1 Lösungsidee

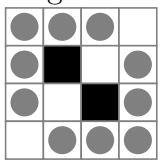
1.1 Kernidee

Rominos mitt n Blöcken können gefunden werden, in dem zu Rominos mit (n-1) Blöcken ein Block angefügt wird. Hierbei muss beachtet werden das der Rominostein zusammenhängend bleiben muss, und dass mindestens eine Diagonale bleiben muss.

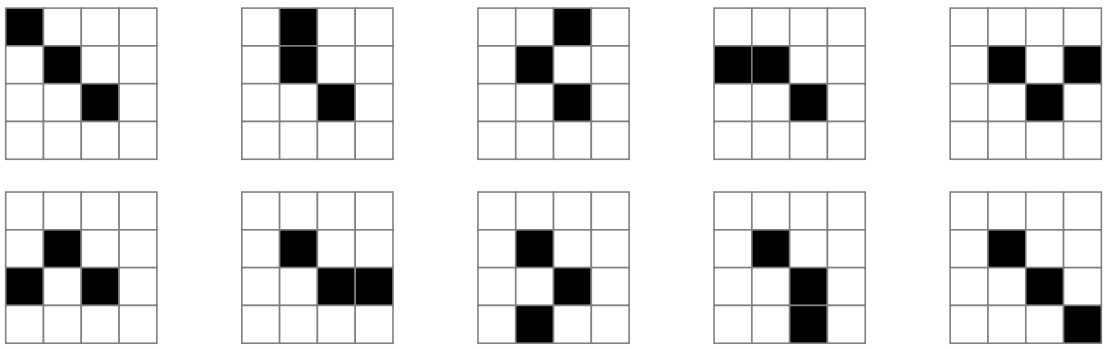
Um alle möglichen Rominos mit n Blöcken zu finden, muss man also alle Rominos mit (n-1) Blöcken finden, und für diese alle Rominos die durch hinzufügen eines weiteren Blocks enstehen können ermitteln. Dabei wird es Duplikate geben. Eliminiert man diese hat man alle möglichen n-Rominos eindeutig gefunden.

1.1.1 Beispiel

Nehme man beispielsweise das 2er-Romino, kann man zum finden aller 3 (= 2 + 1) - Rominos wie folgt Blöcke anfügen:



Somit ergeben sich folgende 3-Rominos:



Da Rominos mindestens zwei Steine haben müssen um eine Diagonale zu besitzen, ist der Rominostein mit den wenigsten Blöcken eine 2er Diagonale.

Kleinster Rominostein

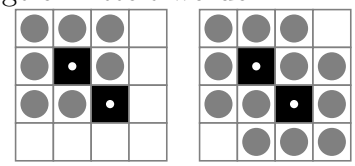
Um alle n-Rominos für ein beliebiges n zu finden, würde man den obigen Algorithmus verwenden um aus dem 2er-Romino alle 3-Rominos zu folgern, dann aus diesen alle 4-Rominos etc. bis man alle n-Rominos errechnet hat.

1.2 Hinzufügen von Blöcken

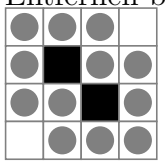
Um Blöcke hinzuzufügen, werden zuerst die Stellen ermittelt, wo Blöcke angefügt werden können, sodass das Romino zusammenhängend bleibt. Hierfür werden die Nachbarn jedes Blocks des Rominos ermittelt, daraufhin werden Duplikate und bereits belegte Blöcke eliminiert.

1.2.1 Beispiel

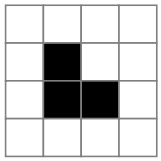
Nehme man beispielsweise wieder das 2er-Romino, würden die Nachbarn aller Blöcke wie folgt ermittelt werden:



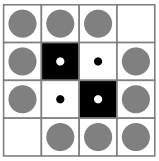
Entfernen bereits existierender Blöcke



Es lässt sich hier erkennen, das die Existenz einer echten Diagonale nicht zwingend aufrecht erhalten wird;



Um dafür zu sorgen, dass diese echte Diagonale immer existiert, wird eine spezifische Diagonale immer beschützt. Bei den Möglichen Block-Additionen beim 2er-Romino beispielsweise würden hierfür die für die Diagonale relevanten Blöcke aus den Block-Additionsmöglichkeiten entfernt:



Diese 4 beschützten Blöcke werden auch bei Spiegelungen, Verschiebungen und Rotationen mitverfolgt, sodass diese eine Diagonale immer besteht.

1.3 Eliminierung von Duplikaten

Zur Eliminierung von Duplikaten werden die Rominos zuerst eindeutig orientiert, um Vergleiche zwischen gleichen, aber transformierten Rominos zu erleichtern.

1.3.1 Verschiebung

Die Verschiebung wird eliminiert durch Verschiebung des Rominos in die linke obere Ecke des Gitters; also wird der Block mit der geringsten x-Koordinate auf x=0 verschoben, und der Block mit der geringsten y-Koordinate auf y=0.

1.3.2 Rotation und Spiegelung

Um Rotation und Spiegelung eines Rominos zu eliminieren, werden zuerst alle seine Permutationen (also alle Kombinationen von Rotation und Spiegelung) ermittelt, und denen wird ein eindeutiger Wert zugewiesen. Daraufhin wird das Romino mit dem höchsten dieser eindeutigen Werte ausgewählt. Hierbei ist es eigentlich egal, ob der niedrigste oder höchste Wert genommen wird, solange das Ergebnis eindeutig ist.

Die Bestimmung dieses eindeutigen Werts haben wir einen trivialen Algorithmus verwendet wie folgt:

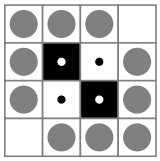
1. Nehme einen Block b aus der Permutation des Rominos
2. Seien die Koordinaten (x, y) die Koordinaten des Blocks b, wobei die minimale x-Koordinate und die minimale y-Koordinate aus allen Blöcken der Permutation 0 ist.
3. Man weise dem Block b den Wert $2^{(y*<\text{Anzahl an Blöcken}>)+x}$ zu
4. Addiere die Werte aller Blöcke der Permutation, sei dies der Wert der Permutation

Dabei ist zwar noch viel Raum für Optimierung, aber dieser Algorithmus ist ausreichend und O(n).

1.3.3 Endgültige Duplikat-Eliminierung

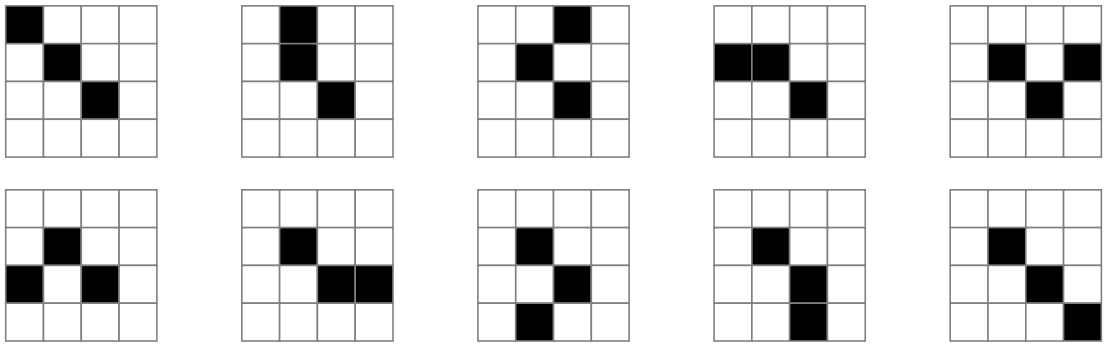
Zum endgültigen eliminieren der Duplikate werden zuerst alle Rominos wie oben beschrieben orientiert, dann werden die eindeutigen Werte dieser verglichen, um schnell Gleichheit zu ermitteln. Durch Verwendung dieser Vergleichsmethode lassen sich schnell Duplikate entfernen.

1.3.4 Beispiel

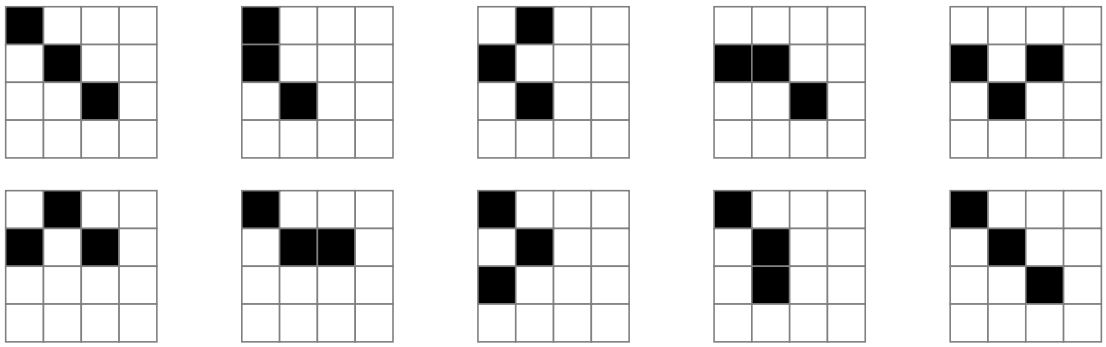


Ausgangsromino

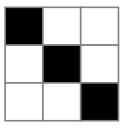
Nächste Rominos



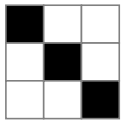
Verschiebung eliminieren



Rotation und Spiegelung eliminieren Ausgehend von dem Romino;

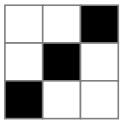


werden folgende Permutationen festgestellt:



Permutation 1

$Wert_1 = 2^0 + 2^4 + 2^8 = 273$

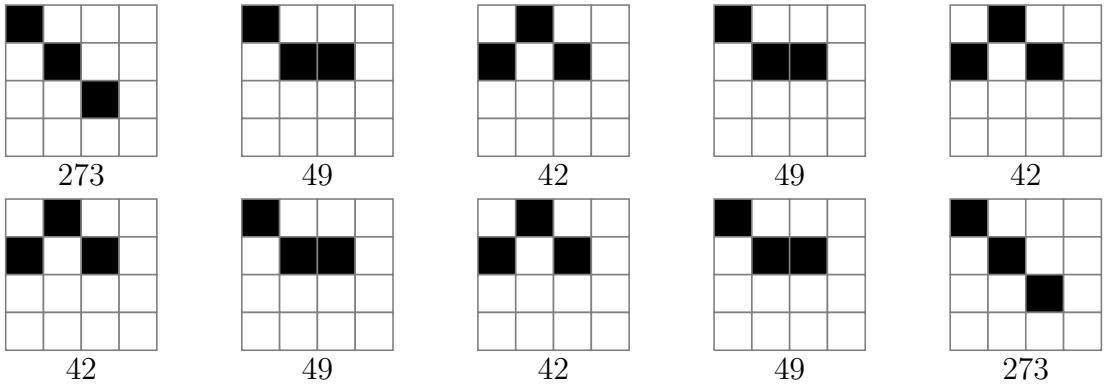


Permutation 2

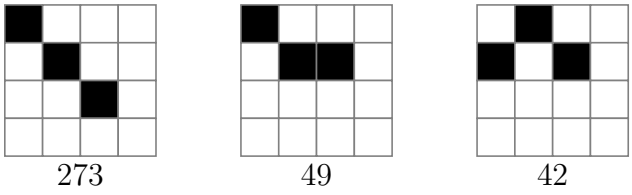
$Wert_2 = 2^2 + 2^4 + 2^6 = 84$

Hierbei ist $Wert_2 = 84 < 273 = Wert_1$. Da Permutation 1 mit $Wert_1$ den höchsten Wert hat, wird Permutation 1 als die eindeutige Rotierung festgelegt.

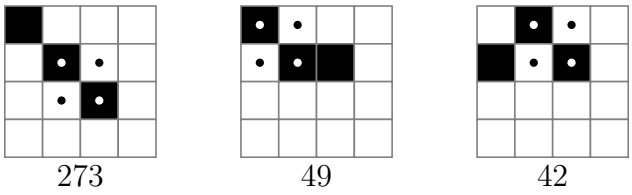
Analog auf alle Rominos angewendet ergibt sich:



Nun lassen sich trivialerweise die Duplikate eliminieren;



Über den gesamten Prozess hinweg wird auch die geschützte Diagonale mitverfolgt, bei den 3er-Rominos ist sie wie folgt plaziert:



2 Umsetzung

Zur Umsetzung haben wir den obigen Algorithmus in C# 8.0 mit .NET Core 3.0 implementiert.

Die Rominos werden in Form eines readonly structs *Romino* gespeichert. Das struct beinhaltet

1. *Vector2Int[] Blocks* - Das Array mit allen Blöcken des Rominos.
2. *List<Vector2Int> PossibleExtensions* - Die Liste mit allen Block-Additionsmöglichkeiten. Hierbei ist zu bemerken, dass die Größe der Liste konstant bleibt; es wird hier eine Liste statt einem Array verwendet, da bei der Erstellung die Größe unbekannt ist, und die Liste noch in ein Array zu konvertieren unnötig Rechenzeit kostet.

3. *Vector2Int DiagonalRoot* - Die linke obere Ecke der geschützten Diagonale.

4. *Vector2Int Max* - Die rechte untere Ecke des Rominos. Verwendet für korrigieren der Verschiebung ohne über alle Blöcke zu iterieren.

5. *BitBuffer512 _uniqueCode* - Der eindeutige Wert, errechnet wie in **??**.

Die Hauptmethode ist die statische Methode *IEnumerable<(int Size, List<Romino> Rominos)> Romino.GetRominosUntilSize(int size)* welche für eine gegebene Größe alle Rominos aller Größen, bis zu dieser Größe ausgibt. Diese ruft intern parallelisiert für alle Rominos aus einer Generation die Methode *IEnumerable<Romino> Romino.AddOneNotUnique()* auf. Diese Methode errechnet nach dem Verfahren aus **??** die Rominos der nächsten Generation. Danach werden nach dem Verfahren aus **??** die Duplikate entfernt.

Die eindeutigen Werte aus **??** werden hierbei berechnet, ohne dass der Romino modifiziert wird, alle Modifikationen die an dem Romino gemacht werden müssten, um den Wert einer Permutation zu bestimmen, werden beim orientieren direkt in der Ausrechnung angewendet, ohne das Romino zu modifizieren. Erst wenn die eindeutige Rotation nach **??** gefunden wurde, wird das Romino so modifiziert, dass es als diese Permutation dargestellt wird.

3 Quellcode

readonly struct Vector2Int ist ein 2-dimensionaler Vector von *System.Int32*.

struct BitBuffer512 hält 512 bits an Daten, wobei die individuellen Bits mit dem Indexer *BitBuffer512[int bitIndex]* gelesen und geschrieben werden können. Weiterdem überlädt *BitBuffer512* Vergleichsoperatoren, die 2 Instanzen wie eine 512 stellige unsignierte Binärzahlen vergleicht. Das struct wird zum speichern des eindeutigem Werts aus **??** verwendet, da der größte vorimplementierte Zahlentype, *ulong* bereits mit 8er-Rominos komplett gefüllt wird. Im Vergleich kann *BitBuffer512* Rominos von bis zu 22 Blöcken speichern.

```
1  using System;
2  using System.Collections.Generic;
3  using System.Linq;
4  using System.Text;
5
6  public readonly struct Romino : IEquatable<Romino>, IComparable<Romino>
7  {
8      /// <summary>
9      /// <para>
10     /// All different combinations of rotating and mirroring an
           arbitrary romino.
11     /// </para>
12     /// <para>
13     /// BlockMap represents the functor mapping a block coordinate
           from the origin romino
14     ///   to the rotated/mirrored romino.
15     /// </para>
```

```
16      /// <para>
17      /// DiagonalRootMap represents the functor mapping the
            DiagonalRoot from the origin romino
18      ///   to the rotated/mirrored romino.
19      ///   Different from BlockMap because the DiagonalRoot is always
            the upper left of a square
20      ///   of 4 coords;
21      /// </para>
22      /// <para>    e.g. when mirroring along the y-Axis (x => (-x.X,
            x.Y)):
23      ///
24      ///     Before  After
25      ///       |       |
26      ///     --D --  -D --
27      ///
28      ///       |       |
29      /// </para>
30      /// </summary>
31      private static readonly (Func<Vector2Int, Vector2Int> BlockMap,
            Func<Vector2Int, Vector2Int> DiagonalRootMap)[] Maps = new
            (Func<Vector2Int, Vector2Int> BlockMap, Func<Vector2Int,
            Vector2Int> DiagonalRootMap)[]
32      {
33          (x => new Vector2Int(+x.X, +x.Y), x => new Vector2Int(+x.X,
                +x.Y)),
34          (x => new Vector2Int(+x.X, -x.Y), x => new Vector2Int(+x.X, ~
                x.Y)),
35          (x => new Vector2Int(-x.X, +x.Y), x => new Vector2Int(~x.X,
                +x.Y)),
36          (x => new Vector2Int(-x.X, -x.Y), x => new Vector2Int(~x.X, ~
                x.Y)),
37          (x => new Vector2Int(+x.Y, +x.X), x => new Vector2Int(+x.Y,
                +x.X)),
38          (x => new Vector2Int(+x.Y, -x.X), x => new Vector2Int(+x.Y, ~
                x.X)),
39          (x => new Vector2Int(-x.Y, +x.X), x => new Vector2Int(~x.Y,
                +x.X)),
40          (x => new Vector2Int(-x.Y, -x.X), x => new Vector2Int(~x.Y, ~
                x.X)),
41      };
42
43      /// <summary>
44      /// The smallest Romino possible
45      /// </summary>
46      public static Romino One =
47          new Romino(blocks: new[] { new Vector2Int(0, 0), new
                Vector2Int(1, 1) },
48              possibleExtensions:
```

```
49              // These are hardcoded in by hand, because this list is
                   only populated lazily by appending, rather than
                   computed once.
50              // As this first romino can not be computed like other
                   rominos, this won't be populated using normal methods.
51              new[] { new Vector2Int(-1, -1), new Vector2Int(0, -1), new
                   Vector2Int(1, -1),
52                      new Vector2Int(-1, 0),

                           new Vector2Int(2, 0),
53                      new Vector2Int(-1, 1),

                           new Vector2Int(2, 1),
54                                      new Vector2Int(0, 2),  new
                                           Vector2Int(1, 2),  new
                                           Vector2Int(2, 2), }
55                  .ToList(),
56              diagonalRoot: new Vector2Int(0, 0),
57              max: new Vector2Int(1, 1));
58
59      /// <summary>
60      /// All the Blocks composing the Romino.
61      /// </summary>
62      public readonly Vector2Int[] Blocks;
63
64      /// <summary>
65      /// All possible positions for adding new blocks.
66      /// </summary>
67      /// <remarks>
68      /// This is a list, yet the length is fixed.
69      /// Reason for this is, that at the point of creation, the size of
           this is not known,
70      /// and converting to an array after the size is known adds
           unnecessary overhead.
71      /// </remarks>
72      public readonly List<Vector2Int> PossibleExtensions;
73
74      /// <summary>
75      /// The upper left (lowest x, y) corner of the protected diagonal.
76      /// </summary>
77      public readonly Vector2Int DiagonalRoot;
78
79      /// <summary>
80      /// The highest x and y coordinates of any block inside the romino.
81      /// </summary>
82      public readonly Vector2Int Max;
83
84      /// <summary>
```

```
85      /// The unique code assigned to this romino.
86      /// </summary>
87      private readonly BitBuffer512 _uniqueCode;
88
89      /// <summary>
90      /// Gets all the blocks blocked by the protected diagonal.
91      /// </summary>
92      public readonly IEnumerable<Vector2Int> DiagonalRootBlockade
93      {
94          get
95          {
96              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(0, 0);
97              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(0, 1);
98              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(1, 0);
99              yield return DiagonalRoot + new Vector2Int(1, 1);
100         }
101     }
102
103     /// <summary>
104     /// Gets this romino as ASCII-art.
105     /// For debugging.
106     /// </summary>
107     public string AsciiArt => string.Join(Environment.NewLine,
            ToAsciiArt(true, true));
108
109     /// <summary>
110     /// Initializes and orients a new instance of the <see
            cref="Romino"/> structure.
111     /// </summary>
112     /// <param name="blocks">All the Blocks composing the
            Romino.</param>
113     /// <param name="possibleExtensions">All possible positions for
            adding new blocks.</param>
114     /// <param name="diagonalRoot">The upper left (lowest x, y) corner
            of the protected diagonal.</param>
115     /// <param name="max">The highest x and y coordinates of any block
            inside the romino.</param>
116     public Romino(Vector2Int[] blocks, List<Vector2Int>
            possibleExtensions, Vector2Int diagonalRoot, Vector2Int max)
117     {
118         Blocks = blocks;
119         DiagonalRoot = diagonalRoot;
120         PossibleExtensions = possibleExtensions;
121         Max = max;
122
123         _uniqueCode = default; // Needs to be assigned in order to
                call methods, including CalculateUniqueCode.
124         _uniqueCode = CalculateUniqueCode();
```

```
125
126         // Find highest unique Code.
127         // Start of with asserting the current permutation to be the
                one with the highest unique code.
128         int maxIndex = 0;
129         BitBuffer512 maxCode = _uniqueCode;
130
131         // Check against all other permutations, skipping 1, as thats
                already been calculated.
132         for (int i = 1; i < Maps.Length; i++)
133         {
134             var uniqueCode = CalculateUniqueCode(Maps[i].BlockMap);
135             if (maxCode < uniqueCode)
136             {
137                 maxIndex = i;
138                 maxCode = uniqueCode;
139             }
140         }
141
142         // Only make changes if the highest unique Code isn't the
                initial state
143         // (Maps[0] = (x => x, x => x))
144         if (maxIndex != 0)
145         {
146             (Func<Vector2Int, Vector2Int> blockMap, Func<Vector2Int,
                    Vector2Int> diagonalRootMap) = Maps[maxIndex];
147
148             var offset = CalculateOffset(blockMap);
149
150             for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++) Blocks[i] =
                    blockMap(Blocks[i]) + offset;
151             for (int i = 0; i < PossibleExtensions.Count; i++)
                    PossibleExtensions[i] = blockMap(PossibleExtensions[i])
                    + offset;
152
153             DiagonalRoot = diagonalRootMap(DiagonalRoot) + offset;
154
155             // Don't add offset to max, it might end up with x or y
                    equal to 0.
156             var mappedMax = blockMap(Max);
157             // Take the absolute of both components, we only care
                    about swapping of x and y, not inversion.
158             Max = new Vector2Int(Math.Abs(mappedMax.X),
                    Math.Abs(mappedMax.Y));
159
160             // Recalculate the unique code, as the currently saved one
                    is for Maps[0].
161             _uniqueCode = CalculateUniqueCode();
```

```
162         }
163     }
164 
165     public static IEnumerable<(int Size, List<Romino> Rominos)>
        GetRominosUntilSize(int size)
166     {
167         // Validate arguments outside of iterator block, to prevent
            the exception being thrown lazily.
168         if (size < 2) throw new
            ArgumentOutOfRangeException(nameof(size));
169 
170         return GetRominosUntilSizeInternal();
171 
172         IEnumerable<(int Size, List<Romino> Rominos)>
            GetRominosUntilSizeInternal()
173         {
174             // Start out with the smalles romino
175             List<Romino> lastRominos = new List<Romino> { One };
176 
177             // The size of the smallest Romino is 2 blocks; yield it
                as such.
178             yield return (2, lastRominos);
179 
180             for (int i = 3; i <= size; i++)
181             {
182                 var newRominos = lastRominos
183                     // Enable parallelization using PLINQ.
184                     .AsParallel()
185                     // Map every romino to all rominos generated by
                        adding one block to it.
186                     .SelectMany(x => x.AddOneNotUnique())
187                     // Remove duplicates, rominos are already oriented
                        here.
188                     .Distinct()
189                     // Execute Query by iterating into a list. Cheaper
                        than .ToArray()
190                     .ToList();
191 
192                 // We don't need last generations rominos anymore.
                    Replace them with the new generation.
193                 lastRominos = newRominos;
194                 // Yield this generations rominos with their size.
195                 yield return (i, newRominos);
196             }
197         }
198     }
199 
200     // Generate IEnumerable<T> instead of allocing a new array
```

```
201     /// <summary>
202     /// Gets all direct neighbours of a given block, not including the
            block itself.
203     /// </summary>
204     /// <param name="block">The block to get the neighbours of</param>
205     /// <returns>An <see cref="IEnumerable{Vector2Int}"/> yielding all
            neighbours</returns>
206     private static IEnumerable<Vector2Int>
            GetDirectNeighbours(Vector2Int block)
207     {
208         yield return block + new Vector2Int(0, -1);
209         yield return block + new Vector2Int(0, 1);
210         yield return block + new Vector2Int(1, 0);
211         yield return block + new Vector2Int(1, -1);
212         yield return block + new Vector2Int(1, 1);
213         yield return block + new Vector2Int(-1, 0);
214         yield return block + new Vector2Int(-1, -1);
215         yield return block + new Vector2Int(-1, 1);
216     }
217
218     /// <summary>
219     /// Returns all rominos generated by adding one block from <see
            cref="PossibleExtensions"/>
220     /// </summary>
221     /// <remarks>Does not remove duplicates, but orients
            results.</remarks>
222     /// <returns>All, non-unique rominos generated by adding one block
            from <see cref="PossibleExtensions"/>.</returns>
223     public readonly IEnumerable<Romino> AddOneNotUnique()
224     {
225         foreach (var newBlock in PossibleExtensions)
226         {
227             // If the new block has x or y smaller than 0, move the
                    entire romino such that
228             // the lowest x and y are 0.
229             // This offset will need to be applied to anything inside
                    the romino.
230             var offset = new Vector2Int(Math.Max(-newBlock.X, 0),
                    Math.Max(-newBlock.Y, 0));
231
232             // If the new block is outside of the old rominos bounds,
                    i.e. has bigger x or y coords than Max,
233             // increase size.
234             var newSize = new Vector2Int(Math.Max(newBlock.X, Max.X),
                    Math.Max(newBlock.Y, Max.Y))
235                 // or if the new block has coordinates x or y smaller
                        than 0, increase size.
236                 + offset;
```

```
237
238             HashSet<Vector2Int> newPossibleExtensions =
239                 // Get the direct neighbours, i.e. the blocks that
                        will be possible spots
240                 // for adding blocks after newBlock has been added
241                 new HashSet<Vector2Int>(GetDirectNeighbours(newBlock +
                        offset));
242
243             // Remove already occupied positions
244             newPossibleExtensions.ExceptWith(Blocks.Select(x => x +
                    offset));
245             // Exclude positions blocked by the protected diagonal
246             newPossibleExtensions.ExceptWith(DiagonalRootBlockade.Select(x
                    => x + offset));
247
248             // Re-use old extension spots.
249             newPossibleExtensions.UnionWith(PossibleExtensions.Select(x
                    => x + offset));
250
251             // Remove the newly added block.
252             newPossibleExtensions.Remove(newBlock + offset);
253
254             // Allocate a new array for the new romino, with one more
                    space then right now
255             // to store the new block in.
256             Vector2Int[] newBlocks = new Vector2Int[Blocks.Length + 1];
257
258             for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++)
259             {
260                 // Copy elements from current romino and apply offset.
261                 newBlocks[i] = Blocks[i] + offset;
262             }
263
264             // Insert the new block, also, with offset.
265             newBlocks[Blocks.Length] = newBlock + offset;
266
267             yield return new Romino(
268                 newBlocks,
269                 new List<Vector2Int>(newPossibleExtensions),
270                 // Apply offset to the diagonal root as well.
271                 DiagonalRoot + offset,
272                 newSize);
273         }
274     }
275
276     private readonly BitBuffer512 CalculateUniqueCode()
277     {
278         var bits = new BitBuffer512();
```

```
279
280         // "Definitely very useful caching"
281         int length = Blocks.Length;
282
283         for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++)
284         {
285             // Assign the relevant bit (2^((y * len) + x) = 1 << ((y *
                len) + x))
286             bits[(Blocks[i].Y * length) + Blocks[i].X] = true;
287         }
288
289         return bits;
290     }
291
292     private readonly BitBuffer512 CalculateUniqueCode(Func<Vector2Int,
        Vector2Int> func)
293     {
294         var bits = new BitBuffer512();
295
296         // "Definitely very useful caching"
297         int length = Blocks.Length;
298
299         // Calculate the offset to be applied.
300         var offset = CalculateOffset(func);
301
302         for (int i = 0; i < Blocks.Length; i++)
303         {
304             // Map the block and apply the offset.
305             var mapped = func(Blocks[i]) + offset;
306
307             // Assign the relevant bit (2^((y * len) + x) = 1 << ((y *
                len) + x))
308             bits[(mapped.Y * length) + mapped.X] = true;
309         }
310
311         return bits;
312     }
313
314     /// <summary>
315     /// Calculates the offset by which blocks inside the romino need
        to be moved after applying a given function
316     /// in order to still have the lowest x and y be equal to 0.
317     /// </summary>
318     /// <remarks>The function <paramref name="map"/> may not apply any
        translations, only
319     /// scaling and rotation around the origin (0, 0) is
        handled.</remarks>
320     /// <param name="map">The function to calculate the offset
```

```
        for.</param>
321     /// <returns>The offset that needs to be applied to set the
        minimum x and y coordinates after applying <paramref
        name="map"/> back to 0.</returns>
322     private readonly Vector2Int CalculateOffset(Func<Vector2Int,
        Vector2Int> map)
323     {
324         var mappedSize = map(Max);
325         // We only need to offset if the blocks are being moved into
            the negative,
326         // as translations from map are forbidden, and such the min
            will only change by
327         // mirroring around an axis or rotating.
328         return new Vector2Int(Math.Max(-mappedSize.X, 0),
            Math.Max(-mappedSize.Y, 0));
329     }
330
331     /// <remarks>Returns invalid results for comparisons between
        rominos of different sizes</remarks>
332     public override readonly bool Equals(object obj) => obj is Romino
        romino && Equals(romino);
333
334     public override readonly int GetHashCode() =>
        _uniqueCode.GetHashCode();
335
336     /// <remarks>Returns invalid results for comparisons between
        rominos of different sizes</remarks>
337     public readonly bool Equals(Romino romino) => _uniqueCode ==
        romino._uniqueCode;
338
339     /// <remarks>Returns invalid results for comparisons between
        rominos of different sizes</remarks>
340     public readonly int CompareTo(Romino other) =>
        _uniqueCode.CompareTo(other._uniqueCode);
341 }
```