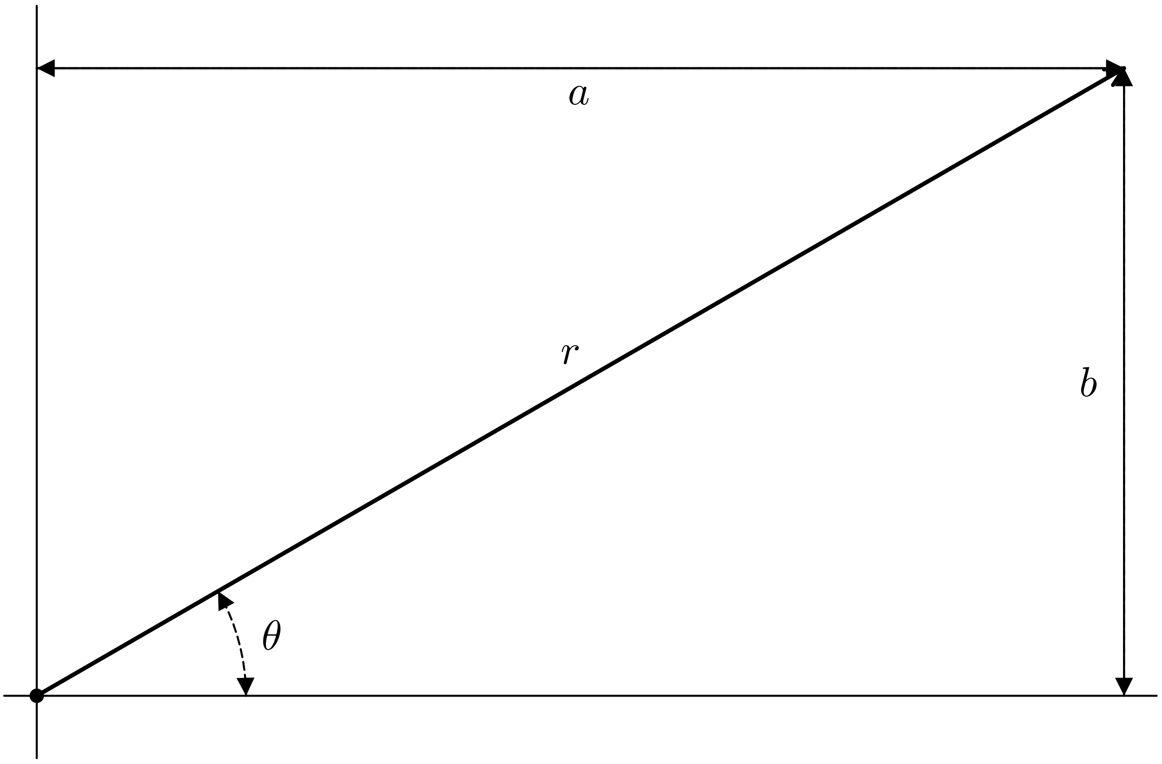
Les nombes complexes

- Introduction aux complexes [AE18; Appendix I]
- Introduction aux polynômes [AE18; P.6]

[AE18] R. A. Adams and C. Essex. *Calculus : A Complete Course*. 9 Edition (Pearson, 2018).

Cartésienne	Polaire	Exponentielle
$z = a + bi$	$z = r\mathrm{cis}(\theta)$	$z = r\exp(i\theta) = re^{i\theta}$
$a = r\cos(\theta)$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	
$b = r\sin(\theta)$	$\theta = \tan^{-1}(b/a)$	

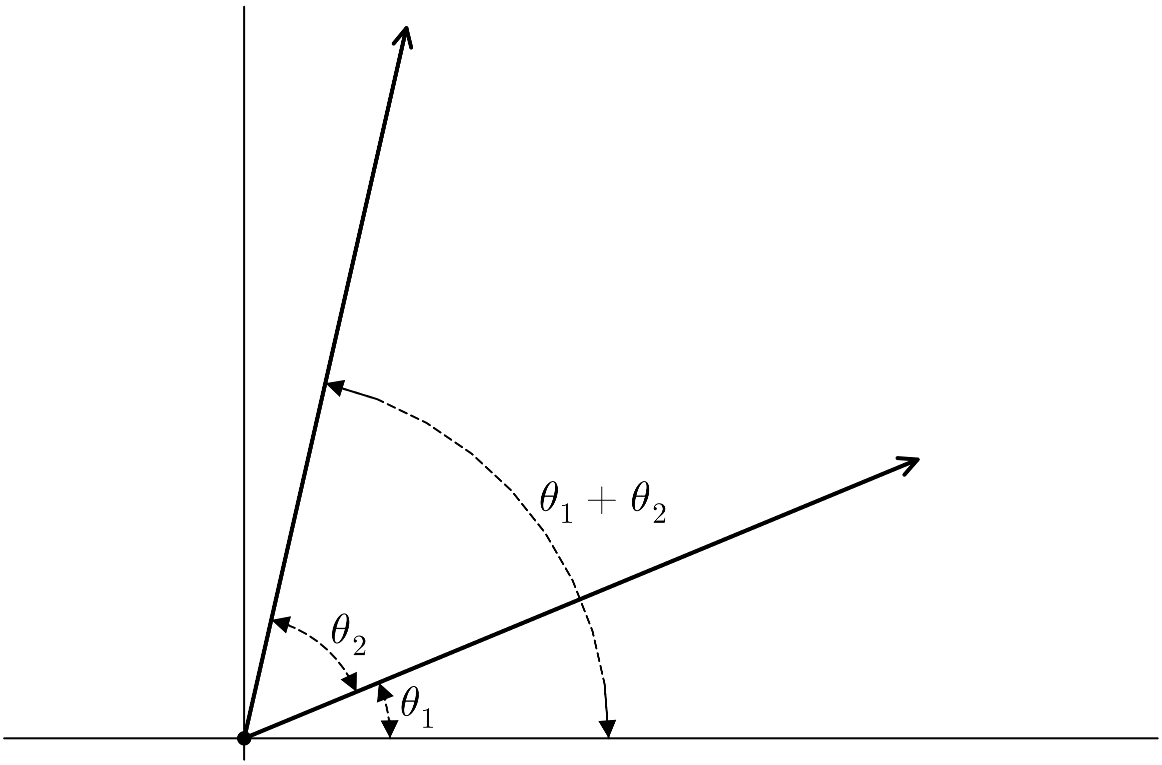


Cartésienne : facile pour addition, soustraction

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

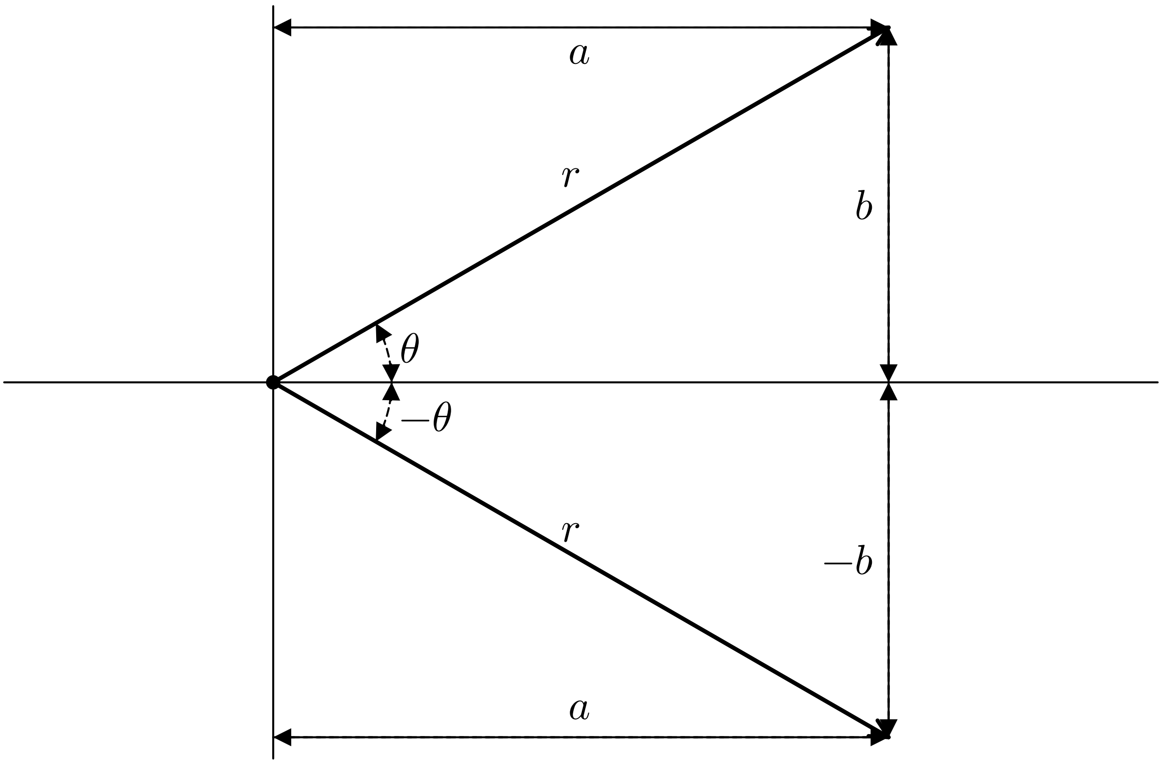
Polaire : facile pour multiplier, diviser. Géométriquement : **rotation** d'angle θ

$$\begin{aligned} r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\ (re^{i\theta})^{-1} &= r^{-1} e^{-i\theta} \end{aligned}$$



Définition : *Complexe conjugué*

$$\begin{aligned} z &= a + bi \qquad & \bar{z} &= a - bi \\ z &= re^{i\theta} \qquad & \bar{z} &= re^{-i\theta} \end{aligned}$$



Quiz : Quel est la valeur $z\bar{z}$? (vous pouvez choisir entre cartésienne ou polaire)

▶ **Réponse**

Le théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ de degré n a n racines complexes (ce qui n'exclut pas que certaines d'entre elles aient une partie imaginaire nulle et donc soient réelles). Dans cette liste de n racines, certaines apparaissent plusieurs fois. Mais qu'est-ce que ça signifie qu'une racine soit racine plusieurs fois ?

Multiplicité

Une valeur z est une racine du polynôme $P(x)$ si $P(z) = 0$. Si z est également une racine de la dérivée, c'est à dire $P'(z) = 0$ alors z est une racine double. En général, z est une racine de multiplicité m si $P(z) = P'(z) = \cdots = P^{(m)}(z) = 0$ où $P^{(k)}$ est la dérivée $m$ième de P.

De façon équivalente, ça revient à l'exposant du facteur $(x - z)$ dans la factorisation du polynôme. Par exemple, si :

$$P(x) = (x - z)^m \cdot Q(x),$$

où $Q(z) \neq 0$, alors z est une racine de multiplicité m.

Propriété des paires conjuguées

Si $z = a + ib$ est une racine de multiplicité m, alors la racine conjuguée $\overline{z} = a - ib$ possède également une multiplicité m.

▶ **Preuve**

Le cas quadratique

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

▶ **Preuve**

Les racines de 1

Exemple introductif : les racines cubiques de 1

Quelles sont les solutions de $x^3 = 1$. En d'autre termes, quels sont les racines de $x^3 - 1$.

cube = -1 + x³

```
cube = Polynomial([-1, 0, 0, 1])
```

On sait deviner une première racine : 1 car $1^3 = 1$.

première_racine = -1 + x

```
première_racine = Polynomial([-1, 1])
```

Grace à Horner, on sait factoriser cette racine, ce qui donne

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

q = 1.0 + 1.0·x + 1.0·x²

```
q = div(cube, première_racine)
```

-1.0 + 1.0·x^3

```
première_racine * q
```

On trouve alors les deux racines manquantes à l'aide des formules du cas quadratique

Δ = -3

```
Δ = 1 - 4
```

(-0.5+0.866025im, -0.5-0.866025im)

```
(-1 + √(abs(Δ)) * im) / 2, (-1 - √(abs(Δ)) * im) / 2
```

Le cas général

Pour calculer les valeurs propres d'un polynôme de haut degré, il n'y a plus de formule. Mais on sait les calculer en reformulant le problème en problème de calcul de valeurs propre de la matrice companion. Comme on sait calculer numériquement les valeurs propres d'une matrices, ça nous permet de de calculer numériquement les valeurs propres d'un polynôme.

Des valeurs propres aux racines d'un polynômes

Une matrice A a comme valeur propre λ avec vecteur propre associé x (non-nul) si

$$Ax = \lambda x$$

ou de façon équivalente

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Si la matrice $A - \lambda I$ était régulière, il n'y aurait qu'une seule solution : $x = 0$. Seulement, le fait que λ soit une valeur propre est équivalente au fait qu'il existe une solution x non-nulle. Ceci équivaut à dire que le déterminant:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ce déterminant est un polynôme en λ de degré n.

Des racines d'un polynômes aux valeurs propres

Comment trouver les `n` racines ? Commençons par un exemple:

(-1 + x, -2 + x, -3 + x)

```
p1, p2, p3 = Polynomial([-1, 1]), Polynomial([-2, 1]), Polynomial([-3, 1])
```

p = -6 + 11·x - 6·x^2 + x^3

```
1 p = p1 * p2 * p3
```

▸[1.0, 2.0, 3.0]

```
1 roots(p)
```

Comment est-ce que `roots` a retrouvé les racines à partir des coefficients ?

Commençons par essayer de trouver une des racines. Comment trouver r ?

$$(x - r)q = \alpha p$$

Où α est une constante et le polynôme q est de la forme

$$q = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

En comparant les termes en x^3, on trouve que $\alpha = b_2$. On a donc:

$$\begin{aligned} xq - b_2 p &= rq \\ b_1 x^2 + b_0 x - b_2(-6x^2 + 11x - 6) &= r(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des monômes 1, x et x^2, on a 3 équations:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

4 inconnues pour seulement 3 équations, comment va-t-on trouver b_0, b_1, b_2 et r ?

▶ **Réponse**

```
E = Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
    values:
    3-element Vector{Float64}:
     0.9999999999999978
     2.000000000000007
     2.9999999999999925
    vectors:
    3×3 Matrix{Float64}:
      0.762001  -0.588348   0.534522
     -0.635001   0.784465  -0.801784
      0.127     -0.196116   0.267261
```

```
E = eigen([
    0 0 6
    1 0 -11
    0 1 6
])
```

On trouve la première racine

```
(1.0, [0.762001, -0.635001, 0.127])
```

```
r, b = E.values[1], E.vectors[:, 1]
```

En normalisant, on trouve bien $(x-2)(x-3)$

```
[6.0, -5.0, 1.0]
```

```
b / b[3]
```

$6 - 5 \cdot x + x^2$

```
p2 * p3
```

Utilitaires

```julia
using Polynomials, LinearAlgebra, PlutoUI, Plots
```

```
Precompiling Polynomials...
   1374.1 ms  ✓ RecipesBase
  20895.7 ms  ✓ Polynomials
  2 dependencies successfully precompiled in 22 seconds. 19 already precompile
d.
Precompiling Plots...
    556.4 ms  ✓ JLLWrappers
    717.3 ms  ✓ Graphite2_jll
    884.4 ms  ✓ OpenSSL_jll
    856.2 ms  ✓ Libmount_jll
    765.7 ms  ✓ EpollShim_jll
    846.5 ms  ✓ Bzip2_jll
    918.4 ms  ✓ LLVMOpenMP_jll
    780.3 ms  ✓ Xorg_libICE_jll
    724.5 ms  ✓ libpng_jll
    883.2 ms  ✓ Xorg_libXau_jll
    993.3 ms  ✓ libfdk_aac_jll
    835.1 ms  ✓ LERC_jll
    976.8 ms  ✓ LAME_jll
    821.6 ms  ✓ fzf_jll
   4877.4 ms  ✓ ColorSchemes
    971.4 ms  ✓ JpegTurbo_jll
   1018.0 ms  ✓ XZ_jll
    780.2 ms  ✓ Ogg_jll
    848.2 ms  ✓ mtdev_jll
    753.1 ms  ✓ Xorg_libXdmcp_jll
    878.7 ms  ✓ gperf_jll
    790.3 ms  ✓ x265_jll
    827.8 ms  ✓ Zstd_jll
```

```julia
import DocumenterCitations
```

```
Precompiling DocumenterCitations...
    637.0 ms  ✓ StringEncodings
    756.2 ms  ✓ Git_jll
    587.7 ms  ✓ Git
   1262.8 ms  ✓ YAML
  10059.4 ms  ✓ JSON3
    634.2 ms  ✓ JSONSchema
    793.5 ms  ✓ BibParser
   1291.4 ms  ✓ Bibliography
  27272.4 ms  ✓ Documenter
   3142.5 ms  ✓ DocumenterCitations
  10 dependencies successfully precompiled in 32 seconds. 58 already precompil
ed.
Precompiling FileIOExt...
   2427.5 ms  ✓ Plots → FileIOExt
  1 dependency successfully precompiled in 3 seconds. 184 already precompiled.
```

qa (generic function with 2 methods)

```julia
include("utils.jl")
```

biblio =

▸ CitationBibliography("/home/runner/work/LSINC1113/LSINC1113/Lectures/biblio.bib", AlphaSt

```julia
biblio = load_biblio!()
```

ⓘ Loading bibliography from `/home/runner/work/LSINC1113/LSINC1113/Lectures/biblio.bib`...

ⓧ Entry west2022Introduction is missing the publisher field(s).

ⓘ Loading completed.

cite (generic function with 1 method)

refs (generic function with 1 method)

```julia
refs(keys) = bibrefs(biblio, keys)
```

draw_angle (generic function with 1 method)

```julia
function draw_angle(r, from, to, label)
    θs = range(from, stop=to, length = 10)
    plot!(r * cos.(θs), r * sin.(θs), label = nothing, linestyle = :dash, color =
    :black, arrow = Plots.arrow(:both, :closed))
    _r = r + 0.02
    θ_mid = (from + to) / 2
    annotate!(_r * cos(θ_mid), _r * sin(θ_mid), text("\$" * label * "\$", :left))
end
```

draw_complex! (generic function with 1 method)

```
function draw_complex!(r, θ; cartesian = true, a_pos = :top, b_label = "b", θ_label = "\\theta", start_θ = 0, θ_r = 1/6)
    a = r * cos(θ)
    b = r * sin(θ)
    plot!([0, a], [0, b], arrow = true, label = nothing, linewidth=2, color = :black)
    if cartesian
        arrow = Plots.arrow(:both, :closed)
        plot!([a, a], [0, b], label = nothing, linestyle = :dash, color = :black, arrow = arrow)
        plot!([0, a], [b, b], label = nothing, linestyle = :dash, color = :black, arrow = arrow)
        annotate!(a/2, b, text("\$a\$", a_pos))
        annotate!(a - 0.02, b/2, text("\$" * b_label * "\$", :right))
        annotate!(a/2, b/2, text("\$r\$", :bottom, :right))
    end
    draw_angle(r * θ_r, 0, θ, θ_label)
end
```

draw_complex (generic function with 1 method)

```
function draw_complex(args...; kws...)
    scatter([0], [0], ratio = :equal, color = :black, label = nothing, framestyle = :origin, ticks = nothing)
    draw_complex!(args...; kws...)
end
```