MÉTODOS DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

PARA DETERMINAR OS VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO $f(x,y,z)$ SUJEITA À RESTRIÇÃO $g(x,y,z)=K$:

a) DETERMINE (x,y,z) TAIS QUE

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{cases}$$

b) CALCULE f NOS PONTOS ENCONTRADOS EM a). O MAIOR VALOR É O MÁXIMO E O MENOR VALOR É O MÍNIMO

EXEMPLO: MAXIMIZAR $V = XYZ$ SUJEITO À RESTRIÇÃO $g(x,y,z) = XY + 2XZ + 2YZ = 12$

$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \cdot \Delta g \\ g = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (YZ, XZ, XY) = \lambda \cdot (Y+2Z, X+2Z, 2X+2Y) \\ XY + 2Z(X+Y) = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda y + 2\lambda z & \text{I} \quad \cdot x \\ xz = \lambda(x+2z) & \text{II} \quad \cdot y \\ xy = \lambda\cdot(2x+2y) & \text{III} \quad \cdot z \\ xy + 2z(x+y) = 12 & \text{IV} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xyz = \lambda x(y+2z) & 1 \\ xyz = \lambda y(x+2z) & 2 \\ xyz = 2\lambda z(x+y) & 3 \\ xy + 2z(x+y) = 12 & 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{SE } \lambda = 0 \text{ ENTÃO } yz = xz,\ xy = 0 \text{ e } V = 0}$$

P/ $\lambda \neq 0$

1 - 2

$$\lambda(\cancel{xy} + 2xz - \cancel{xy} - 2yz) = 0$$

$$2\lambda z(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$$

2 - 3

$(\lambda yx + 2\lambda yz) - (2\lambda zx - 2\lambda zy) = 0$

$\lambda(y^2 + \cancel{2y}z - 2\cancel{z}y - 2zy) = \lambda y(y - 2z)$

$y = 2z$

SUBSTITUIR EM 4

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$\boxed{x = 2}$ $\quad (2, 2, 1)$

EX: DETERMINE OS VALORES EXTREMOS DE $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ NO CIRCULO $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ 2y = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1-\lambda)=0 & (1) \\ y(2-\lambda)=0 & (2) \\ x^2-y^2=1 & (3) \end{cases}$$

$x=0$ ou $\lambda=1$

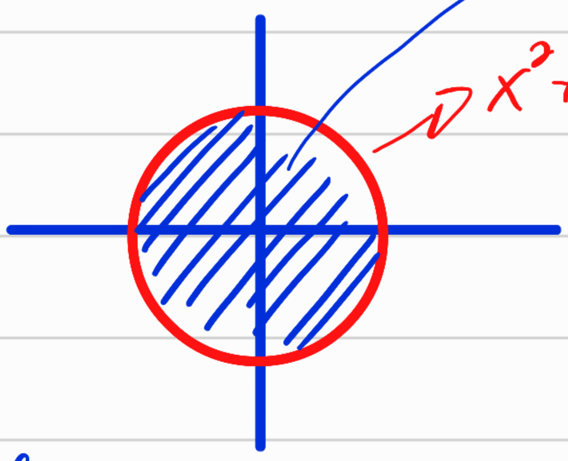
P/ $x=0 \xrightarrow{(3)} y^2=1 \Rightarrow \boxed{y=\pm 1}$

P/ $x\neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda=1 \xrightarrow{(2)} y=0 \xrightarrow{(3)} \boxed{x=\pm 1}$

$f(\pm 1,0)=1$ é mínimo

$f(0,\pm 1)=2$ é máximo

Ex: $f(x,y)=x^2+2y^2$ $\quad x^2+y^2\leq 1$



$\rightarrow x^2+y^2=1$

$\nabla f=0$ + pontos da fronteira

TEOREMA: SEJA $f(x,y)$ CONTÍNUA EM UM CONJUNTO $D \subset \mathbb{R}^2$ FECHADO E LIMITADO. ENTÃO f ASSUME UM VALOR MÁXIMO ABSOLUTO E UM VALOR MÍNIMO ABSOLUTO.

→ PROCEDIMENTO:

a) DETERMINE f NOS PONTOS CRÍTICOS

b) DETERMINE f NOS PONTOS DA FRONTEIRA DE D

c) O MAIOR DOS VALORES É O MÁXIMO E O MENOR É O MÍNIMO

EX: QUAIS PONTOS DA ESFERA $\underbrace{x^2+y^2+z^2=4}_{g}$ ESTÃO MAIS PRÓXIMAS E MAIS DISTANTES DO PONTO $(3,1,-1)$

$$d=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

$$d^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=f(x,y,z)$$

$$\begin{cases} \cancel{2}(x-3)=\lambda\cdot\cancel{2}x \\ \cancel{2}(y-1)=\lambda\cdot\cancel{2}y \\ \cancel{2}(z+1)=\lambda\cdot\cancel{2}z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-x\lambda=3 \\ y-y\lambda=1 \\ z-z\lambda=-1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{1-\lambda} \\ y=\dfrac{1}{1-\lambda} \\ z=-\dfrac{1}{1-\lambda} \\ z^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2=4$$

$$3^2+1+1=4(1-\lambda)^2$$

$$(1-\lambda)^2=\frac{11}{4}$$

$$1-\lambda=\pm\sqrt{\frac{11}{4}}$$

x

y

z