

Domácí úloha č. 2

Základy numerické matematiky - NMNM201

(odevzdejte e-mailem před začátkem vašeho cvičení v 5. týdnu semestru)

balazsova@karlin.mff.cuni.cz, blechta@karlin.mff.cuni.cz,

hammerbt@karlin.mff.cuni.cz, outrata@karlin.mff.cuni.cz,

jan.papez@mff.cuni.cz

Domácí úkol odevzdejte jako **jeden soubor PDF** a funkce `mgs.m`, `hh.m` a skript `srovnej_QR.m`. Je nutné, aby opravující mohl kód úspěšně spustit po doplnění o soubory `cgs.m` a `givens.m`, které neodevzdávejte.

Domácí úloha 1. Srovnajte různé varianty QR rozkladu použité pro řešení soustavy rovnic. Uvažujte

1. klasický, modifikovaný Gramův–Schmidtův algoritmus, QR rozklad pomocí Householderových reflexí i Givensových rotací,
2. tři testovací matice, stejně jako ve skriptu `srovnej_QR.m` ze čtvrtého cvičení.

Přesné řešení \mathbf{x}_{ex} volte jako náhodný vektor a pravou stranu dopočítejte jako $\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{\text{ex}}$. Pro spočtené aproximace \mathbf{x}_{qr} spočítejte relativní rezidua $\text{norm}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{\text{qr}}) / \text{norm}(\mathbf{b})$ i relativní chyby $\text{norm}(\mathbf{x}_{\text{ex}} - \mathbf{x}_{\text{qr}}) / \text{norm}(\mathbf{x}_{\text{ex}})$. Výsledky vypište do tabulky a okomentujte.

Postup:

1. Využijte implementace (některých) QR rozkladů ze čtvrtého cvičení, `cgs.m`, `mgs.m`, `givens.m`. Doimplementujte Householderovy reflexe jako funkci `hh.m`. (Implementace by měly fungovat pro libovolnou reálnou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ s plnou sloupcovou hodnotí.)
2. Pro každou ze tří testovacích matic a pro každou ze čtyř variant rozkladu spočítejte aproximaci \mathbf{x}_{qr} přesného řešení \mathbf{x}_{ex} . Vyzkoušejte, zda je vhodnější aproximaci počítat jako $\mathbf{R} \setminus (\mathbf{Q}' \mathbf{b})$ nebo pomocí QR rozkladu rozšířené soustavy $[A, b]$, výsledek v protokolu uveďte. V experimentech pak použijte ten lepší postup.
3. Výsledky (tj. relativní reziduum i relativní chybu) zapište do tabulky nebo vytvořte graf (příkaz `plot`), pozorujte rozdíly a stručně okomentujte. Má zvolený typ implementace QR rozkladu (CGS, MGS, Householder či Givens) vliv na kvalitu řešení úlohy $Ax = b$? Pokud ano, popište. Dá se kvalita řešení usuzovat na základě norm $\|Q^*Q - I\|$ nebo $\|A - QR\|$, pozorovaných pro jednotlivé varianty rozkladu na cvičení?

[Rady:]

- Ověřte si správnost vašich implementací QR rozkladu a `hh.m` než začnete vypisovat výsledky.
- Místo vytváření nového skriptu můžete upravit skript `srovnej_QR.m` ze čtvrtého cvičení.

(max 6 bodů)