Cvičení 1 - zadání a řešení úloh

Základy numerické matematiky - NMNM201   Verze z 2. října 2024

1 Opakování

Tato sekce je zde pro připomenutí základních pojmů a zavedení značení.

1.1 Vektorová norma

Definice 1 (Vektorová norma)**.** *Norma je funkcionál splňující pro libovolné vektory x, $y \in \mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ a pro libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ následující podmínky:*

1. $\|x\| \geq 0$, *a* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(pozitivní definitnost),*
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(trojúhelníková nerovnost),*
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ *(pozitivní homogenita).*

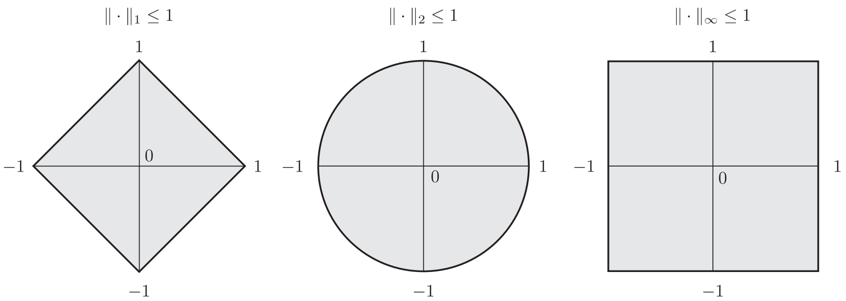
1.2 Příklady vektorových norem

Nechť $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$. Mezi tři základní vektorové normy patří

jedničková norma	$\|x\|_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
euklidovská ("dvojková") norma	$\|x\|_2 \equiv \|x\| \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$
maximová norma	$\|x\|_\infty \equiv \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\,.$

Úloha 1. *Pro uvedené normy nakreslete jednotkové koule v $\mathbb{R}^2$, tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$.*

Řešení.



□

Podle věty o ekvivalenci norem na konečně-dimenzionálním prostoru jsou všechny tyto normy topologicky ekvivalentní, tj. pro libovolné dvě normy $\|\cdot\|_\alpha$ a $\|\cdot\|_\beta$ existují konstanty $c, C \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Jedná se o teoretický výsledek, pro praktické použití, například měření chyby, jsou konstanty c a C často příliš velké/malé.

Úloha 2. *Ukažte, že platí*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[Hint (geometricky): Začněte s $\mathbb{R}^2$. Pro jaké vektory se normy nejvíce a nejméně liší?]
[Hint (algebraicky): Pracujte s $\|x\|_2^2$.]

Řešení. Platí

$$\|x\|_\infty^2 \;=\; \max_i |x_i|^2 \;\le\; \overbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}^{\|x\|_2^2} \;\le\; n \max_i |x_i|^2 \;=\; n\,\|x\|_\infty^2 \,.$$

Nebo prostou úvahou: normy se rovnají pro vektory kanonické báze, a nejvíce se liší pro vektor jedniček: tam je maximová 1 a dvojková $\sqrt{n}$.

Geometrické řešení je možné vidět přes vkládání "koulí"do sebe. Má to jeden háček: je nutno pochopit, že vztah mezi vkládáním koulí a nerovnostmi je opačný, než by intuitivně napovídalo pořadí norem v nerovnosti. Levá nerovnost plyne z toho, že 2-koule je obsažena v ∞-kouli. Pravá nerovnost pak z toho, že ∞-koule zmenšená $\sqrt{2}$-krát je obsažena ve 2-kouli. □

1.3 Skalární součin

Definice 2 (Skalární součin)**.** *Skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ splňující pro libovolné vektory x, y, $z \in \mathbb{C}^n$ a pro libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{C}$ následující podmínky:*

1. $\langle x, x \rangle \ge 0$ *a* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Každý skalární součin indukuje normu

$$\|x\| \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

pro niž navíc platí Cauchyho–Schwarzova nerovnost

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \, \|y\|.$$

Vektory x a y jsou *ortogonální* (kolmé), pokud platí $\langle x, y \rangle = 0$.

Definice 3 (Euklidovský skalární součin)**.**

$$\langle x, y \rangle \equiv y^* x = \sum_{i=1}^n \overline{y}_i x_i, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

1.4 Matice - připomenutí

- matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A = [a_{i,j}]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

- matice *transponovaná* $A^T = [a_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, *hermitovsky sdružená* $A^* = [\overline{a}_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nazveme *symetrickou*, platí-li $A = A^T$, a *hermitovskou*, pokud $A = A^*$

- A reálná $\Rightarrow A^T = A^*$
- pro libovolnou čtvercovou matici A platí $\langle Ax, y\rangle = y^*Ax = (A^*y)^*x = \langle x, A^*y\rangle$
- čtvercová matice je *singulární* $\Leftrightarrow \exists x \neq 0$: $Ax = 0$; matice, která není singulární, se nazývá *regulární*
- vektor $v \neq 0$ a skalár λ jsou *vlastním vektorem/číslem* matice A, pokud $Av = \lambda v$
- hermitovskou matici nazveme *pozitivně definitní* (HPD), pokud $\forall x \neq 0$: $x^*Ax > 0$
- matice A je *normální*, pokud splňuje $AA^* = A^*A$, ekvivalentně je to unitárně diagonalizovatelná komplexní matice
- komplexní (reálná) čtvercová matice U typu $n \times n$ je *unitární*, pokud její sloupce/ řádky tvoří ON bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$); ekvivalentně $U^*U = UU^* = I$

1.5 Matice jako lineární zobrazení

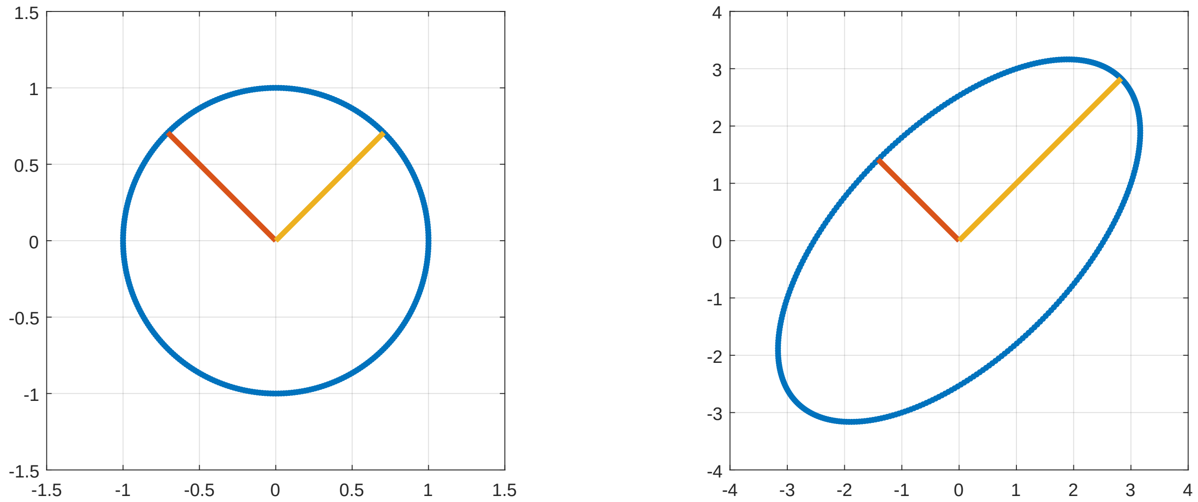
Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ definuje zobrazení z $\mathbb{C}^m$ do $\mathbb{C}^n$, které vektoru $x \in \mathbb{C}^m$ přiřazuje vektor $Ax \in \mathbb{C}^n$,

$$A : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad A : x \longmapsto Ax.$$

Uvažujme matici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tato matice má vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$ a odpovídající vlastní vektory $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)^T$ a $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T$. Působení matice A na jednotkovou kružnici lze nahlédnout na obrázku 1.



(a) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

(b) $\{Ax \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

Obrázek 1: Zobrazení jedničkové kružnice pomocí matice A, zvýrazněné vlastní vektory.

2 Unitární transformace

Mnoho různých algoritmů na řešení soustav lineárních rovnic, problému nejmenších čtverců či problému výpočtu vlastních čísel je založeno na unitárních transformacích vektoru či matice,

$$x \mapsto Ux, \quad A \mapsto UA, \quad U \text{ unitární}.$$

- Jaké znáte vlastnosti unitárních matic?
- Uveďte některé příklady unitárních matic.

Úloha 3. *Zachovávají unitární transformace jedničkovou či maximovou vektorovou normu? Pokud ne, najděte jednoduchý protipříklad. Pokud ano, zdůvodněte.*

Řešení. Unitární transformace obecně nezachovává ani jedničkovou ani maximovou vektorovou normu. Uvažujme například obraz kanonického vektoru při rotaci o úhel ϕ v $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$

Pro obecný úhel ϕ nejsou součet velikostí souřadnic ani velikost největší z nich rovny 1. □

3 Maticové normy

V analýze chování různých algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic, problémů nejmenších čtverců, problému vlastních čísel, etc. se často dostaneme do situace, kdy chceme popsat nebo odhadnou výsledek na základě použité matice. Podobně jako u vektorů, zavedeme tedy *normu matice* jako nezáporné číslo, které zjednodušeně popisuje matici.

- Jak měřit matici jedním číslem?
- Jaké vlastnosti bychom od normy matice očekávali?
- Vymyslíme nějaké speciální matice, pro které víme, kolik by měla být norma?
- Lze při definici maticové normy využít (nějakou) vektorovou normu $\|\cdot\|_\alpha$? Například požadavkem

$$\|Ax\|_\alpha \leq \text{norma matice } A \cdot \|x\|_\alpha? \tag{1}$$

3.1 Definice

Definice 4 (Generovaná norma)**.** *Maticovou normou generovanou vektorovou normou nazýváme funkcionál*

$$\|A\|_\alpha \equiv \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\alpha.$$

Takto definovaný funkcionál je normou ve smyslu definice normy. Z definice také triviálně vyplývá, že

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha.$$

Platí (pro počítání jednotlivých norem)

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, && \text{(maximum přes sloupcové součty abs. hodnot)} \\
\|A\| \equiv \|A\|_2 &= \sigma_1 = \sqrt{\varrho(A^*A)}, && \text{(spektrální norma)} \\
\|A\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|, && \text{(maximum přes řádkové součty abs. hodnot)}
\end{aligned}$$

kde σ_1 je největší singulární číslo matice a $\varrho(\cdot)$ označuje spektrální poloměr, tj. $\varrho(B) \equiv \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}(B)\}$.

Příkladem negenerované normy je Frobeniova norma, která je analogií 2-normy pro matice (díváme se na matici jako vektor o $n \times m$ složkách).

Definice 5 (Frobeniova norma).

$$\|A\|_F \equiv \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{1/2},$$

Poznámka. *Jiné možné zápisy Frobeniovy normy:*

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^{m}\|a_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|a_{i*}\|^2 = \mathrm{trace}(A^*A),$$

kde a_{*j} značí j-tý sloupec, a_{i*} značí i-tý řádek matice A a $\mathrm{trace}(B) = \sum_{i=1}^{m} b_{ii}$ je tzv. stopa matice $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

3.2 Vlastnosti a doplňující úlohy

Kromě odhadu (1) by bylo velmi užitečné, kdyby maticové normy byly *multiplikativní*,[1] tj.,

$$\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha,$$

Poznámka. *Obecně nelze očekávat, že $\|AB\|_\alpha = \|A\|_\alpha\|B\|_\alpha$. Konkrétní protipříklady jsou třeba*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \textit{kdy je } \|A\|_\alpha = \|B\|_\alpha = 1 \textit{ a } \|AB\|_\alpha = 0 \textit{ pro } \alpha = 1, 2, \infty,$$

nebo

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \textit{kdy je } \|A\|_\alpha = \|B\|_\alpha = \|AB\|_\alpha = 2 \textit{ pro } \alpha = 1, 2, \infty,$$

nebo třeba také $A = B^{-1}$ pro regulární B, která není jen skalárním násobkem identity.
Také pro Frobeniovu normu $\|AB\|_F \neq \|A\|_F\|B\|_F$, což lze ukázat například volbou $A = B = I$.

Úloha 4. *Jsou maticové normy z Definic 4 a 5 multiplikativní?*

[Hint: Začněte generovanými normami, pro Frobeniovu je to obtížnější otázka.]

Řešení. Ano, přímo z vlastnosti (1): $\|ABx\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|Bx\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha \|x\|_\alpha$. Frobeniova norma je také multiplikativní:

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|\overbrace{\langle b_{*j}, \overline{a}_{i*}\rangle}^{=[AB]_{i,j}}|^2 \overset{\text{C-S}}{\leq} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\|\overline{a}_{i*}\|^2\|b_{*j}\|^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\|a_{i*}\|^2\sum_{j=1}^{m}\|b_{*j}\|^2 = \|A\|_F^2\|B\|_F^2.\end{aligned}$$

□

Úloha 5. *Je zřejmé, že obecně $\|A\|_1 \neq \|A^*\|_1$ a $\|A\|_\infty \neq \|A^*\|_\infty$. Dokažte, že pro $\|A\|_2$ však platí $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.*

Řešení. Singulární čísla matic A a A^* jsou stejná, tedy i norma. □

[1]Tato vlastnost se často také nazývá *submultiplikativnost*.

3.3 Vlastnosti norem vzhledem k unitárním transformacím

Úloha 6 (Unitární invariance norem)**.** *Ukažte, že pro unitární matici $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a libovolnou matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ platí*

$$\begin{aligned} \|U\| &= 1, \\ \|UA\| &= \|A\| = \|AU\|, \\ \textit{(Navíc)} \quad \|UA\|_F &= \|A\|_F = \|AU\|_F. \end{aligned}$$

[Hint: Může vám pomoci singulární rozklad matice A.]

[Hint: Spektrální i Frobeniova norma jsou multiplikativní (viz úloha 4), tedy

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F. \quad]$$

Řešení. Normu získáme ze znalosti singulárních čísel unitární matice. Například: singulární čísla U jsou vlastní čísla U^*U (vzpomeňte na to, jak se SVD odvozoval), a $U^*U = I$. Nebo: $U = UII$ je singulární rozklad U.

Protože spektrální norma je multiplikativní a $\|U\| = 1$, platí

$$\|UA\| \leq \overbrace{\|U\|}^{=1}\|A\| = \|A\| = \|\overbrace{U^*U}^{I}A\| \leq \overbrace{\|U^*\|}^{=1}\|UA\| = \|UA\|,$$

což dohromady dává $\|UA\| = \|A\|$. Rovnost $\|AU\| = \|A\|$ se ukáže analogicky.

Frobeniova norma je sice také multiplikativní, ale předchozí postup pro ni nebude fungovat, protože $\|U\| = \sqrt{n}$.

Využijeme-li definice Frobeniovy normy pomocí stopy matice, pak

$$\|UA\|_F^2 = \mathrm{trace}(A^*\overbrace{U^*U}^{I}A) = \mathrm{trace}(A^*A) = \|A\|_F^2.$$

Rovnost $\|UA\|_F = \|A\|_F$ plyne také z toho, že násobení maticí U zleva odpovídá násobení jednotlivých sloupců matice A. Násobení unitární maticí U nemění euklidovskou normu vektoru. Kvadrát Frobeniovy normy je součet kvadrátů euklidovských norem řádků/sloupců. □

Úloha 7. *Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovává jedničkovou či maximovou maticovou normu. Pokud ne, najděte protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.*

Řešení. Normy se nezachovávají, lze argumentovat rozličně:

- Vektor je speciální případ matice s jedním sloupcem. Z úlohy 3 již víme, že se vektorová (a v důsledku tedy i maticová) norma nezachovává.
- Jednoduchý protipříklad pomocí zobrazení rotace:

  $$\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix},$$

  kde jedničková i maximová norma výsledné matice je $|\cos\phi| + |\sin\phi|$.

□

4 Gaussova eliminace jako LU rozklad matice

Ukážeme (připomeneme), že Gaussovu eliminaci, tedy převod matice A do horního odstupňovaného tvaru, lze reprezentovat jako tzv. LU rozklad matice A. Pro jednoduchost budeme nyní předpokládat, že matice A je regulární (a tedy i nutně čtvercová řádu n), a dokonce, že v průběhu Gaussovy eliminace nenarazíme na nulový pivot (tedy není třeba prohazovat řádky).

Eliminaci popíšeme jako proces postupných řádkových úprav reprezentovaných maticemi M_k^{-1}, kde každá M_k^{-1} odpovídá eliminaci jednoho sloupce matice A pomocí k-tého řádku. Tato matice tedy zahrnuje, pro každý řádek $i = k+1, \dots, n$, vynásobení k-tého řádku vhodnou konstantou a přičtení k i-tému řádku.

$$A \quad \to \quad A^{(1)} = M_1^{-1} A \quad \to \quad \dots \quad \to \quad U = A^{(n-1)} = \overbrace{M_{n-1}^{-1} \dots M_1^{-1}}^{L^{-1}} A. \tag{2}$$

Po nejvýše n krocích dostáváme matici U, která je horní trojúhelníková (připomínáme, že A byla regulární). Označíme-li součin matic $L^{-1} := M_{n-1}^{-1} \dots M_1^{-1}$, pak vidíme, že platí $A = LU$.

Matice M_k^{-1} odpovídající řádkovým úpravám jsou čtvercové $n \times n$ a regulární (proto i matice L je regulární). Protože jsme díky předpokladu v průběhu eliminace nenarazili na nulový pivot, mají matice M_k^{-1} následující strukturu

$$M_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad m_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix},$$

kde

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \qquad a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k-1)}. \tag{3}$$

Matici M_k^{-1} můžeme zapsat následovně: $M_k^{-1} = I - m_k e_k^T$. Pro ilustraci

$$m_2 e_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{3,2} \\ m_{4,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$M_k = (I - m_k e_k^T)^{-1} = I + m_k e_k^T.$$

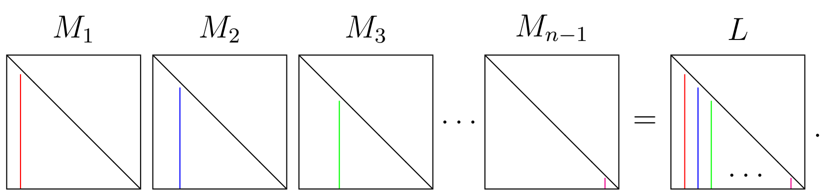
Z (2) plyne, že

$$L = \left(M_{n-1}^{-1} \dots M_2^{-1} M_1^{-1}\right)^{-1} = M_1 M_2 \dots M_{n-1}. \tag{4}$$

Z tvaru matic M_k dostáváme

$$M_1 M_2 \dots M_{n-1} = I + \sum_{k=1}^{n-1} m_k e_k^T, \tag{5}$$

což lze graficky vyjádřit takto



Matici L proto nemusíme nijak složitě počítat, a pro její sestavení stačí při výpočtu ukládat čísla $m_{i,k}$ a na diagonálu dát jedničky.

Úloha 8. *Spočtěte LU rozklad matice A a určete matice M_1^{-1}, M_2^{-1}, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$A \sim \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}}^{A^{(1)}} \sim \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}}^{A^{(2)}=U},$$

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Poznámka. *Pokud je matice A pouze regulární a v průběhu Gaussovy eliminace je třeba prohodit řádky, lze ukázat, že existuje permutační matice P tak, že*

$$PA = LU,$$

kde L, U jsou dolní, respektive horní trojúhelníkové matice.

Poznámka. *LU rozklad lze zobecnit pro obdélníkovou matici. Matice L je pak stále regulární (čtvercová) a matice U je obdélníková, stejného rozměru jako A.*