

1 Opakování

1.1 Vektorová norma

Definice 1 (Vektorová norma). *Norma je funkcionál splňující pro libovolné vektory $x, y \in \mathbb{C}^n$ (\mathbb{R}^n) a pro libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{C}$ (\mathbb{R}) následující podmínky:*

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivní definitnost),
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost),
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (pozitivní homogenita).

1.2 Příklady vektorových norem

Nechť $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$. Mezi tři základní vektorové normy patří

jedničková norma	$\ x\ _1 \equiv \sum_{i=1}^n x_i $
euklidovská ("dvojková") norma	$\ x\ _2 \equiv \ x\ \equiv \left(\sum_{i=1}^n x_i ^2 \right)^{1/2}$
maximová norma	$\ x\ _\infty \equiv \max_{i=1, \dots, n} x_i $

Úloha 1. Pro uvedené normy nakreslete jednotkové koule v \mathbb{R}^2 , tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$.

Podle věty o ekvivalenci norem na konečně-dimenzionálním prostoru jsou všechny tyto normy topologicky ekvivalentní, tj. pro libovolné dvě normy $\|\cdot\|_\alpha$ a $\|\cdot\|_\beta$ existují konstanty $c, C \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Jedná se o teoretický výsledek, pro praktické použití, například měření chyby, jsou konstanty c a C často příliš velké/malé.

Úloha 2. Ukažte, že platí

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[Hint (geometricky): Začněte s \mathbb{R}^2 . Pro jaké vektory se normy nejvíce a nejméně liší?]

[Hint (algebraicky): Pracujte s $\|x\|_2^2$.]

1.3 Skalární součin

Definice 2 (Skalární součin). *Skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ splňující pro libovolné vektory $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ a pro libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{C}$ následující podmínky:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, a $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
3. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

Každý skalární součin indukuje normu

$$\|x\| \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

pro niž navíc platí Cauchyho–Schwarzova nerovnost

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Vektory x a y jsou *ortogonální* (kolmé), pokud platí $\langle x, y \rangle = 0$.

Definice 3 (Euklidovský skalární součin).

$$\langle x, y \rangle \equiv y^* x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

1.4 Matice - připomenutí

- matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A = [a_{i,j}]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

- matice *transponovaná* $A^T = [a_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, *hermitovsky sdružená* $A^* = [\bar{a}_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nazveme *symetrickou*, platí-li $A = A^T$, a *hermitovskou*, pokud $A = A^*$
- A reálná $\Rightarrow A^T = A^*$
- pro libovolnou čtvercovou matici A platí $\langle Ax, y \rangle = y^* Ax = (A^* y)^* x = \langle x, A^* y \rangle$
- čtvercová matice je *singulární* $\Leftrightarrow \exists x \neq 0: Ax = 0$; matice, která není singulární, se nazývá *regulární*
- vektor $v \neq 0$ a skalár λ jsou *vlastním vektorem/číslem* matice A , pokud $Av = \lambda v$
- hermitovskou matici nazveme *pozitivně definitní* (HPD), pokud $\forall x \neq 0: x^* Ax > 0$
- matice A je *normální*, pokud splňuje $AA^* = A^*A$, ekvivalentně je to unitárně diagonalizovatelná komplexní matice
- komplexní (reálná) čtvercová matice U typu $n \times n$ je *unitární*, pokud její sloupce/ řádky tvoří ON bázi prostoru \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n); ekvivalentně $U^*U = UU^* = I$

1.5 Matice jako lineární zobrazení

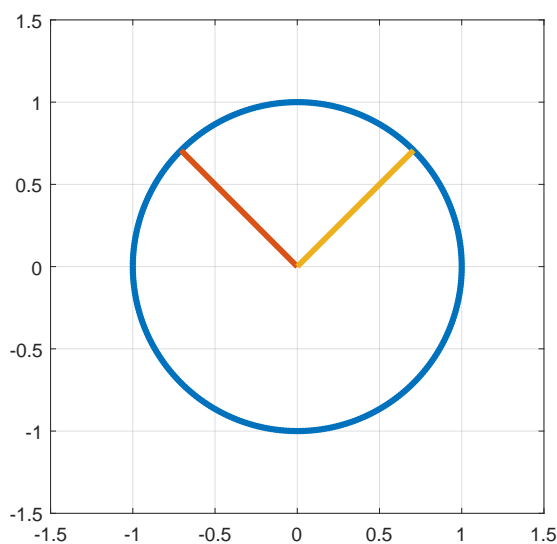
Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ definuje zobrazení z \mathbb{C}^m do \mathbb{C}^n , které vektoru $x \in \mathbb{C}^m$ přiřazuje vektor $Ax \in \mathbb{C}^n$,

$$A: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad A: x \longmapsto Ax.$$

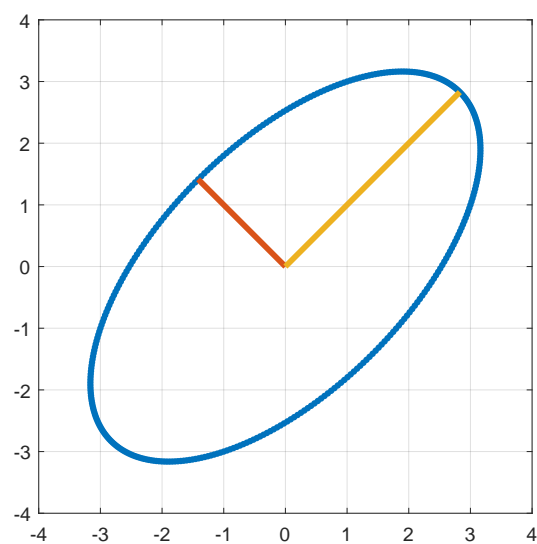
Uvažujme matici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tato matice má vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$ a odpovídající vlastní vektory $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)^T$ a $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T$. Působení matice A na jednotkovou kružnici lze nahlédnout na obrázku 1.



(a) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$



(b) $\{Ax \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

Obrázek 1: Zobrazení jedničkové kružnice pomocí matice A , zvýrazněné vlastní vektory.

1.6 Unitární transformace

Mnoho různých algoritmů na řešení soustav lineárních rovnic, problému nejmenších čtverců či problému výpočtu vlastních čísel je založeno na unitárních transformacích vektoru či matice,

$$x \mapsto Ux, \quad A \mapsto UA, \quad U \text{ unitární.}$$

- Jaké znáte vlastnosti unitárních matic?
- Uveďte některé příklady unitárních matic.

Úloha 3. Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovávají jedničkovou či maximovou vektorovou normu. Pokud ne, najděte jednoduchý protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.

2 Maticové normy

V analýze chování různých algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic, problémů nejmenších čtverců, problému vlastních čísel, etc. se často dostaneme do situace, kdy chceme odhadnout velikost nějakého vektoru, např. chyby, a máme jej vyjádřený jako obraz jiného vektoru při lineárním zobrazení, Ax . Potřebovali bychom jedním číslem odhadnout jeho velikost, například takto:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \quad (1)$$

Tedy velikost Ax je nanejvýš velikost x krát nějaké číslo, které je vlastností matice A – nazvěme ho normou matice A .

Pokusme se nyní objevit co nejvíce věcí o normě matice. Co nás tedy zajímá?

2.1 Otázky

- Jak měřit matici jedním číslem?
- Jak lze normu matice definovat?
- Jaké vlastnosti bychom od normy matice očekávali?
- Vymyslíme nějaké speciální případy? Některé matice, pro které víme, kolik by měla být norma?

2.2 Definice

Definice 4 (Generovaná norma). *Maticovou normou generovanou vektorovou normou nazýváme funkcionál*

$$\|A\|_\alpha \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\alpha.$$

Takto definovaný funkcionál je normou ve smyslu definice normy. Z definice také triviálně vyplývá, že

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha.$$

Platí (pro počítání jednotlivých norem)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (\text{maximum přes sloupcové součty abs. hodnot})$$

$$\|A\| \equiv \|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\varrho(A^*A)}, \quad (\text{spektrální norma})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, \quad (\text{maximum přes řádkové součty abs. hodnot})$$

kde σ_1 je největší singulární číslo matice a $\varrho(\cdot)$ označuje spektrální poloměr, tj. $\varrho(B) \equiv \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{sp}(B)\}$.

Příkladem negenerované normy je Frobeniova norma, která je analogií 2-normy pro matice (díváme se na matici jako vektor o $n \times m$ složkách).

Definice 5 (Frobeniova norma).

$$\|A\|_F \equiv \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

Poznámka. Jiné možné zápisy Frobeniovy normy:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^m \|a_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|a_{i*}\|^2 = \text{trace}(A^*A),$$

kde a_{*j} značí j -tý sloupec, a_{i*} značí i -tý řádek matice A a $\text{trace}(B) = \sum_{i=1}^m b_{ii}$ je tzv. stopa matice $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

2.3 Vlastnosti a doplňující úlohy

Kromě odhadu (1) by bylo velmi užitečné, kdyby maticové normy byly *multiplikativní*, tj.,

$$\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha,$$

Úloha 4. Proč nelze obecně očekávat rovnost $\|AB\|_\alpha = \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha$ a $\|AB\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$?

Úloha 5. Jsou zavedené maticové normy multiplikativní?

[Hint: Začněte generovanými normami, pro Frobeniovu je to obtížnější otázka.]

Úloha 6. Pomocí nástrojů z prvního ročníku najděte vyjádření 2-normy matice pro symetrické pozitivně definitní matice.

[Hint: Použijte geometrickou představu matice jako lineární zobrazení.]

Úloha 7. Je zřejmé, že obecně $\|A\|_1 \neq \|A^*\|_1$ a $\|A\|_\infty \neq \|A^*\|_\infty$. Dokažte, že pro $\|A\|_2$ však platí $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.

2.4 Vlastnosti norem vzhledem k unitárním transformacím

Úloha 8 (Unitární invariance norem). *Ukažte, že pro unitární matici $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a libovolnou matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ platí*

$$\begin{aligned}\|U\| &= 1, \\ \|UA\| &= \|A\|, \\ (\text{Navíc}) \quad \|UA\|_F &= \|A\|_F.\end{aligned}$$

[Hint: Může vám pomoci singulární rozklad matice A .]

[Hint: Spektrální i Frobeniova norma jsou multiplikativní (viz úloha 5), tedy

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F. \quad]$$

Úloha 9. *Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovává jedničkovou či maximovou maticovou normu. Pokud ne, najděte protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.*