Aufgabe 3: Telepaartie

Team-ID: 00587

Team-Name: Doge.NET

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Johannes von Stoephasius & Nikolas Kilian

20. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsidee

1.1 Definitionen

Zustand Ein Zustand ist definiert als Menge von Behältern, wobei jedem Behälter eine nichtnegative ganze Zahl zugeordnet werden kann, die der Anzahl an Bibern des Gefäßes entspricht.

Weiter können die Behälter untereinander getauscht werden, da die Konstellation die selbe bleibt. Deshalb werden die Biber-Anzahlen eines Zustands immer nur im sortierten Zustand betrachtet, wobei hier aufsteigende Sortierung verwendet wird.

Denotiere man die Menge aller Zustände mit Gesamtbiberzahl n als $\mathbb{S}_n$.

Endzustand Ein Endzustand ist jeder Zustand, der genau einen leeren Eimer enthält.

Sind weniger, also keine, leere Eimer enthalten, so ist der Zustand kein Endstand laut der Aufgabenstellung.

Sind mehr enthalten, so ist der Zustand nur durch Operationen auf einen anderen Endzustand zu erhalten, und somit nicht relevant. Zur Errmittlung dieser Endzustände siehe Abschnitt 1.4.

Denotiere man die Menge aller Endzustände mit Gesamtbiberzahl n als $\mathbb{E}_n$. Dabei gilt: $\mathbb{E}_n \subseteq \mathbb{S}_n$

Ursprungszustand Ein Ursprungszustand von einem Zustand x, ist jeder Zustand der mit einem einzelnen Telepaartieschritt zum Zustand x wird.

Die Menge an Ursprungszuständen von x kann geschrieben werden als $origin(x)$, mit $origin : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$.

Generation Eine Generation ist eine Menge an unterschiedlichen Zuständen.

1.2 Kernidee

Die Grundidee der Lösung basiert auf der Idee, nicht alle nicht-Endzustände zu ermitteln und diese optimal zu lösen, sondern invers alle Endzustände zu ermitteln und diese invers auf alle ihre Ursprungszustände zurückzuführen, diese Ursprungszustände wiederrum auf ihre eigenen Ursprungszustände zurückzuführen usw., wobei konstant überprüft wird, ob es nicht "Abkürzungen" im Sinne bereits gefundener Zustände gibt.

1.3 Finden aller Ursprungszustände

Zum finden der Ursprungszustände $origin(s)$ eines Zustands $s \in \mathbb{S}_n$ wird jede Biber-Anzahl mit jeder anderen Biber-Anzahl verglichen. Ist dabei bei einem Vergleich zweier Anzahlen die erste Anzahl größer als 0 und durch 2 teilbar, dann ist es möglich, dass auf diese beiden Behälter eine Telepaartie angewendet wurde. Um diese umzukehren wird die Anzahl im ersten Behälter addiert und die Differenz zum 2. Behälter addiert. Diese Überprüfung wird für alle Kombinationen zweier Biber-Anzahlen durchgeführt, bis am Ende alle Ursprungszustände gefunden wurden.

1.4 Generieren der Endzustände

TODO

1.5 Hauptalgorithmus

Sei die Generation Gen_{i+1} definiert als alle unterschiedliche Ursprungszustände aller Elemente aus Gen_i, die in keiner vorherigen Generation $Gen_k, k < i$ enthalten sind.

Sei dabei Gen_0 als Spezialfall gleich der Menge aller Endzustände für Gesamtbiberzahl n.

$$Gen_0 := \mathbb{E}_n$$
$$Gen_{i+1} := \{s \mid (\exists_{t \in Gen_i} : s \in origin(t)) \land (\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 \leq i} : s \notin Gen_{i_0})\}$$

Der Algoritmus funktioniert dann, indem er nach und nach alle nicht-leeren Generationen ermittelt. Sei Gen_m die letzte nicht-leere Generation, so ist $LLL(n) = m$.

1.6 Beweis

Es existiert eine letzte nicht-leere Generation Gen_m. Weiterdem gilt $LLL(n) = m$.

1.6.1 Hilfssatz 1: Erreichen aller lösbaren Zustände

Wähle beliebig aber fest einen Zustand $s \in \mathbb{S}_n$. Ist der Zustand lösbar, also durch wiederholte Telepaartie zu einem Endzustand überführbar, so gibt es eine Generation Gen_i aus $(Gen_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $s \in Gen_i$.

Trivialer Fall Gilt $s \in \mathbb{E}_n$, so ist s lösbar mit 0 Telepaartieschritten. Da $Gen_0 = \mathbb{E}_n$ gilt, gilt $s \in Gen_0$.

Beweis durch Widerspruch Angenommen $s \notin Gen_i$. Für alle $i = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} s \notin Gen_i &\iff \neg\left(\left(\exists_{t \in Gen_{i-1}} : s \in origin(t)\right) \land (\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \notin Gen_{i_0})\right) \\ &\iff \neg\left(\exists_{t \in Gen_{i-1}} : s \in origin(t)\right) \lor \neg(\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \notin Gen_{i_0}) \\ &\iff \left(\forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin origin(t)\right) \lor (\exists_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \in Gen_{i_0}) \end{aligned}$$

Angenommen es gilt $\exists_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \in Gen_{i_0}$. Wenn dies gilt, existiert ein i_0 für welches gilt: $s \in Gen_{i_0}$. Somit existiert eine Generation aus $(Gen_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $s \in Gen_{i_0}$.

Smot können wir das Problem durch Redefinition $i := i_0$ also reformulieren als:

$$s \notin Gen_i \iff \forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin origin(t)$$

Dies ist nun zu zeigen:

$$s \notin Gen_i \iff \forall_{t \in Gen_i} : s \notin origin(t)$$

Bemerkung: $origin(origin(t)) = \{s \mid \exists_{u \in origin(t)} : s \in origin(u)\}$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin origin(origin(t)) \\
&\iff \forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin (origin \circ origin)(t) \\
&\iff \forall_{t \in Gen_{i-i}} : s \notin (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t) \\
&\iff \forall_{t \in \mathbb{E}_n} : s \notin (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t)
\end{aligned}$$

Damit dies gilt, müsste s für keine Anzahl i an Telepaartieschritten zu einem Endzustand kommen. Somit müsste s also unlösbar sein. □

1.6.2 Korollar aus Hilfssatz 1: Maximale Mindestschrittzahl

Wenn $s \in Gen_i$ gilt, dann ist s in i oder weniger Telepaartieschritten zu einem Endzustand überführbar.

Beweis Aus Abschnitt 1.6.1 kann man ablesen, dass damit ein Zustand $s \in \mathbb{S}_n$ lösbar ist, also ein Gen_i existiert mit $s \in Gen_i$, gelten muss:

$$\begin{aligned}
&\forall_{t \in Gen_i} : s \notin origin(t) \iff \forall_{t \in \mathbb{E}_n} : s \notin (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t) \\
\iff \quad &\forall_{t \in Gen_i} : s \in origin(t) \iff \exists_{t \in \mathbb{E}_n} : s \in (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t)
\end{aligned}$$

Da laut Definition von *origin* die i-fache Selbstverkettung von *origin* alle Zustände sind, von denen aus der Parameter mit weniger als oder genau i Telepaartieschritten erreicht werden kann ist, ist der Endzustand $t \in \mathbb{E}_n$ von s in weniger als oder genau i Schritten erreichbar. □

1.6.3 Hilfssatz 2: Eindeutigkeit

Für jeden lösbaren Zustand $s \in \mathbb{S}_n$ gilt, dass *genau ein* i existiert, für dass die Generation Gen_i mit $s \in Gen_i$ existiert.

Beweis Ist der Zustand s lösbar, so existiert laut Abschnitt 1.6.1 ein i mit $s \in Gen_i$. Aufgrund der Kondition $\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \notin Gen_{i_0}$ in der Definition von Gen_i gilt, dass keine Generation $Gen_j, j < i$ aus $(Gen_i)_{i \in \mathbb{N}}$ existiert, die s enthält. Andersherum gibt es auch keine späteren Generationen $Gen_k, k > i$ mit $s \in Gen_k$, da für diese dann ein $i_0 = i$ mit $s \in Gen_{i_0}$ existieren würde, was gegen die Definition von Gen_i verstößt. □

1.6.4 Hilfssatz 3: Minimalität der Schritte

Für jeden lösbaren Zustand $s \in \mathbb{S}_n$ mit $s \in Gen_i$ gilt, dass $i = LLL(s)$.

Beweis Der Fall $LLL(s) > i$ wird vom Korollar Abschnitt 1.6.2 wiederlegt.

Somit wäre nur noch zu zeigen das $LLL(s) < i$ nicht gilt.

Damit $LLL(s) < i$ gilt, müsste es eine Schrittfolge geben, um s in einen Endzustand überzuführen, mit $k < i$ Schritten.

Die Generationen Gen_j mit $0 \leq j < i$ enthalten zusammen alle Elemente von allen j-fachen Selbstverkettungen von $origin$, also jeden Zustand der in genau $i - 1$ oder weniger Schritten zu einem Endzustand überführbar ist. Mit der Eindeutigkeit der Generationen Abschnitt 1.6.3 verbunden, ist also $LLL(s) < i$ und $s \in Gen_j$ äquivalent.

Ist nun $s \in Gen_i$, gilt laut Abschnitt 1.6.3, dass s in keiner anderen Generation aus $(Gen_i)_{i \in \mathbb{N}}$, also auch keiner Generation Gen_j enthalten ist. Da $LLL(s) < i \iff s \in Gen_j$ gilt, und da $s \notin Gen_j$ gilt, gilt auch $\neg(LLL(s) < i) \iff LLL(s) \geq i$.

Da $LLL(s) \geq i$ gilt, gilt $LLL(s) < i$ nicht. □

1.6.5 Hilfssatz 4: Garantie der Leerheit

Die Serie $(Gen_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist bis inklusive zu einem Index m in keinem Element leer. Nach diesem Index ist sie in jedem Element leer.

Beweis Angenommen $Gen_i = .$

$$\begin{aligned} Gen_{i+1} &:= \{s \mid (\exists_{t \in Gen_i} : s \in origin(t)) \wedge (\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 \leq i} : s \notin Gen_{i_0})\} \\ &= \{s \mid (\underbrace{\exists_{t \in \{\}} : s \in origin(t)}_{\substack{\text{In der leeren Menge} \\ \text{existieren keine Elemente.} \\ \text{Erst Recht keine, die} \\ \text{die Kondition erfüllen}}}) \wedge (\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 \leq i} : s \notin Gen_{i_0})\} \\ &= \{\} \end{aligned}$$

Somit gilt $Gen_i = \implies Gen_{i+1} = .$

Wäre vor einem Index m eine Generation leer, müssten somit auch folgende Generationen leer sein. Somit wäre m redefinierbar als der Index wo das erste leere Element vorkommt.

Da nur eine endliche Menge an Zuständen $s \in \mathbb{S}_n$ existiert, und da alle lösbaren Zustände, welche Teilmenge aller Zustände sind, laut Abschnitt 1.6.3 eindeutig genau einer Generation angehören, ist auch die Menge an nicht-leeren Generationen endlich.

Da endlich viele nicht-leeren Generationen enthalten sein müssen, und da die Serie nicht zwischendrin leere Generationen enthalten kann, muss sie alle nicht-leeren Generationen bis zu einem Index m haben, und alle leeren ab diesem. □

1.6.6 Beweis

Laut Abschnitt 1.6.5 existiert eine letzte, nicht-leere Generation Gen_m. Da die letzte nicht-leere Menge existiert, ist bekannt, dass alle nicht-leeren Generation einen Index kleiner oder gleich m haben. Laut Abschnitt 1.6.4 gilt für alle $s \in Gen_i$: $LLL(s) = i$. Da alle Generation mit mehr als null Zuständen Gen_i einen Index $i \leq m$ haben, ist die maximale LLL der maximale Index m.

Da die maximale LLL gleich dem Index m ist, ist $L(n) = m$.

2 Umsetzung

3 Beispiele

4 Quellcode