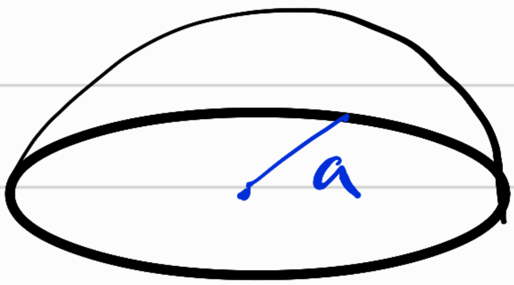
34 EX: 15.9

Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância da base.

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad m = \rho \cdot V$$

$$m = \iiint \rho \cdot dV$$



$$\rho(x,y,z) = K \cdot z.$$

$$m = \iiint \rho(x,y,z)\, dV$$

$$m = \iiint_E K \cdot z \cdot dV$$

COORDENADA ESFÉRICA, POIS É UM SÓLIDO

$x = \rho\cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi)$
$y = \rho\,\text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\varphi)$
$z = \rho\cos(\varphi)$

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} K\cdot\rho\cdot\cos(\varphi)\cdot\rho^2\cdot\text{sen}(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 2\pi\cdot K\cdot\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\cdot\text{sen}(\varphi)\,d\varphi\cdot\int_0^{a}\rho^3\,d\rho$$

$$= 2\pi K\cdot\left.\frac{\text{sen}^2(\varphi)}{2}\right|_0^{\pi/2}\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{a}$$

$$= 2\pi K\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{4}$$

$$= \frac{K\cdot\pi\cdot a^4}{4}$$

15.10 Ex 22:

15.6 Exercícios

1–12 Determine a área da superfície.

1. A parte do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do retângulo $[0, 5] \times [1, 4]$

2. A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$

3. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante

4. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$

5. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo com vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 2)$

6. A parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy

7. A parte do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

8. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

9. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

10. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano $z = 1$

11. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy

12. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$

③ $3x+2y+z=6$

$$\underbrace{3x+2y+z=6}$$

$z=6-3x+2y$

$$A(S)=\iint\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

$$A(S)=\iint\sqrt{1+9+4}\,dx\,dy$$

$$A(S)=\int_0^3\int_0^{\frac{6-2y}{3}}\sqrt{14}\,dx\,dy$$

$3x+2y+0=6$

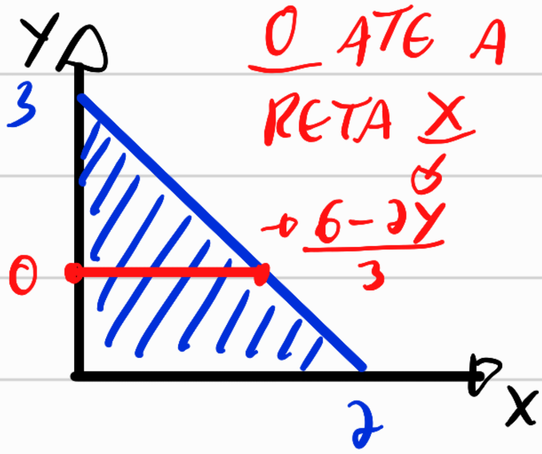
$3x+2y=0$

→ VARIAMOS O X DE

0 ATÉ A RETA X

↓

→ $\frac{6-2y}{3}$



$3x+2y=6$

$x=0$	$y=0$
$3\cdot 0+2y=6$	$3x+2\cdot 0=6$
$0+2y=6$	$3x+0=6$
$2y=6$	$3x=6$
$y=\frac{6}{2}=3$	$x=\frac{6}{3}=2$

$$A(S)=\int_0^3 \sqrt{14}\cdot x\Big|_0^{2-\frac{2y}{3}}\,dy$$

$$=\int_0^3 \sqrt{14}\cdot\left(2-\frac{2y}{3}\right)dy$$

$$=\left(2\sqrt{14}\,y-\frac{\sqrt{14}}{3}\cdot y^2\right)\Big|_0^3$$

$$=\sqrt{14}\cdot\left(6-\frac{9}{3}\right)$$

$$=\sqrt{14}\cdot(6-3)$$

$$=\sqrt{14}\,3$$

$$=3\sqrt{14}$$