

1 Lösungsidee

Die Kernidee des Algorithmus ist es, alle Terme die mit n Ziffern optimal ihren Wert darstellen zu ermitteln. Dies wird induktiv gelöst, wobei für die Errechnung der optimalen Terme mit Größe n alle kleineren Terme vorausgesetzt werden. Zuerst werden alle infrage kommenden Terme mit Größe n gebildet, indem alle Terme von Größe i mit allen Termen von Größe $n - i$ mit allen binären Operationen gekreuzt werden. Daraufhin werden alle Terme entfernt, deren Wert schon mit kleineren oder gleich großen Termen dargestellt wurde. Um mit diesem Verfahren nun die Aufgabe zu lösen ermittelt man solange größere Terme, bis der gesuchte Wert optimal von einem Term dargestellt wird.

Der Algorithmus scheint auf ersten Blick eine stark explosive Komplexität zu besitzen, jedoch ist dem tatsächlich garnicht so. Im folgenden wird die Komplexität dieses Verfahrens genauer betrachtet.

1.1 Größenmaß-Funktion

Zur Berechnung der Komplexität wird die Größenmaß-Funktion $\varphi_{d,b} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ betrachtet, die die Anzahl an Verwendungen der Ziffer d errechnet, die für die optimale Repräsentation beliebiger rationaler Zahlen benötigt wird. Beispielsweise ist $\forall d, b : \varphi_{d,b}(d) = 1$.

Lemma 1.1 (Größenmaß für ganze Zahlen) Für jede ganze Zahl n gilt:

$$\forall d, b : \varphi_{d,b}(n) \leq n + 2$$

Beweis. — **Fall 1:** $n > 0$

$n > 0$ lässt sich als n mal wiederholte Summierung von d darstellen:

$$n = \frac{d + d + \dots + d}{d} \implies \varphi_{d,b}(n) \leq n \leq n + 2$$

Fall 2: $n = 0$

$n = 0 = \text{const.}$ lässt sich immer mit genau zwei Ziffern darstellen:

$$n = d - d \implies \varphi_{d,b}(n) \leq 2 \leq n + 2$$

Fall 3: $n < 0$

$n < 0$ lässt sich als Differenz aus $0 = d - d$ und $-d$ darstellen:

$$n = d - d - \frac{d + d + \dots + d}{d} \implies \varphi_{d,b}(n) \leq n + 2$$

Lemma 1.2 (Größenmaß für rationale Zahlen) Für jede rationale Zahl $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$$\varphi_{d,b}\left(\frac{a}{b}\right) \leq \varphi_{d,b}(a) + \varphi_{d,b}(b)$$

Beweis. — Die natürlichen Zahlen a und b lassen sich mit $\varphi_{d,b}(a)$ und $\varphi_{d,b}(b)$ Ziffern ausdrücken, also lässt sich $\frac{a}{b}$ mit $\varphi_{d,b}(a) + \varphi_{d,b}(b)$ Ziffern ausdrücken.

Theorem 1.3 (Genauere obere Grenze des Größenmaß für positive ganze Zahlen) Für jede positive ganze Zahl n gilt:

$$\varphi_{d,b}(n) \leq \log_d(n) \cdot (n + 3)$$

Beweis. — Jede ganze Zahl lässt sich im Horner-Schema darstellen. Betrachte man die natürliche Zahl n in Basis d :

$$n = a_1 + d(a_2 + d(\dots da_k)), \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_i < d$$

Es lässt sich leicht ablesen:

$$\begin{aligned} \varphi_{d,b}(n) &\leq \varphi_{d,b}(a_1) + \varphi_{d,b}(d) + \varphi_{d,b}(a_2) + \varphi_{d,b}(d) + \dots + \varphi_{d,b}(d) + \varphi_{d,b}(a_k) \\ &= (k-1) \cdot \varphi_{d,b}(d) + \sum_{i=1}^k \varphi_{d,b}(a_i) \end{aligned}$$

Da $0 \leq a_i < d$ gilt, folgt aus ?? $\varphi_{d,b}(a_i) \leq d+2$. Zusammen mit $\varphi_{d,b}(d) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{d,b}(n) &\leq (k-1) \cdot \varphi_{d,b}(d) + \sum_{i=1}^k \varphi_{d,b}(a_i) \\ &\leq (k-1) \cdot 1 + \sum_{i=1}^k (d+2) \\ &\leq (k-1) + k \cdot (d+2) \\ &\leq k + k \cdot (d+2) = k \cdot (d+3) \end{aligned}$$

Bei der Repräsentation mit dem Horner-Schema gilt $k = \lfloor \log_d(n) \rfloor$, somit folgt:

$$\varphi_{d,b}(n) \leq k \cdot (d+3) = \lfloor \log_d(n) \rfloor \cdot (d+3) \leq \log_d(n) \cdot (d+3)$$

Corollary 1.3.1 (Genauere obere Grenze des Größenmaß für ganze Zahlen) Für jede ganze Zahl n gilt:

$$\varphi_{d,b}(n) \leq \log_d(n) \cdot (d+3) + 2$$

Beweis. — Analog zum Beweis von ??.

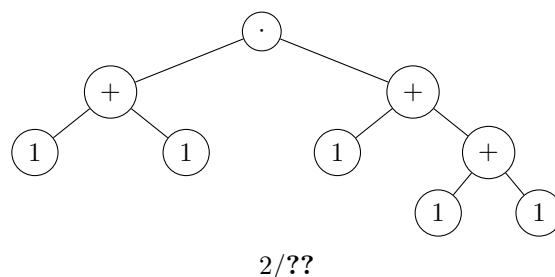
1.2 Anzahl an Termen

Die Anzahl an Termen mit n Ziffern sei definiert als t_n . Bei Größe 0 gibt es beispielsweise $t_0 = 0$ Terme, bei 1 gibt es $t_1 = 1$ Terme und bei 2 gibt es $t_2 = 6$ Terme (d ; dd ; $d+d$; $d-d$; $d \cdot d$; $d \div d$).

Theorem 1.4 (Abschätzung für t_n) Die Anzahl an Termen lässt sich wie folgt nach oben abschätzen, wobei C_n die Catalan Zahlen bezeichnet:

$$t_n \leq C_n \cdot 5^{n-1}$$

Beweis. — Terme von Größe n können als volle Binärbäume mit n Blättern aufgefasst werden, wobei jedes Blatt eine Ziffer oder eine Wiederholung der Ziffer darstellt und jeder Knoten eine binäre Operation zwischen seinen zwei Kindern darstellt. Am Beispiel für $6 = (1+1) \cdot (1+(1+1))$:



Hierbei werden auch invalide Terme mit Division durch Null wie $1 \div (1 - 1)$ mitbetrachtet, jedoch sind alle validen Terme wie oben repräsentierbar, somit ist das folgende eine obere Abschätzung. Im folgenden werden zunächst nur Terme ohne Konkatenierung von Ziffern betrachtet.

Betrachte man nun die Anzahl solcher Binärbäume. Die Anzahl an vollen Binärbäumen mit n Blättern wird durch die Catalan Zahlen C_n beschrieben. Die Catalan Zahlen beschreiben jedoch nur die Anzahl an Binärbäumen, nicht die Anzahl an Binärbäumen mit Operatoren in den Knoten. In einem vollen Binärbaum mit n Blättern gibt es $n - 1$ Knoten bzw. $n - 1$ Operatoren. Bei 4 Operatoren heißt das, dass die Anzahl an Kombinationen von Operatoren 4^{n-1} beträgt. Folglich ist die Anzahl an Binärbäumen mit Operatoren in den Knoten das Produkt dieser beiden Zahlen: $C_n \cdot 4^{n-1}$.

Um nun noch Konkatenierung von Ziffern mitzubetrachten kann man sich einen Konkatenierungs-Operator vorstellen:

$$l \circ r = b \cdot l + r \quad 1 \circ 1 = b + 1 = 10 + 1 = 11$$

Dieser würde natürlich auch "unerlaubte" Konkatenierungen erlauben:

$$(4 + 4 + 4) \circ (4 \cdot 4) = 12 \circ 16 = 12b + 16 = 120 + 16 = 136$$

Jedoch werden so alle validen Konkatenierungen und mehr abgebildet, weshalb es für eine Abschätzung nach oben geeignet ist. Nun lässt sich die vorherige Herangehensweise analog durchführen, jedoch diesmal mit 5 Operatoren. Somit ist die Anzahl an Termen der Größe n kleiner gleich $C_n \cdot 5^{n-1}$.

Corollary 1.4.1 (Anzahl zu betrachtender Terme) Aus ??, ?? und ?? folgt, dass für jede rationale Zahl $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$$t_{\varphi_{a,b}(\frac{a}{b})} \leq a^2 + b^2$$

Beweis. — Laut ?? gilt:

$$t_n \leq C_n \cdot 5^{n-1}$$

Für die Catalan Zahlen gilt folgende obere Abschätzung:

$$C_n < \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{\pi n}}$$

Somit folgt:

$$t_n \leq C_n \cdot 5^{n-1} < \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{\pi n}} 5^{n-1} = \frac{4^n \cdot 5^n}{5(n+1)\sqrt{\pi n}} = \frac{20^n}{5(n+1)\sqrt{\pi n}}$$

Nun kann man $\varphi_{a,b}(\frac{a}{b})$ für n einsetzen. Mit ?? gilt: