

1 Lokalizace vlastních čísel pomocí Gershgorinovy věty

Věta 1 (Gershgorin). *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a r_i značí součet mimodiagonálních prvků v i -tém řádku*

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Pak všechna vlastní čísla matice A leží ve sjednocení Gershgorinových kruhů $\bigcup_{i=1}^n D_i$, kde

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}.$$

Pokud m kruhů tvoří souvislou oblast, která je disjunktní od ostatních, pak právě m vlastních čísel matice A (opakovaných dle algebraické násobnosti) leží v této souvislé oblasti.

Úloha 1. *Pomocí Gershgorinovy věty lokalizujte vlastní čísla matice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Gershgorinovy kruhy odpovídající řádkům jsou:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 2\},$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\},$$

$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 2\}.$$

Na základě věty jedno vlastní číslo leží v kruhu D_3 a dvě vlastní čísla leží v $D_1 \cup D_2$.

Gershgorinovy kruhy odpovídající sloupcům jsou:

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 3\},$$

$$E_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\},$$

$$E_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 1\}.$$

Kombinací těchto výsledků zjistíme, že jedno vlastní číslo leží v kruhu E_3 a dvě vlastní čísla v $D_1 \cup D_2$. □

Úloha 2 (navíc). *Občas jednoduchou podobnostní transformací můžeme matici A převést na $D^{-1}AD$, jejíž Gershgorinovy kruhy nám o vlastních číslech původní matice prozradí víc. Uvažujte*

$$D = \text{diag}(1, 2, 4)$$

pro matici A z předchozí úlohy a znovu lokalizujte její vlastní čísla.

Řešení. Transformovaná matice má tvar

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Gershgorinovy kruhy odpovídající řádkům matice $D^{-1}AD$ jsou:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 6\},$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\},$$

$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 3/4\}.$$

Nakreslením těchto kruhů vidíme, že $D_1 \cup D_2$ nyní pokrývá větší oblast než v předchozí úloze, tudíž nám poskytuje méně informací o lokaci dvou vlastních čísel ležících v této oblasti. Na druhou stranu kruh D_3 je mnohem menší než v předchozí úloze, tudíž nám dává přesnější informaci o vlastním čísle. □