Cvičení 10 - zadání pro studenty

Základy numerické matematiky - NMNM201   Verze z 2. prosince 2024

1 Optimalizace

Na přednášce zaznělo několik metod, jak najít

$$\bar{x} = \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x),$$

kde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subset \mathbb{R}^n$. Na cvičení se budeme věnovat jen jedné, a to metodě zlatého řezu.

1.1 Metoda zlatého řezu

Metoda zlatého řezu funguje na principu bisekce. Na intervalu, na kterém hledáme minimum, zvolíme dva body. Pomocí jejich funkčních hodnot určíme menší interval, na kterém budeme minimum funkce hledat.

Algoritmus 1 Metoda zlatého řezu

```
Vstup: f, a_0, b_0
  a = a_0, b = b_0
  ρ = (3−√5)/2
  for k = 1, ... do
    u = a + ρ(b − a)
    v = b − ρ(b − a)
    if f(u) < f(v) then
      b = v
    else
      a = u
    end if
  end for
```

Úloha 1. *Podle Algoritmu 1 napište funkci v MATLABu na hledání minima metodou zlatého řezu. Metoda zlatého řezu je zkonstruována tak, aby bylo znovu použito vyhodnocení f z předchozích iterací. Naprogramujte funkci tak, abyste v každé iteraci (kromě první) vyhodnocovali f pouze v jednom bodě.*

Úloha 2. *Pomocí funkce z Úlohy 1 zkoumejte nalezení minima následujících funkcí s daným počátečním intervalem:*

(a) $f(x) = x^2$, $a = -1$, $b = 1$,

(b) $f(x) = \sin(x)$, $a = -3$, $b = 6$,

(c) $f(x) = \sin(x)$, $a = -3$, $b = 10$,

(d) $f(x) = 1.2 + x^2 - x - e^{-x}$, $a = -3$, $b = 3$.

Na každou úlohu použijte 15 iterací. Pozorujte volbu bodů u a v. Bylo nalezeno skutečně minimum funkce?

2 Ortogonální polynomy

Ortogonální polynomy jsou důležité funkce v numerické matematice. Aplikaci nalezneme v mnoha metodách. Důležité nejsou pouze samotné funkce, ale i jejich kořeny.

2.1 Legendrovy polynomy

Nejznámější ortogonální polynomy jsou tzv. *Legendrovy polynomy* na $[-1,1]$ odpovídající skalárnímu součinu $(f,g)=\int_{-1}^{1} fg\,dx$. Získat je můžeme pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace polynomů $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$. Lze je také vyjádřit rekurentním vztahem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= 1,\\
\mathcal{L}_1(x) &= x,\\
\mathcal{L}_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1}\,x\,\mathcal{L}_n(x) - \frac{n}{n+1}\,\mathcal{L}_{n-1}(x), \quad n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Úloha 3. *Spočtěte $\mathcal{L}_2$ jak pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, tak pomocí 3-členné rekurence. Liší se polynomy? Liší se jejich kořeny?*

Úloha 4. *Pomocí přeškálování $\mathcal{L}_2$ (odvozeného rekurentně) z Úlohy 3 odvoďte Legendrův polynom na intervalu $[2,8]$. Normu zachovat nepotřebujeme.*

Nápověda. *Najděte předpis afinní funkce, která bod -1 zobrazí do 2 a bod 1 zobrazí do 8.*

Úloha 5 (Navíc)**.** *Dokážete napsat rekurentní vzorec pro Legendrovy polynomy na intervalu $[a,b]$?*

2.2 Chebyshevovy polynomy

Dalšími používanými ortogonálními polynomy jsou *Chebyshevovy polynomy* na $[-1,1]$ odpovídající skalárnímu součinu

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}\frac{fg}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Vyjádřit je můžeme ve tvaru

$$T_n(x)=\cos\left(n\,\arccos x\right), \quad n=0,1,\ldots$$

Úloha 6. *Ukažte, že funkce T_n je opravdu polynomem stupně právě n.*

Nápověda. *Zkuste odvodit rekurentní vztah pro výpočet Chebyshevova polynomu T_{n+1}.*

Nápověda. *S použitím součtových vzorců vyjádřete $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ a vhodně dosaďte za α a β.*

V Úloze 6 jsme odvodili rekurentní vztah pro vyjádření Chebyshevových polynomů:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_{n+1}(x) &= 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

V případě ortogonálních polynomů nás často zajímají jejich kořeny a body extrému. Pro Chebyshevovy polynomy máme vzorce, jak tyto body spočíst.

Úloha 7. *Ukažte, že pro T_n platí následující.*

(a) Jeho kořeny jsou ve tvaru

$$x_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right), \quad k=1,\ldots,n.$$

(b) Jeho extrémy jsou ve tvaru

$$x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k=0,\ldots,n.$$