TEOREMA FUNDAMENTAL DAS INTEGRAIS DE LINHA

SEJA C UMA CURVA SUAVE DADA PELA FUNÇÃO VETORIAL $\alpha(t)$, $t \in [a,b]$. SEJA f UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL DE DUAS OU TRÊS VARIÁVEIS CUJO VALOR GRADIENTE ∇f É CONTÍNUO EM C. ENTÃO:

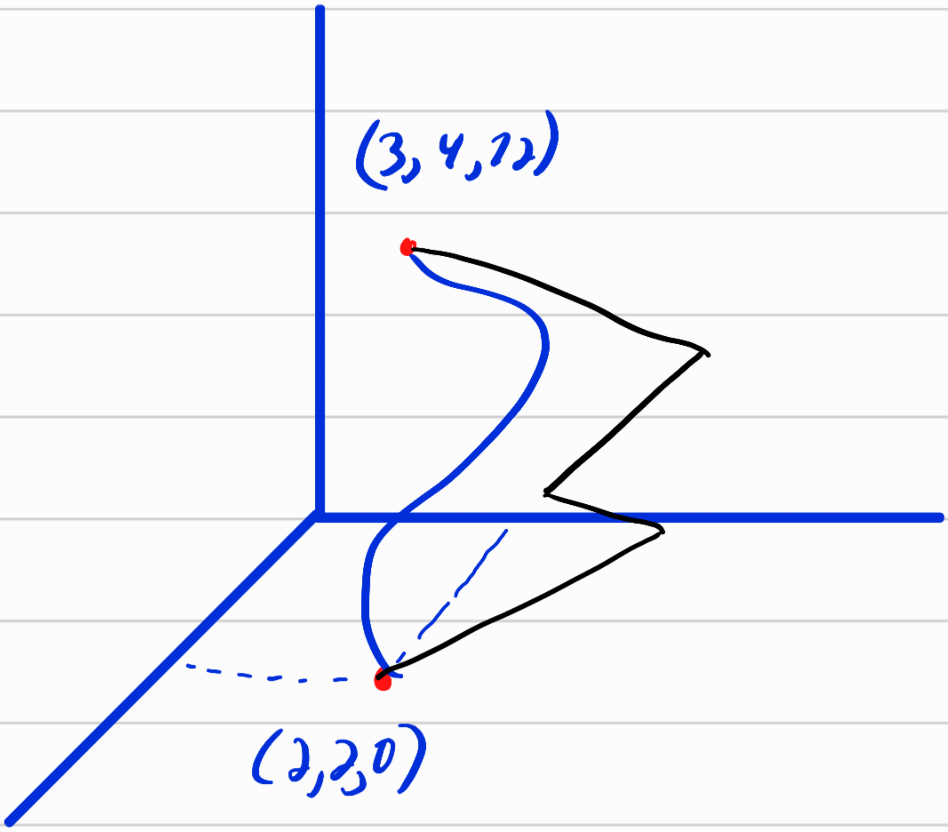
$$\boxed{\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))}$$

EX: CALCULE O TRABALHO REALIZADO PELO CAMPO GRAVITACIONAL.

$$\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{m \cdot M \cdot G}{|\vec{v}|^3} \cdot \vec{v} = -m M \cdot G \cdot \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{''}, \frac{z}{''}\right)$$

AO MOVER UMA PARTÍCULA DO PONTO $(3,4,12)$ PARA $(2,2,0)$ AO LONGO DA CURVA $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$



$\vec{F} = \nabla f \qquad f(x,y,z) = \dfrac{mM \cdot G}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{TF}{\underset{12}{=}} f(2,2,0) - f(3,4,12)$$

$$= mM \cdot G \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{169}} \right) = m \cdot M \cdot G \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13} \right)$$

INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

DIZEMOS QUE $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ É INDEPENDENTE DO $\underbrace{\text{CAMINHO}}$

CURVA QUE "LIGA" PONTO INICIAL AO PONTO FINAL (α)

QUANDO

$$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

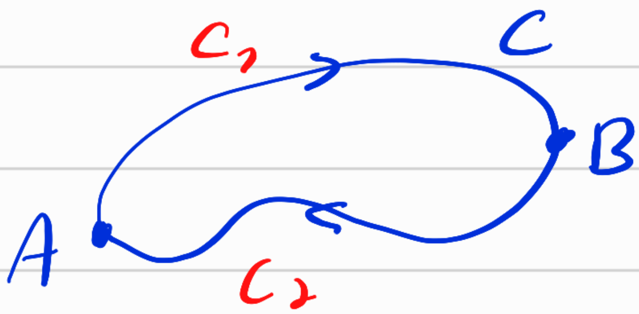
PARA QUAISQUER CAMINHOS C_1 e C_2 COM MESMO PONTO INICIAL E FINAL.

TEOREMA: $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ É INDEPENDENTE DO CAMINHO SE, E SOMENTE SE, $\int_C \vec{F} d\vec{r} = 0$

PARA TODO CAMINHO FECHADO C.

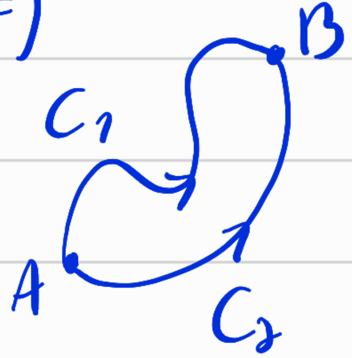
DEMONSTRAÇÃO:

$(\Rightarrow)$



$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{-C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

$(\Leftarrow)$

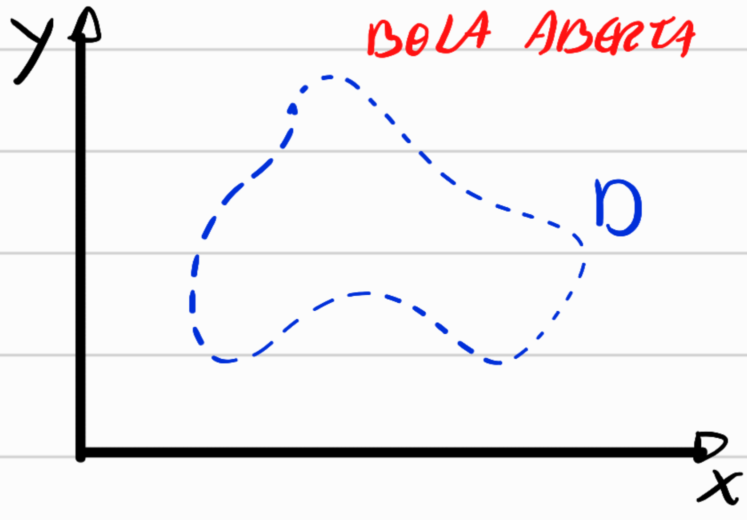


$C = C_2 \cup (-C_1) = C_1 \cup (-C_2)$ É FECHADA

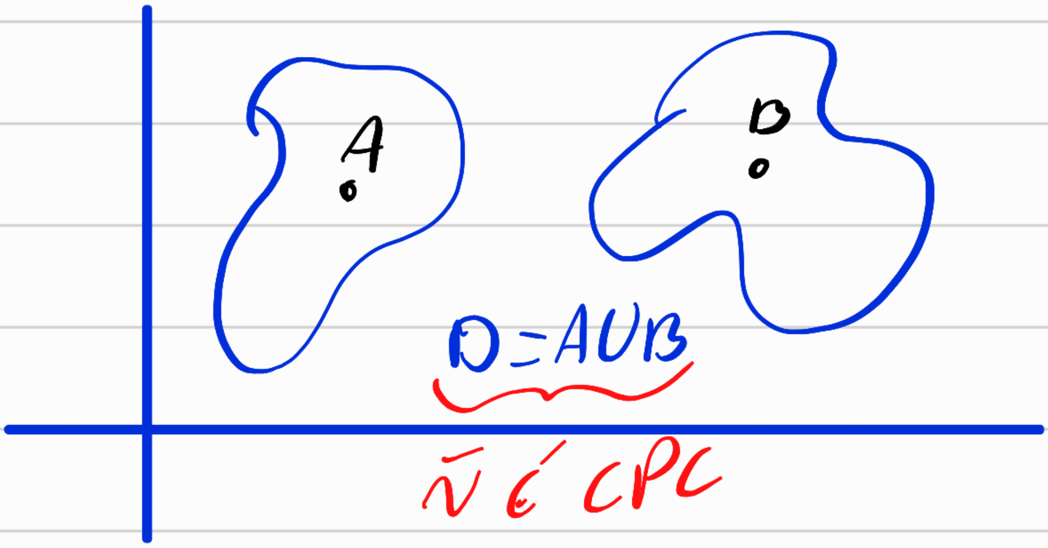
$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

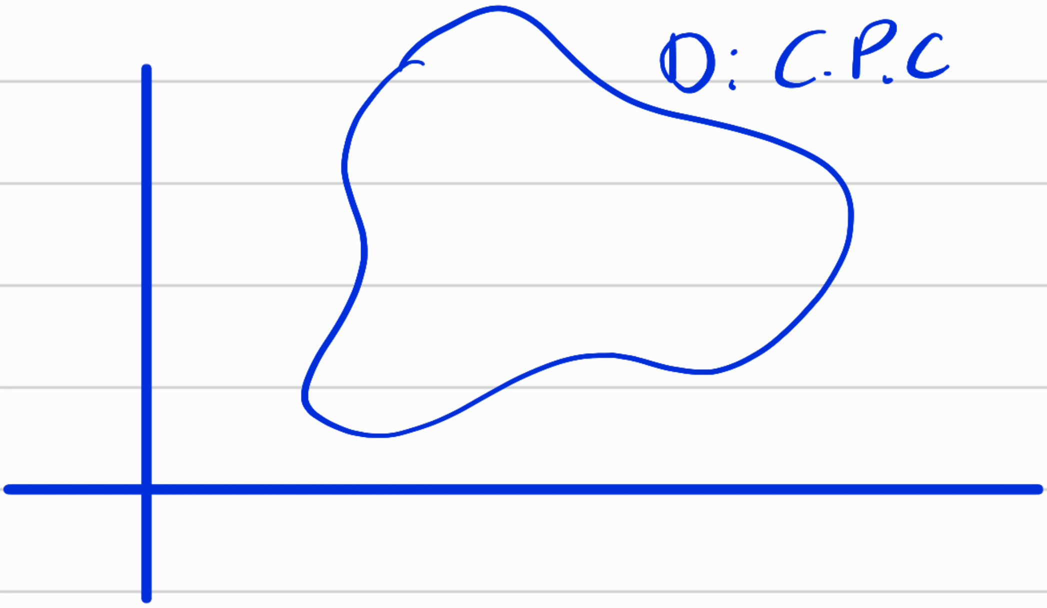
$$\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_{-C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r}$$

<u>DEFINIÇÕES</u>: $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3. D É UM CONJUNTO ABERTO SE QUALQUER PONTO DE D POSSUI UMA $\underbrace{\text{VIZINHANÇA}}_{\text{BOLA ABERTA}}$ CONTIDA EM D.



D é um conjunto conexo por caminhos se quaisquer dois pontos de D podem ser conectados por um caminho contido em D.





TEOREMA: $\vec{F}$ é um campo contínuo em uma região D aberta e CPC. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D

então $\vec{F}$ é um campo conservativo em D.

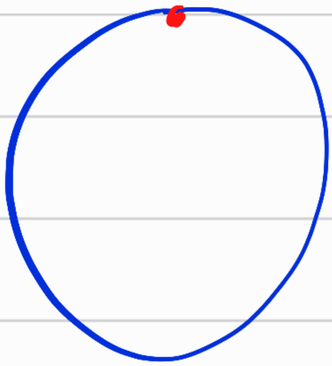
TEOREMA: Se $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ é um campo conservativo onde P e Q possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

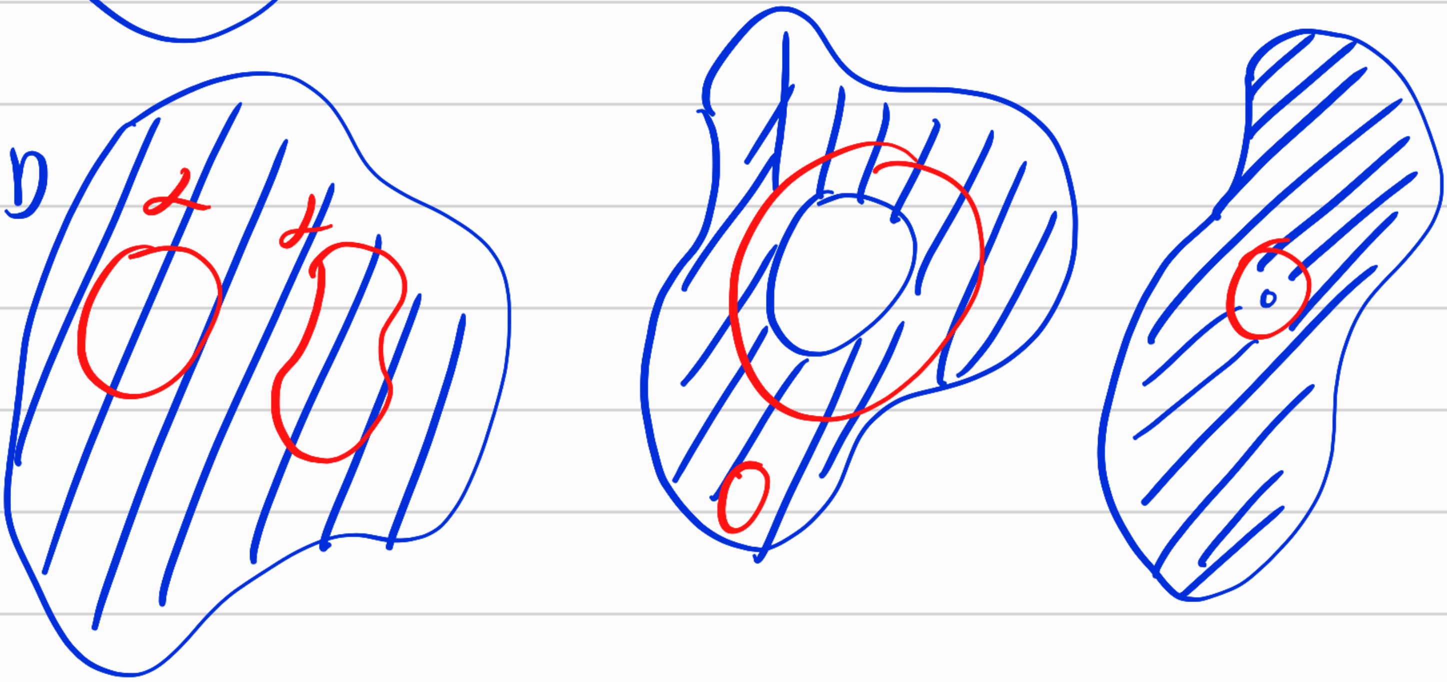
DEFINIÇÃO: $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma região simplesmente conexa quando qualquer curva simples e fechada inclui apenas pontos que estão em D.

CURVA SIMPLES: Não possui intersecções

CURVA FECHADA: Ponto inicial igual ao final



SIMPLES E FECHADA } SIMPLESMENTE CONEXA.



TEOREMA: $\vec{F}$ UM CAMPO EM UMA REGIÃO D SIMPLESMENTE CONEXA. SE $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ ENTÃO $\vec{F}$ É CONSERVATIVO.

EX: $\vec{F}(x,y) = (\overbrace{x-y}^{P}, \overbrace{x-2}^{Q})$ É CONSERVATIVO?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dy} = -1 \\ \\ \frac{dQ}{dx} = 1 \end{array}\right\} \vec{F} \ \bar{n} \text{ É CONSERVATIVO}$$

Ex: $\vec{F}(x,y) = (3+2xy,\ x^2-3y^2)$

$D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{dQ}{dx} = 2x$$

$\therefore \vec{F}$ é conservativo.

$$\frac{dP}{dy} = 2x$$

$$\frac{df}{dx} = P = 3+2xy \Rightarrow f(x,y) = 3x + x^2y + h(y)$$

$$\frac{df}{dy} = Q = x^2-3y^2 \Rightarrow f(x,y) = x^2y \boxed{-y^3} + \boxed{g(x)}$$

$$\boxed{f(x,y) = x^2y + 3x - y^3}$$