

Domácí úloha č. 1

Základy numerické matematiky - NMNM201

(odevzdejte e-mailem před začátkem vašeho cvičení v 3. týdnu semestru)

balazsova@karlin.mff.cuni.cz, blechta@karlin.mff.cuni.cz,

hammerbt@karlin.mff.cuni.cz, outrata@karlin.mff.cuni.cz,

jan.papez@mff.cuni.cz

Domácí úkol odevzdejte jako **jeden soubor pdf** a **jeden spustitelný MATLABovský skript**.

Opakování a užitečné informace k SVD

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\text{rank}(A) = r$, pak matici A můžeme zapsat ve tvaru *singulárního rozkladu* (SVD):

$$A = U \Sigma V^*,$$

kde $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ jsou unitární matice a

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Schematicky (včetně takzvaného ekonomického tvaru):

$$\begin{array}{c} A \\ \boxed{} \end{array} = \begin{array}{c} U \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} \Sigma \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} V^* \\ \boxed{} \end{array} = \begin{array}{c} U_r \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} \Sigma_r \\ \boxed{} \end{array} \begin{array}{c} V_r^* \\ \boxed{} \end{array}.$$

Díky singulárnímu rozkladu lze matici zapsat v tzv. *dyadickém rozvoji*

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^* = \sum_{j=1}^r A_j, \quad A_j \equiv \sigma_j u_j v_j^*.$$

Trojice (σ_j, u_j, v_j) se nazývá singulární triplet.

Věta 1 (Eckart–Young–Mirsky). *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $r := \text{rank } A$, a nechť $k < r$. Potom*

$$\underset{\substack{X \in \mathbb{C}^{n \times m} \\ \text{rank}(X) \leq k}}{\text{argmin}} \|A - X\| = A^{(k)} \equiv \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^*$$

a platí

$$\|A - A^{(k)}\| = \sigma_{k+1}.$$

Rovněž platí i

$$\underset{\substack{X \in \mathbb{C}^{n \times m} \\ \text{rank}(X) \leq k}}{\text{argmin}} \|A - X\|_F = A^{(k)}, \quad \|A - A^{(k)}\|_F^2 = \sum_{j=k+1}^r \sigma_j^2.$$

Úloha 1. V domácím úkolu si vyzkoušíme implementaci singulárního rozkladu a Věty 1. pro kompresi dat. Vyberte si jeden obrázek z příložených souborů a nahrajte ho do stejné složky jako skript `komprese.m`. Pak proveďte následující kroky:

1. V příložených souborech je předpřipravený skript `komprese.m` pro kompresi obrazu a vykreslení výsledné aproximace. Doplňte funkci `svd` pro výpočet singulárního rozkladu (matice U , S a V) a uložte singulární čísla do vektoru s na vyznačených místech skriptu.
2. Vyzkoušejte si spuštění skriptu s různými hodnotami k , porovnávejte (dle vlastního dojmu), jak se mění kvalita obrázku, a stručně sepište.
3. Porovnejte pozorování z předchozího bodu s grafem singulárních čísel a pokuste se popsat souvislost kvality obrázku se singulárními čísly matice obrázku.
4. Na závěr napište jaká volba počtu singulárních tripletů je podle vás nejvhodnější a odůvodněte to.

[Hint: Projděte si dokumentaci funkce `svd` pomocí příkazu `doc svd`. Pamatujte, že je zapotřebí uložit všechny tři matice U, S, V . Pro uložení singulárních čísel do vektoru se hodí funkce `diag`.]

[Pozn: Nemusíte se podrobně rozepisovat. Stačí stručný popis několika větami.]

Seznam připravených skriptů a obrázků

- `komprese.m`: Skript na pozorování ztráty kvality obrazu.
- `beer.bmp`
- `portret.bmp`
- `sipka.bmp`
- `smrk.bmp`
- `stezka.bmp`