Sommerschule

Nikolas Kilian Projektleiter: Eren Ucar

June 3, 2019

1 Brenoulli Zahlen und Polynome

1.1 Bernoulli Zahlen

1.1.1 Definition

Die Bernoulli Zahlen $B_n, n \in \mathbb{N}_0$, bilden eine rationale Zahlenfolge. Sie sind rekursiv wie folgt definiert.

$$B_0 := 1$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot B_k = 0, n \in \mathbb{N}$$

1.2 Bernoulli Polynome

1.2.1 Definition

Die Bernoulli Polynome $B_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$, sind wie folt definiert:

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}, x \in \mathbb{R}$$

$$n = 0 : B_0(x) = 1$$
$$n = 1 : B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$
$$n = 2 : B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

1.2.2 Eigenschaften

E1

$$B_n(0) = B_n(1), \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1$$

Beweis.

$$B_n(0) = B_n(1), \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 0^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 1^{n-k}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 1$$
$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k$$

Gilt laut Definition. □

E2

$$\frac{d}{dx}B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Beweis.

$$\frac{d}{dx}B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \cdot B_k \cdot \frac{d}{dx}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

Da der Terrm für $k = n$ konstant ist, ist dessen Ableitung 0. Es kann demnach aus der Summenformel ausgelassen werden.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} \cdot B_k \cdot (n-k) \cdot x^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

Der nächste Schritt wird dem unüberzeugtem Leser als Übung überlassen. □

$$\Longrightarrow \int B_{n-1}(x)dx = \frac{1}{n}B_n(x)$$

E3

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Beweis.

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$\int_0^1 B_n(x)dx \overset{\text{(E2)}}{=} \frac{1}{n+1}B_{n+1}(x)\bigg|_0^1 \overset{\text{(E1)}}{=} 0$$

□

1.3 Alternative Definition

Die Bernoulli Polynome kann man über folgender Funktionalgleichungen charakterisieren.

Theorem 1.1 (Theorem)**.** *Für $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$F_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Proof. Sei $n = 0$. Es gilt

$$F_0(x) = B_0(x+1) - B_0(x) = 0x^{0-1}$$

Proof.
$$F_0(x) = B_0(x+1) - B_0(x) = 0x^{0-1}$$
$$F_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot B_k \cdot x^{0-k} - \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot B_k \cdot x^{0-k} = 0x^{0-1}$$
$$F_0(x) = B_0 \cdot x^{-k} - B_0 \cdot x^{-k} = 0x^{0-1}$$
$$F_0(x) = 1 - 1 = 0$$

□

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ beliebig aber fest gewählt.

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \Longrightarrow B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$

Proof.
$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$
$$\frac{d}{dx} B_{n+1}(x+1) - \frac{d}{dx} B_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}(n+1) \cdot x^n$$
$$(n+1) \cdot B_{n+1-1}(x+1) - (n+1) \cdot B_{n+1-1}(x) = (n+1) \cdot nx^{n-1}$$
$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

□

Da n beliebig aber fest gewählt ist, gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. □

Corollary 1.1.1.
$$B_{2m+1} = 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

Proof. Sei n gerade.
$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$
Sei $x := -\frac{1}{2}$
$$B_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - B_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1-k}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
Wenn $n+1-k$ gerade ist, heben sich die Summanden auf. Da n gerade ist, ist $n+1-k$ gerade genau dann, wenn $1-k$ gerade ist, also wenn k ungerade ist.

□

Corollary 1.1.2.
$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1}, n, N \in \mathbb{N}$$

Proof.

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} (n+1) \cdot k^n = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(1) = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot 1^{n+1-k} = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - \binom{n+1}{n+1} \cdot B_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot B_k = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

Laut Definition der Bernoulli Zahlen gilt:

$$B_{n+1}(N+1) - 1 \cdot B_{n+1} - 0 = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - B_{n+1} = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

□

2 Euler'sche Summenformel

Wir setzen die Bernoulli Polynome auf $[0, 1)$ periodisch fort auf $\mathbb{R}$

2.1 Definition

$$P_n(x) := B_n(x - [x])$$
$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

Theorem 2.1. *Einfache Euler'sche Summenformel Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2} \cdot (f(0) + f(n)) + R$$

wobei $R_1 := \int_0^n f'(x) \cdot P_1(x)dx$

Proof. Sei $k \in \mathbb{N}, x \in [k, k+1) \implies P_1'(x) = P_0(x) = 1$ Für $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$:

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_k^{k+1} f(x)P_1'(x)dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_k^{k+1-\epsilon} F(x)P_1'(x)dx$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(f(x) \cdot P_1(x)|_{x=k}^{k+1-\epsilon} - \int_k^{k+1-\epsilon} f'(x)P_1(x)dx \right)$$

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(f(k+1-\epsilon)P_1(k+1-\epsilon)-f(k)P_1(k)-\int_k^{k+1-\epsilon}f'(x)P_1(x)dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}(f(k+1)+f(k))-\int_k^{k+1}f'(x)P_1(x)dx$$
$$\int_k^{k+1}f(x)dx=\frac{1}{2}(f(k+1)+f(k))-\int_k^{k+1}f'(x)P_1(x)dx$$

Summieren wir die obige Gleichung für $k = 0, 1, ..., n-1$

$$\int_0^n f(x)dx=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(f(k+1)+f(k))-\int_0^n f'(x)P_1(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}(f(0)+f(n))+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-\int_0^n f'(x)P_1(x)dx$$

Addiere auf beiden Seiten $\frac{1}{2}(f(0)+f(n))$ und stelle um. Dann folgt die Behauptung. □

Theorem 2.2. *Allgemeine Euler'sche Summenformel Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ sei n-mal stetig differenzierbar, $m \geq 2$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}(f(0)+f(n))+\sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^{n}+R_m$$

mit $R_m := \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx$

Proof. Wegen Satz 1 reicht es zu zeigen $\int_0^n f'(x)P_1(x)dx = \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^{n} + R_m$

$$\int_0^n f'(x)P_1(x)dx=\sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^{n}+R_m$$
$$\int_0^n f'(x)P_1(x)dx=\frac{1}{2!}f'(x)P_2(x)\Big|_{x=0}^{n}+\frac{1}{3!}f''(x)P_3(x)\Big|_{x=0}^{n}+...$$
$$+\frac{1}{(m)!}f^{(m-1)}(x)P_m(x)\Big|_{x=0}^{n}+\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx$$
$$=\sum_{k=2}^{m}\frac{P_k(x)}{k!}f^{(k-1)}(x)+\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx$$

□