Dérivée à plusieurs variables

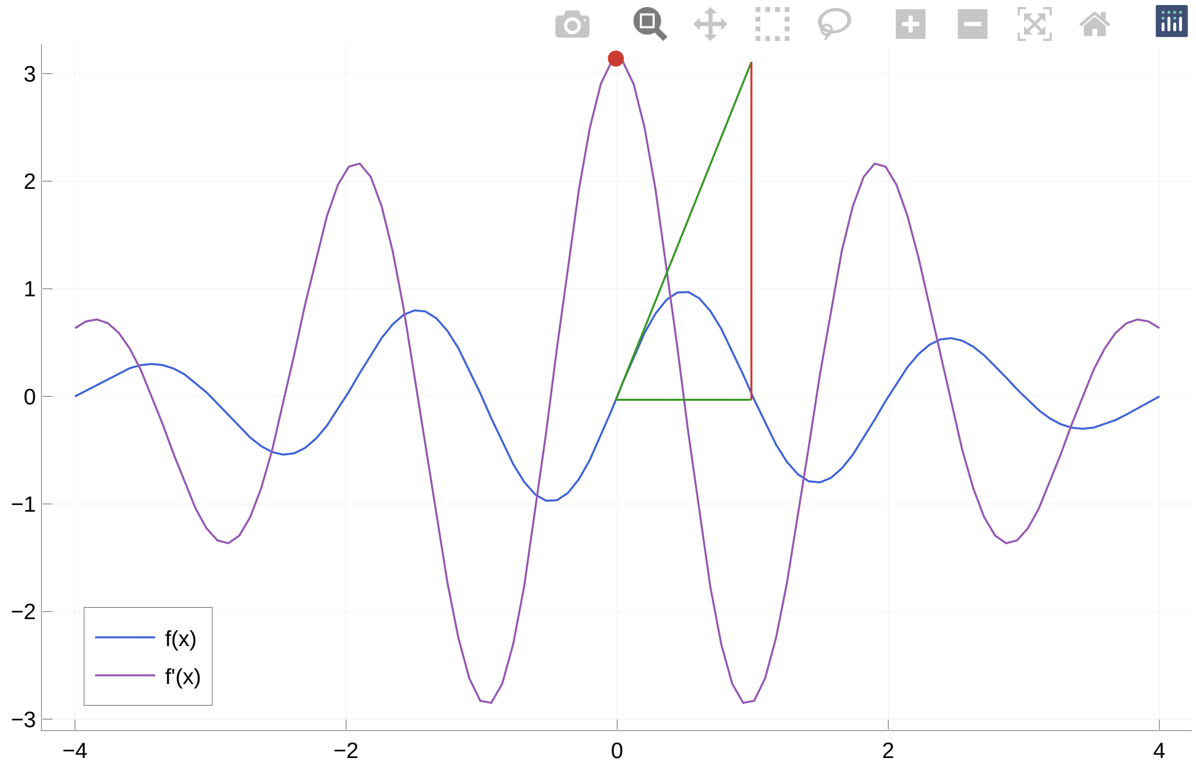
De droite tangente à plan tangent

La dérivée univariée au point a correspond à la pente de la **droite tangente** à la fonction en a. Pour une fonction bivariée, la dérivée dans une direction d correspond à la pente du **plan tangent** à la fonction en a dans la direction d.

```
▶ PlotlyBackend()
```

```julia
plotly()
```

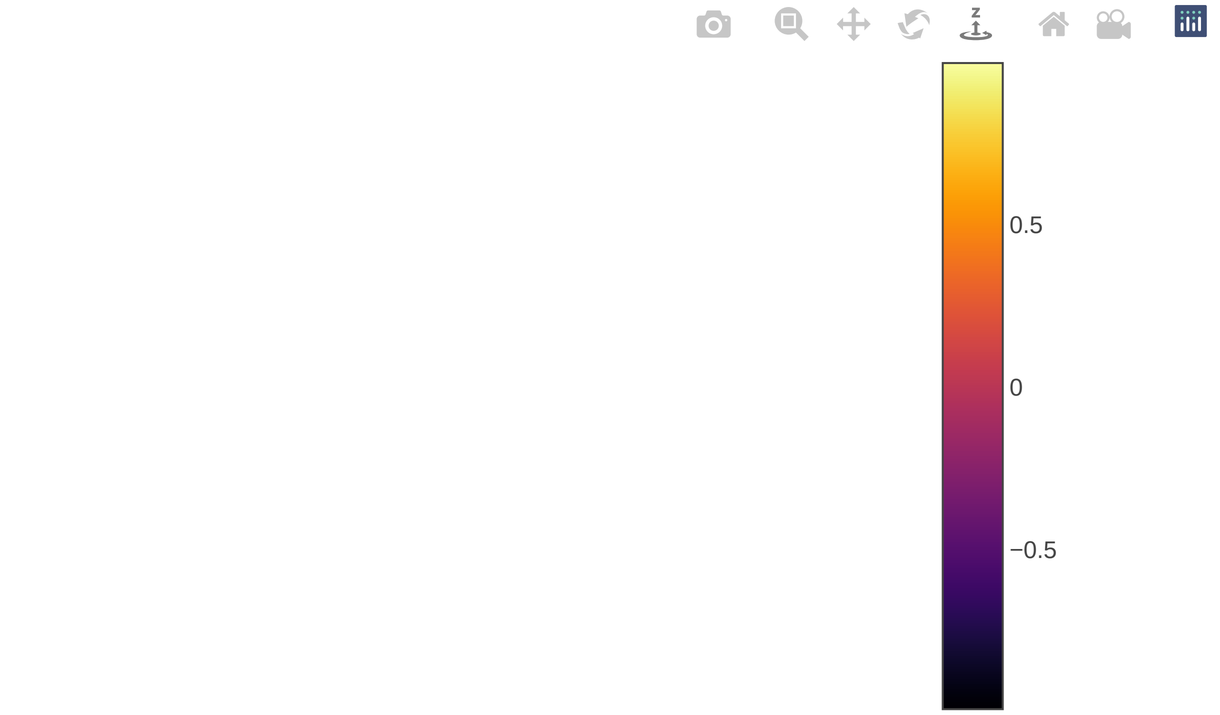
```
Precompiling PlotlyBase...
   3588.2 ms  ✓ PlotlyBase
  1 dependency successfully precompiled in 4 seconds. 47 already precompiled.
Precompiling PlotlyKaleido...
    478.8 ms  ✓ Kaleido_jll
    581.5 ms  ✓ PlotlyKaleido
  2 dependencies successfully precompiled in 1 seconds. 29 already precompile
d.
```




```
tangent_line(x -> sin(x * π) * exp(-x^2 / 10), x0, x1, cx)
```

-0.01

-0.01




```
tangent_plane((x, y) -> sin(x * π) * exp(-y^2 / 4), x0, x1, y0, y1, cx, cy)
```

Dérivée directionelle

Que vaut la dérivée dans la direction rouge `(1, 1)` si on connait les dérivée vertes en `x` : $\partial f/\partial x$ et en `y` : $\partial f/\partial y$? Un plan est défini par un point et deux vecteurs donc le plan bleu est entièrement défini par le point $(x, f(x))$ et les deux vecteurs $(1, 0, \partial f/\partial x)$ et $(0, 1, \partial f/\partial y)$. En utilisant la linéarité du plan, quelle est la valeur de $?$ pour que le vecteur $(1, 1, ?)$ soit dans le plan ?

$$(1, 1, \partial f/\partial x + \partial f/\partial y)$$

En général, pour une direction arbitraire, on a

$$(d_x, d_y, d_x \cdot \partial f/\partial x + d_y \cdot \partial f/\partial y)$$

La dérivée en direction (d_x, d_y) est donc obtenue par produit scalaire entre le vecteur (d_x, d_y) et le *gradient* $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$. Voici trois notations équivalentes pour écrire ce produit scalaire:

$$\langle (d_x, d_y), (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) \rangle = \begin{bmatrix} d_x & d_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{bmatrix} = d_x \cdot \partial f/\partial x + d_y \cdot \partial f/\partial y$$

Le gradient est souvent dénoté avec le symbol ∇:

$$\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$$

Calculer le gradient à la main

Comment calculer les valeurs de $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$? Commençant par voir comment faire ça à la main. Nous verrons au cours suivant comment le calculer algorithmiquement. L'astuce: pour calculer $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, il faut voir y comme constant et donc voir f comme fonction de x uniquement. Par exemple:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(x\pi) e^{-y^2/4} = \pi \cos(x\pi) e^{-y^2/4}$$

Idem pour y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \sin(x\pi) e^{-y^2/4} = -\sin(x\pi) \frac{y}{2} e^{-y^2/4}$$

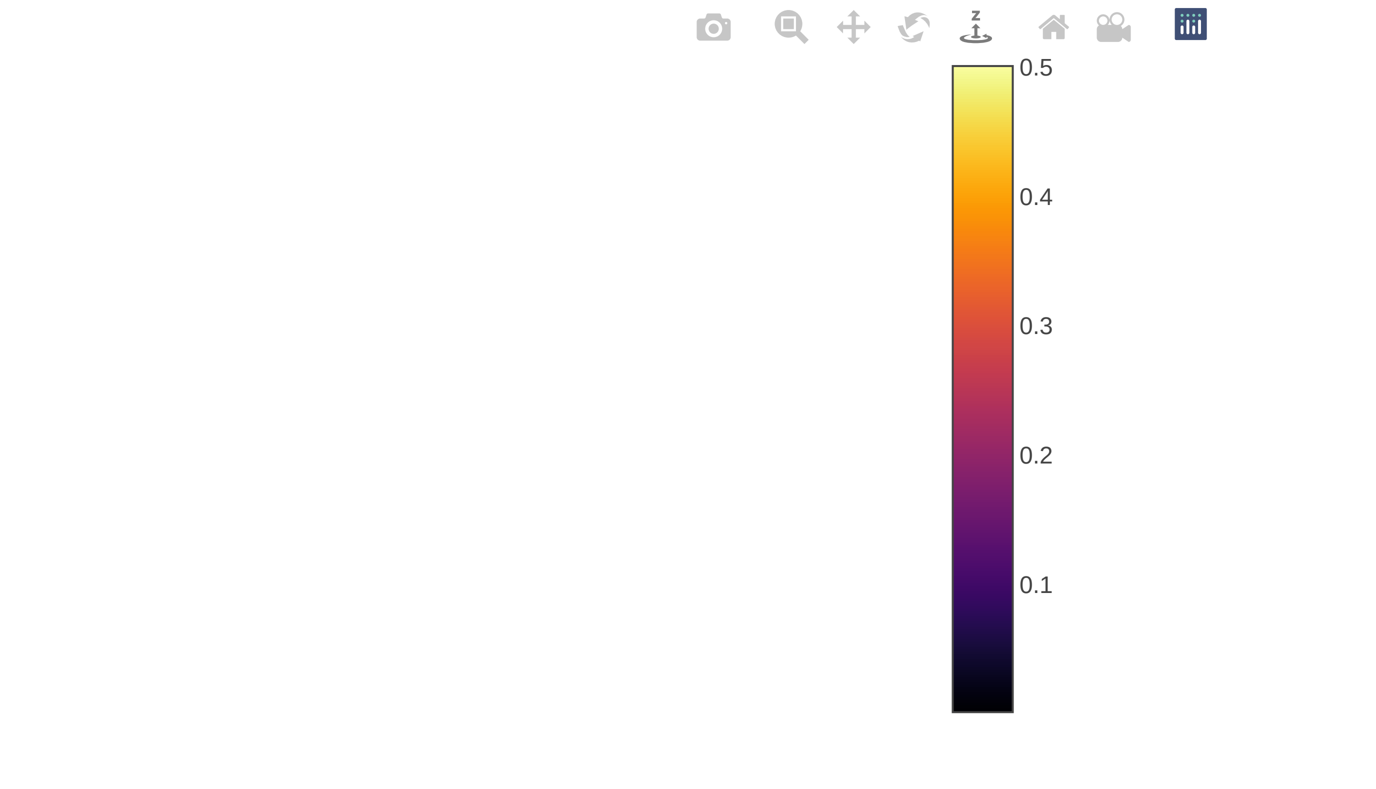
Quand les dérivées sont-elles dans un plan ?

On dit dans ce cas que la fonction est *différentiable$ en $(0, 0)$ et les dérivées directionelles sont donnée par produit scalaire avec le gradient. Quels sont les conditions pour la différentiabilité ?

Voyons un exemple:

i_1 = 2

i_2 = 2



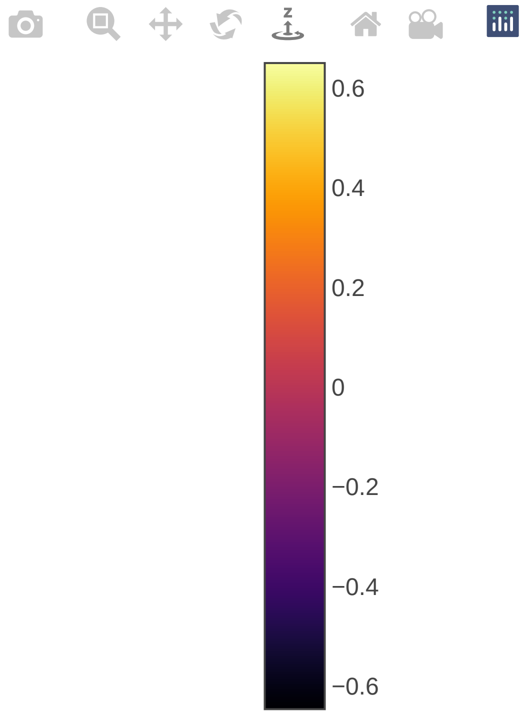

```
let
    x = y = range(-1, stop = 1, length = 32) # nombre pair de points pour ne pas évaluer en (0, 0)
    surface(x, y, (x, y) -> x^i_1 * y^i_2 / (x^i_3 + y^i_4))
end
```

i_3 = 2

i_4 = 2

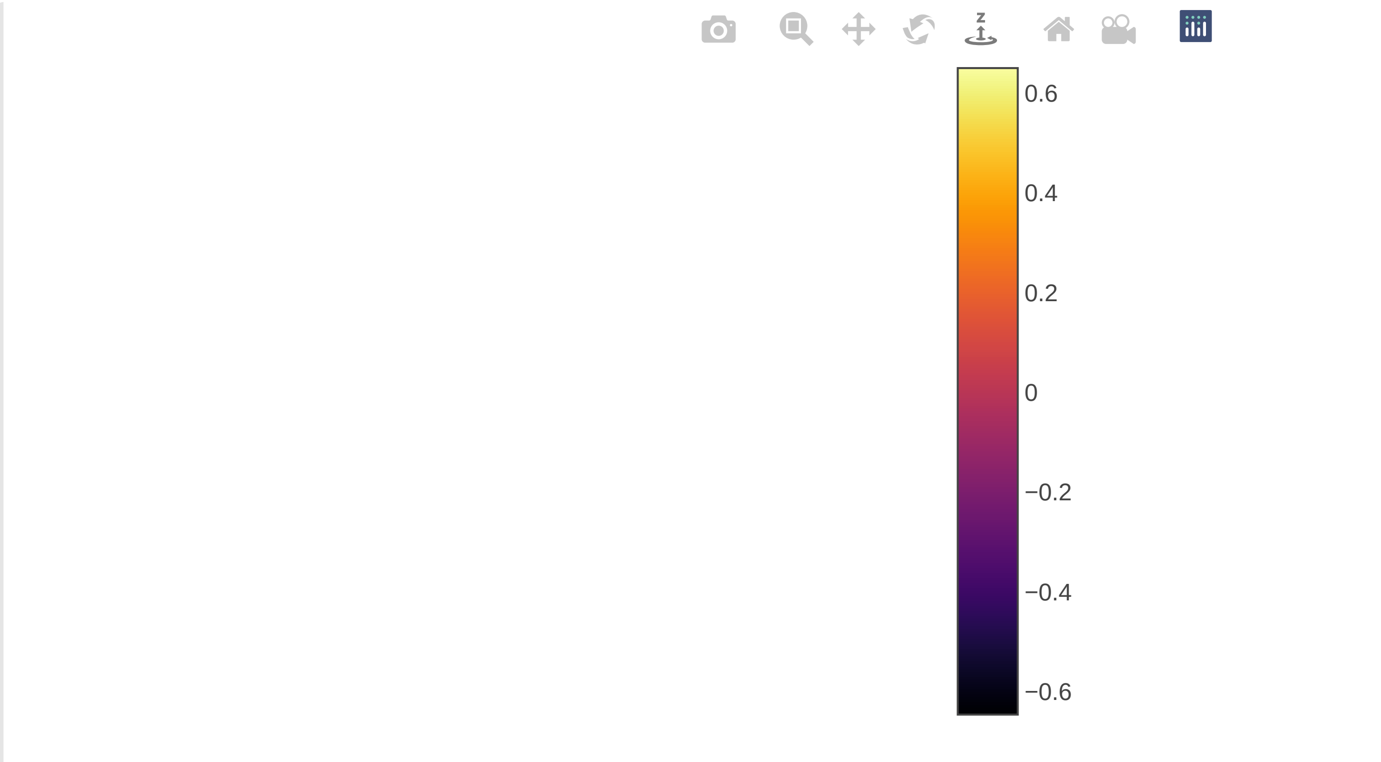
Pour quels valeurs de `i_1`, `i_2`, `i_3`, `i_4` est ce que la fonction est continue en `(0, 0)` ? Vous y répondrez à la séance d'exercices! Ici, on se contentera de se fier au visuel.

Il est nécessaire que la fonction soit continue en $(0,0)$, donc par exemple $xy/(x^2+y^2)$ n'est pas continue. Y a-t-il des conditions sur $\partial f/\partial x$:




```
let
    x = y = range(-1, stop = 1, length = 32)
    function dfdx(x, y)
        d = -x^i_1 * y^i_2 / (x^i_3 + y^i_4)^2 * i_3 * x^(i_3 - 1)
        if i_1 > 0
            d += i_1 * x^(i_1 - 1) * y^i_2 / (x^i_3 + y^i_4)
        end
        return d
    end
    surface(x, y, dfdx)
end
```

Et $\partial f / \partial y$:




```
let
    x = y = range(-1, stop = 1, length = 32)
    function dfdx(x, y)
        d = -x^i_1 * y^i_2 / (x^i_3 + y^i_4)^2 * i_4 * y^(i_4 - 1)
        if i_2 > 0
            d += i_2 * x^i_1 * y^(i_2 - 1) / (x^i_3 + y^i_4)
        end
        return d
    end
    surface(x, y, dfdx)
end
```

Théorème: Si f est continue en a et que les dérivées partielles de f sont définies dans un voisinage de a et continues en a alors f est différentiable.

La Hessienne

Pour obtenir la dérivée second, on dérive à nouveau le gradient. On les notations:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x} f) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y} f) = \frac{\partial^2}{\partial xy} f$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f) = \frac{\partial^2}{\partial yx} f$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y} f) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f$$

Attention: ∂x^2 ne veut **pas** dire qu'on dérive par x^2, c'est juste une notation pour dire qu'on dérive 2 fois par x.

Cette notation peut paraître mal choisie ! En effet, dans ∂xy et ∂yx, les parties xy et yx ressemblent à des produits. Comme le produit est commutatif, on a à tendance à penser que dériver par x puis y est égal à dériver par y puis x... À moins que ça soit vraiment égal ?

Théorème Si f est différentiable alors $\frac{\partial^2}{\partial xy} f = \frac{\partial^2}{\partial yx} f$.

On aime mettre ces 4 valeurs dans une matrice nommée *Hessienne*. Par ce théorème, la matrice est donc symmétrique!

$$\mathrm{Hess}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f & \frac{\partial^2}{\partial xy} f \\ \frac{\partial^2}{\partial xy} f & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{bmatrix}$$

Dérivée à plus de 2 variables

Tous les résultats se généralisent sans broncher à plus de 2 variables. Considérons une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n variables. Le gradient est $\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \ldots, \partial f / \partial x_n)$ La dérivée dans la direction $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est:
$\langle d, \nabla f \rangle = d^\top \nabla f = d_1 \cdot \partial f / \partial x_1 + \cdots + d_n \cdot \partial f / \partial x_n$

La Hessienne est toujours symmétrique et devient:

$$\text{Hess}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_{n-1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Utils

```
tangent_plane (generic function with 1 method)
```

```julia
function tangent_plane(f, x0, x1, y0, y1, cx, cy; Δ = 0.5, n = 32)
    x = range(x0, stop = x1, length = n)
    y = range(y0, stop = y1, length = n)
    df(x, y) = ForwardDiff.gradient(xy -> f(xy...), [x, y])
    surface(x, y, f, label = "f(x)", zlims = (minimum(f.(x, y') + maximum.(df.(x, y'))), maximum(f.(x, y') + maximum.(df.(x, y')))), legend=:bottomleft)
    grad = df(cx, cy)
    fc = f(cx, cy)
    plane(x, y) = fc + grad' * [x - cx, y - cy]
    plot!([cx, cx + 1], [cy, cy], [fc, fc + grad[1]], linewidth = 10, color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.green, label = "")
    plot!([cx, cx], [cy, cy + 1], [fc, fc + grad[2]], linewidth = 10, color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.green, label = "")
    return plot!([cx, cx+1], [cy, cy + 1], [fc, fc + grad[1] + grad[2]], linewidth = 10, color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.red, label = "")
    surface!( # works with plotly but not GR
        range(cx - Δ, stop = cx + Δ, length = 3),
        range(cy - Δ, stop = cy + Δ, length = 3),
        plane,
        color = [Colors.JULIA_LOGO_COLORS.blue],
        label = "",
    )
end
```

```julia
using LinearAlgebra, Plots, Colors, ForwardDiff, PlutoUI
```

```
Precompiling ForwardDiff...
   3344.7 ms  ✓ ForwardDiff
  1 dependency successfully precompiled in 4 seconds. 38 already precompiled.
```

```julia
import PlotlyBase, PlotlyKaleido
```

tangent_line (generic function with 1 method)

```julia
function tangent_line(f, x0, x1, c; n = 100)
    x = range(x0, stop = x1, length = n)
    df(x) = ForwardDiff.derivative(f, x)
    plot(x, f, color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.blue, label = "f(x)", ylims = (minimum(f.(x) + df.(x)), maximum(f.(x) + df.(x))), legend=:bottomleft)
    plot!(x, df, color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.purple, label = "f'(x)")
    pente = df(c)
    tangente(x) = pente * (x - c) + f(c)
    x_right = range(c, stop = c + 1, length = 2)
    plot!([c, c + 1], tangente, color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.green, label = "")
    plot!([c, c + 1], [f(c), f(c)], color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.green, label = "")
    plot!([c + 1, c + 1], [f(c), tangente(c + 1)], color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.red, label = "")
    scatter!([c], [pente], markerstrokewidth = 0, color = Colors.JULIA_LOGO_COLORS.red, label = "")
end
```