CAMPOS VETORIAIS

$\rightarrow f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (FUNÇÃO REAL DE UMA VARIÁVEL)

$x \longmapsto y = f(x)$

$$\begin{cases} \alpha: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ x_i: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ \forall i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

(CURVAS PARAMETRIZADAS $n=2$ OU 3)

$\rightarrow f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (FUNÇÃO REAL DE VÁRIAS VARIÁVEIS)

$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n) = y$

$\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \vec{F}(x_1, \ldots, x_n) = \left(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\right)$

$f_i: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ \forall i = 1, \ldots, n$

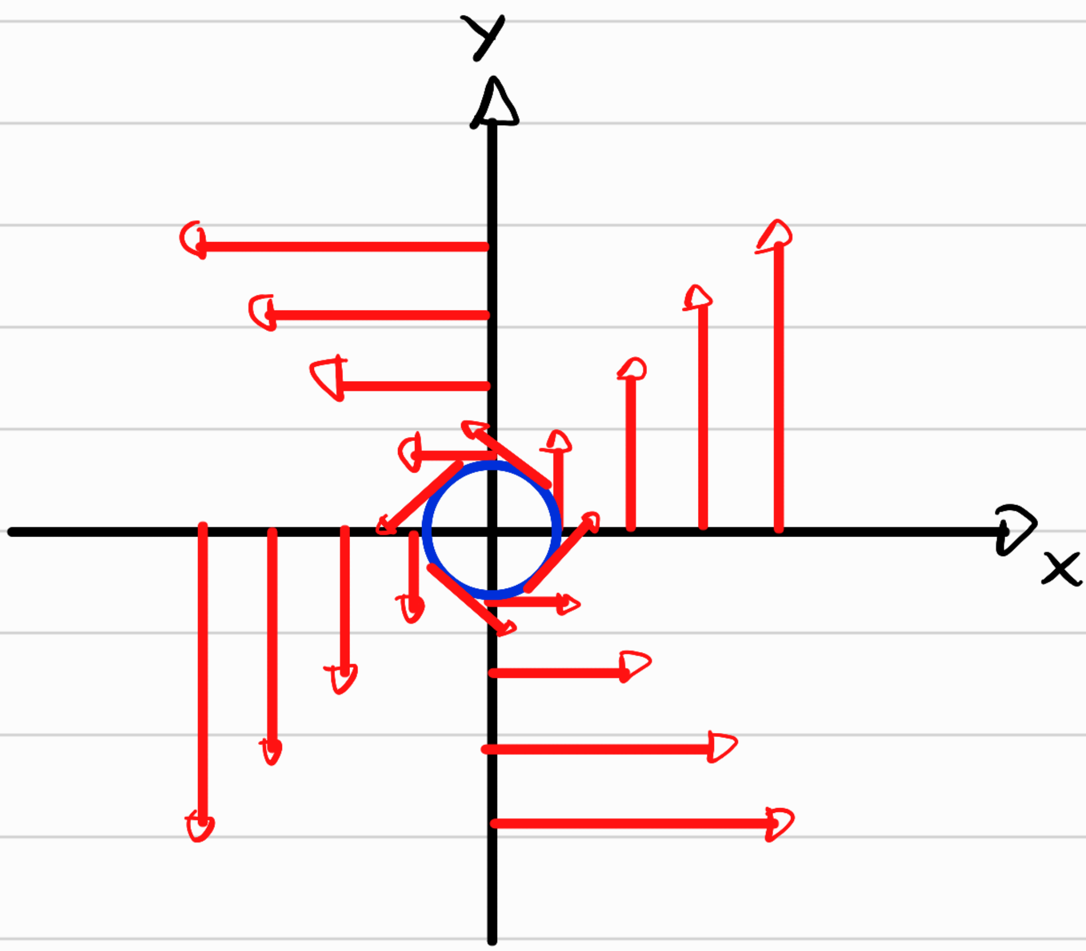
Campos em $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{F}: \underline{A \subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}^2}$$
$$(x,y) \longmapsto \vec{F}(x,y)$$

Campos em $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \vec{F}(x,y,z)$$

Ex: $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$



$$F(1,0)=(0,1)$$

$$F(0,1)=(-1,0)$$

$$F(-1,0)=(0,-1)$$

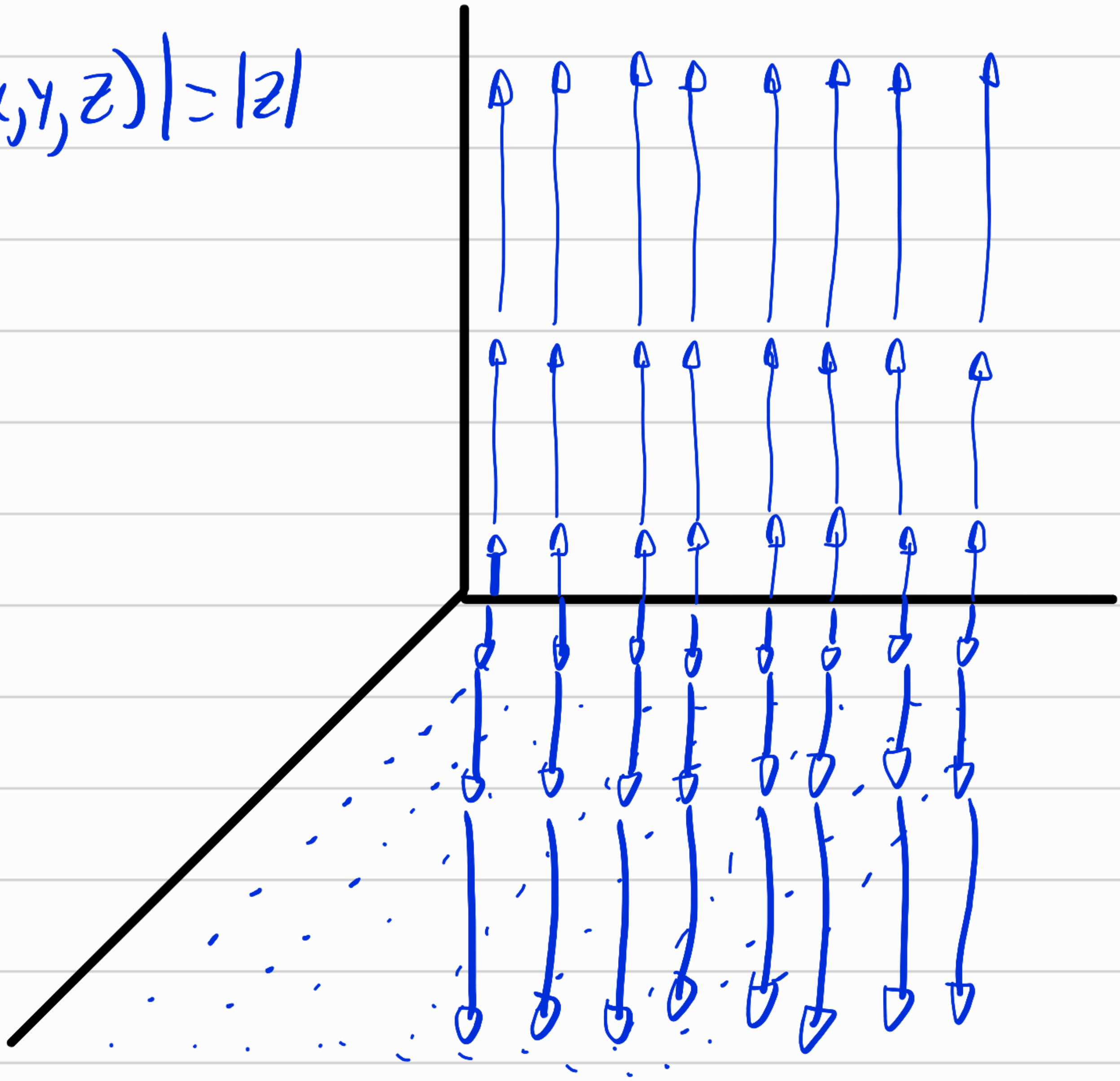
$$F(0,-1)=(1,0)$$

$$|\vec{F}(x,y)|=\sqrt{(-y)^2+(x)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\vec{F}(x,y)|=|(x,y)|$$

EX: $\vec{F}(x,y,z)=z\cdot\hat{k}=(0,0,z)$

$$|\vec{F}(x,y,z)|=|z|$$



CAMPO GRADIENTE

$$f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$$

EM QUE $f_x, f_y, f_z : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

LOGO:

$$\nabla f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$$

EX: DETERMINE O CAMPO GRADIENTE DE
$f(x,y) = xy^2 - y^3$

$$\nabla f(x,y) = (y^2, 2xy - 3y^2) = \vec{F}(x,y)$$

SE $\vec{F} = \nabla f$ ENTÃO $\vec{F}$ É CHAMADA CAMPO CONSERVATIVO E f É CHAMADA FUNÇÃO POTENCIAL.

EX: O CAMPO GRAVITACIONAL $|\vec{F}(x,y,z)| = \dfrac{m \cdot M \cdot G}{r^2}$

É CONSERVATIVO.

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-m \cdot M \cdot G \cdot (x,y,z)}{|(x,y,z)|^3} = \left(\frac{-mMGx}{|(x,y,z)|^3}, \frac{-mM \cdot Gy}{|(x,y,z)|^3}, \frac{-m \cdot M \cdot Gz}{|(x,y,z)|^3} \right)$$

POIS:

$$r = d(M,m) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |(x,y,z)|$$

DIREÇÃO DE $\vec{F}$ É $-\dfrac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|}$

CUJA FUNÇÃO POTÊNCIAL É:

$$\boxed{f(x,y,z) = \frac{m \cdot M \cdot G}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

EX: $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$ É CONSERVATIVO?

$f_x(x,y) = -y \Rightarrow f(x,y) = -xy + h(y)$

$f_y(x,y) = x \Rightarrow f(x,y) = xy + g(x)$

$\therefore \vec{F}$ ÑÉ CONSERVATIVO.

EX: $\vec{F}(x,y) = (x+y, x)$ É CONSERVATIVO?

$f_x(x,y) = x+y \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \boxed{xy} + g(y)$

$f_y(x,y) = x \Rightarrow f(x,y) = \boxed{xy} + \boxed{h(x)}$

FAZER INTEGRAL

$\therefore f(x,y) = xy + \frac{x^2}{2}$ É A FUNÇÃO POTÊNCIAL, LOGO $\vec{F}$ É CONSERVATIVO

CAMPO ROTACIONAL

$\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x,y,z) = (\underbrace{P(x,y,z)}_{P}, \underbrace{Q(x,y,z)}_{Q}, \underbrace{R(x,y,z)}_{R})$$

$$\nabla = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$$

O CAMPO ROTACIONAL DE $\vec{F}$ É DADO POR:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

→ FAZER TIPO UMA DETERMINANTE DE 3x3

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dx}, \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}, \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)$$

$$= (R_y - Q_x, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

Ex: $\vec{F}(x,y,z) = (xz, xyz, -y^2)$

$\text{rot}\,\vec{F} = ?$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = (-2y - xy, x - 0, yz - 0)$$

$$\text{rot}\,\vec{F} = (-2y - xy, x, yz)$$