

# 1 Metody Krylovových podprostorů

## 1.1 Vlastnosti Krylovových podprostorů

**Definice 1** (Krylovův podprostor). *Nechť  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a  $v \in \mathbb{C}^n$ . Posloupnost  $v, Av, A^2v, \dots$  nazýváme Krylovova posloupnost, a podprostor*

$$\mathcal{K}_k(A, v) := \text{span}\{v, Av, \dots, A^{k-1}v\},$$

kde  $k \leq n$ ,  $k$ -tý Krylovův podprostor.

**Úloha 1.** *Nechť máme matici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

a uvažujme jako počáteční vektor v nějaký kanonický vektor  $v = e_j$ ,  $j \in 1, 2, \dots, n$ . Ukažte, jak vypadá Krylovův podprostor  $\mathcal{K}_k(A, v)$ . Pokud bychom na  $\mathcal{K}_k(A, v)$  aproximovali nějaký vektor  $w$  jeho ortogonální projekcí, jak bude vypadat? Jaká bude chyba a jak se bude vyvíjet pro rostoucí  $k$ ?

## 1.2 Arnoldiho metoda

Arnoldiho algoritmus počítá ortogonální bázi Krylovova prostoru. Výsledkem této ortogonalizace jsou matice:

$$V_k = [v_1, \dots, v_k], \quad H_k = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & h_{k,k-1} & h_{k,k} \end{bmatrix}.$$

Matice splňují následující rovnici:

$$AV_k = V_k H_k + h_{k+1,k} v_{k+1} e_k^T$$

Matice  $H_k$  nazýváme *horní Hessenbergovou* maticí. Její vlastní čísla nazýváme *Ritzova čísla* a vektory  $V_k y$ , kde  $y$  jsou vlastní vektory  $H_k$ , nazýváme *Ritzovy vektory*. Ritzova čísla jsou aproximací vlastních čísel matice  $A$  (ne všech, stále se jedná o metodu částečného problému vlastních čísel) a Ritzovy vektory jsou aproximací vlastních vektorů matice  $A$ .

Co je tedy *Arnoldiho metoda*? Jedná se o metodu využívající Arnoldiho algoritmus k výpočtu matice  $V_k$ ,  $H_k$  a vlastních čísel a vlastních vektorů matice  $H_k$ . Ritzova čísla a vektory jsou pak aproximací vlastních čísel a vektorů matice  $A$ .

Pro obecnou nesymetrickou matici je problém říci cokoliv o blízkosti spočtené aproximace  $\mu$  k nejbližšímu vlastnímu číslu matice  $A$ . Víme jen, že platí vztah:

$$\|Ax - \mu x\| = h_{k+1,k} |e_k^T y|,$$

kde  $y$  je vlastní vektor matice  $H_k$  příslušný k vlastnímu číslu  $\mu$  a  $x = V_k y$ .

**Úloha 2.** Spusťte skript `baze_krylovova_prostoru.m` a spočítete bázi Krylovova prostoru pomocí Gram-Schmidtova procesu. Pozorujte ztrátu ortogonality i přesnost rozkladu použitím CGS, MGS a ICGS. Jak se změní ztráta ortogonality a přesnost výpočtu použijeme-li Arnoldiho metodu `Arnoldicgs.m` nebo `Arnoldings.m`?

**Úloha 3.** Zvolme náhodnou matici větších rozměru a náhodný vektor odpovídajícího rozměru. Doplňte skript `Arnoldi_pro_vetsi_matici.m`, kde spočítáme bázi Krylovova prostoru pomocí Arnoldiho metody `Arnoldicgs.m`. Vykreslete ztrátu ortogonality  $\|I - V_k^T V_k\|$  pro  $k = 1, 2, \dots, n$  v logaritmickém měřítku. Jak se bude vyvíjet ztráta ortogonality, když použijeme `Arnoldings.m`?

### 1.3 Lanczosova metoda

Jedná se o Arnoldiho metodu aplikovanou na hermitovské matice  $A$ . Z Arnoldiho algoritmu aplikovaného na  $A$  dostaneme

$$H_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_k \\ & & & \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}.$$

Horní Hessenbergova matice je tedy *tridiagonální* maticí a značíme ji  $T_k$ . Dále platí vztah:

$$AV_k = V_k T_k + \beta_{k+1} v_{k+1} e_k^T.$$

Ortogonální bázi Krylovova prostoru lze tak počítat tříčlennou rekurencí. Výhodou je i to, že díky symetrii lze odhadnout vzdálenost vlastního čísla  $\mu$  matice  $T_k$  od nejbližšího vlastního čísla matice  $A$  vztahem:

$$\min_{\lambda \in \rho(A)} |\lambda - \mu| \leq \beta_{k+1} \frac{|e_k^T y|}{\|x\|},$$

kde  $y$  je vlastní vektor matice  $T_k$  příslušný k vlastnímu číslu  $\mu$  a  $x = V_k y$ .

**Úloha 4.** Ve skriptu `baze_pro_symetrickou_matici` proveďte Arnoldiho algoritmus pro symetrickou matici a sledujte velikost prvků v pravém horním rohu matice  $H_k$ , které by měly být nulové.

## 2 Vlastnosti Jacobiho matic

Reálnou symetrickou tridiagonální matici s kladnými prvky na vedlejších diagonálách

$$J_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_k \\ & & & \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad \beta_i > 0, \quad i = 2, \dots, k,$$

nazveme Jacobiho maticí.

**Úloha 5.** Ukažte, že vlastní vektory Jacobiho matic mají nenulovou první a poslední složku.

**Úloha 6.** *Uvažujme charakteristické polynomy Jacobiho matice  $J_k$ ,*

$$\chi_0(\lambda) \equiv 1, \quad \chi_k(\lambda) = \det(\lambda I - J_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

*Ukažte, že platí rekurence*

$$\chi_0 = 1, \quad \chi_1(\lambda) = \lambda - \alpha_1, \quad \chi_k(\lambda) = (\lambda - \alpha_k)\chi_{k-1}(\lambda) - \beta_k^2 \chi_{k-2}(\lambda), \quad k = 2, 3, \dots \quad (1)$$

**Úloha 7.** *Ukažte pomocí rekurence (1), že dvě po sobě jdoucí Jacobiho matice nemohou mít stejná vlastní čísla.*