PONTO CRÍTICO: $\nabla f(a,b)=0$

(a,b) É MÁX. OU MÍN. SE (a,b) É CRÍTICO

EX: $f(x,y)=x^2+y^2+2x-6y+14$

$$\nabla f(x,y)=(2x-2,\,2y-6)=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

$f(1,3)=4$

$f(0,0)=14$

EX: $f(x,y)=-x^2+y^2$

$$\nabla f(x,y)=(-2x,\,2y)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$f(0,1)=1>0=f(0,0)$

$f(1,0)=-1<0=f(0,0)$

PORTANTO, $(0,0)$ NÃO É MÁX. NEM MÍN.

OBS: $\nabla f(a,b)=0$, E $f(a,b)$ NÃO É MÁX. NEM MÍN., (a,b) É CHAMADO PONTO DE SELA.

TEOREMA: (TESTE DAS SEGUNDAS DERIVADAS).

SEJA $f(x,y) \in \mathcal{C}^2$ (DUAS VEZES DIFERENCIÁVEL COM SEGUNDAS DERIVADAS CONTÍNUAS), E $\nabla f(a,b)=0$. SEJA: D = DETERMINANTE

$$D=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$$

a) SE $D>0$ E $f_{xx}(a,b)>0 \Rightarrow f(a,b)$ É MÍN. LOC.

b) SE $D>0$ E $f_{xx}(a,b)<0 \Rightarrow f(a,b)$ É MÁX. LOC.

c) $D<0 \Rightarrow (a,b)$ É PONTO DE SELA

EX: $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

$$\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow (4x^3-4y, 4y^3-4x)=0$$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

$(0,0) \to 0^3 = 0 \to 0 = 0$

$0^3 = 0 \to 0 = 0$

$(1,1) \to 1^3 = 1 \to 1 = 1$

$1^3 = 1 \to 1 = 1$

$(-1,-1) \to (-1)^3 = -1 \to -1 = -1$

$(-1)^3 = -1 \to -1 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}(x,y) = 12x^2 \\ \\ f_{yy}(x,y) = 12y^2 \\ \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx} = -4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 \\ \\ D = 12x^2 \cdot 12y^2 - (-4)^2 \end{array}$$

$D = 144x^2y^2 - 16$

$D(0,0) = 144 \cdot 0 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$

$D(1,1) = 144 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - 16 = 144 - 16 = 128 > 0$

$D(-1,-1) = 144 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^2 - 16 = 144 - 16 = 128 > 0$

$f_{xx}(1,1) = 12 = f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$

↳ $(1,1)$ e $(-1,-1)$ SÃO PONTOS DE MÍNIMO LOCAL

↳ e $f(1,1) = f(-1,-1) = -1$ é o PONTO DE MÍNIMO LOCAL

Ex: $f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$

$$\nabla f(x,y) = 0 \begin{cases} 20xy - 10x - 4x^3 = 0 \\ 10x^2 - 8y - 8y^3 = 0 \end{cases}$$

EX: DETERMINE A MENOR DISTÂNCIA ENTRE E O PONTO $P(1,0,-2)$ E O PLANO $x+2y+z-4=0$

$$d(P,Q)=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2}$$

$$(x,y,z)\in\pi: x+2y+z=4 \Rightarrow z=4-x-2y$$

$$d(P,\pi)=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2}$$

$$d^2(x,y)=(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2$$

$$\nabla d=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)-2(6-x-2y)=0 \\ 2y-4(6-x-2y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-2-12+2x+4y=0 \\ 2y-24+4x+8y=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4x-4y=14 \\ 4x+10y=24 \\ \hline 6y=10 \end{array}$$

$$y=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\boxed{x=\frac{11}{6}}$$

$D = 4 \cdot 10 - 4^2 = 24 > 0$

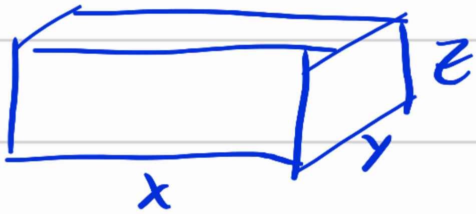
$f_{xx}(x, y) = 4 > 0$

PORTANTO $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$ É PONTO DE MÍNIMO

$d\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{6}\right) = \sqrt{\left(\frac{11}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(6 - \frac{11}{6} - 2 \cdot \frac{5}{3}\right)^2}$

EX: $12\,m^2$ DE PAPEL

MÁXIMO VOLUME?



$$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$$

$$A_L = xy + 2yz + 2xz = 12\,m^2$$

$$z = \frac{12 - xy}{2y + 2x}$$

$$V(x,y) = xy \cdot \left(\frac{12 - xy}{2y + 2x}\right) = \frac{12xy - x^2y^2}{2y + 2x}$$

$$\nabla V(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{(12y - 2xy^2)(2y+2x) - 2(12xy - x^2y^2)}{(2y+2x)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{(12x - 2x^2y)(2y+2x) - 2(12xy - x^2y^2)}{(2x+2y)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24y+24xy-4xy^3-4x^2y^2-24xy+2x^2y^2=0 \\ 24xy-4x^2y^2+24x^2-4x^3y-24xy+2x^2y^2=0 \end{cases}$$