

## 1 Opakování

### 1.1 Norma

**Definice 1.** Norma je funkcionál splňující pro libovolné vektory  $x$  a  $y$  v  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ) a pro libovolný skalár  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ ) následující podmínky:

1.  $\|x\| \geq 0$ , a  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (pozitivní definitnost),
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (trojúhelníková nerovnost),
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (pozitivní homogenita).

### 1.2 Vektorové normy

Nechť  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ . Mezi tři základní vektorové normy patří

jedničková norma	$\ x\ _1 \equiv \sum_{i=1}^n  x_i $
euklidovská ("dvojková") norma	$\ x\ _2 \equiv \ x\  \equiv \left( \sum_{i=1}^n  x_i ^2 \right)^{1/2}$
maximová norma	$\ x\ _\infty \equiv \max_{i=1, \dots, n}  x_i $

**Úloha 1** (Navíc). Pro uvedené normy nakreslete jednotkové koule v  $\mathbb{R}^2$ , tj. množiny  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ .

Podle věty o ekvivalenci norem na konečně-dimenzionálním prostoru jsou všechny tyto normy topologicky ekvivalentní, tj. pro libovolné dvě normy platí

$$c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Jedná se o teoretický výsledek, pro praktické použití, například měření chyby, jsou konstanty  $c$  a  $C$  často příliš velké/malé.

**Úloha 2** (Navíc). Ukažte, že platí

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[Hint (geometricky): Začněte s  $\mathbb{R}^2$ . Pro jaké vektory se normy nejvíce a nejméně liší?]

[Hint (algebraicky): Pracujte s  $\|x\|_2^2$ .]

### 1.3 Matice

- matice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $A = [a_{i,j}]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

- matice *transponovaná*  $A^T = [a_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , *hermitovsky sdružená*  $A^* = [\bar{a}_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  nazveme *symetrickou*, platí-li  $A = A^T$ , a *hermitovskou*, pokud  $A = A^*$
- $A$  reálná  $\Rightarrow A^T = A^*$
- pro libovolnou čtvercovou matici  $A$  platí  $\langle Ax, y \rangle = y^* Ax = (A^* y)^* x = \langle x, A^* y \rangle$
- čtvercová matice je *singulární*  $\Leftrightarrow \exists x \neq 0: Ax = 0$ ; matice, která není singulární, se nazývá *regulární*
- vektor  $v \neq 0$  a skalár  $\lambda$  jsou vlastním vektorem/číslem matice  $A$ , pokud  $Av = \lambda v$
- hermitovskou matici nazveme pozitivně definitní (HPD), pokud  $\forall x \neq 0: x^* Ax > 0$
- normální matice je matice splňující  $AA^* = A^*A$ , ekvivalentně je to unitárně diagonalizovatelná komplexní matice
- komplexní (reálná) čtvercová matice typu  $n \times n$  je unitární (ortogonální), pokud její sloupce tvoří ON bázi prostoru  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
- každá komplexní (reálná) obdélníková matice má singulární rozklad tvaru  $A = UDV^*$ , kde  $U$  a  $V$  jsou unitární (ortogonální) a  $D$  je reálná diagonální matice. Na diagonále  $D$  jsou singulární čísla  $\sigma_1$  až  $\sigma_r$  matice  $A$ . Ve sloupcích matic  $U$  a  $V$  jsou po řadě levé a pravé singulární vektory matice  $A$ .

## 1.4 Unitární transformace

Mnoho různých algoritmů na řešení soustav lineárních rovnic, problému nejmenších čtverců či problému výpočtu vlastních čísel je založeno na unitárních transformacích vektoru či matice,

$$x \rightarrow Ux, \quad A \rightarrow UA, \quad U \text{ unitární.}$$

- Jaké znáte vlastnosti unitárních matic?
- Uveďte některé příklady unitárních matic.

**Úloha 3.** *Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovávají jedničkovou či maximovou vektorovou normu. Pokud ne, najděte jednoduchý protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.*

**Úloha 4** (Navíc). *Najděte příklad ilustrující, že unitární transformace nezachovávají energetickou normu.*

## 1.5 Skalární součin

**Definice 2** (Skalární součin). *Skalární součin je funkcionál splňující pro libovolné vektory  $x, y$  a  $z$  a pro libovolný skalár  $\alpha \in \mathbb{C}$  následující podmínky:*

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , a  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
3.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,
4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

Každý skalární součin indukuje normu

$$\|x\| \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

pro niž navíc platí Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Vektory  $x$  a  $y$  jsou *ortogonální* (kolmé), pokud platí  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Definice 3** (Euklidovský skalární součin).

$$\langle x, y \rangle \equiv y^* x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

**Úloha 5** (Navíc). *Rozmyslete se, že pro hermitovskou pozitivně definitní matici  $A$  splňuje zobrazení*

$$\langle x, y \rangle_A \equiv y^* A x, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

*definici skalárního součinu.*

Příslušná indukovaná vektorová norma  $\|x\|_A \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle_A}$  se často nazývá *energetická*.

## 2 Maticové normy

V analýze chování různých algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic, problémů nejmenších čtverců, problému vlastních čísel, etc. se často dostaneme do situace, že chceme odhadnout velikost nějakého vektoru, např. chyby, a máme jej vyjádřený jako obraz jiného vektoru při nějakém lineárního zobrazení,  $Ax$ . Potřebovali bychom jedním číslem odhadnout jeho velikost, například takto:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \tag{1}$$

Tedy velikost  $Ax$  je nanejvýš velikost  $x$  krát nějaké číslo, které je vlastností matice  $A$  – nazvěme ho normou  $A$ .

Pokusme se nyní objevit co nejvíce věcí o normě matice. Co nás tedy zajímá?

### 2.1 První otázky

- Jak měřit matici jedním číslem?
  - Jak lze normu matice definovat?
  - Jaké vlastnosti bychom od normy matice očekávali?
  - Vymyslíme nějaké speciální případy? Někaké matice, pro které víme, kolik by měla být norma?
- 

### 2.2 Druhé otázky

- Je kandidát skutečně norma?
- Splňuje norma nerovnost (1)?
- Má norma očekávané hodnoty ve speciálních případech?

## 2.3 Definice

**Definice 4** (Generovaná norma). *Maticovou normou generovanou vektorovou normou nazýváme funkcionál*

$$\|A\|_\alpha \equiv \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\alpha.$$

Takto definovaný funkcionál je normou ve smyslu definice normy. Z definice také triviálně vyplývá, že

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha.$$

Platí (pro počítání jednotlivých norem)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (\text{maximum přes sloupcové součty abs. hodnot})$$

$$\|A\| \equiv \|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\varrho(A^*A)}, \quad (\text{spektrální norma})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, \quad (\text{maximum přes řádkové součty abs. hodnot})$$

kde  $\sigma_1$  je největší singulární číslo matice a  $\varrho(\cdot)$  označuje spektrální poloměr, tj.  $\varrho(B) \equiv \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{sp}(B)\}$ .

Příkladem negenerované normy je Frobeniova norma, která je analogií 2-normy pro matice (díváme se na matici jako vektor o  $n \times m$  složkách).

**Definice 5** (Frobeniova norma).

$$\|A\|_F \equiv \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

## 2.4 Vlastnosti a doplňující úlohy

Kromě odhadu (1) by bylo velmi užitečné, kdyby maticové normy byly *multiplikativní*, tj.,

$$\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha,$$

**Úloha 6.** Proč nelze obecně očekávat rovnost  $\|AB\|_\alpha = \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha$  a  $\|AB\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$ ?

**Úloha 7.** Jsou zavedené maticové normy multiplikativní?

[Hint: Začněte generovanými normami, pro Frobeniovu je to obtížnější otázka.]

**Úloha 8.** Pomocí nástrojů z prvního ročníku najděte vyjádření 2-normy matice pro symetrické matice.

[Hint: Použijte geometrickou představu unitární diagonalizace.]

**Úloha 9.** Je zřejmé, že obecně  $\|A\|_1 \neq \|A^*\|_1$  a  $\|A\|_\infty \neq \|A^*\|_\infty$ . Dokažte, že pro  $\|A\|_2$  však platí  $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ .

## 2.5 Vlastnosti norem vzhledem k unitárním transformacím

**Úloha 10** (Unitární invariance norem). *Ukažte, že pro unitární matici  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a libovolnou matici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  platí*

$$\begin{aligned}\|U\| &= 1, \\ \|UA\| &= \|A\|, \\ (\text{Navíc}) \quad \|UA\|_F &= \|A\|_F.\end{aligned}$$

[Hint: Může vám pomoci singulární rozklad matice  $A$ .]

[Hint: Spektrální i Frobeniova norma jsou multiplikativní (viz úloha 7), tedy

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F. \quad ]$$

[Hint (k Frobeniově normě): Může vám pomoci si nejprve rozmyslet jiné zápisy normy:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^m \|a_{*j}\|^2 = \sum_{j=1}^m \|a_{i*}\|^2 = \text{trace}(A^*A),$$

kde  $a_{*j}$  značí  $j$ tý sloupec a  $a_{i*}$  značí  $i$ tý řádek matice  $A$ .]

**Úloha 11.** *Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovává jedničkovou či maximovou maticovou normu. Pokud ne, najděte protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.*