

Sommerschule

Nikolas Kilian Projektleiter: Eren Ucar

June 3, 2019

Contents

1	Brenoulli Zahlen und Polynome	1
1.1	Brenoulli Zahlen	1
1.1.1	Definition	1
1.2	Brenoulli Polynome	1
1.2.1	Definition	1
1.2.2	Eigenschaften	2
1.3	Alternative Definition	3
2	Euler'sche Summenformel	5
2.1	Definition	5
3	Anwendungen der Euler'schen Summenformel	6
3.1	Faulhaber Formel	6
3.2	Euler-Konstante	7
3.3	Stirling'sche Formel	9
3.3.1	Beispiel	9

1 Brenoulli Zahlen und Polynome

1.1 Brenoulli Zahlen

1.1.1 Definition

Die Brenoulli Zahlen $B_n, n \in \mathbb{N}_0$, bilden eine rationale Zahlenfolge. Sie sind rekursiv wie folgt definiert.

$$B_0 := 1$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \cdot B_k = 0, n \in \mathbb{N}$$

1.2 Brenoulli Polynome

1.2.1 Definition

Die Brenoulli Polynome $B_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$, sind wie folgt definiert:

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}, x \in \mathbb{R}$$

$$n = 0 : B_0(x) = 1$$

$$n = 1 : B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$n = 2 : B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

1.2.2 Eigenschaften

E1

$$B_n(0) = B_n(1), \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1$$

Beweis.

$$B_n(0) = B_n(1), \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 0^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 1^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 1$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k$$

Gilt laut Definition. □

E2

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Beweis.

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot \frac{d}{dx} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

Da der Term für $k = n$ konstant ist, ist dessen Ableitung 0. Es kann demnach aus der Summenformel ausgelassen werden.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot (n-k) \cdot x^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

Der nächste Schritt wird dem unüberzeugtem Leser als Übung überlassen. □

$$\implies \int B_{n-1}(x) dx = \frac{1}{n} B_n(x)$$

E3

$$\int_0^1 B_n(x) dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_n(x) dx &= 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ \int_0^1 B_n(x) dx &\stackrel{(\text{E2})}{=} \frac{1}{n+1} B_{n+1}(x) \Big|_0^1 \stackrel{(\text{E1})}{=} 0 \end{aligned}$$

□

1.3 Alternative Definition

Die Bernoulli Polynome kann man über folgender Funktionalgleichungen charakterisieren.

Theorem 1.1 (Theorem). *Für $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$F_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Proof. Sei $n = 0$. Es gilt

$$F_0(x) = B_0(x+1) - B_0(x) = 0x^{0-1}$$

Proof.

$$\begin{aligned} F_0(x) &= B_0(x+1) - B_0(x) = 0x^{0-1} \\ F_0(x) &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \cdot B_k \cdot x^{0-k} - \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \cdot B_k \cdot x^{0-k} = 0x^{0-1} \\ F_0(x) &= B_0 \cdot x^{-k} - B_0 \cdot x^{-k} = 0x^{0-1} \\ F_0(x) &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

□

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ beliebig aber fest gewählt.

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \implies B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$

Proof.

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) &= (n+1) \cdot x^n \\ \frac{d}{dx} B_{n+1}(x+1) - \frac{d}{dx} B_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx} (n+1) \cdot x^n \\ (n+1) \cdot B_{n+1-1}(x+1) - (n+1) \cdot B_{n+1-1}(x) &= (n+1) \cdot nx^{n-1} \\ B_n(x+1) - B_n(x) &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

□

Da n beliebig aber fest gewählt ist, gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

□

Corollary 1.1.1.

$$B_{2m+1} = 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

Proof. Sei n gerade.

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$

Sei $x := -\frac{1}{2}$

$$B_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - B_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} \right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Wenn $n+1-k$ gerade ist, heben sich die Summanden auf. Da n gerade ist, ist $n+1-k$ gerade genau dann, wenn $1-k$ gerade ist, also wenn k ungerade ist.

□

Corollary 1.1.2.

$$\sum_{k=1}^N k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1}, n, N \in \mathbb{N}$$

Proof.

$$\sum_{k=1}^N k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^N (n+1) \cdot k^n = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^N B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(1) = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot 1^{n+1-k} = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - \binom{n+1}{n+1} \cdot B_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \cdot B_k = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

Laut Definition der Bernoulli Zahlen gilt:

$$B_{n+1}(N+1) - 1 \cdot B_{n+1} - 0 = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - B_{n+1} = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

□

2 Euler'sche Summenformel

Wir setzen die Bernoulli Polynome auf $[0, 1)$ periodisch fort auf \mathbb{R}

2.1 Definition

$$P_n(x) := B_n(x - [x])$$

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

Theorem 2.1. *Einfache Euler'sche Summenformel Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.*

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot (f(0) + f(n)) + R_1$$

wobei $R_1 := \int_0^n f'(x) \cdot P_1(x) dx$

Proof. Sei $k \in \mathbb{N}, x \in [k, k+1) \implies P_1'(x) = P_0(x) = 1$ Für $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x) dx &= \int_k^{k+1} f(x) P_1'(x) dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_k^{k+1-\epsilon} f(x) P_1'(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(f(x) \cdot P_1(x) \Big|_{x=k}^{k+1-\epsilon} - \int_k^{k+1-\epsilon} f'(x) P_1(x) dx \right) \\ \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(f(k+1-\epsilon) P_1(k+1-\epsilon) - f(k) P_1(k) - \int_k^{k+1-\epsilon} f'(x) P_1(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} f'(x) P_1(x) dx \\ \int_k^{k+1} f(x) dx &= \frac{1}{2} (f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} f'(x) P_1(x) dx \end{aligned}$$

Summieren wir die obige Gleichung für $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) + f(k)) - \int_0^n f'(x) P_1(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (f(0) + f(n)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_0^n f'(x) P_1(x) dx \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $\frac{1}{2}(f(0) + f(n))$ und stelle um. Dann folgt die Behauptung. \square

Theorem 2.2. *Allgemeine Euler'sche Summenformel Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ sei n -mal stetig differenzierbar, $m \geq 2$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(0) + f(n)) + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + R_m$$

mit $R_m := \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n f^{(m)}(x) P_m(x) dx$

Proof. Wegen Satz 1 reicht es zu zeigen $\int_0^n f'(x)P_1(x)dx = \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + R_m$

$$\begin{aligned} \int_0^n f'(x)P_1(x)dx &= \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + R_m \\ \int_0^n f'(x)P_1(x)dx &= \frac{1}{2!} f'(x)P_2(x) \Big|_{x=0}^n + \frac{1}{3!} f''(x)P_3(x) \Big|_{x=0}^n + \dots \\ &+ \frac{1}{(m)!} f^{(m-1)}(x)P_m(x) \Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{P_k(x)}{k!} f^{(k-1)}(x) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx \end{aligned}$$

□

3 Anwendungen der Euler'schen Summenformel

3.1 Faulhaber Formel

Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 1^1 + 2^1 + 3^1 + 5^1 + \dots + n^1 &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0n \\ 1^p + 2^p + 3^p + 5^p + \dots + n^p &=? \end{aligned}$$

Theorem 3.1. Für $n, p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} (-1)^k B_k \cdot n^{p+1-k}$$

Proof. Wir verwenden die Eulersche Summenformel. (Satz 2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^p &= \sum_{k=0}^n k^p - 0^p \\ &= \int_0^n x^p dx + \frac{1}{2}(0^p + n^p) + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + R_m \\ &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_{x=0}^n + \frac{1}{2}n^p + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx \\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_{x=0}^n + \frac{1}{2}n^m + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n m!P_m(x)dx \end{aligned}$$

□

3.2 Euler-Konstante

Für $n \in \mathbb{N}$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (n-te harmonische Zahl) Betrachte $x_n := H_n - \ln(n)$. Diese Folge konvergiert. $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \approx 0,577$

Theorem 3.2. x_n konvergiert.

Proof. Behauptung: x_n ist monoton fallend.

Proof.

$$\begin{aligned} & \Longleftrightarrow x_n \geq x_{n+1} \\ & \Longleftrightarrow x_n - x_{n+1} \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) - \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

□

Theorem 3.3. Es gelten folgende Gleichungen:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{P_1(x)}{x^2} dx \quad (1)$$

Für $m \geq 2$:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} - \int_1^\infty \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx \quad (2)$$

$$\gamma = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) - \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k \cdot n^k} - \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx \quad (3)$$

Proof. Verwende Satz 1 mit $f(x) := \frac{1}{x+1}$, $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \stackrel{(\text{Satz 1})}{=} \int_0^{n-1} f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n-1)) + \int_0^{n-1} f'(x) P_1(x) dx$$

$$\underbrace{\ln(x+1)}_{\left. \ln(x) \right|_{x=0}} = \ln(x) \Big|_{x=0}^{n-1} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \underbrace{\int_0^{n-1} \frac{1}{(x+1)^2} P_1(x) dx}_{\int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2} dx} = \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2} dx$$

Nach Grenzwertbildung $\lim_{n \rightarrow \infty}$ folgt die Aussage (1).

Verwende Satz 2 mit $f(x) := \frac{1}{x+1}$, $n \geq 2$

$$f'(x) = (-1) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}, f''(x) = (-1)^2 \cdot 2! \cdot \frac{1}{(x+1)^3}, \dots, f^{(k-1)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{1}{(x+1)^k}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\
&\stackrel{(\text{Satz 2})}{=} \int_0^{n-1} f(x) dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k (-1)^{k-1} \cdot (k-1)}{k! (x+1)^k} \Big|_{x=0}^{n-1} \\
&\quad + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^{n-1} P_m(x) \cdot (-1)^m \cdot m! \frac{1}{(x+1)^{m+1}} dx \\
\Rightarrow \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} - \int_1^\infty \frac{P_m(x)}{x^m} dx \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} + \left(- \int_1^n \frac{P_m(x)}{x^m} dx \right) + \left(- \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^m} dx \right) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1) \cdot B_k}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^k} - 1 \right) &= - \int_1^n \frac{P_m(x)}{x^m} dx
\end{aligned}$$

Um (3) zu beweisen, setzen wir folgende Darstellung in (2) ein:

Aus (*) folgt

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} + \left(- \int_1^n \frac{P_m(x)}{x^m} dx \right) + \left(- \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^m} dx \right) \\
\gamma &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1) \cdot B_k}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^k} - 1 \right) \right) + \left(- \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^m} dx \right)
\end{aligned}$$

□

Man kann zeigen, dass gilt:

$$|B_m(x)| \leq \frac{4m!}{(2\pi)^m} \forall m \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$$

Es gilt $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$. Einsetzen in (3) ergibt:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \underbrace{\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} - \ln(10) - \frac{1}{2 \cdot 10} + \frac{1}{12 \cdot 10^2}}_{=: R} - \underbrace{\int_{10}^\infty \frac{P_3(x)}{x^4} dx}_{=: R} \\
&= 0,577216... + R
\end{aligned}$$

$$\text{Es gilt: } R \leq \int_{10}^\infty \frac{|P_3(x)|}{x^4} dx \leq 10^{-1} \cdot \underbrace{\int_{10}^\infty \frac{1}{x^4} dx}_{=\frac{1}{3}10^{-3}} \leq \frac{1}{3}10^{-4} \leq 4 \cdot 10^{-5}$$

3.3 Stirling'sche Formel

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen wobei $y_n, x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißen $(x_n), (y_n)$ asymptotisch gleich für $h \rightarrow \infty$ genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$$

3.3.1 Beispiel

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \ln(n) =: y_n$$

Theorem 3.4.

$$H_n - y_n, n \rightarrow \infty$$

Proof. Wissen: $H_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$

$$x_n := n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Theorem 3.5. *Stirling'sche Formel*

Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty$$

$$x_n := n^2 + n$$

$$y_n := n^2$$

Theorem 3.6. *Verwenden wir Satz 2 mit $m = 3$*

$$f(x) := \ln(x+1), n \geq 2$$

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \sum_{k=1}^n \ln(k) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\ &\stackrel{(\text{Satz 2})}{=} \int_0^{n-1} f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n-1)) + \frac{B_2}{2} f'(x) \Big|_{x=0}^{n-1} + \frac{1}{3!} \int_0^{n-1} f^{(3)}(x) \cdot P_3(x) dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x \Big|_1^n + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x+1} \Big|_0^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \int_1^n \frac{1}{x^3} P_3(x) dx \\ &= n \ln(n) - n + 1 + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{3} \int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3} dx \end{aligned}$$

$$\implies \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{3} \int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3} dx$$

Wir sehen an der obigen Formel, dass s_n konvergiert, das heißt $\exists s \in \mathbb{R}$, so dass

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

$$\begin{aligned} \implies p &= e^s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{s_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln(n!)} \cdot e^n}{e^{n \ln(n)} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln(n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \end{aligned}$$

Proof.

□