

## 1 Opakování

Tato sekce je zde pro připomenutí základních pojmů a zavedení značení.

### 1.1 Vektorová norma

**Definice 1** (Vektorová norma). *Norma je funkcional splňující pro libovolné vektory  $x, y \in \mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ) a pro libovolný skalár  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ ) následující podmínky:*

1.  $\|x\| \geq 0$ , a  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (pozitivní definitnost),
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (trojúhelníková nerovnost),
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (pozitivní homogenita).

### 1.2 Příklady vektorových norem

Nechť  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ . Mezi tři základní vektorové normy patří

jedničková norma	$\ x\ _1 \equiv \sum_{i=1}^n  x_i $
euklidovská ("dvojková") norma	$\ x\ _2 \equiv \ x\  \equiv \left( \sum_{i=1}^n  x_i ^2 \right)^{1/2}$
maximová norma	$\ x\ _\infty \equiv \max_{i=1, \dots, n}  x_i $

**Úloha 1.** Pro uvedené normy nakreslete jednotkové koule v  $\mathbb{R}^2$ , tj. množiny  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ .

Podle věty o ekvivalenci norem na konečně-dimenzionálním prostoru jsou všechny tyto normy topologicky ekvivalentní, tj. pro libovolné dvě normy  $\|\cdot\|_\alpha$  a  $\|\cdot\|_\beta$  existují konstanty  $c, C \in \mathbb{R}$  takové, že platí

$$c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Jedná se o teoretický výsledek, pro praktické použití, například měření chyby, jsou konstanty  $c$  a  $C$  často příliš velké/malé.

**Úloha 2.** Ukažte, že platí

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[Hint (geometricky): Začněte s  $\mathbb{R}^2$ . Pro jaké vektory se normy nejvíce a nejméně liší?]

[Hint (algebraicky): Pracujte s  $\|x\|_2^2$ .]

### 1.3 Skalární součin

**Definice 2** (Skalární součin). *Skalární součin je zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  splňující pro libovolné vektory  $x, y, z \in \mathbb{C}^n$  a pro libovolný skalár  $\alpha \in \mathbb{C}$  následující podmínky:*

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  a  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
3.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,
4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

Každý skalární součin indukuje normu

$$\|x\| \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

pro niž navíc platí Cauchyho–Schwarzova nerovnost

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Vektory  $x$  a  $y$  jsou *ortogonální* (kolmé), pokud platí  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Definice 3** (Euklidovský skalární součin).

$$\langle x, y \rangle \equiv y^* x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

### 1.4 Matice - připomenutí

- matice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $A = [a_{i,j}]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

- matice *transponovaná*  $A^T = [a_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , *hermitovsky sdružená*  $A^* = [\bar{a}_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  nazveme *symetrickou*, platí-li  $A = A^T$ , a *hermitovskou*, pokud  $A = A^*$
- $A$  reálná  $\Rightarrow A^T = A^*$
- pro libovolnou čtvercovou matici  $A$  platí  $\langle Ax, y \rangle = y^* Ax = (A^* y)^* x = \langle x, A^* y \rangle$
- čtvercová matice je *singulární*  $\Leftrightarrow \exists x \neq 0: Ax = 0$ ; matice, která není singulární, se nazývá *regulární*
- vektor  $v \neq 0$  a skalár  $\lambda$  jsou *vlastním vektorem/číslem* matice  $A$ , pokud  $Av = \lambda v$
- hermitovskou matici nazveme *pozitivně definitní* (HPD), pokud  $\forall x \neq 0: x^* Ax > 0$
- matice  $A$  je *normální*, pokud splňuje  $AA^* = A^*A$ , ekvivalentně je to unitárně diagonalizovatelná komplexní matice
- komplexní (reálná) čtvercová matice  $U$  typu  $n \times n$  je *unitární*, pokud její sloupce/ řádky tvoří ON bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ); ekvivalentně  $U^*U = UU^* = I$

## 1.5 Matice jako lineární zobrazení

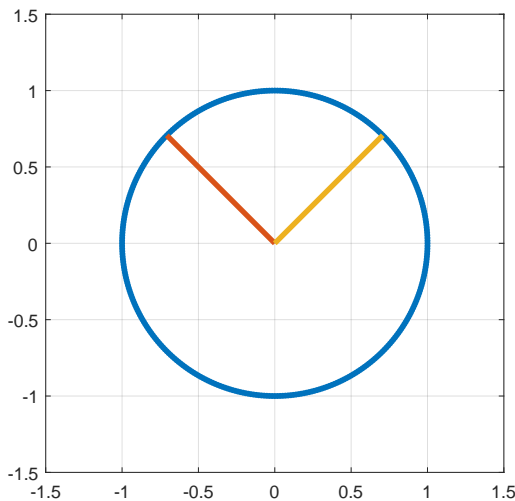
Matice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  definuje zobrazení z  $\mathbb{C}^m$  do  $\mathbb{C}^n$ , které vektoru  $x \in \mathbb{C}^m$  přiřazuje vektor  $Ax \in \mathbb{C}^n$ ,

$$A : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad A : x \longmapsto Ax.$$

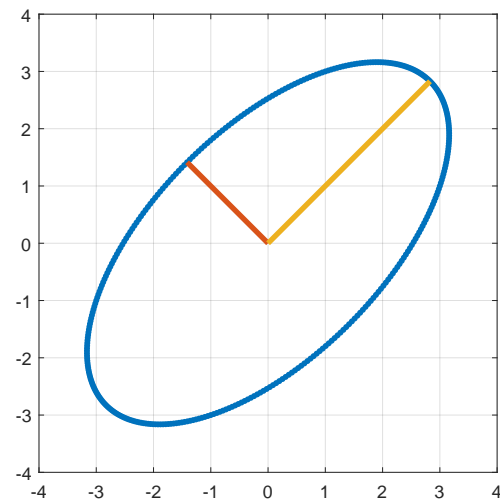
Uvažujme matici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tato matice má vlastní čísla  $\lambda_1 = 2$  a  $\lambda_2 = 4$  a odpovídající vlastní vektory  $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)^T$  a  $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T$ . Působení matice  $A$  na jednotkovou kružnici lze nahlédnout na obrázku 1.



(a)  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$



(b)  $\{Ax \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

Obrázek 1: Zobrazení jednotkové kružnice pomocí matice  $A$ , zvýrazněné vlastní vektory.

## 2 Unitární transformace

Mnoho různých algoritmů na řešení soustav lineárních rovnic, problému nejmenších čtverců či problému výpočtu vlastních čísel je založeno na unitárních transformacích vektoru či matice,

$$x \mapsto Ux, \quad A \mapsto UA, \quad U \text{ unitární.}$$

- Jaké znáte vlastnosti unitárních matic?
- Uveďte některé příklady unitárních matic.

**Úloha 3.** Zachovávají unitární transformace jednotkovou či maximovou vektorovou normu? Pokud ne, najděte jednoduchý protipříklad. Pokud ano, zdůvodněte.

## 3 Maticové normy

V analýze chování různých algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic, problémů nejmenších čtverců, problému vlastních čísel, etc. se často dostaneme do situace, kdy chceme popsat nebo odhadnout výsledek na základě použité matice. Podobně jako u vektorů, zavedeme tedy *normu matice* jako nezáporné číslo, které zjednodušeně popisuje matici.

- Jak měřit matici jedním číslem?

- Jaké vlastnosti bychom od normy matice očekávali?
- Vymyslíme nějaké speciální matice, pro které víme, kolik by měla být norma?
- Lze při definici maticové normy využít (nějakou) vektorovou normu  $\|\cdot\|_\alpha$ ? Například požadavkem

$$\|Ax\|_\alpha \leq \text{norma matice } A \cdot \|x\|_\alpha \quad (1)$$

### 3.1 Definice

**Definice 4** (Generovaná norma). *Maticovou normou generovanou vektorovou normou nazýváme funkcionál*

$$\|A\|_\alpha \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\alpha.$$

Takto definovaný funkcionál je normou ve smyslu definice normy. Z definice také triviálně vyplývá, že

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha.$$

Platí (pro počítání jednotlivých norem)

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, & (\text{maximum přes sloupcové součty abs. hodnot}) \\ \|A\| &\equiv \|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\varrho(A^*A)}, & (\text{spektrální norma}) \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, & (\text{maximum přes řádkové součty abs. hodnot}) \end{aligned}$$

kde  $\sigma_1$  je největší singulární číslo matice a  $\varrho(\cdot)$  označuje spektrální poloměr, tj.  $\varrho(B) \equiv \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{sp}(B)\}$ .

Příkladem negenerované normy je Frobeniova norma, která je analogií 2-normy pro matice (díváme se na matici jako vektor o  $n \times m$  složkách).

**Definice 5** (Frobeniova norma).

$$\|A\|_F \equiv \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

**Poznámka.** Jiné možné zápisy Frobeniovy normy:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^m \|a_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|a_{i*}\|^2 = \text{trace}(A^*A),$$

kde  $a_{*j}$  značí  $j$ -tý sloupec,  $a_{i*}$  značí  $i$ -tý řádek matice  $A$  a  $\text{trace}(B) = \sum_{i=1}^m b_{ii}$  je tzv. stopa matice  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ .

### 3.2 Vlastnosti a doplňující úlohy

Kromě odhadu (1) by bylo velmi užitečné, kdyby maticové normy byly *multiplicativní*,<sup>1</sup> tj.,

$$\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha,$$

<sup>1</sup>Tato vlastnost se často také nazývá *submultiplicativnost*.

**Poznámka.** Obecně nelze očekávat, že  $\|AB\|_\alpha = \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha$ . Konkrétní protipříklady jsou třeba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kdy je } \|A\|_\alpha = \|B\|_\alpha = 1 \text{ a } \|AB\|_\alpha = 0 \text{ pro } \alpha = 1, 2, \infty,$$

nebo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{kdy je } \|A\|_\alpha = \|B\|_\alpha = \|AB\|_\alpha = 2 \text{ pro } \alpha = 1, 2, \infty,$$

nebo třeba také  $A = B^{-1}$  pro regulární  $B$ , která není jen skalárním násobkem identity.

Také pro Frobeniovu normu  $\|AB\|_F \neq \|A\|_F \|B\|_F$ , což lze ukázat například volbou  $A = B = I$ .

**Úloha 4.** Jsou maticové normy z Definice 4 a 5 multiplikativní?

[Hint: Začněte generovanými normami, pro Frobeniovu je to obtížnější otázka.]

**Úloha 5.** Je zřejmé, že obecně  $\|A\|_1 \neq \|A^*\|_1$  a  $\|A\|_\infty \neq \|A^*\|_\infty$ . Dokažte, že pro  $\|A\|_2$  však platí  $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ .

### 3.3 Vlastnosti norem vzhledem k unitárním transformacím

**Úloha 6** (Unitární invariance norem). Ukažte, že pro unitární matici  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a libovolnou matici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  platí

$$\begin{aligned} \|U\| &= 1, \\ \|UA\| &= \|A\| = \|AU\|, \\ (\text{Navíc}) \quad \|UA\|_F &= \|A\|_F = \|AU\|_F. \end{aligned}$$

[Hint: Může vám pomoci singulární rozklad matice  $A$ .]

[Hint: Spektrální i Frobeniova norma jsou multiplikativní (viz úloha 4), tedy

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F. \quad ]$$

**Úloha 7.** Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovává jedničkovou či maximovou maticovou normu. Pokud ne, najděte protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.

## 4 Gaussova eliminace jako LU rozklad matice

Ukážeme (připomeneme), že Gaussovu eliminaci, tedy převod matice  $A$  do horního odstupňovaného tvaru, lze reprezentovat jako tzv. LU rozklad matice  $A$ . Pro jednoduchost budeme nyní předpokládat, že matice  $A$  je regulární (a tedy i nutně čtvercová řádu  $n$ ), a dokonce, že v průběhu Gaussovy eliminace nenarazíme na nulový pivot (tedy není třeba prohazovat řádky).

Eliminaci popíšeme jako proces postupných řádkových úprav reprezentovaných maticemi  $M_k^{-1}$ , kde každá  $M_k^{-1}$  odpovídá eliminaci jednoho sloupce matice  $A$  pomocí  $k$ -tého řádku. Tato matice tedy zahrnuje, pro každý řádek  $i = k + 1, \dots, n$ , vynásobení  $k$ -tého řádku vhodnou konstantou a přičtení k  $i$ -tému řádku.

$$A \rightarrow A^{(1)} = M_1^{-1}A \rightarrow \dots \rightarrow U = A^{(n-1)} = \overbrace{M_{n-1}^{-1} \dots M_1^{-1}}^{L^{-1}} A. \quad (2)$$

Po nejvýše  $n$  krocích dostáváme matici  $U$ , která je horní trojúhelníková (připomínáme, že  $A$  byla regulární). Označíme-li součin matic  $L^{-1} := M_{n-1}^{-1} \dots M_1^{-1}$ , pak vidíme, že platí  $A = LU$ .

Matice  $M_k^{-1}$  odpovídající řádkovým úpravám jsou čtvercové  $n \times n$  a regulární (proto i matice  $L$  je regulární). Protože jsme díky předpokladu v průběhu eliminace nenarazili na nulový pivot, mají matice  $M_k^{-1}$  následující strukturu

$$M_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -m_{n,k} & & 1 \end{bmatrix}, \quad m_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix},$$

kde

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \quad a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k-1)}. \quad (3)$$

Matici  $M_k^{-1}$  můžeme zapsat následovně:  $M_k^{-1} = I - m_k e_k^T$ . Pro ilustraci

$$m_2 e_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{3,2} \\ m_{4,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$M_k = (I - m_k e_k^T)^{-1} = I + m_k e_k^T.$$

Z (2) plyne, že

$$L = (M_{n-1}^{-1} \dots M_2^{-1} M_1^{-1})^{-1} = M_1 M_2 \dots M_{n-1}. \quad (4)$$

Z tvaru matic  $M_k$  dostáváme

$$M_1 M_2 \dots M_{n-1} = I + \sum_{k=1}^{n-1} m_k e_k^T, \quad (5)$$

což lze graficky vyjádřit takto

Matici  $L$  proto nemusíme nijak složitě počítat, a pro její sestavení stačí při výpočtu ukládat čísla  $m_{i,k}$  a na diagonálu dát jedničky.

**Úloha 8.** Spočtěte  $LU$  rozklad matice  $A$  a určete matice  $M_1^{-1}$ ,  $M_2^{-1}$ ,  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Poznámka.** Pokud je matice  $A$  pouze regulární a v průběhu Gaussovy eliminace je třeba prohodit řádky, lze ukázat, že existuje permutační matice  $P$  tak, že

$$PA = LU,$$

kde  $L$ ,  $U$  jsou dolní, respektive horní trojúhelníkové matice.

**Poznámka.**  $LU$  rozklad lze zobecnit pro obdélníkovou matici. Matice  $L$  je pak stále regulární (čtvercová) a matice  $U$  je obdélníková, stejného rozměru jako  $A$ .