Intégrale bivariée

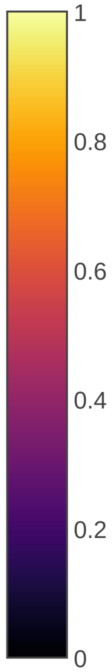
Nous avons vu comment les dérivées univariées étaient généralisées au dérivées multivariées via les dérivées partielles. Nous avons ensuite implémenté le calcul de dérivées automatique. Pour les intégrales, nous allons nous limiter au cas bivarié car la méthode est essentiellement graphique et elle devient donc plus compliquée à plus de 2 variables.

Exemple introductif

Considérons le calcul de l'intégrale

$$\int_{x\in[0,1],y\in[0,1]} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Ceci correspond à calculer le volume sous la surface suivante dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.




```julia
let
    plotly()
    x = range(0, stop=1, length=10)
    surface(x, x, (x, y) -> x * y)
end
```

Pour le calcul de dérivées multivarié, on s'est ramené au cas univarié en considérant les dérivées partielles. Dans une dérivée partielle, une seule des variable était considérée comme "variable" et les autres étaient considérées comme "constantes". Pour les intégrales, on procéder de façon similaire. On va se ramener à des intégrales univariées où une seul des variables sera intégrée et les autres seront considérées comme constantes. En prenant l'interprétation géométrique du calcul de volume sous une surface, on voit qu'intégrer d'abord en x puis en y ou en y puis en x devrait donner le même résultat. Intégrons par exemple d'abord en x. Comme y est constant, on peut le sortir de l'intégrale en x:

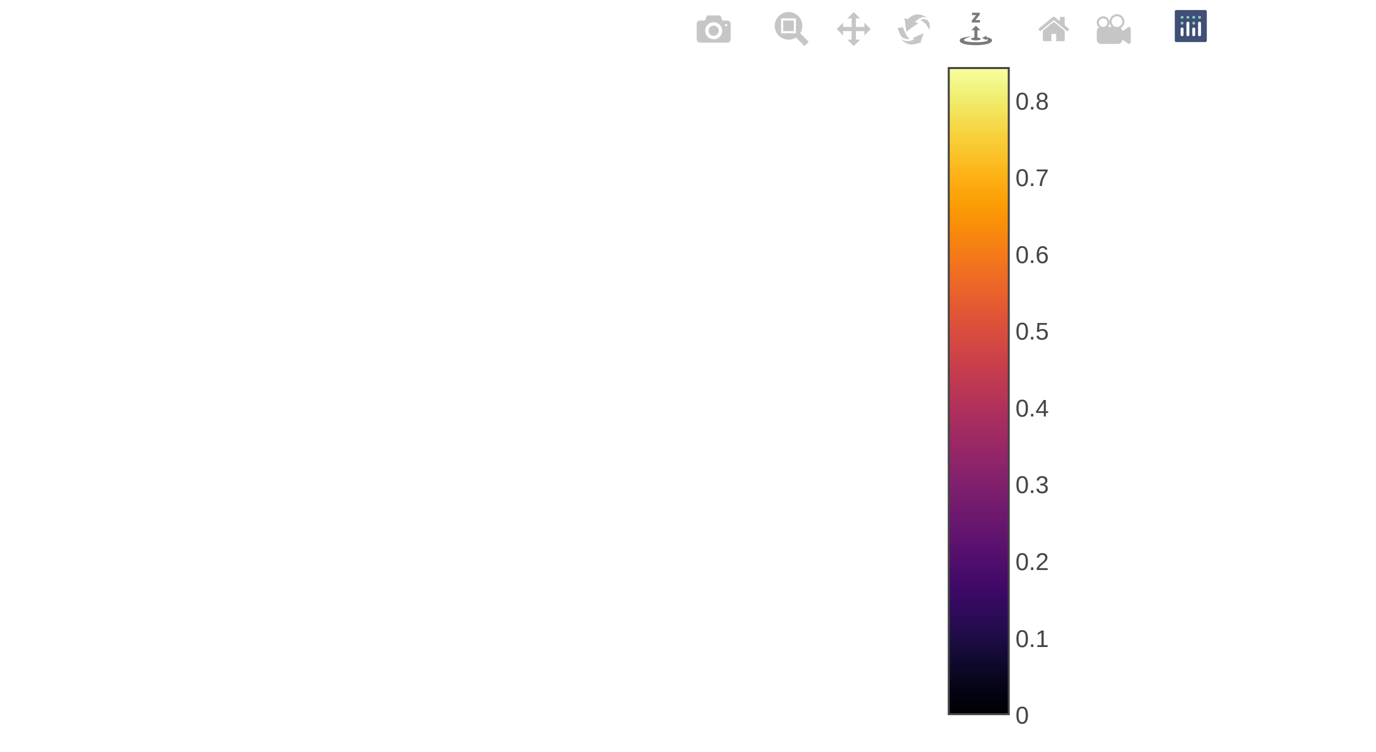
$$
\begin{aligned}
\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{1} y \int_{x=0}^{1} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{1} y[x^2/2]_{x=0}^{1}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{1} y\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}[y^2/2]_{y=0}^{1} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Changer l'ordre pour se simplifier la vie

Bien que le choix d'ordre de l'intégrale ne change pas le résultat, un ordre peut être plus facile à intégrer qu'un autre! Considérons par exemple l'intégrale suivante:

$$
\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} x\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

Ceci correspond à calculer le volume sous la surface suivante dans le carré $[0,1]\times[0,1]$.




```
let
    plotly()
    x = range(0, stop=1, length=10)
    surface(x, x, (x, y) -> x * sin(x * y))
end
```

Trouver la primitive de $x\cos(xy)$ par rapport à x n'est pas évident 🤔 Essayons d'inverser l'ordre d'intégration:

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} x\sin(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

On peut sortir x parce qu'il ne dépend pas de y:

$$\int_{x=0}^{1} x\int_{y=0}^{1} \sin(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

On doit maintenant trouver la primitive de $\cos(xy)$ par rapport à y, c'est plus facile 😌

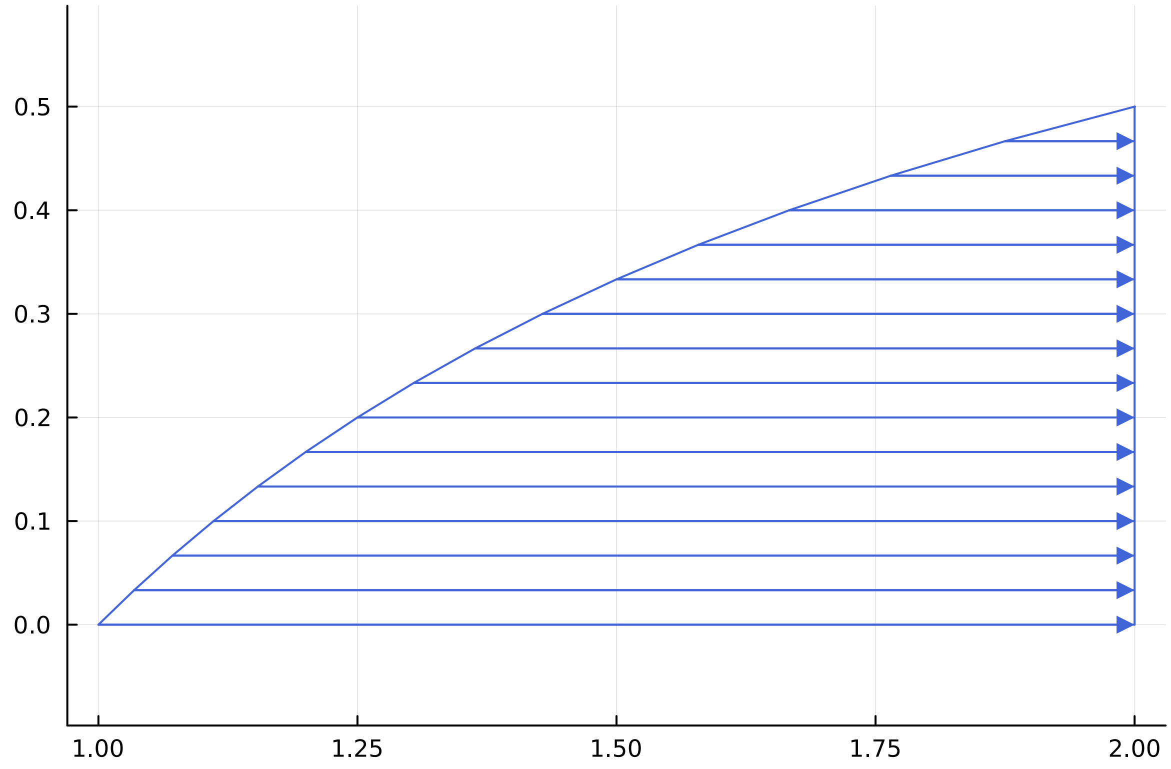
$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{1} x[-\cos(xy)/x]_{y=0}^{1}\,\mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{1} x(-\cos(x)/x + 1/x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} 1 - \cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x - \sin(x)]_{x=0}^{1} \\
&= 1 - \sin(1)
\end{aligned}
$$

Intégrer avec bornes

Supposons maintenant qu'on doive intégrer avec des bornes en y qui dépendent de x.

$$
\int_{y=0}^{1/2} \int_{x=1/(1-y)}^{2} x\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

Le domaine en (x, y) a maintenant la forme ci-dessous et il faut calculer le volume entre cette forme et la surface définie par la fonction $x\sin(xy)$.




```
dessin(y -> 1 / (1 - y), 2, 0, 0.5)
```

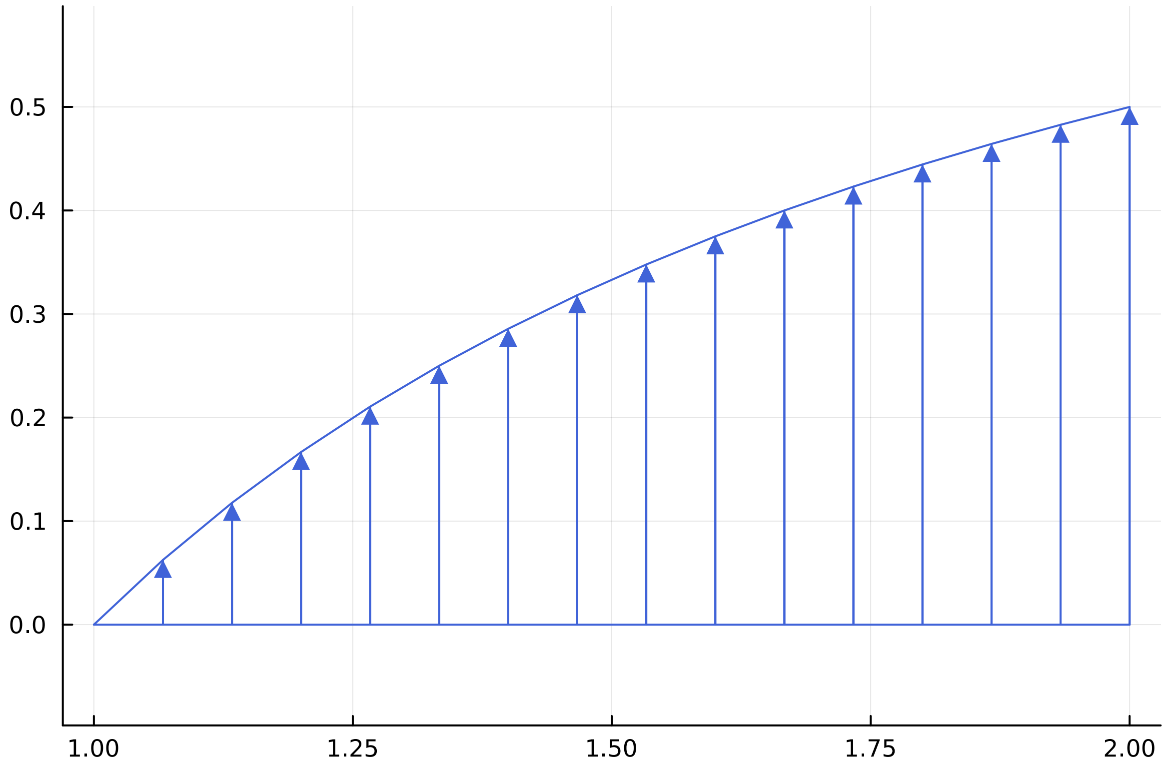
Le principe reste le même que pour les intégrales à bornes constantes, la seule différence c'est qu'on évalue la primitive à des valeurs qui ne sont pas constantes. Seulement, on se retrouve à nouveau à devoir calculer la primitive de $x\sin(x)$ qui n'est pas évidente. Comme précédemment, on va profiter de cette occasion pour illustrer le changement d'ordre dans les intégrales.

Mais comment faire ici avec les bornes de y qui dépendent de x ? En regardant le graphe ci-dessus, on voit que les valeurs de x vont de 1 à 2. Pour un certain x, les valeurs de y vont de 0 jusqu'à la courbe $x(y) = 1/(1-y)$. Comme on a la valeur de x en fonction de y pour cette courbe et non l'inverse, on va devor l'inverser:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1-y} \\ \frac{1}{x} &= 1 - y \\ y &= 1 - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On peut donc réécrire l'intégrale comme suit:

$$\int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{1-1/x} x\sin(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$




```
1 dessin(1, 2, 0, x -> 1 - 1/x)
```

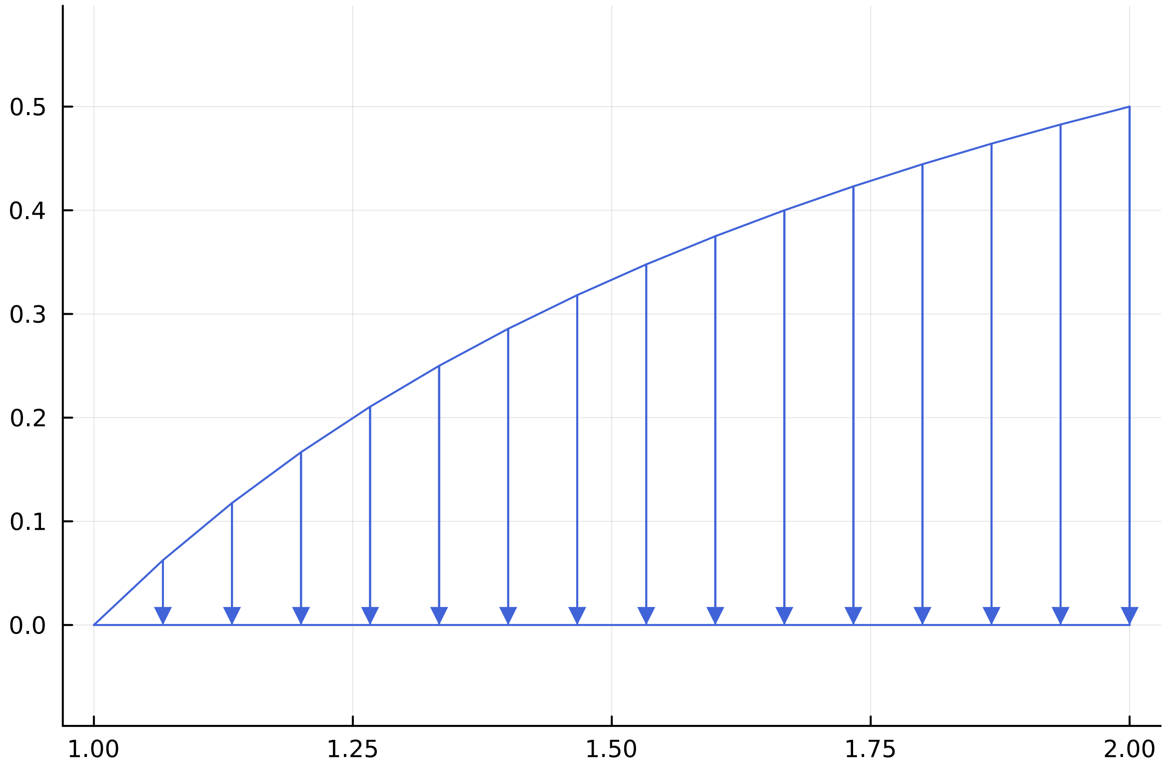
On peut maintenant dérouler le calcul de l'intégration:

$$\begin{aligned}\int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{1-1/x} x\sin(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=1}^{2} x[-\cos(xy)/x]_{y=0}^{1-1/x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=1}^{2} x(1/x-\cos(x-1)/x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=1}^{2} 1-\cos(x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= [x-\sin(x-1)]_{x=1}^{2} \\ &= 2-\sin(1)-1+\sin(0) \\ &= 1-\sin(1)\end{aligned}$$

Point d'attention

Bornes dans le mauvais sens

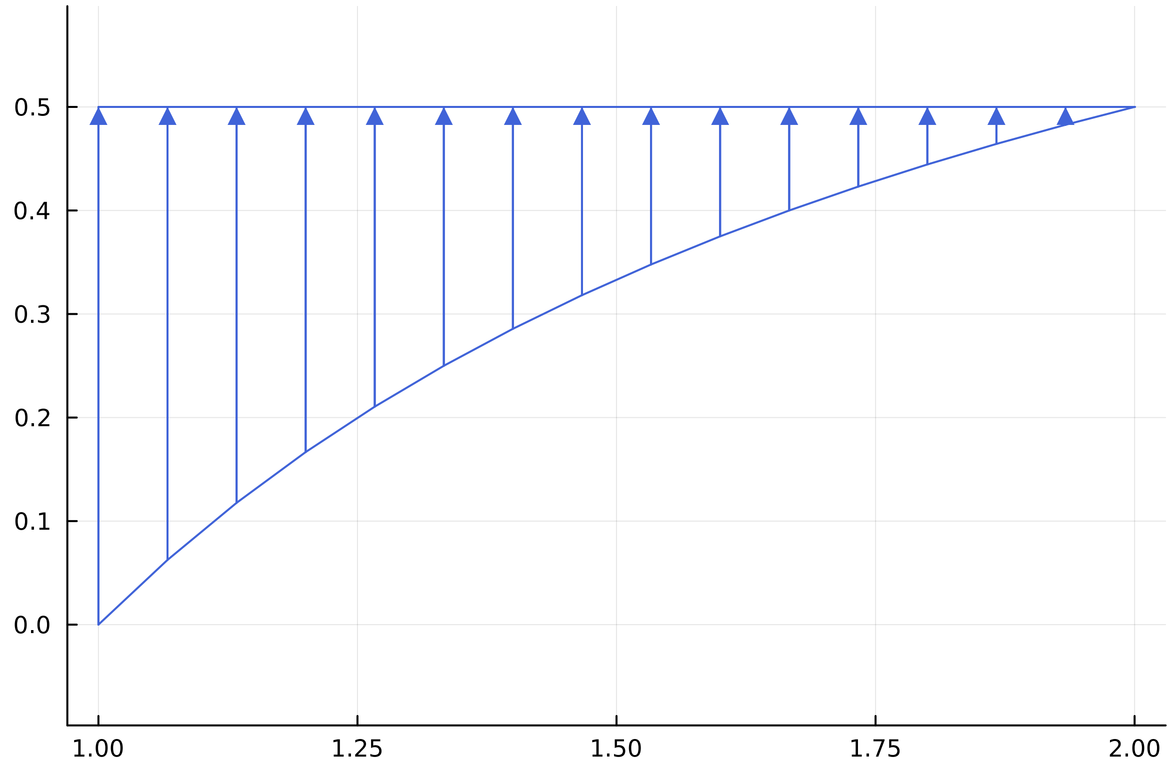
Faites attention au sens de l'intégral ! La borne inférieur doit toujours être inférieure à la borne supérieure. Ici, $1-1/x$ est supérieur à 0 car x est supérieur à 1 donc $1-1/x$ est bien la borne supérieure. Si les bornes ne sont pas mises dans le bon sens, on obtient l'opposé de l'intégral qu'on cherche à calculer ! Pour être sûr de ne pas vous tromper, faites le dessin et en vérifiez que les flèches vont bien dans le sens de x (resp. y) croissant. Par exemple, si on met $1 - 1/x$ comme borne inférieure et 0 comme borne supérieure, ça revient à mettre les flèches comme dans le dessin ci-dessous. On voit que les flèches vont vers le bas, ce qui correspond à un sens décroissant pour x, ce qui indique que les bornes sont dan sle mauvais sens !




```
dessin(1, 2, x -> 1 - 1/x, 0)
```

Mauvais côté de la courbe

Il faut également faire attention à sélectionner les bonnes bornes. La variables y a initialement comme bornes 0 et $1/2$. Si on prend $1/2$ comme borne, l'intégrale qu'on fait correspond au dessin ci-dessous.




```
dessin(1, 2, x -> 1 - 1/x, 0.5)
```

On voit que les flèches ne sont pas du même côté de la courbe par rapport à l'intégrale initiale. Ces bornes ne calculent donc pas la bonne intégrale!

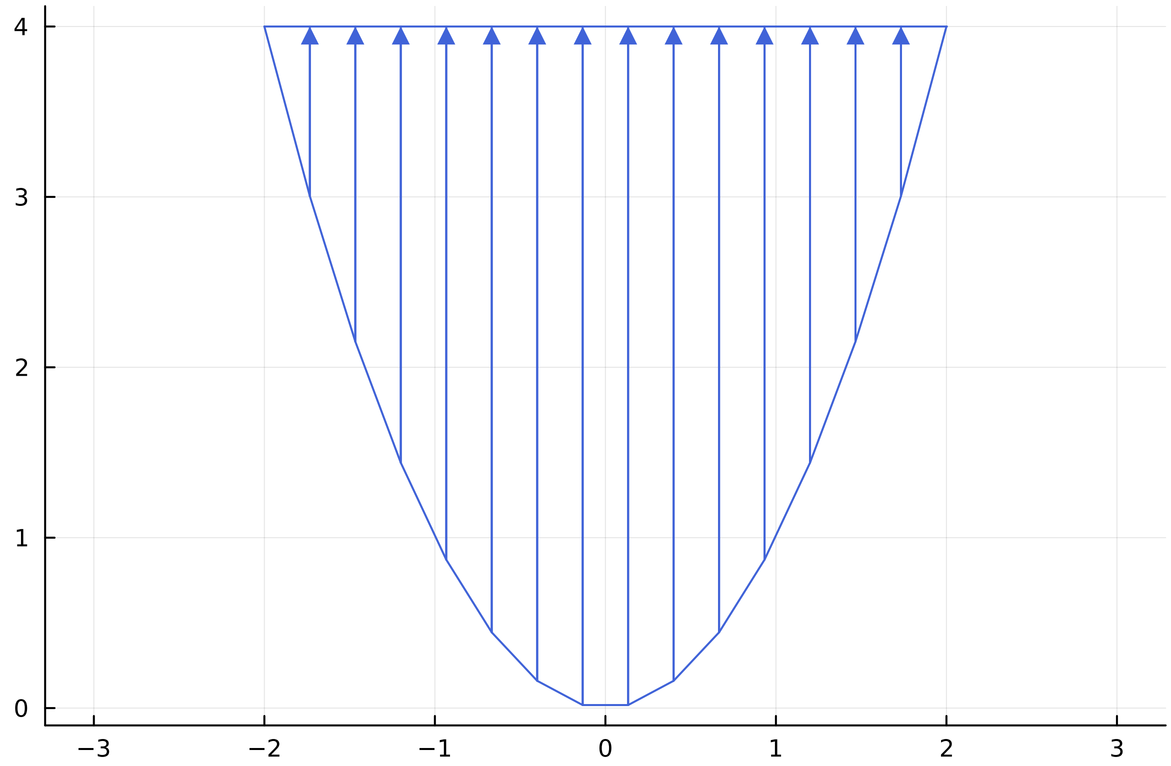
Fonction non-injective

Lorsqu'on change l'ordre des intégrales, il faut inverser la formule pour avoir l'expression de y en fonction de x depuis l'expression de x en fonction de y. Si la fonction n'est pas injective, elle n'a pas d'inverse unique, que faire ?

Il faut alors décomposer l'intégrale en plusieurs sous-intégrales pour lesquelles la fonction est injective quand elle est restreinte à chaque sous-interval. Prenons comme exemple l'intégrale:

$$\int_{x=-2}^{2} \int_{y=x^2}^{4} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

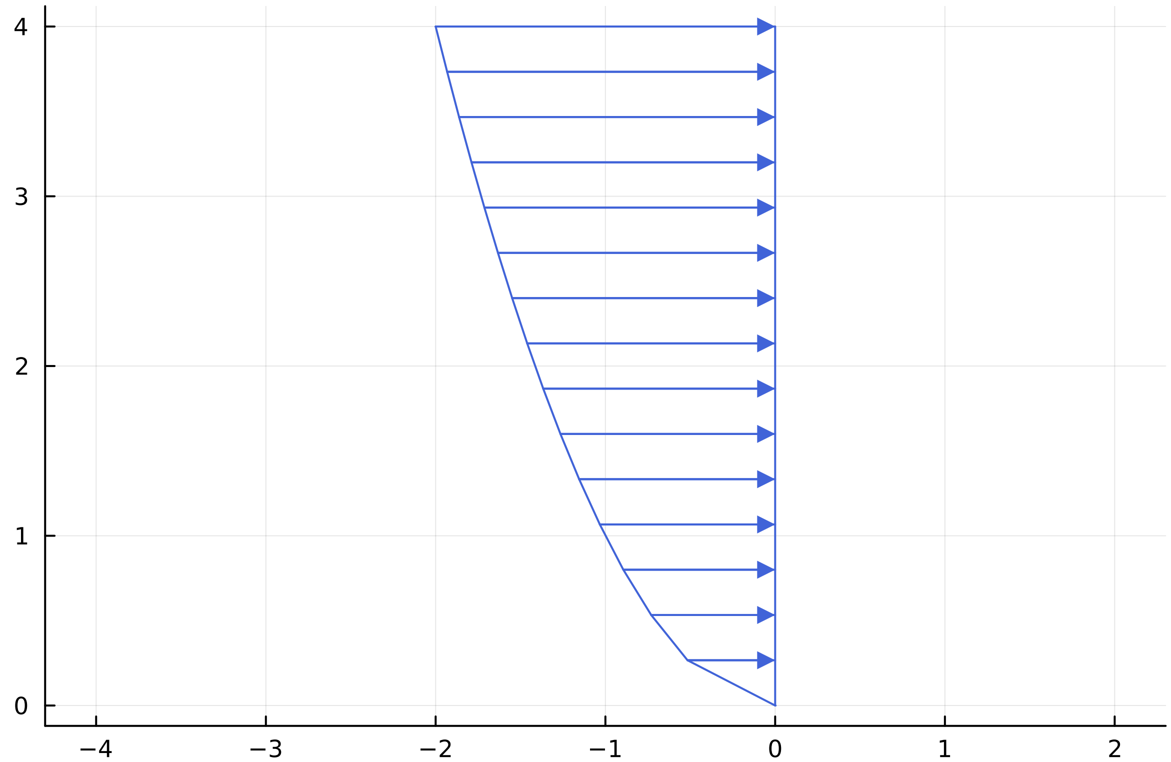
Le dessin correspondant est:




```
dessin(-2, 2, x -> x^2, 4)
```

La fonction $y = x^2$ n'est pas inversible car il y a deux inverses, on a $x = \pm\sqrt{y}$. Si on restricte la fonction pour $x < 0$, on a alors l'inverse unique $x = -\sqrt{y}$. On a donc

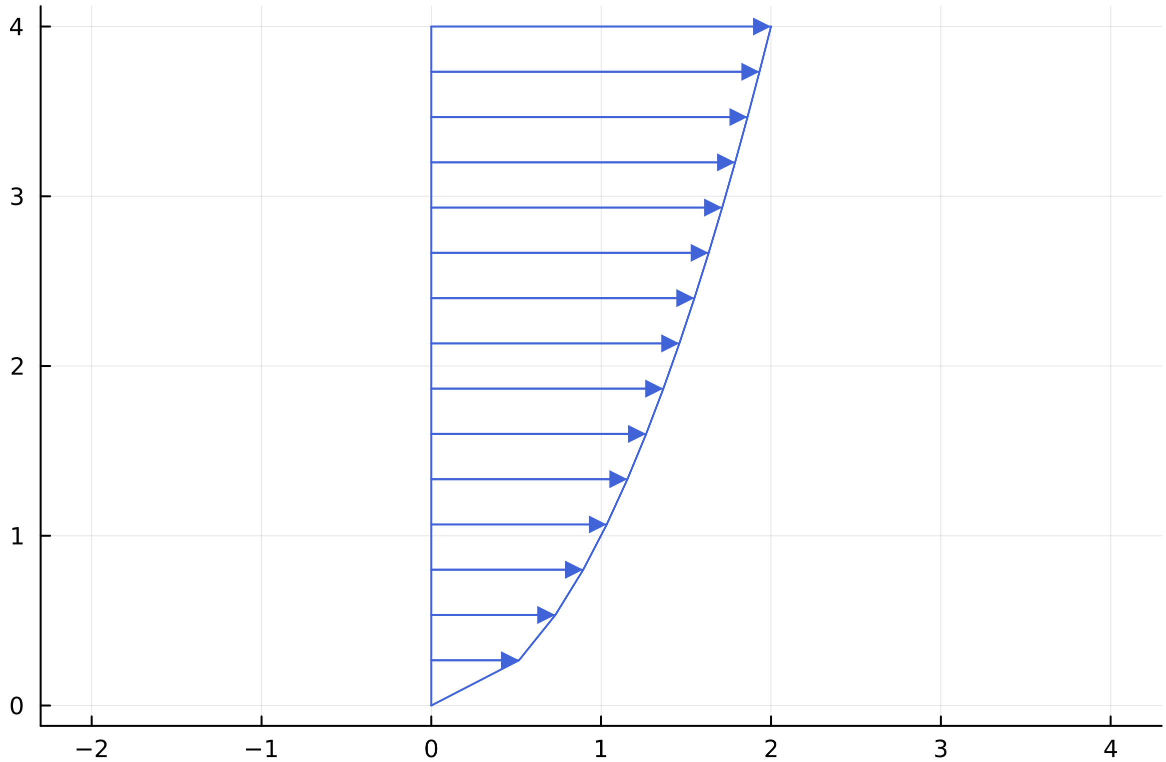
$$\int_{x=-2}^{0} \int_{y=x^2}^{4} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{2} \int_{x=-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$




```
dessin(y -> -√y, 0, 0, 4)
```

Similairement, si on restricte la fonction pour $x \geq 0$, on a l'inverse unique $x = \sqrt{y}$. On a donc

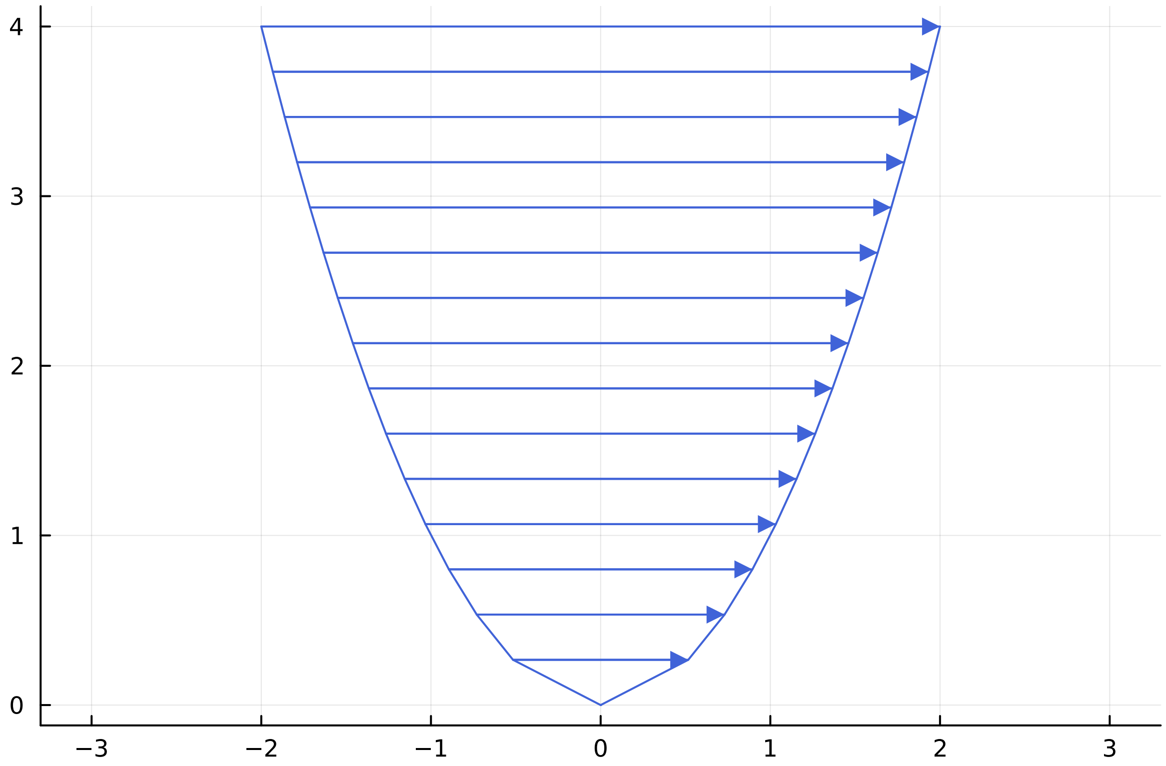
$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{4} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$




```
dessin(0, y -> √y, 0, 4)
```

On peut alors combiner les deux pour donner l'intégrale de -2 à 2. Dans ce cas particulier, on peut en fait recombiner les 2 intégrales finales pour avoir une seule intégrale:

$$\begin{aligned}
\int_{x=-2}^{2}\int_{y=x^2}^{4} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=-2}^{0}\int_{y=x^2}^{4} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{2}\int_{y=x^2}^{4} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{y=0}^{2}\int_{x=-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{2}\int_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

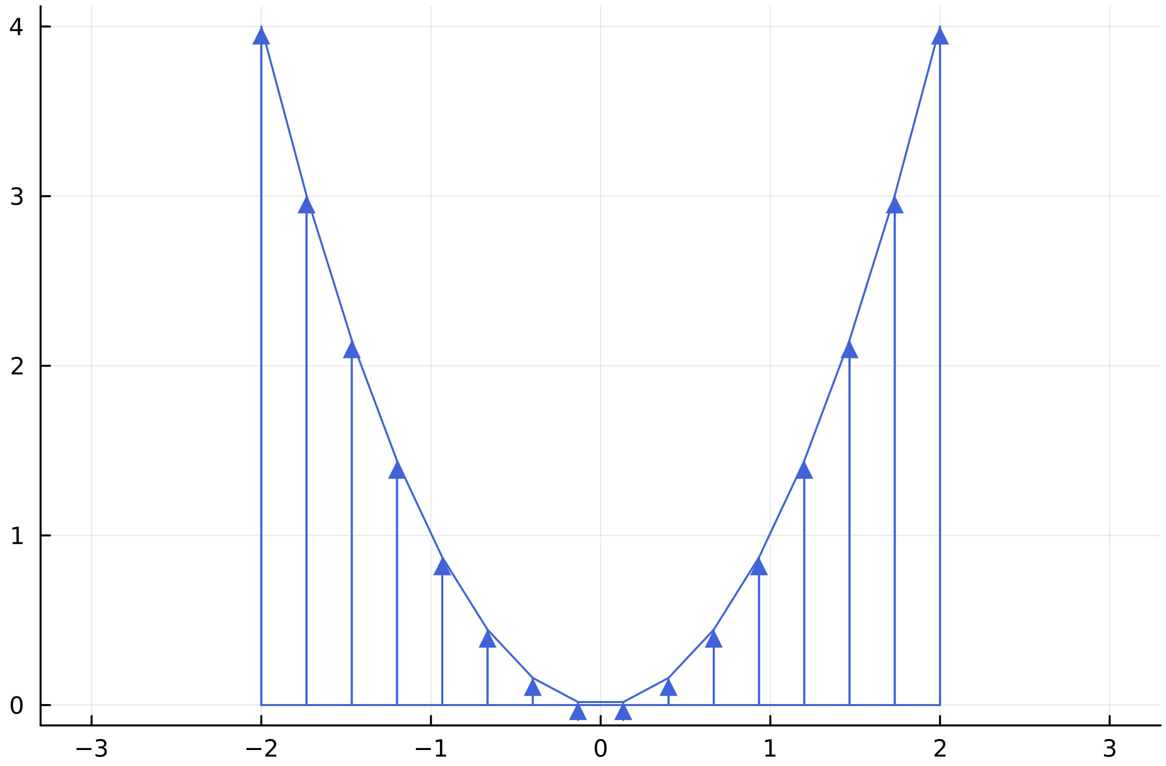



```
dessin(y -> -√y, y -> √y, 0, 4)
```

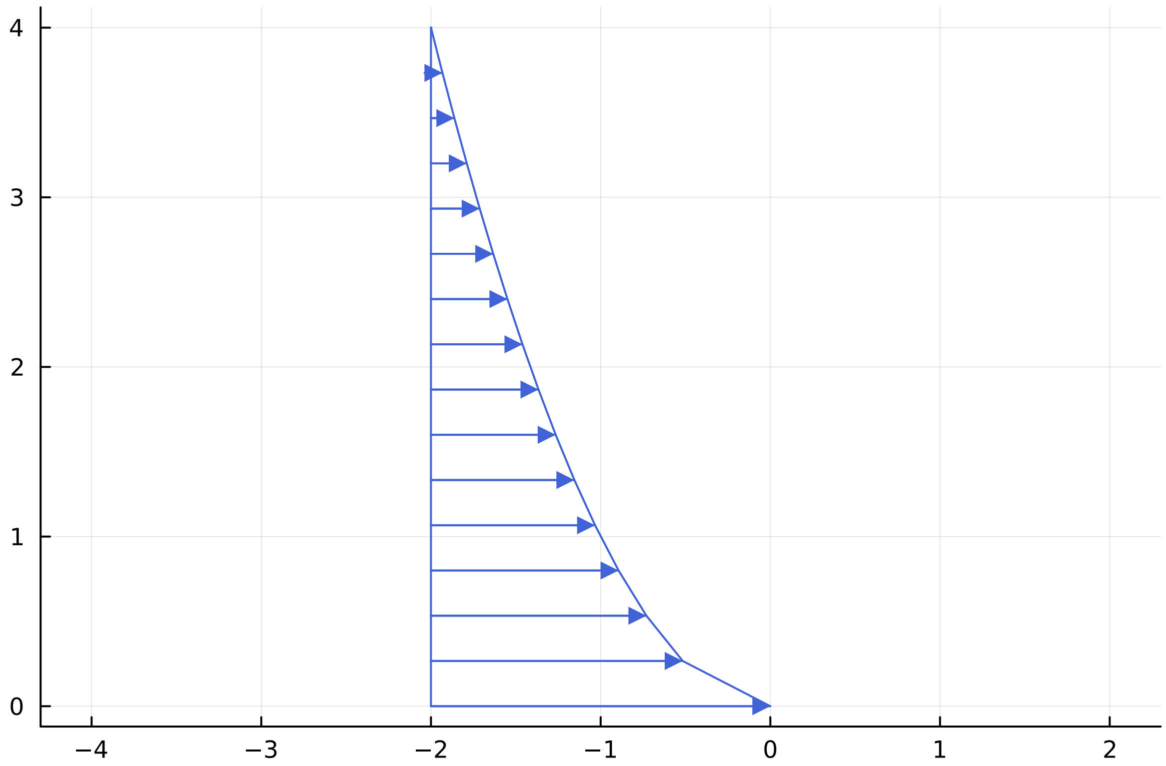
Il se peut aussi qu'on ne puisse pas combiner les intégrales obtenues après avoir été séparées. Par exemple:

$$\begin{aligned}\int_{x=-2}^{2}\int_{y=0}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=-2}^{0}\int_{y=0}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{y=0}^{2}\int_{x=-2}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{y=0}^{2}\int_{x=\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

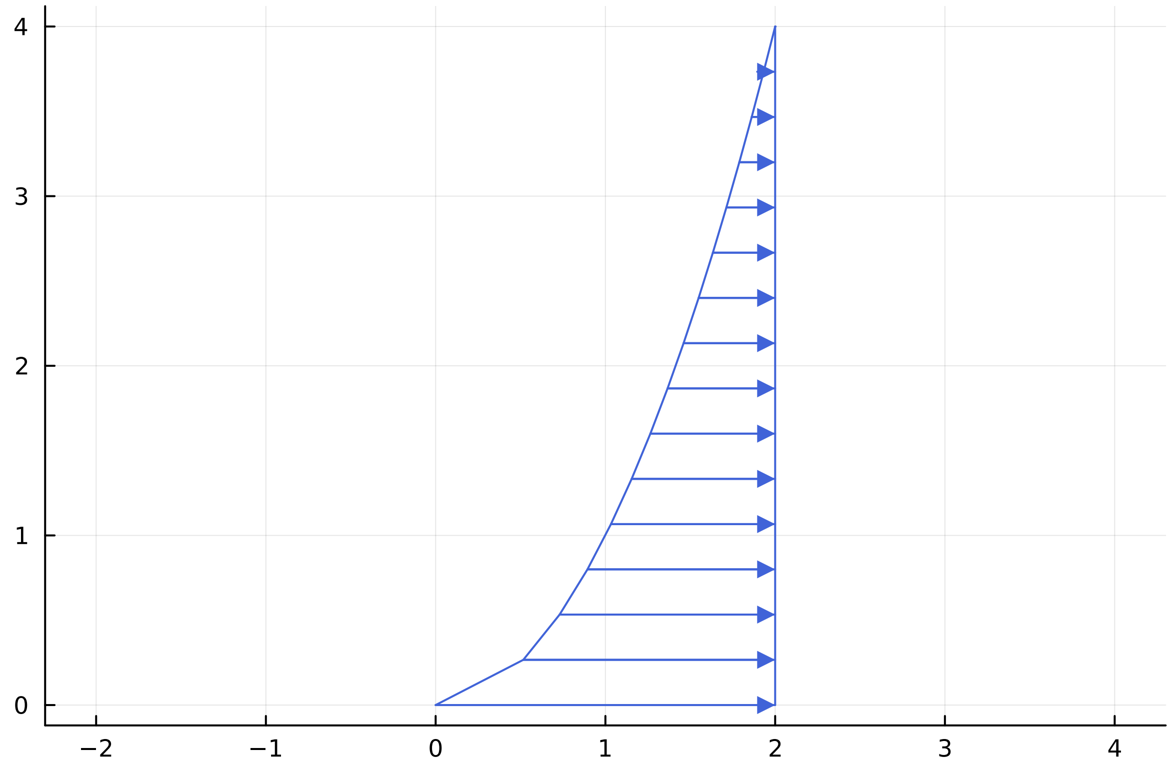
Les dessins correspondants sont:




```
dessin(-2, 2, 0, x -> x^2)
```




```
dessin(-2, y -> -√y, 0, 4)
```




```
dessin(y -> √y, 2, 0, 4)
```

Utilitaires

```
using Plots, Colors
```

```
import PlotlyBase, PlotlyKaleido
```

_apply (generic function with 1 method)

```
_apply(x::Function, y) = x(y)
```

_apply (generic function with 2 methods)

```
_apply(x::Real, _) = x
```

```
dessin (generic function with 1 method)
```

```julia
function dessin(xinf, xsup, yinf, ysup; length = 16, color =
Colors.JULIA_LOGO_COLORS.blue)
    gr()
    p = plot(ratio = :equal)
    if xinf isa Real && xsup isa Real
        x = range(xinf, stop = xsup; length)
        for y in [yinf, ysup]
            if y isa Function
                plot!(x, y.(x); label = "", color)
            else
                plot!([xinf, xsup], [y, y]; label = "", color)
            end
        end
        for x in x
            plot!([x, x], [_apply(yinf, x), _apply(ysup, x)]; label = "", color,
            arrow = (:closed, 1.0))
        end
    elseif yinf isa Real && ysup isa Real
        y = range(yinf, stop = ysup; length)
        for x in [xinf, xsup]
            if x isa Function
                plot!(x.(y), y; label = "", color)
            else
                plot!([x, x], [yinf, ysup]; label = "", color)
            end
        end
        for y in y
            plot!([_apply(xinf, y), _apply(xsup, y)], [y, y]; label = "", color,
            arrow = (:closed, 1.0))
        end
    end
    return p
end
```