Sommerschule

Nikolas Kilian Projektleiter: Eren Ucar

June 4, 2019

Contents

1 Brenoulli Zahlen und Polynome

1.1 Bernoulli Zahlen

1.1.1 Definition

Die Bernoulli Zahlen $B_n, n \in \mathbb{N}_0$, bilden eine rationale Zahlenfolge. Sie sind rekursiv wie folgt definiert.

$$B_0 := 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot B_k = 0, n \in \mathbb{N}$$

1.2 Bernoulli Polynome

1.2.1 Definition

Die Bernoulli Polynome $B_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$, sind wie folt definiert:

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}, x \in \mathbb{R}$$

$$n = 0 : B_0(x) = 1$$

$$n = 1 : B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$n = 2 : B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

1.2.2 Eigenschaften

E1

$$B_n(0) = B_n(1), \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1$$

Beweis.

$$B_n(0) = B_n(1), \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 0^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 1^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot 1$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k$$

Gilt laut Definition. □

E2

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Beweis.

$$\frac{d}{dx} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot \frac{d}{dx} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

Da der Terrm für $k = n$ konstant ist, ist dessen Ableitung 0. Es kann demnach aus der Summenformel ausgelassen werden.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot (n-k) \cdot x^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$$

Der nächste Schritt wird dem unüberzeugtem Leser als Übung überlassen. □

$$\implies \int B_{n-1}(x) dx = \frac{1}{n} B_n(x)$$

E3

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Beweis.

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$\int_0^1 B_n(x)dx \overset{\text{(E2)}}{=} \frac{1}{n+1} B_{n+1}(x)\Big|_0^1 \overset{\text{(E1)}}{=} 0$$

□

1.3 Alternative Definition

Die Bernoulli Polynome kann man über folgender Funktionalgleichungen charakterisieren.

Theorem 1.1 (Theorem). *Für $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$F_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Proof. Sei $n = 0$. Es gilt

$$F_0(x) = B_0(x+1) - B_0(x) = 0x^{0-1}$$

Proof.

$$F_0(x) = B_0(x+1) - B_0(x) = 0x^{0-1}$$

$$F_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot B_k \cdot x^{0-k} - \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot B_k \cdot x^{0-k} = 0x^{0-1}$$

$$F_0(x) = B_0 \cdot x^{-k} - B_0 \cdot x^{-k} = 0x^{0-1}$$

$$F_0(x) = 1 - 1 = 0$$

□

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ beliebig aber fest gewählt.

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \implies B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$

Proof.

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$

$$\frac{d}{dx} B_{n+1}(x+1) - \frac{d}{dx} B_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}(n+1) \cdot x^n$$

$$(n+1) \cdot B_{n+1-1}(x+1) - (n+1) \cdot B_{n+1-1}(x) = (n+1) \cdot nx^{n-1}$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

□

Da n beliebig aber fest gewählt ist, gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. □

Corollary 1.1.1.

$$B_{2m+1} = 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

Proof. Sei n gerade.

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1) \cdot x^n$$

Sei $x := -\frac{1}{2}$

$$B_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - B_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1-k}\right) = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Wenn $n+1-k$ gerade ist, heben sich die Summanden auf. Da n gerade ist, ist $n+1-k$ gerade genau dann, wenn $1-k$ gerade ist, also wenn k ungerade ist.

□

Corollary 1.1.2.

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1}, n, N \in \mathbb{N}$$

Proof.

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} (n+1) \cdot k^n = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(1) = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot 1^{n+1-k} = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - \binom{n+1}{n+1} \cdot B_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot B_k = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

Laut Definition der Bernoulli Zahlen gilt:

$$B_{n+1}(N+1) - 1 \cdot B_{n+1} - 0 = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

$$B_{n+1}(N+1) - B_{n+1} = B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}$$

□

2 Euler'sche Summenformel

Wir setzen die Bernoulli Polynome auf $[0,1)$ periodisch fort auf $\mathbb{R}$

2.1 Definition

$$P_n(x) := B_n(x - [x])$$
$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

Theorem 2.1. *Einfache Euler'sche Summenformel Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $f : [0,n] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2} \cdot (f(0) + f(n)) + R_1$$

wobei $R_1 := \int_0^n f'(x) \cdot P_1(x)dx$

Proof. Sei $k \in \mathbb{N}, x \in [k, k+1) \implies P_1'(x) = P_0(x) = 1$ Für $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$:

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_k^{k+1} f(x)P_1'(x)dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_k^{k+1-\epsilon} F(x)P_1'(x)dx$$
$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(f(x) \cdot P_1(x)|_{x=k}^{k+1-\epsilon} - \int_k^{k+1-\epsilon} f'(x)P_1(x)dx \right)$$
$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(f(k+1-\epsilon)P_1(k+1-\epsilon) - f(k)P_1(k) - \int_k^{k+1-\epsilon} f'(x)P_1(x)dx \right)$$
$$= \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} f'(x)P_1(x)dx$$

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} f'(x)P_1(x)dx$$

Summieren wir die obige Gleichung für $k = 0, 1, ..., n-1$

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) + f(k)) - \int_0^n f'(x)P_1(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_0^n f'(x)P_1(x)dx$$

Addiere auf beiden Seiten $\frac{1}{2}(f(0) + f(n))$ und stelle um. Dann folgt die Behauptung. □

Theorem 2.2. *Allgemeine Euler'sche Summenformel Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [0,n] \to \mathbb{R}$ sei n-mal stetig differenzierbar, $m \geq 2$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=0}^{n} + R_m$$

mit $R_m := \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx$

Proof. Wegen Satz 1 reicht es zu zeigen $\int_0^n f'(x)P_1(x)dx = \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^n +$ R_m

$$\int_0^n f'(x)P_1(x)dx = \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^n + R_m$$

$$\begin{aligned}
\int_0^n f'(x)P_1(x)dx = \frac{1}{2!}f'(x)P_2(x)\Big|_{x=0}^n + \frac{1}{3!}f''(x)P_3(x)\Big|_{x=0}^n + ...\\
+ \frac{1}{(m)!}f^{(m-1)}(x)P_m(x)\Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx\\
= \sum_{k=2}^m \frac{P_k(x)}{k!} f^{(k-1)}(x) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx
\end{aligned}$$

□

3 Anwendungen der Euler'schen Summenformel

3.1 Faulhaber Formel

Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
1^1 + 2^1 + 3^1 + 5^1 + ... + n^1 &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + ... + n^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^3 + ... + n^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0n\\
1^p + 2^p + 3^p + 5^p + ... + n^p &= ?
\end{aligned}$$

Theorem 3.1. *Für $n, p \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k}(-1)^k B_k \cdot n^{p+1-k}$$

Proof. Wir verwenden die Eulersche Summenformel. (Satz 2)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^p &= \sum_{k=0}^n k^p - 0^p\\
&= \int_0^n x^p dx + \frac{1}{2}(0^p + n^p) + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^n + R_m\\
&= \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{x=0}^n + \frac{1}{2}n^p + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n f^{(m)}(x)P_m(x)dx\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_{x=0}^n + \frac{1}{2}n^m + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_{x=0}^n + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n m! P_m(x)dx
\end{aligned}$$

□

3.2 Euler-Konstante

Für $n \in \mathbb{N}, H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (n-te harmonische Zahl) Betrachte $x_n := H_n - ln(n)$. Diese Folge konvergiert. $\gamma := \lim_{n\to\infty} x_n \approx 0,577$

Theorem 3.2. *x_n konvergiert.*

Proof. Behauptung: x_n ist monoton fallend.

Proof.

$$\begin{aligned} & x_n \geq x_{n+1} \\ \iff \quad & x_n - x_{n+1} \geq 0 \\ \iff \quad & \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)\right) - \left(\sum\right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

□

Theorem 3.3. *Es gelten folgende Gleichungen:*

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{P_1(x)}{x^2} dx \tag{1}$$

Für $m \geq 2$:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k} - \int_1^\infty \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx \tag{2}$$

$$\gamma = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - ln(n) - \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k \cdot n^k} - \int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^{m+1}} dx \tag{3}$$

Proof. Verwende Satz 1 mit $f(x) := \frac{1}{x+1}, n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \overset{\text{(Satz 1)}}{=} \int_0^{n-1} f(x)dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n-1)) + \int_0^{n-1} f'(x)P_1(x)dx$$

$$\underbrace{ln(x+1)} = ln(x)\Big|_{x=0}^{n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \underbrace{\int_0^{n-1} \frac{1}{(x+1)^2} P_1(x)dx} = \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2} dx$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1 1^n \frac{P_1(x)}{x^2} dx$$

Nach Grenzwertbildung $\lim_{n\to\infty}$ folgt die Aussage (1).
Verwende Satz 2 mit $f(x) := \frac{1}{x+1}, n \geq 2$

$$f'(x) = (-1) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}, f''(x) = (-1)^2 \cdot 2! \frac{1}{(x+1)^3}, ..., f^{(k-1)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \frac{1}{(x+1)^k}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\\ &\overset{\text{(Satz 2)}}{=} \int_0^{n-1} f(x)dx + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k(-1)^{k-1}\cdot(k-1)}{k!(x+1)^k}\Bigg|_{x=0}^{n-1}\\ &+ \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^{n-1} P_m(x)\cdot(-1)^m\cdot m!\frac{1}{(x+1)^{m+1}}dx\\ \Longrightarrow \gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - ln(n)\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m}\frac{B-k}{k} - \int_1^\infty \frac{P_m(x)}{x^m}dx\\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k} + \left(-\int_1^n \frac{P_m(x)}{x^m}dx\right) + \left(-\int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^m}dx\right)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}ln(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)\cdot B_k}{k}\cdot\left(\frac{1}{n^k}-1\right) = -\int_1^n \frac{P_m(x)}{x^m}dx$$

Um (3) zu beweisen, setzen wir folgende Darstellung in (2) ein:
Aus (*) folgt

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k} + \left(-\int_1^n \frac{P_m(x)}{x^m}dx\right) + \left(-\int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^m}dx\right)$$
$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k} + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}ln(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)\cdot B_k}{k}\cdot\left(\frac{1}{n^k}-1\right)\right) + \left(-\int_n^\infty \frac{P_m(x)}{x^m}dx\right)$$

$\square$

Man kann zeigen, dass gilt:

$$|B_m(x)| \leq \frac{4m!}{(2\pi)^m}\forall m\in\mathbb{N}, x\in[0,1$$

Es gilt $B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0$. Einsetzen in (3) ergibt:

$$\gamma = \underbrace{\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k} - ln(10) - \frac{1}{2\cdot 10} + \frac{1}{12\cdot 10^2}}\, - \underbrace{\int_{10}^\infty \frac{P_3(x)}{x^4}dx}_{=:R}$$
$$= 0,577216... + R$$

Es gilt: $R \leq \int_{10}^\infty \frac{|P_3(x)|}{x^4}dx \leq 10^{-1}\cdot \underbrace{\int_{10}^\infty \frac{1}{x^4}dx}_{=\frac{1}{3}10^{-3}} \leq \frac{1}{3}10^{-4} \leq 4\cdot 10^{-5}$

3.3 Stirling'sche Formel

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen wobei $y_n, x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißen $(x_n), (y_n)$ asymptotisch gleich für $h \to \infty$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$$

3.3.1 Beispiel

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, ln(n) =: y_n$$

Theorem 3.4.

$$H_n \sim y_n, n \to \infty$$

Proof. Wissen: $H_n - y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$

$$\Longrightarrow \exists_{C>0,s_d|H_n-y_n|\leq C} \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

□

$$x_n := n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

Theorem 3.5. *Stirling'sche Formel*
Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty$$

$$x_n := n^2 + n$$
$$y_n := n^2$$

Proof. Verwenden wir Satz 2 mit $m = 3$

$$f(x) := ln(x+1), n \geq 2$$

$$\begin{aligned}
ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} ln(k) & = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \\
&\overset{\text{(Satz 2)}}{=} \int_0^{n-1} f(x)dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n-1)) + \frac{B_2}{2} f'(x)\Big|_{x=0}^{n-1} + \frac{1}{3!}\int_0^{n-1} f^{(3)}(x) \cdot P_3(x)dx \\
&= x \cdot ln(x) - x|_1^n + \frac{1}{2} ln(n) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x+1}\Big|_0^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \int_1^n \frac{1}{x^3} P_3(x)dx \\
&= n\ln(n) - n + 1 + \frac{1}{2} ln(n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{3}\int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3}dx
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow ln(n!) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2} ln(n) = \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{3}\int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3}dx$$

Wir sehen an der obigen Formel, dass s_n konvergiert, das heißt $\exists s \in \mathbb{R}$, so dass

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$\begin{aligned}
\implies p &= e^s \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{s_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{ln(n!)} \cdot e^n}{e^{n\ln(n)} \cdot e^{\frac{1}{2}ln(n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=0}^n e}{\prod_{k=0}^n k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^n \frac{e}{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} e \prod_{k=0}^n \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0,\text{ für} k\to\infty} \\
&= \lim_{n\to\infty} e \prod_{k=0}^n \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\frac{e^n}{n!} = \underbrace{\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}}_{<e^n} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}}_{\overset{n\ \to\ \infty}{\longrightarrow} 1}$$

□

$$
\begin{aligned}
s_n &:= ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) ln(n) + n \\
&= \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{3} \int_1^n \frac{P_3(x)}{x^3} dx \\
s &:= \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{11}{12} + \frac{1}{3} \int_1^\infty \frac{P_3(x)}{x^3} dx \\
&= ln(\sqrt{2\pi})
\end{aligned}
$$

$$
s_n = s + R_n, R_n := \frac{1}{12n} - \frac{1}{12n} - \frac{1}{3} \int_n^\infty \frac{P_3(x)}{x^3} dx
$$

Mit anderen Worten gilt

$$
ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) ln(n) + n = ln(\sqrt{2\pi}) + R_n
$$

$$
\Longrightarrow ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) ln(n) - n + ln(\sqrt{2\pi}) + R_n
$$

Diese Formel kann man verwenden, um $n!$ zu approximieren.

$$
\begin{gathered}
log(x) = M \cdot ln(x), M = log(e) \\
\Longrightarrow ln(x) = \frac{1}{M} log(x)
\end{gathered}
$$