REGRA DA CADEIA

$f(x,y)$, $x = x(t)$
$y = y(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

DERIVADA DIRECIONAL

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

VETOR GRADIENTE

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right)$$

TEOREMA: $|D_{\vec{u}} f| = |\nabla f| \cdot \cancel{|\vec{u}|} \cdot \cos(\theta)$

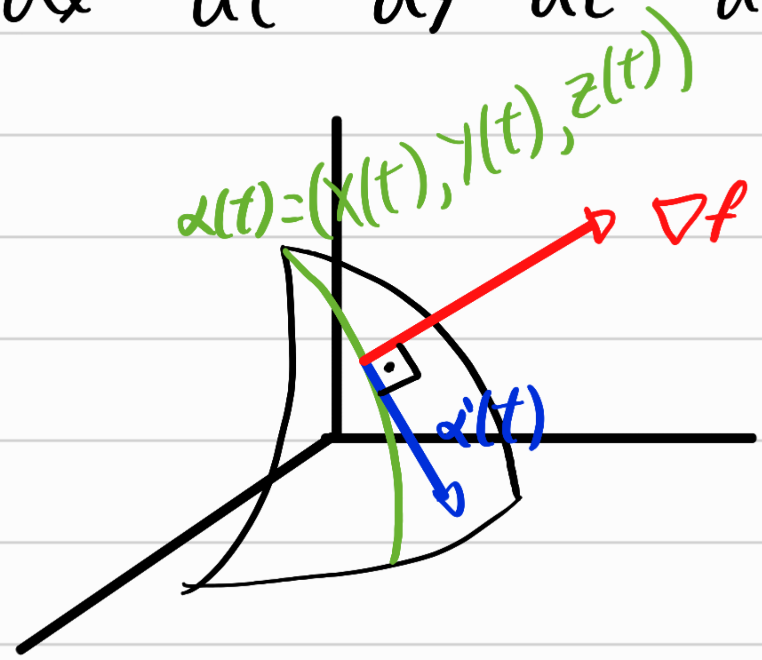
APONTA NA DIREÇÃO DE CRESCIMENTO DA FUNÇÃO, QUANDO $\theta = 0$.

PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DE NÍVEL

$$F(x,y,z) = K$$

$$F(x(t), y(t), z(t)) = K \longrightarrow [K]' = 0$$

$$\frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$



$$\underbrace{\left(\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)}_{\alpha'(t)} = 0$$

$$\nabla f \cdot \alpha'(t) = 0 \Rightarrow \nabla f \perp \alpha'(t)$$

$$\forall \alpha \in S \rightarrow \text{(CURVA)}$$

O PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DE NÍVEL $F(x,y,z)=K$ É O PLANO QUE PASSA NO PONTO $P(x_0,y_0,z_0)$ E TEM VETOR NORMAL $\vec{n} = \nabla F(x_0,y_0,z_0)$

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot \nabla f(x_0,y_0,z_0) = 0$$

$$\frac{dF}{dx}(x-x_0) + \frac{dF}{dy}(y-y_0) + \frac{dF}{dz}(z-z_0) = 0$$

NO CASO DE $f(x,y)=z$ A SUPERFÍCIE DE NÍVEL É

$$\boxed{F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0} \rightarrow \nabla F = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, -1\right) = \vec{n}$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

EX: DETERMINE AS EQUAÇÕES DO PLANO TANGENTE E DA RETA NORMAL NO PONTO $P(-2, 1, -3)$ AO ELIPSÓIDE

$$\underbrace{\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}}_{F(x_0, y_0, z_0) = 3} = 3$$

$$r: P = A(x_0, y_0, z_0) + t \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

$$P(x_0, y_0, z_0) = (-2, 1, -3)$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$(x - (-2), y - 1, z - (-3)) \cdot \left(\frac{x_0}{2}, 2y_0, \frac{2}{9} z_0\right) = 0$$

$$(x + 2, y - 1, z + 3) \cdot \left(\frac{x_0}{2}, 2y_0, \frac{2}{9} z_0\right) = 0$$

$$(x + 2, y - 1, z + 3) \cdot (-1, 2, -2/3) = 0$$

$$-x+2+2y-2-\frac{2}{3}z-2=0$$

$$\boxed{-x+2y-\frac{2}{3}z-6=0}$$

$$r:\ P=(-2,1,-3)+t\cdot\underbrace{\nabla f(-2,1,-3)}_{\vec{v}:\ \text{VETOR DIRETOR}}$$

$$r: P=(-2,1,-3)+t\cdot\left(-1,2,-\tfrac{2}{3}\right)$$

$$r: P=\left(-2-t,\ 1+2t,\ -3-\frac{2t}{3}\right)$$

$$r:\begin{cases} x=-2-t \rightarrow t=-2-x \\ y=1+2t \rightarrow t=\dfrac{y-1}{2} \\ z=-3-\dfrac{2t}{3} \rightarrow t=\dfrac{z+3}{-3/2} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{2+x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-3/2}}$$

MÁXIMOS E MÍNIMOS

DEFINIÇÃO: $f(x,y)$ TEM UM MÁXIMO LOCAL EM $f(a,b)$ QUANDO $f(a,b) \geq f(x,y), \forall (x,y) \in \underbrace{V(a,b)}_{\text{VIZINHANÇA DE } (a,b)}$

$f(x,y)$ TEM UM MÍNIMO LOCAL EM (a,b) QUANDO $f(a,b) \leq f(x,y), \forall (x,y) \in V(a,b)$

$f(a,b)$ É MÁXIMO ABSOLUTO (GLOBAL) QUANDO $f(a,b) \geq f(x,y), \forall (x,y) \in D_f$.

$f(a,b)$ É MÍNIMO ABSOLUTO (GLOBAL) QUANDO $f(a,b) \leq f(x,y), \forall (x,y) \in D_f$

EX: $\overbrace{f(x,y)}^{z} = x^2 + y^2$ (PARABOLÓIDE)

$D_f = \mathbb{R}^2$

$Im f = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$

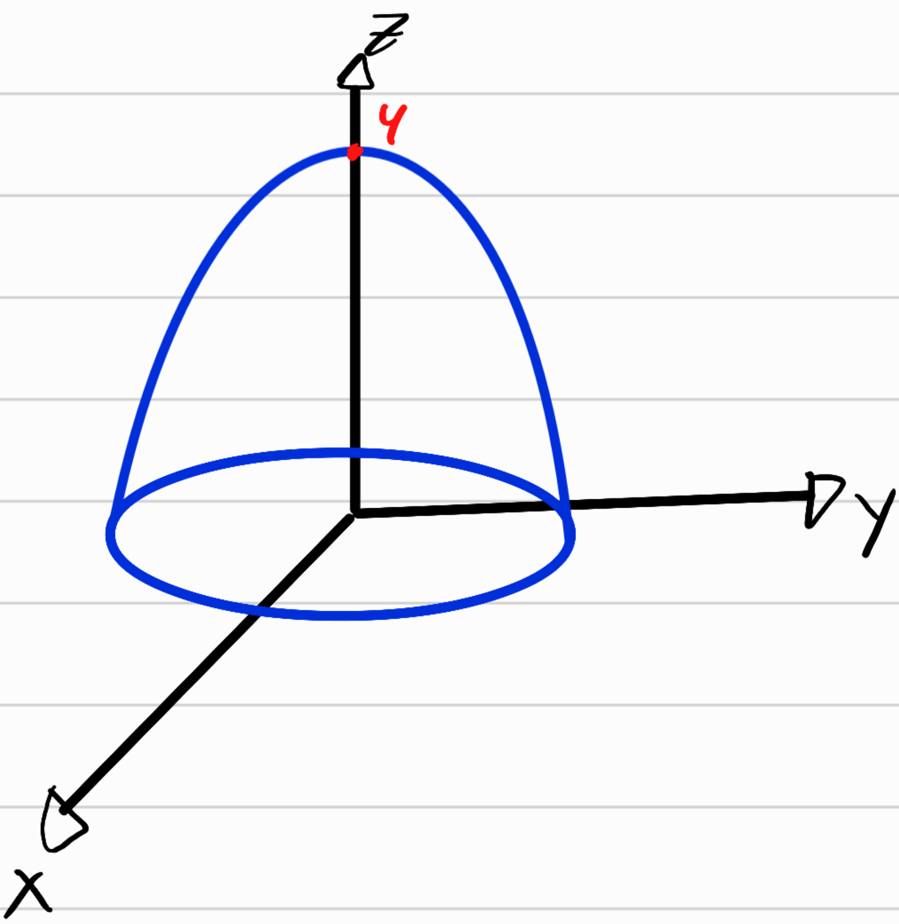
$f(0,0) = 0 \leq f(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (0,0)$ É PONTO DE MÍNIMO E $f(0,0)=0$ É O VALOR MÍNIMO ABSOLUTO DA FUNÇÃO.

MÁXIMO ABSOLUTO NÃO EXISTE.

Ex: $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

$f(0,0) = 4$ É VALOR MÁXIMO ABSOLUTO.



TEOREMA: SE $f(x,y)$ TEM UM MÁX. E MÍN. LOCAL EM (a,b) E $f_x(a,b)$ E $f_y(a,b)$ EXISTEM ENTÃO $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$.

OS PONTOS EM QUE $\nabla f(x,y) = 0$ SÃO CHAMADOS PONTOS CRÍTICOS.

EX: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

COMPLETANDO QUADRADO

$$f(x,y) = 4 + (x-1)^2 + (y-3)^2$$

$f(1,3) = 4$ É VALOR MÍNIMO ABSOLUTO.

$$f_x = 2x - 2 = 0 \iff x = 1$$

$$f_y = 2y - 6 = 0 \iff y = 3$$