$f(x,y) = z$

$\dfrac{df}{dx}(a,b)$ = COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE, EM RELAÇÃO A $\underline{x}$

$\dfrac{df}{dy}(a,b)$ = COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE, EM RELAÇÃO A $\underline{y}$

EQ. GERAL DO PLANO: $\boxed{ax+by+cz+d=0}$

PLANO TANGENTE AO GRÁFICO DE f NO PONTO $P(x_0, y_0, z_0)$ É:

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}$$

EX: $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

DETERMINE O PLANO TANGENTE AO GRÁFICO DE f NO PONTO $P(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{3})$

$f_x(1,1) = 4x = 4\cdot 1 = 4$

$f_y(1,1) = 2y = 2\cdot 1 = 2$

$z-1=4\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)$

$4x+2y-z=3$

$\boxed{z=4x+2y-3}$

$f(1,1;0,9)=2\cdot(1,1)^2+(0,9)^2$

$=2,42+0,81$

$=3,23$

$f(1,1;0,9)=4\cdot 1,1+2\cdot 0,9-3$

$=4,4+1,8-3$

$=6,2-3$

$=3,2$

APROXIMAÇÃO LINEAR PELO PLANO TANGENTE

$$z = f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

DEFINIÇÃO: $z = f(x,y)$ É DIFERENCIÁVEL EM (a,b) SE Δz PODE SER ESCRITO NA FORMA:

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\cdot \Delta x + f_y(x_0,y_0)\cdot \Delta y + \underbrace{\varepsilon_1 \Delta x}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon_2 \Delta y}_{\to 0}$$

COM $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ QUANDO $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

TEOREMA: SE AS DERIVADAS f_x E f_y EXISTEM E SÃO CONTÍNUAS EM (a,b) ENTÃO f É DIFERENCIÁVEL EM (a,b).

EX: $f(x,y) = x \cdot e^{xy}$ É DIF. EM $(1,0)$? LINEARIZE-A

$$\left.\begin{aligned} f_x(1,0) &= x' \cdot e^{xy} + x \cdot [e^{xy}]' \\ &= 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} y \\ &= e^{xy} + x e^{xy} y = e^{1\cdot 0} + \cancel{1 \cdot e^{1\cdot 0} \cdot 0}^{\,0} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}\right\} \text{É CONTÍNUA EM } (1,0)$$

$$f_y(1,0) = x' \cdot e^{xy} + x \cdot [e^{xy}]'$$

$$= 0 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot x$$

$$= x^2 \cdot e^{xy}$$

$$= 1^2 \cdot e^{1 \cdot 0} = 1 \cdot e^0 = 1$$

É CONTÍNUA EM (1,0)

$\therefore$ f é DIFERENCIÁVEL

$$f(x,y) \approx f(1,0) + f_x(1,0) \cdot (x - \overset{x_0}{1}) + f_y(1,0)(y - \overset{y_0}{0})$$

$$f(x,y) \approx 1 + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) = 1 + x - 1 + y = \boxed{x+y}$$

$$f(1{,}1; -0{,}1) = x + y$$

$$= 1{,}1 + (-0{,}1)$$

$$= 1{,}1 - 0{,}1$$

$$= \boxed{1}$$

EX: $f(x,y) = 1 + x \ln(xy - 5)$ $\quad (x_0, y_0) = (2,3)$

$$f_x = 0 + \cancel{x'}\,1 \cdot \ln(xy-5) + x \cdot [\ln(xy-5)]'$$

$$f_x = \ln(xy-5) + x \cdot \frac{1}{xy-5} \cdot y$$

$$f_x = \ln(xy-5) + \frac{xy}{xy-5}$$

$$f_x(2,3) = \ln(2\cdot 3-5) + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3-5} = \ln(1) + \frac{6}{1} = 0+6 = \boxed{6}$$

$$f_y(2,3) = 0 + [x \cdot \ln(xy-5)]'$$

$$= x \cdot [\ln(xy-5)]'$$

$$= \frac{x}{xy-5} \cdot x = \frac{x^2}{xy-5}$$

$$f_y(2,3) = \frac{2^2}{2\cdot 3-5} = \frac{4}{1} = 4$$

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(2,3)}_{1+2\cdot\ln(2\cdot 3-5)=1} + f_x(2,3)\cdot(x-x_0) + f_y(2,3)\cdot(y-y_0)$$

$$f(x,y) \approx 1 + 6\cdot(x-2) + 4\cdot(y-3)$$

$$\approx 1 + 6x - 12 + 4y - 12$$

$f(x,y) \approx 6x + 4y - 23$

DIFERENCIAIS

DIFERENCIAL TOTAL

$$dz = f_x(x_0, y_0)\underbrace{\Delta x}_{x - x_0} + f_y(x_0, y_0)\underbrace{\Delta y}_{y - y_0}$$

EX: $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$. DETERMINE A DIF. dz.

$\Delta x = 2{,}05 - 2 = 0{,}05 = dx$

$\Delta y = 2{,}96 - 3 = -0{,}04 = dy$

COMPARE Δz E dz

$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

$\Delta z = f(x,y) - f(a,b) \approx dz$

$f_x(2,3) = 2x + 3y = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13$

$f_y(2,3) = 3x - 2y = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$

$$dz = (2x+3y)\cdot dx + (3x-2y)\cdot dy$$

$$dz = 16\cdot 0{,}05 + \cancelto{0}{0\cdot(-0{,}04)}$$

$$dz = 0{,}65$$

$$\Delta z = f(\overset{x}{2{,}05}\,;\,\overset{y}{2{,}96}) - f(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{3})$$

$$\Delta z = (2{,}05)^2 + 3\cdot(2{,}05)\cdot(2{,}96) - (2{,}96)^2 - (2^2 + 3\cdot 2\cdot 3 - 3^2)$$

$$\boxed{\Delta z = 0{,}6449}$$