

Domácí úloha č. 3

Základy numerické matematiky - NMNM201

(odevzdejte e-mailem před začátkem vašeho cvičení v 10. týdnu semestru)

balazsova@karlin.mff.cuni.cz, blechta@karlin.mff.cuni.cz,

hammerbt@karlin.mff.cuni.cz, outrata@karlin.mff.cuni.cz,

jan.papez@mff.cuni.cz

Domácí úkol odevzdejte jako **jeden soubor PDF** a případně spustitelný počítačový kód, který jste použili k vygenerování obrázků.

Budeme chtít najít kořeny funkce

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

pomocí metody pevného bodu a to čtyřmi různými způsoby:

$$\varphi_1(x) = x^2 - 2,$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{x+2},$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \frac{2}{x},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}.$$

Domácí úloha 1. *Popište, jak jsou jednotlivé metody $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ odvozeny. Tj., pro každou funkci φ_i , $i = 1, \dots, 4$, stačí například napsat posloupnost algebraických úprav vedoucích od zápisu $f(x) = 0$ k zápisu $x = \varphi_i(x)$.*

Nápověda. *Jedna z metod je ekvivalentní Newtonově metodě.* (max 1 bod)

Domácí úloha 2. *Platí pro všechny metody $\varphi_1, \dots, \varphi_4$, že jsou oba kořeny f pevnými body?* (max 1 bod)

Věta 1. *Nechť $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$ a nechť I je interval takový, že platí*

- $\bar{x} \in I$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$,
- *existuje $M < 1$ takové, že $|\varphi'(x)| \leq M$ pro všechna $x \in I$,*
- φ je zobrazení z I do I , tj. $\varphi(I) \subseteq I$.

Pokud $x_0 \in I$, pak iterace pevného bodu konverguje k \bar{x} .

Domácí úloha 3. *Je možné pomocí Věty 1 ukázat, zda budou jednotlivé metody konvergovat pro danou volbu počátečního bodu? Pokud ano, ukažte.*

Pro φ_1 použijte $x_0 = 3$,

pro φ_2 použijte $x_0 = -1.5$,

pro φ_3 použijte $x_0 = 3$,

pro φ_4 použijte $x_0 = 0$.

(max 2 body)

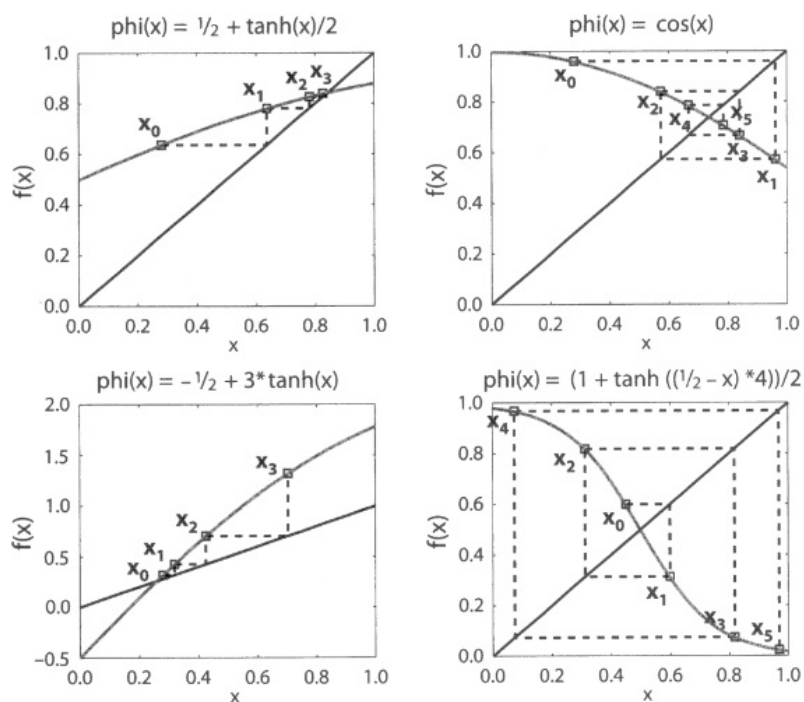


Figure 4.11. Fixed point iteration. The iteration may display monotonic convergence (upper left), oscillatory convergence (upper right), monotonic divergence (lower left), or oscillatory divergence (lower right).

Domácí úloha 4. Nakreslete chování jednotlivých metod pevného bodu z Úlohy 3 podobně jako na Obrázku 4.11. Pokud metoda konverguje, přestože Věta 1 nešla použít, zdůvodněte proč. (max 2 body)