UCLouvain Faculté EPL 21 août 2025	**Examen : LSINC1113** Compléments de mathématiques	Prénom : Nom : NOMA :

Cet examen est un examen oral qui sera basé sur les questions reprises ci-dessous.

Utilisez les encadrés pour préparer votre réponse orale pendant le temps de préparation.

Bon travail !

Cadre réservé aux notes d'évaluation :

Solution: Evaluation de l'étudiant.

Question 1 : Mathématiques du signal

Considérons le signal suivant :

$$x(t) = \sin(\pi t) - \cos(2\pi t).$$

(a) Quelle est la transformée de Fourier de $x(t)$?

Solution: Pour trouver la transformée de Fourier de $x(t)$, on utilise les formules classiques :

$$\sin(\pi t) = \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i}$$
$$\cos(2\pi t) = \frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i} - \frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2} \\ &= \frac{1}{2i}e^{i\pi t} - \frac{1}{2i}e^{-i\pi t} - \frac{1}{2}e^{i2\pi t} - \frac{1}{2}e^{-i2\pi t} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier est :

$$X(f) = \frac{1}{2i}\delta(f - 0.5) - \frac{1}{2i}\delta(f + 0.5) - \frac{1}{2}\delta(f - 1) - \frac{1}{2}\delta(f + 1)$$

où $f_1 = 0.5$ Hz et $f_2 = 1$ Hz.

(b) À quelle fréquence faut-il échantillonner $x(t)$ pour ne pas avoir de repliement spectral ?

Solution: Pour éviter le repliement spectral, il faut respecter le théorème de Shannon-Nyquist.
La fréquence maximale du signal est $f_{max} = 1$ Hz (correspondant à $\cos(2\pi t)$).
Donc la fréquence d'échantillonnage minimale est :

$$f_e > 2f_{max} = 2 \times 1 = 2 \text{ Hz}$$

Il faut échantillonner à une fréquence strictement supérieure à 2 Hz.

Question 2 : Analyse multivariée

Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto \sin(f(1-x, x-1)). \end{aligned}$$

Vous aimeriez calculer la dérivée de g en $x = 0$ mais vous n'avez pas accès à f. Toutefois, vous avez accès à la valeur et au gradient de f en $(1, -1)$: c'est $f(-1, 1) = \pi/4$ et $\nabla f(-1, 1) = (2, 3)$.

Calculez la dérivée de g en 0 à l'aide de forward différentiation.

Solution:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \cos(f(-1,1)) \cdot \nabla f(-1,1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \cos(\pi/4) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-2+3) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Question 3 : Théorie des nombres

Vous êtes en exploration sur la planète Mercure avec votre collègue pendant un an. Comme il y a 88 jours par an sur Mercure, vous avez décidé de changer le calendrier en 11 semaines de 8 jours. Après un certain temps, vous êtes persuadé d'être le deuxième jour de la semaine et votre collègue pense être le premier jour de la semaine. Suite à une vive discussion, vous vous rendez compte que vous avez tous les deux raison, mais que votre collègue a choisi de séparer l'année en 8 semaines de 11 jours.

(a) Déterminez vous êtes quel jour de l'année.

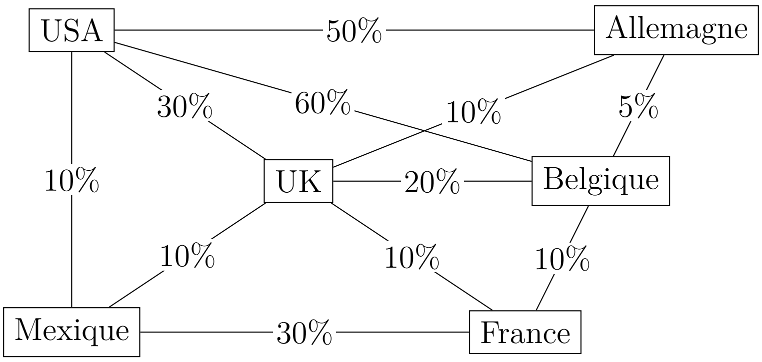
> **Solution:** Comme on travaille modulo, c'est plus simple de dire que le premier jour est le jour 0. Les deuxièmes jours pour moi sont tous les 8 jours donc : $(1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 81, 89)$. Les premiers jours de semaine pour mon collègue sont $(0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77)$. On trouve donc 33 en commun. On est donc le 34ième jour de l'année (on doit faire +1 car 0 est le premier jour).

(b) Après le succès de votre exploration sur Mercure, vous voilà parti pour l'exploration de la planète Vénus ayant 10759 jours par an. Vous décidez d'utiliser des semaines de 7 jours mais vos collègues ont décidé d'utiliser des semaines de 29 et 53 jours. Vous arrivez à la même situation que précédemment où vous pensez être le 1er jour de l'année mais vos deux collègues pensent être le 2ième jour et le 3ième jour de l'année respectivement. Par contre, cette fois-ci, vous avez pensé à prendre votre ordinateur portable avec vous. Vous ne devez pas trouver le jour de l'année mais décrivez l'algorithme que vous utiliseriez pour le calculer.

> **Solution:** On utilise le théorème des restes chinois, on trouve
>
> $$\begin{aligned}
&0 \cdot 1537 \cdot (1537^{-1} \pmod 7) + 1 \cdot 371 \cdot (371^{-1} \pmod{29}) \\
&+ 2 \cdot 203 \cdot (203^{-1} \pmod{53}) \\
&0 \cdot 1537 \cdot 2 + 1 \cdot 371 \cdot 24 + 2 \cdot 203 \cdot 47 + \equiv 49505 \pmod{10759} \\
&\equiv 27986 \pmod{10759} \\
&\equiv 6468 \pmod{10759}.
\end{aligned}$$
>
> Donc vous êtes le 6469ième jour de l'année. Pour trouver l'inverse modulo on utilise l'algorithme d'Euclide étendu.

Question 4 : Théorie des graphes

Le président des USA, n'ayant pas aimé avoir été corrigé sur son utilisation du mot "French fries" par le premier ministre belge, a décidé de faire passer les taxes sur les produits importés à 60%. La Belgique a alors automatiquement riposté avec une taxe équivalente pour ses importations des USA. Le gouvernement belge vous demande de trouver s'il est possible de payer moins de taxe pour vendre ou acheter des produits avec les USA en passant par des pays intermédiaires.



(a) Quel serait la meilleure manière de faire, étant donné les taxes bilatérales données ci-dessus. *Hint : Combiner deux taxes de 10% et 20% correspond à* $1.1 \cdot 1.2 = 1.32$.

> **Solution:** On a
>
> $$1.05 \cdot (1.1)^4 < 1.3 \cdot 1.2 < 1.3 \cdot (1.1)^2 < 1.05 \cdot 1.5 < 1.6$$
>
> donc le plus court chemin est de passer par l'Allemagne puis les UK puis le Mexique.

(b) Étant donné que les taxes évoluent rapidement, on vous demande de concevoir un algorithme qui, à partir des taxes entre tous les pays du monde, calcule les meilleurs pays intermédiaires pour transiter un produit d'un pays i vers un pays j. Quel serait la complexité de votre algorithme ?

> **Solution:** On doit minimiser le produit des taxes sur les chemins. L'algorithme de Dijkstra minimise une somme mais on peut soit le modifier pour minimiser un produit, soit minimiser le logarithme du produit qui correspond à la somme des logarithmes des taxes. La complexité de l'algorithme de Dijkstra pour un graphe de $|V|$ sommets et $|E|$ arêtes est $\Theta(|E| + |V| \log |V|)$. Ici, comme on a les taxes entre toutes les paires de pays, on a un graphe complet donc $|E| = |V|^2$ donc la complexité est simplement $\Theta(|V|^2)$.

Question 5 : Intégration multivariée

Calculez l'intégrale double suivante :

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

où D est le domaine défini par $0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \leq y \leq x$.

(a) Effectuez le calcul de cette intégrale.

Solution:

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x xy\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx \\
&= \int_0^1 x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2}\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} \\
&= \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Question 6 : Logique

Soit P, Q et R trois propositions logiques. Déterminez si les deux propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

$$\begin{aligned} A : &\quad \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \\ B : &\quad \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R) \end{aligned}$$

(a) Justifiez votre réponse en utilisant les lois de De Morgan et les propriétés de distributivité.

Solution: Ces deux propositions sont logiquement équivalentes. On peut le démontrer en appliquant successivement les lois logiques :

$$\begin{aligned} \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) &\equiv \neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge R) \quad \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R) \quad \text{(De Morgan)} \\ &\equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R) \quad \text{(Distributivité)} \end{aligned}$$

Donc $A \equiv B$.

On peut également factoriser l'expression A différemment :

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv P \wedge (Q \vee R) \quad \text{(Distributivité)}$$

Donc $A \equiv \neg(P \wedge (Q \vee R)) \equiv \neg P \vee \neg(Q \vee R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$.