n} \implies d(x_n, x_{\hat{n}}) \geq \varepsilon.$$

zdystansowany $\iff \exists_{\varepsilon > 0}$ zdystansowany o ε .

Twierdzenie o kryterium całkowitej ograniczoności

Zbiór jest **całkowicie ograniczony** \iff nie istnieje w nim ciąg zdystansowany.

Definicja punktu skupienia ciągu

$(X, \mathfrak{T}), (x_n), x_n \in X$.

Powiemu, że $x_0 \in X$ jest **punktem skupienia ciągu** $(x_n) \iff$

$$x_0 \in \text{Acc}(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x \in X : \forall_{x \in U \in \mathfrak{T}} \#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} = \infty\}$$

Uwaga: $\text{Lim}(x_n) \subset \text{Acc}(x_n)$

Twierdzenie (o warunkach zwartości w przestrzeni metrycznej)

$(X, d), K \subset X$. NWSR:

- a) K jest zwarty
- b) Każdy ciąg (x_n) o wyrazach z K ma punkt skupienia należący do K .
- c) Każdy ciąg (x_n) o wyrazach z K ma podciąg zbieżny do granicy w K .
- d) K jest całkowicie ograniczony i zupełny jako przestrzeń użytkowa

Twierdzenie o całkowitej ograniczoności w przestrzeniach \mathbb{R}^m

Jeśli $K \subset \mathbb{R}^m$ jest ograniczony, to jest całkowicie ograniczony.

Twierdzenie Heinego-Borela

Zbiór $K \subset \mathbb{R}^m$ jest **zwarty** \iff **ograniczony i domknięty**

Definicja cegły w \mathbb{R}^n

$$C = \prod_{i=1}^n [c_i, \hat{c}_i], c_i \leq \hat{c}_i$$

Definicja objętości

Objętością cegły nazywamy liczbę: $\text{Vol}(C) = \prod_{i=1}^n (\hat{c}_i - c_i)$

Lemat (szkolny)

Zachodzi równość

$$(a_{1,1} + \dots + a_{1,p_1})(a_{2,1} + \dots + a_{2,p_2}) \dots (a_{m,1} + \dots + a_{m,p_m}) = \prod_{j=1}^m \sum_{k=1}^{p_j} a_{j,k} = \sum_{\varphi \in \prod_{j=1}^m \{1, \dots, p_j\}} \prod_{j=1}^m a_{j,\varphi(j)}$$

(rozdzielność mnożenia względem dodawania).

AM3-W6, 22.10.25

AM3-W7, 22.10.25