DERIVADAS DE 3 VARIÁVEIS

$f: U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\frac{df}{dx}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$\frac{df}{dy}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$\frac{df}{dz}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0+t) - f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

EX: $f(x,y,z,w) = e^{xyzw}$

$$\frac{df}{dx} = \left[e^{xyzw}\right]' [xyzw]' \cdot yzw$$ REGRA DA CADEIA

$$\frac{df}{dy} = e^{xyzw} \cdot xzw$$

$$\frac{df}{dz} = e^{xyzw} \cdot xyw$$

$$\frac{df}{dw} = e^{xyzw} \cdot xyz$$

- $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$

Se $\exists \frac{df}{dx_i}(x_0) = f_{x_i} = D_i f(x_0)$ $\forall x_0 \in U$

DEFINA

$$\frac{df}{dx_i}: \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{df}{dx_i}(x) \end{array}$$

$f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Se $\exists \frac{df}{dx}(x_0, y_0), \frac{df}{dy}(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \in U$

DEFINIMOS

$$f_1 = \frac{df}{dx}: \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & \frac{df}{dx}(x, y) \end{array}$$

$$\frac{df_1}{dx}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$= \frac{d}{dx} f_1(x_0,y_0)$$

$$= \frac{d}{dx} \cdot \frac{df}{dx}(x_0,y_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0,y_0)$$

$$\frac{df_1}{dy} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dydx}$$

$$\frac{df_2}{dy} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{df}{dy} = \frac{d^2 f}{dy^2}$$

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{df}{dy} = \frac{d^2 f}{dxdy}$$

Ex: $f(x,y) = 2x^2y + x^3y^2$

$f_x = 4xy + 3x^2 \cdot y^2$

$$f_y = 2x^2 + 2x^3y$$

$$f_{xx} = 4y + 6xy^2$$

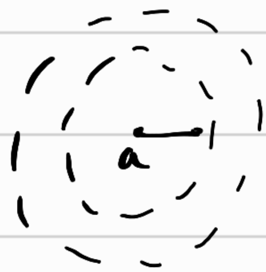
$$f_{yy} = 2x^3$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xy} = 4x + 6x^2y \\ f_{yx} = 4x + 6x^2y \end{array}\right\} f_{xy} = f_{yx}$$

DERIVADAS DIRECIONAIS

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\frac{df}{dx}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$



SEJA $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

$V = e_j = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$

↳ POSIÇÃO j

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

$$= \frac{df(a)}{dx_i}$$

FUNÇÃO DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

UMA FUNÇÃO $f : U \underset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ É CLASSE

$\mathcal{C}^1$ SE $\exists \; \frac{df(a)}{dx_1}, \frac{df(a)}{dx_2}, \dots, \frac{df(a)}{dx_n}, \quad \forall a \in U$

E ALÉM DISSO,

$\frac{df}{dx_i} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É CONTÍNUA

Ex: 1) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

2) $f(x,y) = e^{xy}$

3) $f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + \dots + a_{nn}x^n y^n$

Ex:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - \boxed{f(0,0)}}{t} \to 0$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)}{t} \qquad f(t,0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = \frac{0}{t^2} = 0$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

$$f_y(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x,y)}{t}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, 0+t) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

f é contínua em $a \iff \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

$$\gamma(t,0) \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(t,0) \to (0,0)} \frac{t0}{t^2+0^2} = 0$$

$$\gamma(t,t) \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(t,t) \to (0,0)} \frac{t \cdot t}{t^2+t^2} = \lim_{(t,t) \to (0,0)} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

PORTANTO, f É DERIVÁVEL EM $(0,0)$, MAS f NÃO É CONTÍNUA EM $(0,0)$

FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL

DEFINIÇÃO 1: SEJA $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in U$. DIZEMOS QUE f É DIFERENCIÁVEL NO PONTO $a \in U$ SE, E SOMENTE SE, $\exists A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ TAL QUE

$$f(a+v) = f(a) + A_1 v_1 + A_2 v_2 + \dots A_n v_n + r(v)$$

ONDE $\lim_{v \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|} = 0$

DEFINIÇÃO 2: SEJA $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in U$. DIZEMOS QUE f É DIFERENCIÁVEL NO PONTO $a \in U$ SE, SOMENTE SE, $\exists\, T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TRANSFORMAÇÃO LINEAR TAL QUE $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $a+v \in U$, TEM-SE

$$f(a+v) = f(a) + Tv + r(v), \text{ ONDE } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

OBS: A DEFINIÇÃO (2) É EQUIVALENTE À DEFINIÇÃO (1) $\iff Tv = A_1 v_1 + A_2 v_2 + \cdots + A_n v_n$

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto Tv = A_1 v_1 + A_2 v_2 + \cdots + A_n v_n$$

1) $T(v+w) = Tv + Tw, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

2) $T(cv) = c \cdot Tv, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \ c \in \mathbb{R}$

T É TL

$v = tw$

$$f(a+tw) - f(a) = T(tw) + r(tw)$$

$$f(a+tw) - f(a) = t \cdot Tw + r(tw)$$

$$\frac{f(a+tw) - f(a)}{t} = Tw + \frac{r(tw)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tw)-f(a)}{t} = Tw + \cancel{\lim_{t\to 0} \frac{r(tw)}{t}} \to 0$$

$$Tw = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tw)-f(a)}{t} = \frac{df}{dw}(a)$$

$$w = e_j$$

$$Te_j = \frac{df}{de_j}(a) = \frac{df}{dx_j}(a)$$

$$w = e_1 = (1,0,0,\dots,0)$$

$$Te_1 = A_1 = \frac{df}{dx_1}(a)$$

TEOREMA: SE $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É DIFERENCIÁVEL NO PONTO $a \in U$, ENTÃO f É CONTÍNUA EM a

TEOREMA:

- f É DIFERENCIÁVEL NO PONTO $a \Rightarrow \exists \frac{df}{dx_1}(a), \frac{df}{dx_2}(a), \ldots, \frac{df}{dx_n}(a)$

- f É DIFERENCIÁVEL NO PONTO $a \Rightarrow f$ É CONTÍNUA

TEOREMA: SE $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ É DIFERENCIÁVEL

SE $\nexists \frac{df}{dx_i}(a)$ PARA ALGUM $i = in \Rightarrow f$ NÃO DIFEREN-CIÁVEL

SE f NÃO É CONTÍNUA $\Rightarrow f$ NÃO É DIFERENCI-ÁVEL

EX: $f(x,y) = 2xy + x^2 + y^2$, P/ QUAL f É DIFEREN-CIÁVEL?

SOLUÇÃO: $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{df}{dx}(x,y) = 2y + 2x \quad \Big\{ \quad \frac{df}{dx}(x_0, y_0) = 2y_0 + 2x_0$$

$$\frac{df}{dy}(x,y) = 2x+2y \qquad \frac{df}{dy}(x_0,y_0) = 2x_0+2y_0$$

• $f_1 = \frac{df}{dx}$, $f_2 = \frac{df}{dy}$ SÃO CONTÍNUAS

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2y+2x = 2y_0+2x_0 = f_1(x_0,y_0)$$

$\therefore$ $\frac{df}{dx}$ É CONTÍNUA

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2x+2y = 2x_0+2y_0$$
$$= f_2(x_0,y_0)$$

$\therefore$ $\frac{df}{dy}$ É CONTÍNUA

PORTANTO, f É DIFERENCIÁVEL.