Chapitre 4
Filtre de Kalman

4.1. Représentation d'état d'un système

Une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état.

La représentation d'état la plus générale pour les **systèmes linéaires invariants dans le temps** est la suivante **en continu** :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + DU(t)$$

Avec :

$X \in \mathbb{R}^n$: vecteur qui représente les n variables d'état

$Y \in \mathbb{R}^p$: vecteur qui représente les p mesures (sorties)

$U \in \mathbb{R}^m$: vecteur qui représente les m commandes

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matrice de dynamique

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: Matrice de commande

$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$: Matrice d'observation

$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$: Matrice d'observation directe

Où :

n : l'ordre du système,

m : le nombre d'entrées (commandes) du système, et

p : le nombre des sorties (mesures) du système

En discret, nous avons la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \\ Y(k) \;\; = CX(k) + Du(k) \end{cases}$$

4.2. Estimation de l'état d'un système

De nombreuses méthodes de commande des processus utilisent le principe de retour d'état (commande optimale, découplage, placement de pôles, ...). Comme dans la plupart des cas, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrée et de sortie, il est nécessaire, à partir de ces informations, de reconstruire l'état du modèle choisi pour élaborer la commande. Un **reconstructeur d'état** ou **estimateur** (figure.1) ayant comme entrées les entrées et les sorties du processus réel et dont la sortie est une estimation de l'état du processus.

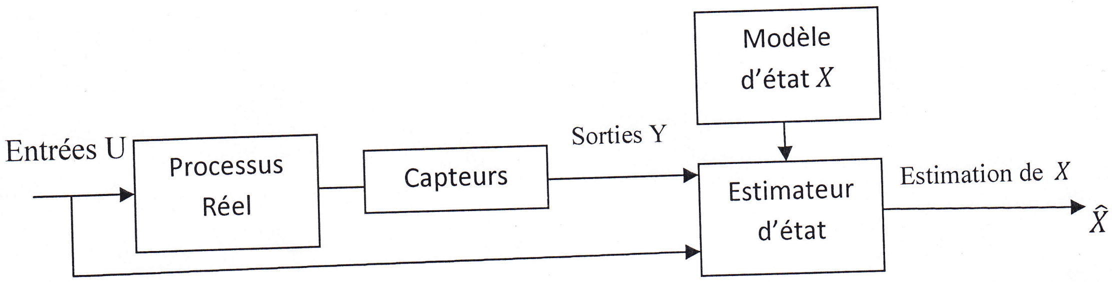

Figure.1 : Principe d'un estimateur

Dans le cas où ce modèle est un modèle déterministe, le reconstructeur d'état sera appelé **observateur d'état** qui a été introduit par Luenberger pour **les systèmes linéaires déterministes.**

Dans le cas de systèmes bruités, où interviennent des phénomènes aléatoires, nous parlerons alors de **filtre de Kalman** (KF) qui a été introduit par Kalman pour **les systèmes linéaires stochastiques.** Pour **les systèmes non linéaires**, on utilise le **filtre de Kalman étendu** (EKF).

4.3. Le filtre de Kalman discret

Le filtre de Kalman est un ensemble d'équations mathématiques qui **permet une meilleure estimation de l'état futur d'un système** malgré le bruit et l'imprécision des mesures et de la modélisation. Nous allons nous intéresser **au cas discret** qui est plus simple et surtout qui est le plus utilisé.

4.3.1. Le modèle de Kalman discret

Nous supposons que notre système ou signal perturbé peut être modélisé par le modèle d'état suivant appelé modèle de Kalman:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) & \text{équation d'état}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^q \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) & \text{équation de mesure}, \quad y \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Dans le cas d'un système ou signal discret on parle de modèle de Kalman discret :

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bu(k) + Mw(k) \text{équation d'état}, x \epsilon \mathbb{R}^n, \quad u \epsilon \mathbb{R}^m, \quad w \epsilon \mathbb{R}^q \\ Y(k) = CX(k) + Du(k) + v(k) \text{équation de mesure}, Y \epsilon \mathbb{R}^P, \quad v \epsilon \mathbb{R}^P \end{cases} \tag{4.1}$$

A cause du bruit, on ne peut pas résoudre l'équation d'état et donc connaître exactement X. Nous utilisons donc des capteurs qui nous fournissent une approximation de l'état réel. Les mesures Y données par les capteurs sont ainsi utilisés.

Les vecteurs de mesure ne sont pas non plus connus de manière précise, à cause du bruit de mesure. Le but du filtre va être de trouver une estimation $\hat{X}$ la plus fiable possible, et ce avec les informations données par les capteurset la valeur de X estimée à l'état précédent grâce à la première équation. Le filtre est donc récursif d'ordre 1. Il est possible d'utiliser un filtre de Kalman d'ordre supérieur en tenant compte de plusieurs étapes antérieures, ce qui le rend plus performant mais d'autant plus complexe.

Le Filtre de Kalman est très puissant grâce à l'utilisation d'un contrôle en feedback : il estime l'état du système puis améliore son résultat avec les informations bruitées fournies par les capteurs.

Hypothèses : nous supposerons que :

H1: La paire (A, C) est détectable (c.à.d. stable et Observable),

H2: les signaux $w(k)$ et $v(k)$ sont des **bruits blancs gaussiens centrés** et **indépendants,** de **matrices de covariance** W et V respectivement, c'est-à-dire :

- $E[w(k)w(k+l)^T] = W\delta(l)$
- $E[v(k)v(k+l)^T] = V\delta(l)$
- $E[w(k)v(k+l)^T] = 0 \quad (avec\ \delta(l) = 1\ si\ l = 0; \ \ 0\ sinon).$

H3: V est inversible.

$A,\ B,\ C,\ D\ et\ M$ sont des matrices déterministes, indépendantes du temps, connues et de dimension appropriées.

4.4. Les équations récurrentes du filtre de Kalman

En filtrage de Kalman, on résout simultanément un problème de **prédiction** et un problème **d'estimation.** La récursivité se décompose en trois étapes

- Prédiction (estimation a priori) de l'état $X(k+1)$ à partir de $Y(0)$, $Y(1)$, …, $Y(k)$. La valeur prédite sera notée $\hat{X}_p(k+1)$ (valeur prédite de $X(k+1)$ connaissant les observations précédentes jusqu'à k.
- Nouvelle mesure $Y(k+1)$
- Estimation de $X(k+1)$ grâce à $\hat{X}_p(k+1)$et $Y(k+1)$. L'estimée sera notée$\hat{X}(k+1)$.

Définissons les erreurs de prédiction et d'estimation :

$$\varepsilon_p(k+1) = X(k+1) - \hat{X}_p(k+1) \quad = \text{Erreur de prédiction}$$

$$\varepsilon(k+1) = X(k+1) - \hat{X}(k+1) \quad = \text{Erreur d'estimation}$$

Ecrivons alors que l'estimateur doit être sans biais et à variance minimale.

- Biais nul (filtre prédicteur et filtre estimateur)

$$E[\varepsilon_p(k+1)] = 0$$

$$E[\varepsilon(k+1)] = 0$$

- Variance minimale (filtre prédicteur et filtre estimateur)

$P_p(k+1) = E[\varepsilon_p(k+1).\varepsilon_p^T(k+1)]$ = Matrice de covariance de l'erreur de prédiction

$P(k+1) = E[\varepsilon(k+1).\varepsilon^T(k+1)]$= Matrice de covariance de l'erreur d'estimation

a) Prédiction : à l'instant k, on connaît l'état estimé $\hat{X}(k)$, on prédit l'état à l'instant $k+1$ en utilisant le modèle déterministe :

$$\boxed{\hat{X}_p(k+1) = A\hat{X}(k) + Bu(k)} \quad (4.2)$$

De l'équation précédente, on déduit une prédiction de la mesure à l'instant $(k+1)$ par

$$\hat{Y}_P(k+1) = C.\hat{X}_P(k+1) + Du(k+1) \tag{4.3}$$

La matrice de covariance de l'erreur de prédiction est défini par :

$$P_p(k+1) = cov\left(\varepsilon_p(k+1)\right)$$

$$= cov\left(\left(X(k+1) - \hat{X}_p(k+1)\right)\right)$$

$$= cov\left(AX(k) + Bu(k) + Mw(k) - A\hat{X}(k) - Bu(k)\right)$$

$$= cov\left(A\varepsilon(k) + Mw(k)\right)$$

$$= cov\left(A\varepsilon(k)\right) + cov\ (Mw(k))$$

Donc :

$$\boxed{P_p(k+1) = AP(k)A^T + MWM^T} \tag{4.4}$$

b) **Estimation :** à l'instant k+1, lorsque la donnée Y(*k+1*) devient disponible, nous désirons l'utiliser pour calculer le meilleur estimateur linéaire $\hat{X}(k+1)$ de *X*(*k+1*), qui minimise l'erreur d'estimation, à partir des données Y(1), Y(2), ... ,Y(*k*), Y(*k+1*).Cet estimateur s'écrit:

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}_P(k+1) + \boldsymbol{K_f}(k+1)\left(Y(k+1) - \hat{Y}_P(k+1)\right)$$

Donc :

$$\boxed{\hat{X}(k+1) = \hat{X}_P(k+1) + \boldsymbol{K_f}(k+1)\left(Y(k+1) - C\hat{X}_P(k+1) - Du(k+1)\right)} \tag{4.5}$$

Où $\boldsymbol{K_f}$ est appelé gain de Kalman.

En utilisant l'équation précédente et l'équation de mesure du modèle (4.1), on peut écrire :

$$X(k+1) - \hat{X}(k+1) = \left(I_n - K_f(k+1)C\right)\left(X(k+1) - \hat{X}_P(k+1)\right) - K_f(k+1)v(k+1)$$

Donc

$$\varepsilon(k+1) = (I_n - K_f(k+1)C)\varepsilon_p(k+1) - K_f(k+1)v(k+1)$$

D'où

$$P(k+1) = E[\varepsilon(k+1)\varepsilon^T(k+1)]$$

est calculée par

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \big(I_n - K_f(k+1)C\big)P_p(k+1)\big(I_n - K_f(k+1)C\big)^T + K_f(k+1)VK_f^T(k+1) \\ &= P_p(k+1) - K_f(k+1)CP_p(k+1) - P_p(k+1)C^TK_f^T(k+1)\cdots \\ &\quad \cdots + K_f(k+1)\big(CP_p(k+1)C^T + V\big)K_f^T(k+1). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Comme dans le cas continu, on cherche $K_f(k+1)$ qui minimise $P(k+1)$:

$$\frac{\partial P(k+1)}{\partial K_f(k+1)} = -2P_p(k+1)C^T + 2K_f(k+1)\big(CP_p(k+1)C^T + V\big)$$

On en déduit :

$$\boxed{K_f(k+1) = P_p(k+1)C^T\big(CP_p(k+1)C^T + V\big)^{-1}} \tag{4.7}$$

En reportant cette expression dans 3.12, on obtient :

$$\boxed{P(k+1) = \big(I_n - K_f(k+1)C\big)P_p(k+1).} \tag{4.8}$$

Résumé

Finalement, les équations du filtre de Kalman peuvent être obtenues par la récurrence temporelle suivante :

- Initialisation

$$\hat{X}(0) = E[X(0)]$$
$$P(0) = \Lambda_0$$

- Récurrence au pas $(k+1)$, on détermine dans l'ordre

$$P_p(k+1) = AP(k)A^T + MWM^T$$

$$K_f(k+1) = P_p(k+1)C^T\left(CP_p(k+1)C^T + V\right)^{-1}$$

$$\hat{X}_P(k+1) = A\hat{X}(k) + Bu(k)$$

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}_P(k+1) + \boldsymbol{K_f}(k+1)\left(Y(k+1) - C\hat{X}_P(k+1) - Du(k+1)\right)$$

$$P(k+1) = \left(I_n - K_f(k+1)C\right)P_p(k+1).$$

Où P(0) est une matrice définie positive symétrique. Souvent, il suffit de prendre :

$$P(0) = diag(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N)$$

4.5. Filtre de Kalman Etendu (EKF)

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le filtre de Kalman est fréquemment utilisé pour analyser le comportement d'un système linéaire qui fonctionne sous des conditions de bruit gaussien.

Cette méthode est très efficace, mais étant donné que la plupart des systèmes physiques sont des systèmes non linéaires, il n'est pas possible de leur appliquer le filtre de Kalman directement. Pour le cas d'un système non linéaire, l'équation d'état et l'équation de sortie sont de la forme :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= f\big(X(k), u(k), w(k)\big) \\ Y(k) &= h\big(X(k), v(k)\big) \end{aligned} \tag{4.9}$$

De la même manière que dans le cas du Filtre de Kalman simple, $w(k) et\ v(k)$sont des bruits blancs gaussiens centrés et indépendants, de matrices de covariance W et V respectivement.

Les fonctions f et h ne sont pas des fonctions linéaires mais ont la contrainted'être différentiables.

Nous suivons un processus toujours similaire à l'algorithme de Kalman conventionnel, mais adaptéau cas non linéaire, décrit comme suit :

1. Initialiser le processus avec :

$$\hat{X}(0) = E[X(0)] \tag{4.10}$$

$$P(0) = E\left[\left(X(0) - \hat{X}(0)\right)\left(X(0) - \hat{X}(0)\right)^T\right] \tag{4.11}$$

2. Pour $k \geq 1$

(a) Linéariser le système autour de l'état estimé précédent :

$$F = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{(\hat{X}(k), u(k), 0)}$$

$$M = \left.\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right|_{(\hat{X}(k), u(k), 0)}$$

(b) Mettre à jour l'estimation par la prédiction de l'état à l'instant $k+1$:

$$\begin{aligned} X_p(k+1) &= f\big(\hat{X}(k), u(k), 0\big) \\ P_p(k+1) &= FP(k)F^T + MWM^T \end{aligned}$$

(c) Calculer les dérivées partielles suivantes :

$$H = \left.\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right|_{(X_p(k+1),0)}$$

$$L = \left.\frac{\partial h_i}{\partial v_j}\right|_{(X_p(k+1),0)}$$

(d) Effectuer la correction de l'estimation par la mesure en suivant les formules suivantes :

$$K_f(k+1) = P_p(k+1)H^T\left(HP_p(k+1)H^T + LVL^T\right)^{-1}$$

$$\hat{X}(k+1) = X_p(k+1) + K_f(k+1)\left[Y(k+1) - h(X_p(k+1),0)\right]$$

$$P(k+1) = \left(I - K_f(k+1)H\right)P_p(k+1)$$

3. Boucler sur l'étape 2...

4.6. Exemple simple de l'estimation d'une constante par filtre de Kalman

Dans cet exemple, on désire estimer une constante scalaire, une tension continue par exemple. On suppose qu'on a la possibilité de faire des mesures de cette constante, mais ces mesures sont entachées de bruit blanc d'écart type 0.1 (notre convertisseur ADC n'est pas trop précis). Dans cette exemple notre processus est modélisé par l'équation aux différences linéaire suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ &= x(k) + w(k) \end{aligned}$$

Avec des mesures :

$$\begin{aligned} y(k) &= Hx(k) + v(k) \\ &= x(k) + v(k) \end{aligned}$$

Les états ne change pas d'un pas à un autre donc A=1, il n'y a pas d'entrée de commande donc u=0. Notre mesure bruité est égale directement à l'état plus le bruit de mesure, donc H=1, C=1, M=1.

Les équations et les paramètres du filtre de Kalman

Les équations de prédiction sont :

Programme Matlab permettant de simuler l'exemple précédent :

```
clearall;
N=50;

%%Modèle d'état du système
A=1;
B=0;
C=1;
W=1e-5;
w=sqrt(W)*randn(1,N);
V=0.01;   %1; 0.0001;  %0.01;
v=sqrt(V)*randn(1,N);
Xreel=0.5;  %rand     %0.9197;
X(1)=Xreel;
for i=1:N-1
X(i+1)=X(i)+w(i);
    Y(i)=X(i)+v(i);
end
  Y(N)=X(N)+V(N);

% %%%%%%%%étape d'initialisation%%%%%%%%%%%
Xest(1)=0;
p(1)=1;

% Estimation par filtre de Kalman
for i=1:N-1
Xp(i+1)=Xest(i);
pp(i+1)=p(i)+W;
    K=pp(i+1)/(pp(i+1)+V);
Xest(i+1)=Xp(i+1)+K*(Y(i)-Xp(i+1));
p(i+1)=pp(i+1)-K*pp(i+1);
end

% Affichage des résultats
figure(1)
holdon
plot(Xreel*ones(1,N),'b');
plot(Xest(:),'r');
plot(Y(:),'+g');
gridon
holdoff
figure(2);
plot(p);gridon
figure(3)
plot(pp)
```

Simulations

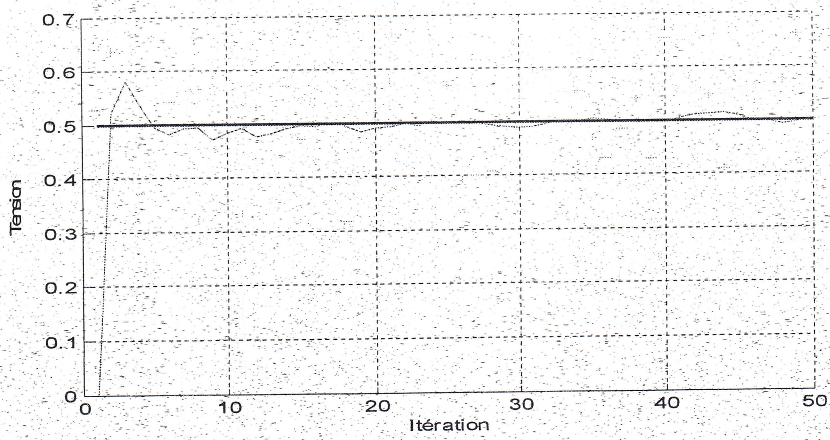

Figure.2 : Résultat de simulation pour $V=(0.1)^2$, la valeur réelle de la constante x=0.5 est tracée en trait continu épais, les mesures bruités sont représentées par des croix, le signal qui reste représente l'estimation par KF de la tension continue

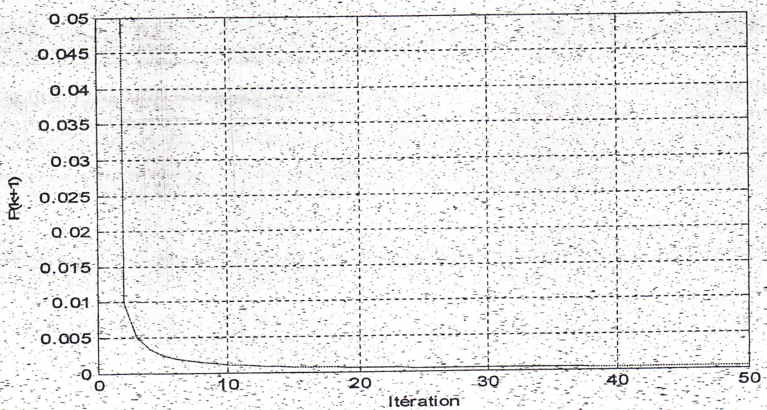

Figure.3 : Après 50 itérations la covariance de l'erreur d'estimation P a pris la valeur 0.0004 alors qu'on l'a prise égale à 1 initialement