1 Lösungsidee

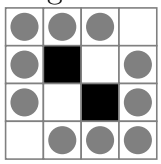
1.1 Kernidee

Rominos mitt n Blöcken können gefunden werden, in dem zu Rominos mit (n-1) Blöcken ein Block angefügt wird. Hierbei muss beachtet werden das der Rominostein zusammenhängend bleiben muss, und dass mindestens eine Diagonale bleiben muss.

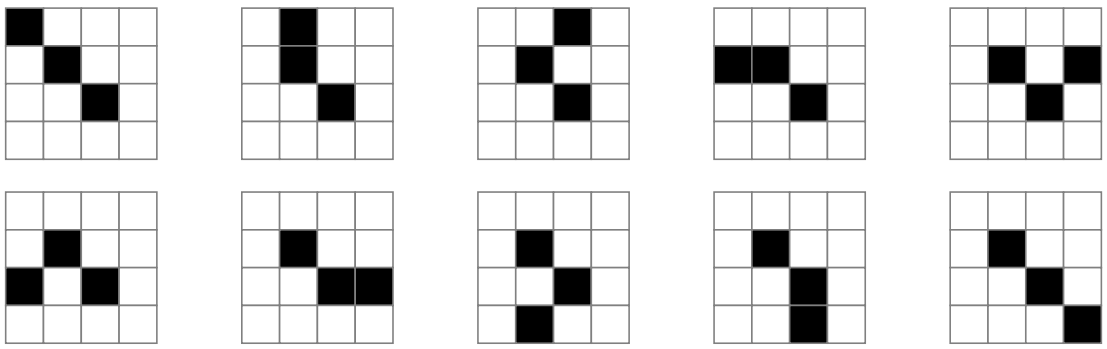
Um alle möglichen Rominos mit n Blöcken zu finden, muss man also alle Rominos mit (n-1) Blöcken finden, und für diese alle Rominos die durch hinzufügen eines weiteren Blocks enstehen können ermitteln. Dabei wird es Duplikate geben. Eliminiert man diese hat man alle möglichen n-Rominos eindeutig gefunden.

1.1.1 Beispiel

Nehme man beispielsweise das 2er-Romino, kann man zum finden aller 3 (= 2 + 1) - Rominos wie folgt Blöcke anfügen:



Somit ergeben sich folgende 3-Rominos:



Da Rominos mindestens zwei Steine haben müssen um eine Diagonale zu besitzen, ist der Rominostein mit den wenigsten Blöcken eine 2er Diagonale.

Kleinster Rominostein

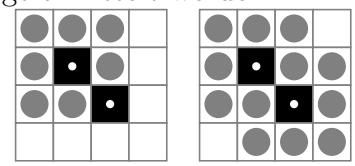
Um alle n-Rominos für ein beliebiges n zu finden, würde man den obigen Algorithmus verwenden um aus dem 2er-Romino alle 3-Rominos zu folgern, dann aus diesen alle 4-Rominos etc. bis man alle n-Rominos errechnet hat.

1.2 Hinzufügen von Blöcken

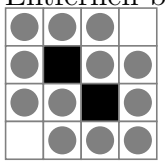
Um Blöcke hinzuzufügen, werden zuerst die Stellen ermittelt, wo Blöcke angefügt werden können, sodass das Romino zusammenhängend bleibt. Hierfür werden die Nachbarn jedes Blocks des Rominos ermittelt, daraufhin werden Duplikate und bereits belegte Blöcke eliminiert.

1.2.1 Beispiel

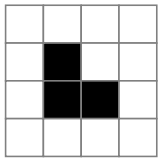
Nehme man beispielsweise wieder das 2er-Romino, würden die Nachbarn aller Blöcke wie folgt ermittelt werden:



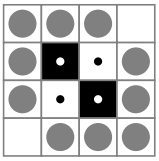
Entfernen bereits existierender Blöcke



Es lässt sich hier erkennen, das die Existenz einer echten Diagonale nicht zwingend aufrecht erhalten wird;



Um dafür zu sorgen, dass diese echte Diagonale immer existiert, wird eine spezifische Diagonale immer beschützt. Bei den Möglichen Block-Additionen beim 2er-Romino beispielsweise würden hierfür die für die Diagonale relevanten Blöcke aus den Block-Additionsmöglichkeiten entfernt:



Diese 4 beschützten Blöcke werden auch bei Spiegelungen, Verschiebungen und Rotationen mitverfolgt, sodass diese eine Diagonale immer besteht.

1.3 Eliminierung von Duplikaten

Zur Eliminierung von Duplikaten werden die Rominos zuerst eindeutig orientiert, um Vergleiche zwischen gleichen, aber transformierten Rominos zu erleichtern.

1.3.1 Verschiebung

Die Verschiebung wird eliminiert durch Verschiebung des Rominos in die linke obere Ecke des Gitters; also wird der Block mit der geringsten x-Koordinate auf x=0 verschoben, und der Block mit der geringsten y-Koordinate auf y=0.

1.3.2 Rotation und Spiegelung

Um Rotation und Spiegelung eines Rominos zu eliminieren, werden zuerst alle seine Permutationen (also alle Kombinationen von Rotation und Spiegelung) ermittelt, und denen wird ein eindeutiger Wert zugewiesen. Daraufhin wird das Romino mit dem höchsten dieser eindeutigen Werte ausgewählt. Hierbei ist es eigentlich egal, ob der niedrigste oder höchste Wert genommen wird, solange das Ergebnis eindeutig ist.

Die Bestimmung dieses eindeutigen Werts haben wir einen trivialen Algorithmus verwendet wie folgt:

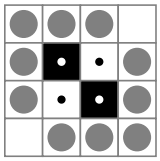
1. Nehme einen Block b aus der Permutation des Rominos
2. Seien die Koordinaten (x, y) die Koordinaten des Blocks b, wobei die minimale x-Koordinate und die minimale y-Koordinate aus allen Blöcken der Permutation 0 ist.
3. Man weise dem Block b den Wert $2^{(y*<\text{Anzahl an Blöcken}>)+x}$ zu
4. Addiere die Werte aller Blöcke der Permutation, sei dies der Wert der Permutation

Dabei ist zwar noch viel Raum für Optimierung, aber dieser Algorithmus ist ausreichend und O(n).

1.3.3 Endgültige Duplikat-Eliminierung

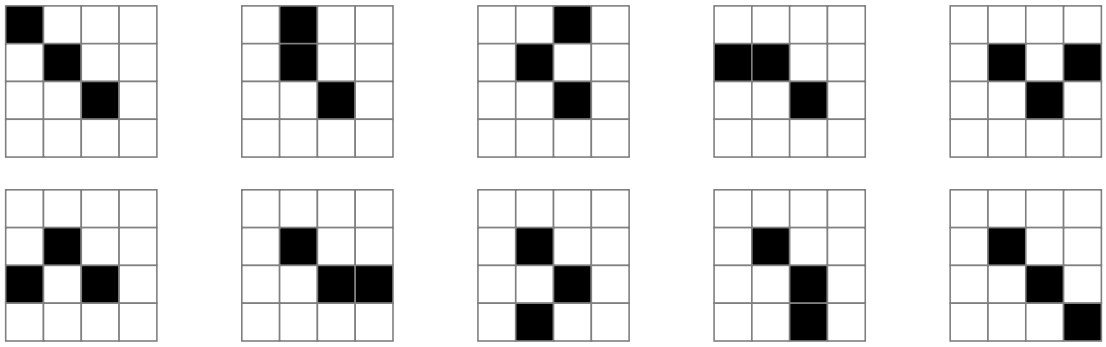
Zum endgültigen eliminieren der Duplikate werden zuerst alle Rominos wie oben beschrieben orientiert, dann werden die eindeutigen Werte dieser verglichen, um schnell Gleichheit zu ermitteln. Durch Verwendung dieser Vergleichsmethode lassen sich schnell Duplikate entfernen.

1.3.4 Beispiel

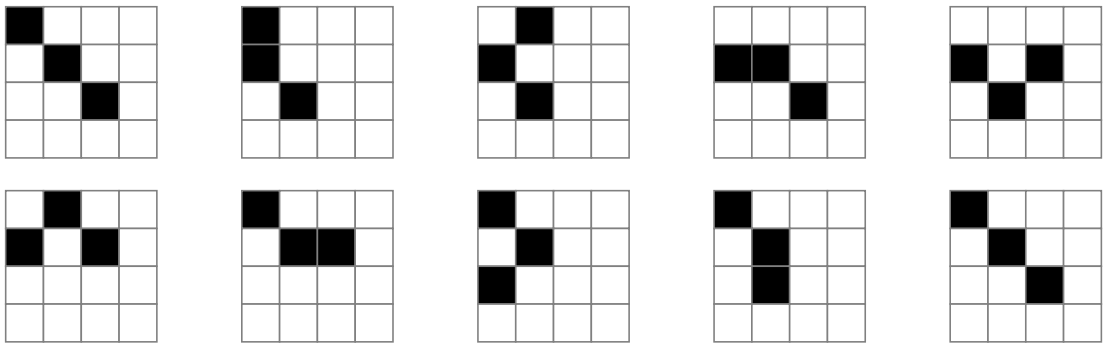


Ausgangsromino

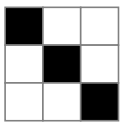
Nächste Rominos



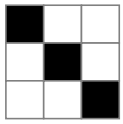
Verschiebung eliminieren



Rotation und Spiegelung eliminieren Ausgehend von dem Romino;

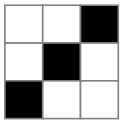


werden folgende Permutationen festgestellt:



Permutation 1

$Wert_1 = 2^0 + 2^4 + 2^8 = 273$

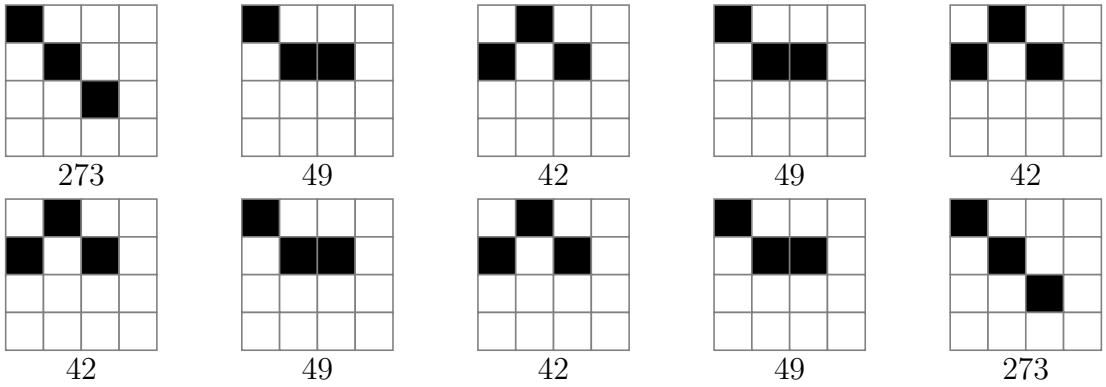


Permutation 2

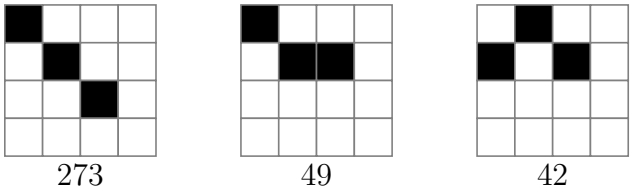
$Wert_2 = 2^2 + 2^4 + 2^6 = 84$

Hierbei ist $Wert_2 = 84 < 273 = Wert_1$. Da Permutation 1 mit $Wert_1$ den höchsten Wert hat, wird Permutation 1 als die eindeutige Rotierung festgelegt.

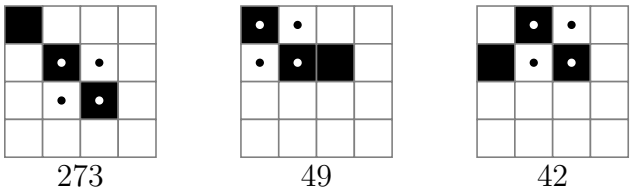
Analog auf alle Rominos angewendet ergibt sich:



Nun lassen sich trivialerweise die Duplikate eliminieren;



Über den gesamten Prozess hinweg wird auch die geschützte Diagonale mitverfolgt, bei den 3er-Rominos ist sie wie folgt plaziert:



2 Umsetzung

Zur Umsetzung haben wir den obigen Algorithmus in C# 8.0 mit .NET Core 3.0 implementiert.

Die Rominos werden in Form eines readonly structs *Romino* gespeichert. Das struct beinhaltet

1. *Vector2Int[] Blocks* - Das Array mit allen Blöcken des Rominos.
2. *List<Vector2Int> PossibleExtensions* - Die Liste mit allen Block-Additionsmöglichkeiten. Hierbei ist zu bemerken, dass die Größe der Liste konstant bleibt; es wird hier eine Liste statt einem Array verwendet, da bei der Erstellung die Größe unbekannt ist, und die Liste noch in ein Array zu konvertieren unnötig Rechenzeit kostet.

3. *Vector2Int DiagonalRoot* - Die linke obere Ecke der geschützten Diagonale.

4. *Vector2Int Max* - Die rechte untere Ecke des Rominos. Verwendet für korrigieren der Verschiebung ohne über alle Blöcke zu iterieren.

5. *BitBuffer512 _uniqueCode* - Der eindeutige Wert, errechnet wie in 1.3.2.

Die Hauptmethode ist die statische Methode *IEnumerable<(int Size, List<Romino> Rominos)> Romino.GetRominosUntilSize(int size)* welche für eine gegebene Größe alle Rominos aller Größen, bis zu dieser Größe ausgibt. Diese ruft intern parallelisiert für alle Rominos aus einer Generation die Methode *IEnumerable<Romino> Romino.AddOneNotUnique()* auf. Diese Methode errechnet nach dem Verfahren aus 1.2 die Rominos der nächsten Generation. Danach werden nach dem Verfahren aus 1.3 die Duplikate entfernt.

Die eindeutigen Werte aus 1.3.2 werden hierbei berechnet, ohne dass der Romino modifiziert wird, alle Modifikationen die an dem Romino gemacht werden müssten, um den Wert einer Permutation zu bestimmen, werden beim orientieren direkt in der Ausrechnung angewendet, ohne das Romino zu modifizieren. Erst wenn die eindeutige Rotation nach 1.3 gefunden wurde, wird das Romino so modifiziert, dass es als diese Permutation dargestellt wird.

3 Quellcode

readonly struct Vector2Int ist ein 2-dimensionaler Vector von *System.Int32*.

struct BitBuffer512 hält 512 bits an Daten, wobei die individuellen Bits mit dem Indexer *BitBuffer512[int bitIndex]* gelesen und geschrieben werden können. Weiterdem überlädt *BitBuffer512* Vergleichsoperatoren, die 2 Instanzen wie eine 512 stellige unsignierte Binärzahlen vergleicht. Das struct wird zum speichern des eindeutigem Werts aus 1.3.2 verwendet, da der größte vorimplementierte Zahlentype, *ulong* bereits mit 8er-Rominos komplett gefüllt wird. Im Vergleich kann *BitBuffer512* Rominos von bis zu 22 Blöcken speichern.

```
1  using System;
2  using System.Collections.Generic;
3  using System.Linq;
4  using System.Text;
5
6  public readonly struct Romino : IEquatable<Romino>, IComparable<Romino>
7  {
8      /// <summary>
9      /// <para>
10     /// All different combinations of rotating and mirroring an
       arbitrary romino.
11     /// </para>
12     /// <para>
13     /// BlockMap represents the functor mapping a block coordinate
       from the origin romino
14     ///   to the rotated/mirrored romino.
```

```
15      /// </para>
16      /// <para>
17      /// DiagonalRootMap represents the functor mapping the
            DiagonalRoot from the origin romino
18      ///   to the rotated/mirrored romino.
19      ///   Different from BlockMap because the DiagonalRoot is always
            the upper left of a square
20      ///   of 4 coords;
21      /// </para>
22      /// <para>    e.g. when mirroring along the y-Axis (x => (-x.X,
            x.Y)):
23      ///
24      ///     Before  After
25      ///       |       |
26      ///       |       |
27      /// </para>
28      /// </summary>
29      private static readonly (Func<Vector2Int, Vector2Int> BlockMap,
            Func<Vector2Int, Vector2Int> DiagonalRootMap)[] Maps = new
            (Func<Vector2Int, Vector2Int> BlockMap, Func<Vector2Int,
            Vector2Int> DiagonalRootMap)[]
30      {
31          (x => new Vector2Int(+x.X, +x.Y), x => new Vector2Int(+x.X,
                +x.Y)),
32          (x => new Vector2Int(+x.X, -x.Y), x => new Vector2Int(+x.X, ~
                x.Y)),
33          (x => new Vector2Int(-x.X, +x.Y), x => new Vector2Int(~x.X,
                +x.Y)),
34          (x => new Vector2Int(-x.X, -x.Y), x => new Vector2Int(~x.X, ~
                x.Y)),
35          (x => new Vector2Int(+x.Y, +x.X), x => new Vector2Int(+x.Y,
                +x.X)),
36          (x => new Vector2Int(+x.Y, -x.X), x => new Vector2Int(+x.Y, ~
                x.X)),
37          (x => new Vector2Int(-x.Y, +x.X), x => new Vector2Int(~x.Y,
                +x.X)),
38          (x => new Vector2Int(-x.Y, -x.X), x => new Vector2Int(~x.Y, ~
                x.X)),
39      };
40
41      /// <summary>
42      /// The smallest Romino possible
43      /// </summary>
44      public static Romino One =
45          new Romino(blocks: new[] { new Vector2Int(0, 0), new
                Vector2Int(1, 1) },
46              possibleExtensions:
47              // These are hardcoded in by hand, because this list is
```

```
                only populated lazily by appending, rather than
                computed once.
48              // As this first romino can not be computed like other
                rominos, this won't be populated using normal methods.
49              new[] { new Vector2Int(-1, -1), new Vector2Int(0, -1), new
                Vector2Int(1, -1),
50                      new Vector2Int(-1, 0),

                            new Vector2Int(2, 0),
51                      new Vector2Int(-1, 1),

                            new Vector2Int(2, 1),
52                                          new Vector2Int(0, 2),  new
                                               Vector2Int(1, 2),  new
                                               Vector2Int(2, 2), }
53                  .ToList(),
54              diagonalRoot: new Vector2Int(0, 0),
55              max: new Vector2Int(1, 1));
56
57      /// <summary>
58      /// All the Blocks composing the Romino.
59      /// </summary>
60      public readonly Vector2Int[] Blocks;
61
62      /// <summary>
63      /// All possible positions for adding new blocks.
64      /// </summary>
65      /// <remarks>
66      /// This is a list, yet the length is fixed.
67      /// Reason for this is, that at the point of creation, the size of
            this is not known,
68      /// and converting to an array after the size is known adds
            unnecessary overhead.
69      /// </remarks>
70      public readonly List<Vector2Int> PossibleExtensions;
71
72      /// <summary>
73      /// The upper left (lowest x, y) corner of the protected diagonal.
74      /// </summary>
75      public readonly Vector2Int DiagonalRoot;
76
77      /// <summary>
78      /// The highest x and y coordinates of any block inside the romino.
79      /// </summary>
80      public readonly Vector2Int Max;
81
82      /// <summary>
83      /// The unique code assigned to this romino.
```

```
84      /// </summary>
85      private readonly BitBuffer512 _uniqueCode;
86
87      /// <summary>
88      /// Gets all the blocks blocked by the protected diagonal.
89      /// </summary>
90      public readonly IEnumerable<Vector2Int> DiagonalRootBlockade
91      {
92          get
93          {
94              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(0, 0);
95              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(0, 1);
96              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(1, 0);
97              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(1, 1);
98          }
99      }
100
101     /// <summary>
102     /// Gets this romino as ASCII-art.
103     /// For debugging.
104     /// </summary>
105     public string AsciiArt => string.Join(Environment.NewLine,
            ToAsciiArt(true, true));
106
107     /// <summary>
108     /// Initializes and orients a new instance of the <see
            cref="Romino"/> structure.
109     /// </summary>
110     /// <param name="blocks">All the Blocks composing the
            Romino.</param>
111     /// <param name="possibleExtensions">All possible positions for
            adding new blocks.</param>
112     /// <param name="diagonalRoot">The upper left (lowest x, y) corner
            of the protected diagonal.</param>
113     /// <param name="max">The highest x and y coordinates of any block
            inside the romino.</param>
114     public Romino(Vector2Int[] blocks, List<Vector2Int>
            possibleExtensions, Vector2Int diagonalRoot, Vector2Int max)
115     {
116         Blocks = blocks;
117         DiagonalRoot = diagonalRoot;
118         PossibleExtensions = possibleExtensions;
119         Max = max;
120
121         _uniqueCode = default; // Needs to be assigned in order to
                call methods, including CalculateUniqueCode.
122         _uniqueCode = CalculateUniqueCode();
123
```

```
124         // Find highest unique Code.
125         // Start of with asserting the current permutation to be the
                one with the highest unique code.
126         int maxIndex = 0;
127         BitBuffer512 maxCode = _uniqueCode;
128
129         // Check against all other permutations, skipping 1, as thats
                already been calculated.
130         for (int i = 1; i < Maps.Length; i++)
131         {
132             var uniqueCode = CalculateUniqueCode(Maps[i].BlockMap);
133             if (maxCode < uniqueCode)
134             {
135                 maxIndex = i;
136                 maxCode = uniqueCode;
137             }
138         }
139
140         // Only make changes if the highest unique Code isn't the
                initial state
141         // (Maps[0] = (x => x, x => x))
142         if (maxIndex != 0)
143         {
144             (Func<Vector2Int, Vector2Int> blockMap, Func<Vector2Int,
                    Vector2Int> diagonalRootMap) = Maps[maxIndex];
145
146             var offset = CalculateOffset(blockMap);
147
148             for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++) Blocks[i] =
                    blockMap(Blocks[i]) + offset;
149             for (int i = 0; i < PossibleExtensions.Count; i++)
                    PossibleExtensions[i] = blockMap(PossibleExtensions[i])
                    + offset;
150
151             DiagonalRoot = diagonalRootMap(DiagonalRoot) + offset;
152
153             // Don't add offset to max, it might end up with x or y
                    equal to 0.
154             var mappedMax = blockMap(Max);
155             // Take the absolute of both components, we only care
                    about swapping of x and y, not inversion.
156             Max = new Vector2Int(Math.Abs(mappedMax.X),
                    Math.Abs(mappedMax.Y));
157
158             // Recalculate the unique code, as the currently saved one
                    is for Maps[0].
159             _uniqueCode = CalculateUniqueCode();
160         }
```

```
161     }
162
163     public static IEnumerable<(int Size, List<Romino> Rominos)>
            GetRominosUntilSize(int size)
164     {
165         // Validate arguments outside of iterator block, to prevent
                the exception being thrown lazily.
166         if (size < 2) throw new
                ArgumentOutOfRangeException(nameof(size));
167
168         return GetRominosUntilSizeInternal();
169
170         IEnumerable<(int Size, List<Romino> Rominos)>
                GetRominosUntilSizeInternal()
171         {
172             // Start out with the smalles romino
173             List<Romino> lastRominos = new List<Romino> { One };
174
175             // The size of the smallest Romino is 2 blocks; yield it
                    as such.
176             yield return (2, lastRominos);
177
178             for (int i = 3; i <= size; i++)
179             {
180                 var newRominos = lastRominos
181                     // Enable parallelization using PLINQ.
182                     .AsParallel()
183                     // Map every romino to all rominos generated by
                            adding one block to it.
184                     .SelectMany(x => x.AddOneNotUnique())
185                     // Remove duplicates, rominos are already oriented
                            here.
186                     .Distinct()
187                     // Execute Query by iterating into a list. Cheaper
                            than .ToArray()
188                     .ToList();
189
190                 // We don't need last generations rominos anymore.
                        Replace them with the new generation.
191                 lastRominos = newRominos;
192                 // Yield this generations rominos with their size.
193                 yield return (i, newRominos);
194             }
195         }
196     }
197
198     // Generate IEnumerable<T> instead of allocing a new array
199     /// <summary>
```

```
200     /// Gets all direct neighbours of a given block, not including the
           block itself.
201     /// </summary>
202     /// <param name="block">The block to get the neighbours of</param>
203     /// <returns>An <see cref="IEnumerable{Vector2Int}"/> yielding all
           neighbours</returns>
204     private static IEnumerable<Vector2Int>
           GetDirectNeighbours(Vector2Int block)
205     {
206         yield return block + new Vector2Int(0, -1);
207         yield return block + new Vector2Int(0, 1);
208         yield return block + new Vector2Int(1, 0);
209         yield return block + new Vector2Int(1, -1);
210         yield return block + new Vector2Int(1, 1);
211         yield return block + new Vector2Int(-1, 0);
212         yield return block + new Vector2Int(-1, -1);
213         yield return block + new Vector2Int(-1, 1);
214     }
215
216     /// <summary>
217     /// Returns all rominos generated by adding one block from <see
           cref="PossibleExtensions"/>
218     /// </summary>
219     /// <remarks>Does not remove duplicates, but orients
           results.</remarks>
220     /// <returns>All, non-unique rominos generated by adding one block
           from <see cref="PossibleExtensions"/>.</returns>
221     public readonly IEnumerable<Romino> AddOneNotUnique()
222     {
223         foreach (var newBlock in PossibleExtensions)
224         {
225             // If the new block has x or y smaller than 0, move the
                   entire romino such that
226             // the lowest x and y are 0.
227             // This offset will need to be applied to anything inside
                   the romino.
228             var offset = new Vector2Int(Math.Max(-newBlock.X, 0),
                   Math.Max(-newBlock.Y, 0));
229
230             // If the new block is outside of the old rominos bounds,
                   i.e. has bigger x or y coords than Max,
231             // increase size.
232             var newSize = new Vector2Int(Math.Max(newBlock.X, Max.X),
                   Math.Max(newBlock.Y, Max.Y))
233                 // or if the new block has coordinates x or y smaller
                       than 0, increase size.
234                 + offset;
235
```

```
236             HashSet<Vector2Int> newPossibleExtensions =
237                 // Get the direct neighbours, i.e. the blocks that
                        will be possible spots
238                 // for adding blocks after newBlock has been added
239                 new HashSet<Vector2Int>(GetDirectNeighbours(newBlock +
                        offset));
240
241             // Remove already occupied positions
242             newPossibleExtensions.ExceptWith(Blocks.Select(x => x +
                    offset));
243             // Exclude positions blocked by the protected diagonal
244             newPossibleExtensions.ExceptWith(DiagonalRootBlockade.Select(x
                    => x + offset));
245
246             // Re-use old extension spots.
247             newPossibleExtensions.UnionWith(PossibleExtensions.Select(x
                    => x + offset));
248
249             // Remove the newly added block.
250             newPossibleExtensions.Remove(newBlock + offset);
251
252             // Allocate a new array for the new romino, with one more
                    space then right now
253             // to store the new block in.
254             Vector2Int[] newBlocks = new Vector2Int[Blocks.Length + 1];
255
256             for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++)
257             {
258                 // Copy elements from current romino and apply offset.
259                 newBlocks[i] = Blocks[i] + offset;
260             }
261
262             // Insert the new block, also, with offset.
263             newBlocks[Blocks.Length] = newBlock + offset;
264
265             yield return new Romino(
266                 newBlocks,
267                 new List<Vector2Int>(newPossibleExtensions),
268                 // Apply offset to the diagonal root as well.
269                 DiagonalRoot + offset,
270                 newSize);
271         }
272     }
273
274     private readonly BitBuffer512 CalculateUniqueCode()
275     {
276         var bits = new BitBuffer512();
277
```

```
278         // "Definitely very useful caching"
279         int length = Blocks.Length;
280 
281         for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++)
282         {
283             // Assign the relevant bit (2^((y * len) + x) = 1 << ((y *
                len) + x))
284             bits[(Blocks[i].Y * length) + Blocks[i].X] = true;
285         }
286 
287         return bits;
288     }
289 
290     private readonly BitBuffer512 CalculateUniqueCode(Func<Vector2Int,
        Vector2Int> func)
291     {
292         var bits = new BitBuffer512();
293 
294         // "Definitely very useful caching"
295         int length = Blocks.Length;
296 
297         // Calculate the offset to be applied.
298         var offset = CalculateOffset(func);
299 
300         for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++)
301         {
302             // Map the block and apply the offset.
303             var mapped = func(Blocks[i]) + offset;
304 
305             // Assign the relevant bit (2^((y * len) + x) = 1 << ((y *
                len) + x))
306             bits[(mapped.Y * length) + mapped.X] = true;
307         }
308 
309         return bits;
310     }
311 
312     /// <summary>
313     /// Calculates the offset by which blocks inside the romino need
        to be moved after applying a given function
314     /// in order to still have the lowest x and y be equal to 0.
315     /// </summary>
316     /// <remarks>The function <paramref name="map"/> may not apply any
        translations, only
317     /// scaling and rotation around the origin (0, 0) is
        handled.</remarks>
318     /// <param name="map">The function to calculate the offset
        for.</param>
```

```
319     /// <returns>The offset that needs to be applied to set the
            minimum x and y coordinates after applying <paramref
            name="map"/> back to 0.</returns>
320     private readonly Vector2Int CalculateOffset(Func<Vector2Int,
            Vector2Int> map)
321     {
322         var mappedSize = map(Max);
323         // We only need to offset if the blocks are being moved into
                the negative,
324         // as translations from map are forbidden, and such the min
                will only change by
325         // mirroring around an axis or rotating.
326         return new Vector2Int(Math.Max(-mappedSize.X, 0),
                Math.Max(-mappedSize.Y, 0));
327     }
328
329     /// <remarks>Returns invalid results for comparisons between
            rominos of different sizes</remarks>
330     public override readonly bool Equals(object obj) => obj is Romino
            romino && Equals(romino);
331
332     public override readonly int GetHashCode() =>
            _uniqueCode.GetHashCode();
333
334     /// <remarks>Returns invalid results for comparisons between
            rominos of different sizes</remarks>
335     public readonly bool Equals(Romino romino) => _uniqueCode ==
            romino._uniqueCode;
336
337     /// <remarks>Returns invalid results for comparisons between
            rominos of different sizes</remarks>
338     public readonly int CompareTo(Romino other) =>
            _uniqueCode.CompareTo(other._uniqueCode);
339 }
```