Cvičení 7 - zadání a řešení úloh

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 6. listopadu 2024

---

1 Rayleighův podíl (Rayleigh quotient)

Pro hermitovskou matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ definujeme Rayleighův podíl

$$R(A,x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

Úloha 1. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je hermitovská. Ukažte následující vlastnosti:*

(i) $R(\alpha A, \beta x) = \alpha R(A,x)$ *pro každé* α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$.

(ii) $R(A - \alpha I, x) = R(A,x) - \alpha$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) Nechť $Av = \lambda v$ *pro nějaký nenulový* $v \in \mathbb{C}^n$. *Potom* $R(A,v) = \lambda$.

(iv) Nechť $\lambda_{\min}$ *a* $\lambda_{\max}$ *jsou nejmenší, respektive největší vlastní číslo matice A. Ukažte, že*

$$R(A,x) \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Proč požadujeme, aby matice A byla hermitovská (a nestačí například diagonalizovatelná)?

(v) (navíc) Nechť jsou vlastní čísla A seřazena sestupně a největší je jednonásobné, tedy

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Nechť v_1 je vlastní vektor příslušný λ_1. Ukažte, že

$$R(A,x) \in [\lambda_n, \lambda_2] \qquad \forall x \in v_1^\perp.$$

(vi) (navíc) $R(A,x) = \underset{\mu \in \mathbb{R}}{\arg\min} \|(A - \mu I)x\|^2$.

Řešení. (i) $R(\alpha A, \beta x) = \dfrac{(\beta x)^*\alpha A(\beta x)}{(\beta x)^*\beta x} = \dfrac{\bar{\beta}\beta(x^*\alpha Ax)}{\bar{\beta}\beta x^*x} = \dfrac{\alpha(x^*Ax)}{x^*x} = \alpha R(A,x).$

(ii) $R(A - \alpha I, x) = \dfrac{x^*(A-\alpha I)x}{x^*x} = \dfrac{x^*Ax - x^*\alpha Ix}{x^*x} = \dfrac{x^*Ax}{x^*x} - \alpha\dfrac{x^*x}{x^*x} = R(A,x) - \alpha.$

(iii) $R(A,v) = \dfrac{v^*Av}{v^*v} = \dfrac{v^*\lambda v}{v^*v} = \lambda\dfrac{v^*v}{v^*v} = \lambda.$

(iv) Každá hermitovská matice je diagonalizovatelná. Uvažujme unitární matici U, která diagonalizuje A:

$$U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Pak platí

$$R(A,x) = \frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{(Uy)^*A(Uy)}{(Uy)^*Uy} = \frac{y^*U^*AUy}{y^*\underbrace{U^*U}_{=I}y} = \frac{y^*Dy}{y^*y} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2}{\|y\|^2}.$$

Jelikož A je hermitovská, její vlastní čísla jsou reálná. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vlastní čísla jsou seřazena následujícím způsobem:

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}.$$

Potom

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 &\leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2, \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 &\geq \lambda_{\min} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2.\end{aligned}$$

Na základě bodu (iii) víme, že maximum je nabýváno pro $x = v_1$, vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu $\lambda_{\max}$ a minimum je nabýváno pro $x = v_n$, vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu $\lambda_{\min}$:

$$\begin{aligned}R(A, v_1) &= \lambda_1 = \lambda_{\max} \\ R(A, v_n) &= \lambda_n = \lambda_{\min}.\end{aligned}$$

□