Aufgabe 3: Telepaartie

Team-ID: 00587

Team-Name: Doge.NET

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Johannes von Stoephasius

20. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsidee

1.1 Definitionen

Zustand Ein Zustand ist definiert als Menge von Behältern, wobei jedem Behälter eine nichtnegative ganze Zahl zugeordnet werden kann, die der Anzahl an Bibern des Gefäßes entspricht.

Weiter können die Behälter untereinander getauscht werden, da die Konstellation die selbe bleibt. Deshalb werden die Biber-Anzahlen eines Zustands immer nur im sortierten Zustand betrachtet, wobei hier aufsteigende Sortierung verwendet wird.

Denotiere man die Menge aller Zustände mit Gesamtbiberzahl n als $\mathbb{S}_n$.

Endzustand Ein Endzustand ist jeder Zustand, der genau einen leeren Eimer enthält.

Sind weniger, also keine, leere Eimer enthalten, so ist der Zustand kein Endstand laut der Aufgabenstellung.

Sind mehr enthalten, so ist der Zustand nur durch Operationen auf einen anderen Endzustand zu erhalten, und somit nicht relevant. Zur Errmittlung dieser Endzustände siehe Abschnitt 1.4.

Denotiere man die Menge aller Endzustände mit Gesamtbiberzahl n als $\mathbb{E}_n$. Dabei gilt: $\mathbb{E}_n \subseteq \mathbb{S}_n$

Ursprungszustand Ein Ursprungszustand von einem Zustand x, ist jeder Zustand der mit einem einzelnen Telepaartieschritt zum Zustand x wird.

Die Menge an Ursprungszuständen von x kann geschrieben werden als $origin(x)$, mit $origin : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$.

Generation Eine Generation ist eine Menge an unterschiedlichen Zuständen.

1.2 Kernidee

Die Grundidee der Lösung basiert auf der Idee, vom Endzustand den idealen Weg zu jedem Anfangszustand zu finden. Das heißt, dass ein Baum aufgebaut wird, wobei die Knoten einzelne Zustände symbolisieren. Hierbei sind die Kinder eines Knotens definiert als alle Der Baum hat nicht wie üblich nur einen Kopf, sondern mehrere, die vom 1. Nebenalgorithmus gefunden werden. Die Köpfe und damit der Return-Wert des Nebenalgorithmus sind alle Möglichen Zustände, bei denen genau ein Behälter 0 Elemente enthält. Nun werden mit dem 2. Teilalgorithmus alle Zustände gefunden, aus denen der aktuelle Zustand gebildet werden kann, woraus die neue Generation entsteht. Von den neuen Zuständen werden alle entfernt, die bereits gefunden wurden, sodass keine Dopplungen auftreten können. Auch auf diese neuen Zustände werden alle möglichen Operationen angewendet, wobei dies so lange wiederholt wird, bis keine neuen Zustände gefunden werden. Die Eltern dieser Generation ohne Zustände sind die Zustände, die am meisten Schritte brauchen, um in einen zulässigen Endzustand überführt zu werden.

Der Baum hat nicht wie üblich nur einen Kopf, sondern mehrere. Diese Köpfe stellen die Endzustände dar.

1.3 Finden aller Kinder eines Knotens

1.4 Generieren der Endzustände

Der Algoritmus findet für eien Zustand Z alle Zustände für die gilt, dass wenn auf sie alle möglichen Telepaartien angewendet eines der Ergebnisse Z ist. Dafür wird jede Biber-Anzahl mit jeder anderen Biber-Anzahl verglichen. Ist die erste Anzahl größer als 0 und durch 2 teilbar, dann ist es möglich, dass auf diese beiden Behälter eine Telepaartie angewendet wurde. Um diese umzukehren wird die Anzahl im ersten Behälter addiert und die Differenz zum 2. Behälter addiert.

1.5 Hauptalgorithmus

Sei die Generation Gen_{i+1} definiert als alle unterschiedliche Ursprungszustände aller Elemente aus Gen_i, die in keiner vorherigen Generation $Gen_k, k < i$ enthalten sind.

Sei dabei Gen_0 als Spezialfall gleich der Menge aller Endzustände für Gesamtbiberzahl n.

$$Gen_0 := \mathbb{E}_n$$
$$Gen_{i+1} := \{s \mid (\exists_{t \in Gen_i} : s \in origin(t)) \wedge (\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 \leq i} : s \notin Gen_{i_0})\}$$

Der Algoritmus funktioniert dann, indem er nach und nach alle nicht-leeren Generationen ermittelt. Sei Gen_m die letzte nicht-leere Generation, so ist $LLL(n) = m$.

1.6 Beweis

1.6.1 Hilfssatz 1: Erreichen aller lösbaren Zustände

Wähle beliebig aber fest einen Zustand $s \in \mathbb{S}_n$. Ist der Zustand lösbar, also durch wiederholte Telepaartie zu einem Endzustand überführbar, so gibt es eine Generation Gen_i aus $(Gen_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $s \in Gen_i$.

Trivialer Fall Gilt $s \in \mathbb{E}_n$, so ist s lösbar mit 0 Telepaartieschritten. Da $Gen_0 = \mathbb{E}_n$ gilt, gilt $s \in Gen_0$.

Beweis durch Widerspruch Angenommen $s \notin Gen_i$. Für alle $i = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned}
s \notin Gen_i &\iff \neg\left(\left(\exists_{t \in Gen_{i-1}} : s \in origin(t)\right) \wedge (\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \notin Gen_{i_0})\right) \\
&\iff \neg\left(\exists_{t \in Gen_{i-1}} : s \in origin(t)\right) \vee \neg\left(\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \notin Gen_{i_0}\right) \\
&\iff \left(\forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin origin(t)\right) \vee (\exists_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \in Gen_{i_0})
\end{aligned}$$

Angenommen es gilt $\exists_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \in Gen_{i_0}$. Wenn dies gilt, existiert ein i_0 für welches gilt: $s \in Gen_{i_0}$. Somit existiert eine Generation aus $(Gen_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $s \in Gen_{i_0}$.

Smot können wir das Problem durch Redefinition $i := i_0$ also reformulieren als:

$$s \notin Gen_i \iff \forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin origin(t)$$

Dies ist nun zu zeigen:

$$s \notin Gen_i \iff \forall_{t \in Gen_i} : s \notin origin(t)$$

Bemerkung: $origin(origin(t)) = \left\{s \mid \exists_{u \in origin(t)} : s \in origin(u)\right\}$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin origin(origin(t)) \\
&\iff \forall_{t \in Gen_{i-1}} : s \notin (origin \circ origin)(t) \\
&\iff \forall_{t \in Gen_{i-i}} : s \notin (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t) \\
&\iff \forall_{t \in \mathbb{E}_n} : s \notin (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t)
\end{aligned}$$

Damit dies gilt, müsste s für keine Anzahl i an Telepaartieschritten zu einem Endzustand kommen. Somit müsste s also unlösbar sein. □

1.6.2 Korollar aus Hilfssatz 1: Maximale Mindestschrittzahl

Wenn $s \in Gen_i$ gilt, dann ist s in i oder weniger Telepaartieschritten zu einem Endzustand überführbar.

Beweis Aus Abschnitt 1.6.1 kann man ablesen, dass damit ein Zustand $s \in \mathbb{S}_n$ lösbar ist, also ein Gen_i existiert mit $s \in Gen_i$, gelten muss:

$$\begin{aligned}
& \forall_{t \in Gen_i} : s \notin origin(t) \iff \forall_{t \in \mathbb{E}_n} : s \notin (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t) \\
\iff \quad & \forall_{t \in Gen_i} : s \in origin(t) \iff \exists_{t \in \mathbb{E}_n} : s \in (\underbrace{origin \circ ... \circ origin}_{\text{i-mal verkettet}})(t)
\end{aligned}$$

Da laut Definition von *origin* die i-fache Selbstverkettung von *origin* alle Zustände sind, von denen aus der Parameter mit weniger als oder genau i Telepaartieschritten erreicht werden kann ist, ist der Endzustand $t \in \mathbb{E}_n$ von s in weniger als oder genau i Schritten erreichbar. □

1.6.3 Hilfssatz 2: Eindeutigkeit

Für jeden lösbaren Zustand $s \in \mathbb{S}_n$ gilt, dass *genau ein* i existiert, für dass die Generation Gen_i mit $s \in Gen_i$ existiert.

Beweis Ist der Zustand s lösbar, so existiert laut Abschnitt 1.6.1 ein i mit $s \in Gen_i$. Aufgrund der Kondition $\forall_{i_0 \in \mathbb{N}, i_0 < i} : s \notin Gen_{i_0}$ in der Definition von Gen_i gilt, dass keine Generation $Gen_j, j < i$ aus $(Gen_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existiert, die s enthält. Andersherum gibt es auch keine späteren Generationen $Gen_k, k > i$ mit $s \in Gen_k$, da für diese dann ein $i_0 = i$ mit $s \in Gen_{i_0}$ existieren würde, was gegen die Definition von Gen_i verstößt. □

1.6.4 Hilfssatz 3: Minimalität der Schritte

Für jeden lösbaren Zustand $s \in \mathbb{S}_n$ mit $s \in Gen_i$ gilt, dass $i = LLL(s)$.

Beweis Der Fall $LLL(s) > i$ wird vom Korollar Abschnitt 1.6.2 wiederlegt.

Somit wäre nur noch zu zeigen das $LLL(s) < i$ nicht gilt.

Damit $LLL(s) < i$ gilt, müsste es eine Schrittfolge geben, um s in einen Endzustand überzuführen, mit $k < i$ Schritten.

Die Generationen Gen_j mit $0 \leq j < i$ enthalten zusammen alle Elemente von allen j-fachen Selbstverkettungen von $origin$, also jeden Zustand der in genau $i - 1$ oder weniger Schritten zu einem Endzustand überführbar ist. Mit der Eindeutigkeit der Generationen Abschnitt 1.6.3 verbunden, ist also $LLL(s) < i$ und $s \in Gen_j$ äquivalent.

Ist nun $s \in Gen_i$, gilt laut Abschnitt 1.6.3, dass s in keiner anderen Generation aus $(Gen_i)_{i \in \mathbb{N}}$, also auch keiner Generation Gen_j enthalten ist. Da $LLL(s) < i \iff s \in Gen_j$ gilt, und da $s \notin Gen_j$ gilt, gilt auch $\neg(LLL(s) < i) \iff LLL(s) \geq i$.

Da $LLL(s) \geq i$ gilt, gilt $LLL(s) < i$ nicht. □

2 Umsetzung

3 Beispiele

4 Quellcode