Cvičení 7 - zadání pro studenty

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 6. listopadu 2024

---

1 Rayleighův podíl (Rayleigh quotient)

Pro hermitovskou matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ definujeme Rayleighův podíl

$$R(A,x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

Úloha 1. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je hermitovská. Ukažte následující vlastnosti:*

(i) $R(\alpha A, \beta x) = \alpha R(A,x)$ *pro každé* α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$.

(ii) $R(A - \alpha I, x) = R(A,x) - \alpha$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) Nechť $Av = \lambda v$ *pro nějaký nenulový* $v \in \mathbb{C}^n$. *Potom* $R(A,v) = \lambda$.

(iv) Nechť $\lambda_{\min}$ *a* $\lambda_{\max}$ *jsou nejmenší, respektive největší vlastní číslo matice* A. *Ukažte, že*

$$R(A,x) \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Proč požadujeme, aby matice A byla hermitovská (a nestačí například diagonalizovatelná)?

(v) (navíc) Nechť jsou vlastní čísla A seřazena sestupně a největší je jednonásobné, tedy

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Nechť v_1 je vlastní vektor příslušný λ_1. Ukažte, že

$$R(A,x) \in [\lambda_n, \lambda_2] \qquad \forall x \in v_1^\perp.$$

(vi) (navíc) $R(A,x) = \arg\min_{\mu\in\mathbb{R}} \|(A - \mu I)x\|^2$.