

Cet examen est un examen oral qui sera basé sur les questions reprises ci-dessous.

Utilisez les encadrés pour préparer votre réponse orale pendant le temps de préparation.

Bon travail !

Cadre réservé aux notes d'évaluation :

Solution: Evaluation de l'étudiant.

Question 1 : Mathématiques du signal

Lors d'une cardiographie, on détecte un signal audio réel des battements de cœur suivant :

$$x(t) = 2 \cos(2\pi f_1 t) + 0.5 \sin(2\pi f_2 t).$$

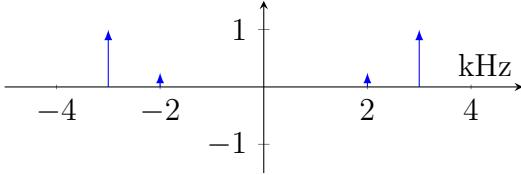
Les fréquences f_1 et f_2 sont respectivement $f_1 = 2000$ Hz et $f_2 = 3000$ Hz. Pour des raisons de stockage numérique, ce signal est échantillonné. La cadence (fréquence) d'échantillonnage par défaut est $f_e = 8000$ Hz. On obtient donc le signal échantillonné $x_n = x(n/8000)$.

- (a) Donner le graphe de la transformée de Fourier $X(\xi)$ de $x(t)$ ainsi que de la transformée discrète X_k de x_n .

Solution: On a

$$x(t) = \exp(2\pi f_1 t) + \exp(2\pi f_1 t) + \frac{\exp(2\pi f_2 t) - \exp(-2\pi f_2 t)}{4i}.$$

Voici un plot représentant les amplitudes (donc module des complexes, c'est à dire qu'on représente $|1/4i| = 1/4$) de chaque composante du signal



Afin de réduire le temps de calcul et le volume des fichiers enregistrés, votre collègue décide de diminuer la fréquence d'échantillonnage. Une vidéo fait 25 images par seconde, il ne voit pas pourquoi il faudrait 8000 valeurs par secondes pour le son.

- (b) Y a-t-il une limite à ne pas franchir dans la diminution de la fréquence d'échantillonnage ?

Solution: Avec une fréquence d'échantillonnage de f_e , la transformée de Fourier sera périodique avec une période f_e . Ça signifie qu'en plus des diracs en $-f_2, -f_1, f_1, f_2$, il y en aura aussi en $-f_2 + f, -f_1 + f, f_1 + f, f_2 + f, -f_2 + 2f, -f_1 + 2f, \dots$. Si $-f_2 + f_e \leq f_2$, c'est à dire $f_e \leq 2f_2$, le signal utile va commencer à se mélanger avec le signal répété par *repli spectral*. Il faut donc maintenir $f_e > 2f_2$.

Question 2 : Analyse multivariée

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \\ &= (\exp(x_1) + \exp(x_2), (\exp(x_1) + \exp(x_2))^2). \end{aligned}$$

Vous aimeriez calculer la Jacobienne de cette matrice :

$$\partial f / \partial x = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Vous remarquez que la fonction $g(x_1, x_2) = \exp(x_1) + \exp(x_2)$ apparaissant plusieurs fois. Afin d'exploiter cette structure du problème dans le calcul de la Jacobienne, vous décidez de reformuler f comme la composition de deux fonctions : $f(x_1, x_2) = h(g(x_1, x_2))$ où $h(y) = (h_1(y), h_2(y)) = (y, y^2)$.

Vous considérez alors les Jacobiennes :

$$\begin{aligned} \partial g / \partial x &= \begin{bmatrix} \partial g / \partial x_1 & \partial g / \partial x_2 \end{bmatrix} \\ \partial h / \partial y &= \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial y \\ \partial h_2 / \partial y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (a) Étant donné une valeur $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$, pour quelles valeurs faut-il évaluer les Jacobiennes $\partial g / \partial x$ et $\partial h / \partial y$?
- (b) Comment combiner ces deux Jacobiennes pour obtenir la Jacobienne $\partial f / \partial x$?

Solution: On évalue $\partial g / \partial x$ à $x = (1, 0)$ et $\partial h / \partial y$ à $y = g(1, 0) = e + 1$. On a alors

$$\partial f / \partial x = \left[\begin{array}{c} \partial h_1 / \partial y \\ \partial h_2 / \partial y \end{array} \right]_{y=e+1} \left[\begin{array}{cc} \partial g / \partial x_1 & \partial g / \partial x_2 \end{array} \right]_{x=(1,0)}$$

Vous aimerez à présent calculer la dérivée de $a(x) = f_1(x) + f_2(x)$. On peut voir cela comme la composition de 2 fonctions : $s(f(x))$ où $s(z_1, z_2) = z_1 + z_2$. On a donc aussi $a(x) = s(h(g(x)))$.

- (c) Comment calculer la dérivée du gradient $\nabla a(x)$ comme le produit de 3 matrices. Préciser pour quelle valeur ces matrices doivent être évaluées en fonction de x .

Solution:

$$\begin{aligned}\partial a / \partial x &= \partial s / \partial z|_{z=h(g(x))} \partial h / \partial y|_{y=g(x)} \partial g / \partial x \\ &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \partial h_1 / \partial y \\ \partial h_2 / \partial y \end{bmatrix} \Big|_{y=g(x)} \begin{bmatrix} \partial g / \partial x_1 & \partial g / \partial x_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- (d) En généralisant à $g(x_1, \dots, x_n) = \exp(x_1) + \dots + \exp(x_n)$, $h(y) = (y, y^2, \dots, y^n)$ et $s(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n$, quelle est la complexité de forward et reverse différentiation ? Lequel sera plus rapide pour un large n ?

Solution: Forward évalue le produit de droite à gauche. Il forme donc d'abord $\partial f / \partial x$ qui est une matrice $n \times n$ (complexité $\Theta(n^2)$) puis il multiplie avec un vecteur (complexité $\Theta(n^2)$). Reverse évalue le produit de gauche à droite. Il fait d'abord le produit scalaire des deux vecteur $\partial s / \partial z$ et $\partial h / \partial y$ (complexité $\Theta(n)$) puis le produit de ce scalaire avec le vecteur $\partial g / \partial x$ (complexité $\Theta(n)$). Reverse a une complexité linéaire et est donc plus rapide pour de grand n que forward qui a une complexité quadratique.

Question 3 : Théorie des nombres

En cette début d'année 2025, une question vous taraude. Quel peut bien être le résultat de $3^n \pmod{7}$ pour $n = 2025$?

- (a) En utilisant un langage utilisant des entiers signés sur 64-bits, vous commencez par calculer 3^{2025} et vous obtenez -7783937752544673437 . Cela vous paraît-il correct ? Si non, que s'est-il passé ?

Solution: Ça a dépassé la valeur maximum d'un entier 64-bits, il y a eu un int overflow.

- (b) Vous calculez à présent 3^{2025} en utilisant des entiers à précision arbitraire et obtenez un résultat de près de 1000 chiffres. En prenant le résultat modulo 7, vous avez la réponse qui n'a plus qu'un chiffre. Vous vous demandez alors s'il n'y avait pas moyen de s'en sortir pour calculer 3^{2025} juste en utilisant des entiers 64-bits. Qu'en pensez-vous ?

Solution: Étant donné que $ab \pmod{7}$ est égal à $a(b \pmod{7}) \pmod{7}$, on peut appliquer le reste modulo 7 après chaque multiplication ce qui gardera les nombres en dessous de 7^2 . On pourrait donc même faire le calcul avec des entiers sur 8-bits.

- (c) Vous êtes content d'arriver au résultat mais vous aimeriez avoir un algorithme

plus efficace au cas où vous vouliez utiliser le nombre d'année depuis la création de l'univers pour n au lieu de 2025. Expliquez comment calculer cette exponentiation avec une complexité proportionnelle au logarithme de n .

Solution: En binaire, 2025 vaut 11111101001. On a donc $3^{2025} = 3^1 + 3^8 + 3^{32} + 3^{128} + 3^{256} + 3^{512} + 3^{1024}$. Il suffit alors de calculer les puissances 3^{2^k} l'une après l'autre jusqu'à $k = 10$ en utilisant le fait que $3^{2^{k+1}} \equiv (3^{2^k})^2 \pmod{7}$. Il suffit ensuite de sommer celles qui correspondent à un 1 dans la représentation binaire. C'est l'algorithme de fast powering. De façon équivalente, on peut aussi utiliser l'implémentation récursive de cet algorithme.

- (d) Cela vous paraît toujours long et fastidieux à faire à la main et vous vous demandez comment Pierre de Fermat répondait à ce genre de question existentielle le jour de nouvel an au 17ième siècle, bien avant l'invention de l'ordinateur. Vous remarquez alors que 7 est un nombre premier. Expliquer comment ça peut vous significativement simplifier votre calcul.

Solution: Le petit théorème de Fermat nous dit que $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. 2022 est pair car il termine par un 2 et est un multiple de 3 comme la somme de ses chiffres vaut 6 qui est un multiple de 3. 2022 est donc un multiple de 6. On a donc $2025 \equiv 2025 - 2022 \equiv 3 \pmod{7}$. Dès lors, $3^{2025} \equiv 3^{2022} \cdot 3^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 6 \pmod{7}$.

Question 4 : Théorie des graphes

Un hôpital possède 5 scanners différents et 5 employés. Seulement, tous les employés ne savent pas utiliser tous les scanners. Les scanners sont numérotés de 1 à 5 et les employés de A à E. Les employés sachant utiliser chaque scanner sont représentés par la Figure 1.

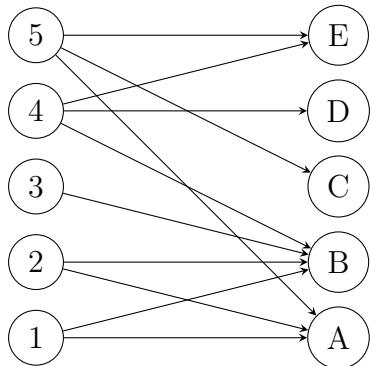


FIGURE 1 – Une flèche de i vers j représente que j sait utiliser le scanner i .

- (a) En supposant que les 5 employés sont disponibles. Combien de scans peuvent être effectués en même temps ?

Solution: Les scanners 1, 2, 3 ne peuvent qu'être utilisés par A et B donc on ne sait pas utiliser ces 3 scanners en même temps. On ne sait donc utiliser que 4 scanners à la fois.

- (b) Proposer une formation à l'utilisation d'un scan pour un employé qui augmenterait le nombre de scans pouvant être effectués simultanément.

Solution: Il faut former C, D ou E à l'utilisation d'un des scanners 1, 2 ou 3.

Suite à l'apparition d'une pandémie, l'état a investi massivement dans l'hôpital.

Il y a maintenant 100 scanners et 100 employés pouvant effectuer les scans.

- (c) Quel algorithme pouvez-vous utiliser pour résoudre ce problème efficacement ?
(Indice : il faut peut-être ajouter des nœuds fictifs au graphe de la Figure 1 pour que ça corresponde à un des problèmes vu en cours...)
- (d) Comment trouver quelle formation proposer pour augmenter la capacité de scan de l'hôpital à partir de la solution du problème ?

Solution: On ajoute une source qui relie à tous les scanner et on relie tous les employés à une source. Ça donne une problème de Max-Flow avec une capacité de 1 pour toutes les arêtes : De façon équivalente, le Max-Flow est égal à Min-Cut. La solution du Min-Cut est de groupé les nœuds bleus et verts comme ci-dessous. La coupe est alors formée par les arêtes en rouges qui relient un nœud bleu à un nœud vert.

Il faut former un employé dont la solution du Max-Flow donne une valeur de 0 à son arête vers T à utiliser un scanner dont la solution du Max-Flow donne une valeur de 0 à l'arête le reliant à S.

