

И. А. Котельников

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ

И. А. Котельников

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

2-Е ИЗДАНИЕ (ЭЛЕКТРОННОЕ)

Рекомендовано

УМО по классическому университетскому
образованию РФ в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 011200 – Физика
и по специальности 010701 – Физика



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 533
ББК 22.3 + 22.333
К73

Котельников И. А.

К73 Лекции по физике плазмы [Электронный ресурс] / И. А. Котельников. — 2-е изд. (эл.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 384 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-2298-5

Книга содержит расширенное изложение курса «Основы физики плазмы» и рекомендована УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению 011200 — Физика и по специальности 010701 — Физика. Основное внимание уделяется движению частиц в электромагнитном поле и кинетике плазмы, включающей теорию кулоновских столкновений, тормозного и рекомбинационного излучений, а также ряда других элементарных процессов; детально излагается теория двухжидкостной и одножидкостной магнитной гидродинамики. Уровень изложения рассчитан на студентов, изучивших курсы электродинамики и молекулярной физики и знакомых с основами квантовой механики и статистической физики. Учебное пособие содержит около 200 задач с подробными решениями.

Для студентов, аспирантов, преподавателей вузов, практикующих специалистов и научных работников, специализирующихся в физике и технике плазмы.

**УДК 533
ББК 22.3 + 22.333**

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Предисловие

Предлагаемый учебник содержит расширенное изложение курса «Основы физики плазмы», который студенты кафедры физики плазмы физического факультета Новосибирского государственного университета изучают в осеннем семестре третьего года обучения. Лекции сопровождаются семинарскими занятиями, где студенты решают задачи, составляющие неотъемлемую часть курса, рассчитанного примерно на 32 занятия — по одной лекции и одному семинару в неделю.

Основное внимание в курсе уделяется движению частиц в электромагнитном поле и кинетике плазмы, включающей теорию кулоновских столкновений, тормозного, рекомбинационного излучения и ряда других элементарных процессов; детально излагается теория двухжидкостной и одножидкостной магнитной гидродинамики. Волны в плазме изучаются в других курсах. Уровень изложения рассчитан на студентов, освоивших курсы электродинамики, механики и молекулярной физики. Параллельно с основами физики плазмы студенты физического факультета НГУ изучают физику сплошных сред и квантовую механику, а статистическую физику осваивают позднее, поэтому учебник содержит минимальные сведения из этих дисциплин.

В нынешнем виде физика плазмы в НГУ излагается более двадцати лет. Его основу составил конспект лекций Г. В. Ступакова, изданный с моим участием в 1996 г. [1]. При подготовке нового издания была предпринята попытка отойти от устоявшейся схемы изложения, не приспособленной для углублённого изучения предмета продвинутыми студентами. Результатом стала книга, мало напоминающая первое

издание. Ниже я попробую объяснить мотивы, побудившие меня написать ещё один учебник по физике плазмы, несмотря на наличие многих новых и проверенных временем книг [2—17].

Темп обучения индивидуален. Не все студенты в равной степени способны утрамбовывать плотный поток информации в собственной голове синхронно с «пассажами» лектора у грифельной доски. Однако история знает немало примеров, когда именно «тугодумы» делали выдающиеся открытия. Мне кажется, что в «оперативной» памяти задерживаются знания, интуитивно понятные или, напротив, парадоксальные, но поддающиеся наглядному объяснению, поэтому даже сложные явления поначалу надо излагать просто.

С другой стороны, такая наука, как физика плазмы, не должна предстать винегретом занимательных фактов. Чтобы дать студенту простор для размышлений, часть математических вычислений вынесена в задачи. Некоторые из предлагаемых задач очень просты. Они призваны заострить внимание на какой-то стороне обсуждаемого явления. Другие задачи в своё время были предметом научных дискуссий или требуют громоздких вычислений. Такие задачи неразумно «решать у доски» — они предназначены скорее аспирантам, чем студентам. Часть задач добавлена для того, чтобы избежать ссылок на божественное откровение, которым овеяны некоторые утверждения, кочующие из книги в книгу. Так или иначе ученик должен сам пройти путь познания, однажды пройденный учителем. Решая конкретную задачу, проще осознать, что понято, а что осталось пустым звуком. Задачи попроще нужно решать самостоятельно, а сложные решения полезно разбирать с карандашом в руке, воспроизводя все промежуточные вычисления.

Стивен Вайнберг (Steven Weinberg) писал [18], что *«физику нельзя представлять себе как логически стройную систему. Скорее, в любой момент она увязывает как-то огромное число неупорядоченных идей. Автор книги по физике может навести порядок в этом хаосе либо беспристрастно прослеживая всю его историю, либо следуя своим собственным идеям о том, что такое завершённая логическая структура физических законов. Оба способа приемлемы, важно только не перепутать физику с историей, а историю с физикой»*.

Я излагаю физику сообразно моим представлениям о её внутренней логике. Тем не менее мне было интересно восстанавливать историю физики плазмы. Насколько это было возможно, я старался отыскивать

оригинальные статьи и свидетельства непосредственных участников событий, хотя и такая педантичность ещё не гарантирует отсутствие ошибок.

Стараясь избегать ошибок иного рода, я пытался минимизировать количество иллюстраций, нарисованных свободным движением руки. Графики с результатами расчётов для правдоподобного набора параметров не раз помогали мне избавиться от нелепых заблуждений. Числовые данные по возможности также рассчитывались заново, особенно в тех случаях, когда литературные источники дают противоречивые сведения.

О нумерации формул и системе единиц

Формулы и задачи нумеруются независимо в пределах каждой лекции. Для отсылок на такие вещи в пределах текущей лекции используется одинарная нумерация, но ссылку из другой лекции предваряет её номер. Например, (3.14) обозначает уравнение (14) в лекции 3; ссылка на ту же формулу из текста третьей лекции будет напечатана в виде (14). Нумерация формул в решениях задач продолжает нумерацию формул в тексте лекции, если решение следует непосредственно за формулировкой задачи. Если же решение вынесено в Приложение, используется независимая нумерация формул в пределах каждой задачи.

Всюду в этой книге используется абсолютная физическая система единиц СГС. В формулах СГС отсутствуют нефизические коэффициенты, необходимые в международной системе единиц СИ, а электрическое и магнитное поля имеют одинаковые размерности в соответствии с их физическим смыслом.

Благодарности

Эта книга отражает 40-летний опыт преподавания вводного курса на кафедре физики плазмы НГУ. Его структура была заложена академиком Д. Д. Рютовым. В разное время лекции читали Б. Н. Брейзман, Г. В. Ступаков, С. В. Лебедев, И. А. Котельников, С. Л. Синицкий, К. В. Лотов, А. Л. Санин и снова И. А. Котельников. На протяжении многих лет я имел возможность обсуждать содержание курса со своими коллегами: А. Д. Беклемишевым, Ю. И. Бельченко, А. В. Бурдаковым, Г. Е. Векштейном, В. И. Волосовым, А. А. Ивановым, А. И. Мильштейном, С. В. Рыжковым,

С. Л. Синицким, И. В. Тимофеевым, М. С. Чащиным. Я ценю их советы и доброе отношение ко мне. Особо хочу отметить вклад Г. В. Ступакова, совместно с которым было подготовлено первое издание «Лекций», а также Д. Д. Рютова, который прочёл рукописи двух изданий, сделав замечания, заставившие меня хорошенько подумать. Мне помог также конспект лекций Б. Н. Брейзмана, которые я слушал, будучи студентом. Он был своеобразным репером, определившим уровень сложности излагаемого материала.

Академгородок, Новосибирск
7 мая 2013 г.

Общие сведения о плазме

**Плазма как состояние вещества. Квазинейтральность.
Определение плазмы. Дебаевская экранировка.
Ленгмюровские колебания. Применения плазмы.**

1.1. Плазма как состояние вещества

Известно, что по мере нагревания *твёрдое вещество* сначала превращается в *жидкость* в процессе *плавления*, а затем жидкость *испаряется*, превращаясь в *газ*. Менее известно, что будет происходить с газом при дальнейшем нагревании. Ясно, что с увеличением энергии хаотического движения молекул газа их столкновения друг с другом будут вызывать всё более разрушительные последствия для самих молекул. Сначала молекулы *диссоциируют* на составляющие их атомы, а затем и сами атомы *ионизируются*, т. е. разбиваются на отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ионы. Таким образом, при нагревании любого вещества оно в конце концов превращается в ионизованный газ.

От обычного газа электрически нейтральных атомов и молекул он отличается необычными свойствами, в связи с чем английский химик Уильям Крукс (William Crookes) назвал предмет своих исследований *четвёртым состоянием вещества*. Сэр Крукс экспериментировал с так называемыми катодными лучами, которые получал, пропуская электрический ток через стеклянные трубки с частично откачанным воздухом. После открытия электрона сэром Дж. Дж. Томсоном (Joseph John Thomson, 1897) стало понятно, что катодные лучи представляют собой поток ускоренных электронов в слабоионизованном газе.

Сэр Крукс отчасти был мистиком. Он считается основателем спиритизма, так что сейчас лучше не углубляться в мотивы, которые побудили его выдвинуть гипотезу четвёртого состояния вещества. История сохранила точную дату — 22 августа 1879 г., когда в лекции «Излучающее вещество» сэр Крукс назвал катодные лучи четвёртым состоянием вещества [19]. Термин *плазма* применительно к

ионизованному газу был введен американским физиком Ирвингом Ленгмюром (Irving Langmuir) почти на полвека позже.

В отличие от фазовых переходов первого рода, таких как *плавление* и *испарение*, *ионизация* газа не сопровождается пространственным разделением фаз. Степень ионизации n_i/n_0 , характеризующая отношением плотности ионов n_i к начальной плотности нейтральных атомов n_0 , увеличивается во всем объеме газа плавно по мере увеличения температуры. В пламени свечи имеется небольшое количество свободных электронов и ионов, но его едва ли можно считать настоящей плазмой, так же как и атмосферный воздух, где всегда имеется некоторое количество ионов и свободных электронов за счёт ионизации космическими лучами. Строгое определение состояния вещества, которое можно назвать плазмой, должно включать количественный критерий, когда ионизованный газ приобретает специфические свойства плазмы.

Чтобы найти этот критерий, нужно прежде всего понять, чем новое состояние вещества отличается от обычного газа. Главная особенность коллектива заряженных частиц, составляющих плазму, состоит в появлении нового типа взаимодействия частиц этого коллектива — через дальнедействующие электрические и магнитные поля. Именно благодаря дальнему действию электрических и магнитных сил газ заряженных частиц приобретает новые свойства, образуя нечто целое с электромагнитным полем. Это коллективное (говорят также — *самосогласованное*) поле, с одной стороны, создаётся заряженными частицами плазмы, а с другой — существенным образом влияет на их движение.

1.2. Квазинейтральность

Самосогласованное поле, если оно достаточно сильное, делает ионизованный газ квазинейтральным. *Квазинейтральностью* называют приближённое равенство плотности электронов n_e и ионов n_i , так что вещество в целом электрически нейтрально. В более общем случае, когда атомы ионизованы многократно, в среднем Z раз каждый, квазинейтральность означает, что

$$n_e \approx Zn_i. \quad (1)$$

При достаточно большой плотности электронов и ионов даже малое пространственное разделение зарядов в ионизованном газе привело бы к возникновению очень сильных электрических полей,

препятствующих разделению. Как следствие этого при любых внешних полях «естественной» величины плотности электронов и ионов оказываются близкими друг к другу, а смесь электронов и ионов сохраняет квазинейтральность даже при весьма бурно протекающих в ней процессах.

Напротив, при малой плотности заряженных частиц квазинейтральность разрушится, даже если вначале приготовить электрически нейтральную смесь ионов и электронов. Вследствие хаотического теплового движения более лёгкие электроны быстро разлетятся, оставив позади более тяжёлые ионы, если электрическое притяжение разнозаряженных электронов и ионов недостаточно велико.

1.3. Определение плазмы

Квазинейтральный газ заряженных частиц называют плазмой. В наиболее распространённом случае плазма состоит из электронов и положительно заряженных ионов. В плазме могут присутствовать также нейтральные атомы. Если их доля значительна, плазму называют *слабоионизованной*. Если доля нейтральных атомов пренебрежимо мала, то говорят о *полностью ионизованной* плазме. Существует также понятие *простой плазмы*, применяемое при построении теоретических моделей. Так называют плазму, состоящую из электронов и ионов, произведённых из атомов одного химического элемента, которые потеряли по одному атомарному электрону. Плазму с многократно ионизованными ионами (потерявшими много электронов) называют *лоренцевой*.

Важно понимать, что квазинейтральность есть не изначальная характеристика плазмы, а всего лишь её свойство, вытекающее из главенствующей роли коллективного взаимодействия частиц через самосогласованное поле. При определённых условиях сгусток заряженных частиц одного сорта (например, только электронов) может обладать свойствами, присущими квазинейтральной плазме. В этом контексте такой сгусток называют *заряженной плазмой*.

1.4. Генезис физики плазмы

В переводе с греческого языка слово *πλάσμα* означает лепную фигуру, пластичную массу наподобие воска [20]. Если кровь очистить от красных кровяных тел, останется прозрачная желтоватая жидкость, составляющая примерно 60% объёма крови. Эту жидкость чешский

OSCILLATIONS IN IONIZED GASES

BY IRVING LANGMUIR

RESEARCH LABORATORY, GENERAL ELECTRIC CO., SCHENECTADY, N. Y.

Communicated June 21, 1928

In strongly ionized gases at low pressures, for example in the mercury arc, the free electrons have a Maxwellian velocity distribution corresponding to temperatures that may range from 5000° to $60,000^{\circ}$, although the mean free path of the electrons may be so great that ordinary collisions cannot bring about such a velocity distribution. Electrons accelerated from a hot cathode (primary electrons), which originally form a beam of cathode rays with uniform translational motion, rapidly acquire a random or temperature motion which must result from impulses delivered to the electrons in random directions.

In this laboratory we have been studying these phenomena¹ in detail during the last 4–5 years, but the mechanism underlying the Maxwellian distribution and its extremely short time of relaxation have not been understood. At an early date it occurred to me that electric oscillations of very high frequency and of short wave-length in the space within the tube might produce a scattering of the kind observed, but calculation showed that average field strengths of several hundred volts per centimeter would be necessary and this seemed an unreasonable assumption. Experiments capable of detecting oscillations of the electrodes with amplitudes greater than 0.2 volt failed to show such oscillations.

Ditmer² although unable to detect oscillations, concluded that oscilla-

Рис. 1.1. Факсимиле первой страницы статьи [21] Ирвинга Ленгмюра в Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, где впервые дано определение плазмы и описаны её основные свойства

медик Ян Пуркине (Jan Purkine) назвал плазмой ещё до начала исследований ионизованного газа (около 1848 г.).

В физику термин *плазма* ввёл американский учёный Ирвинг Ленгмюр (Irving Langmuir). Так Ленгмюр назвал ту часть тлеющего газового разряда, где плотности ионов и электронов велики, но по существу равны.

Сохранилось свидетельство Леви Тонкса (Lewi Tonks) [22], что однажды Ленгмюр спросил его, как назвать электрически нейтральную часть газового разряда. Тонкс, по его собственному признанию,

дал классический ответ: «Надо подумать, доктор Ленгмюр». На следующий день Ленгмюр «влетел» в лабораторию со словами: «Мы назовём это — плазма!». Более поздние исследователи, изучив этимологию слова плазма, предположили, что Ленгмюр находился под впечатлением такого легко наблюдаемого свойства тлеющего разряда, как изменение его формы в соответствии с формой газоразрядной трубки, и выбрал подходящее греческое слово [23]. Однако Леви Тонкс вспоминал, что при первых словах Ленгмюра ему тут же представилась картина крови. Другой участник тех событий, Гарольд Мотт-Смит (Harold Mott-Smith), также припоминал [24], что Ленгмюр указывал на сходство между переносом красных и белых кровяных клеток плазмой крови и движением частиц в электрически нейтральной части разряда.

Непосредственные свидетели описываемых событий слегка расходятся относительно даты, когда Ленгмюр отыскивал слово плазма. Мотт-Смит указывает 1927 г., а Тонкс настаивает, что впервые это слово упоминается в рукописи статьи Ленгмюра «Осцилляции в ионизованных газах» [21], опубликованной в трудах Национальной академии наук в 1928 г. Версия Тонкса кажется более правильной, так как в науке дату открытия принято отсчитывать с момента публикации авторами материалов в научном журнале. Не вызывает сомнений, что Ленгмюр целенаправленно искал подходящее слово. Будучи очень плодовитым автором, он ежегодно публиковал множество статей. Едва ли рукописи подолгу лежали на его рабочем столе. Можно предположить, что именно в процессе работы над текстом упомянутой статьи Ленгмюр искал и нашёл слово плазма. Как писал Мотт-Смит, все участники тех событий понимали, что честь открытия достанется не тому, кто его сделал, а тому, кто дал ему имя. «И свидетельством тому — весь континент», открытый Христофором Колумбом (Christóbal Colón), а названный в честь Америго Веспуччи (Amérigo Vespucci). Поэтому днём рождения физики плазмы следует считать день 21 июня 1928 г., когда редакция журнала получила статью Ленгмюра [21].

Многие авторитетные издания относят рождение физики плазмы к 1923 г., когда Ленгмюр изобрёл зонд для измерения плотности и температуры ионизованного газа, начав систематическое исследование газового разряда. Однако потребовалось ещё несколько лет, чтобы обнаружить, а затем и объяснить такое фундаментальное проявление коллективных свойств плазмы, как потенциальные плазменные колебания, которые теперь, как и зонд, называют ленгмюровскими.

Мотт-Смит вспоминал, что долгое время им докучали медицинские журналы просьбами прислать оттиски статей. Физики и химики косо поглядывали на неуклюжее слово и не спешили заимствовать его, а инженеры воспринимали *Plasma* как торговую марку корпорации General Electric, где работал Ленгмюр. Потребовалось 20 лет, чтобы термин плазма в применении к ионизованному газу стал общепринятым. Ленгмюр и его сотрудники экспериментировали со слабо ионизованной плазмой. Сейчас плазмой преимущественно называют полностью ионизованный газ.

В 1929 г. увидели свет несколько статей Ленгмюра, из которых наиболее известна его работа с Тонксом, опубликованная в *Physical Review* [25] под тем же названием «Осцилляции в ионизованных газах». Там в завершённом виде изложена теория ленгмюровских колебаний. Слово *квазинейтральность* придумал Вальтер Шотки (Walter Schottky) в 1924 г. [26]. Тонкс и Ленгмюр впервые используют этот термин в своей второй статье 1929 г. [27], отмечая, что Шотки постулировал квазинейтральность, тогда как в их теории она получала естественное обоснование. В той же статье слово плазма впервые употребляется в заголовке.

1.5. Дебаевское экранирование

Чтобы дать количественную формулировку понятию квазинейтральности, рассмотрим плазму, в единице объёма которой находится n_e электронов (каждый с зарядом $-e$) и примерно столько же однозарядных ионов n_i (с зарядом $+e$). Представим, что вследствие теплового движения частиц в области с размером l произошло разделение зарядов и самопроизвольно возникла разность плотности электронов и ионов $\delta n = n_e - n_i$. В результате появится электрический заряд с плотностью $\rho_\varepsilon = en_i - en_e = -e \delta n$ и электрическое поле, потенциал φ которого определяется из уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho_\varepsilon = 4\pi e \delta n. \quad (2)$$

Для грубой оценки можно принять $\nabla^2 \varphi \approx \delta \varphi / l^2$, где $\delta \varphi$ — перепад потенциала на масштабе l . Тогда из уравнения (2) находим, что по порядку величины

$$\delta \varphi \sim 4\pi e \delta n l^2. \quad (3)$$

Абсолютная величина $e \delta \varphi$ не может существенно превышать среднюю кинетическую энергию частиц K , так как в противном

случае возникший потенциал воспрепятствует разделению зарядов. В свою очередь, величина K определяется температурой плазмы, $K \sim kT$, где $k = 1,38 \times 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана. В физике плазмы температуру T принято измерять в энергетических единицах, отождествляя её с энергией kT ; тогда $k = 1$. Опуская здесь и далее постоянную Больцмана k , ограничение на величину потенциала запишем в виде $e \delta\varphi \lesssim T$, что при учёте оценки (3) даёт

$$\frac{\delta n}{n} \lesssim \frac{T}{4\pi n e^2 l^2}.$$

Вводя обозначение

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}, \quad (4)$$

имеющее размерность длины, можем сказать, что выделенный элемент будет квазинейтральным, если его размер l велик по сравнению с λ_D , так как

$$\frac{\delta n}{n} \lesssim \frac{\lambda_D^2}{l^2}. \quad (5)$$

Параметр λ_D называют *дебаевской длиной* (или радиусом) по имени голландского химика Петера Дебая (Peter Debye). Понятие дебаевской длины было введено в его работе с Эрихом Хюккелем (Erich Hückel) в 1923 г., где были заложены основы теории электролитов [28].

Если линейный размер L всего сгустка заряженных частиц сравним с дебаевской длиной λ_D , то сгусток ионизованного газа не является квазинейтральным, поскольку $\delta n \sim n$. При $L \gtrsim \lambda_D$ сгусток по существу представляет скопление отдельных заряженных частиц, которые не являются плазмой и могут свободно покидать сгусток, так что полное число частиц $N = nL^3$ флуктуирует на такую же величину $\delta N = \delta n L^3 \sim N$.

Ионизованный газ квазинейтрален и, следовательно, является плазмой, если выполнено условие

$$L \gg \lambda_D. \quad (6)$$

Величина флуктуаций числа частиц δN в объёме с линейными размерами порядка L ограничена неравенством

$$\frac{\delta N}{N} \lesssim \frac{\lambda_D^2}{L^2}, \quad (7)$$

существенно более жёстким, нежели условие (5), которое ограничивает величину флуктуаций плотности в малых объёмчиках с размером

$l \ll L$. На совсем малых расстояниях $l \sim \lambda_D$ плотности электронов и ионов могут различаться существенно, так что $\delta n \sim n$. Такое случается вблизи электродов (катода и анода), между которыми зажигают газовый разряд. На поверхности электродов возникает *дебаевский слой*, величина которого обычно пропорциональна температуре плазмы; там $e\delta\varphi \sim (5 \div 8)T$. Дебаевские слои экранирует электрическое поле электродов, препятствуя его проникновению вглубь плазмы.

Если электроды не изолированы и находятся под большим потенциалом $U \gg T/e$, вблизи поверхности электродов возникает *ленгмюровский слой*, где также нарушается квазинейтральность. Его толщина определяется законом «трёх вторых», открытым Чайлдом (C. D. Child, 1911 [29]) и Ленгмюром (I. Langmuir, 1913 [30]).

1.6. Ленгмюровские колебания

Дебаевская длина характеризует пространственный масштаб, на котором происходит разделение зарядов в плазме. Характерное время существования флуктуаций плотности в объёмчике с размером λ_D получается делением λ_D на тепловую скорость электронов $v_e \sim \sqrt{T/m_e}$:

$$t \sim \frac{\lambda_D}{v_e} \sim \sqrt{\frac{m_e}{4\pi n e^2}},$$

где m_e — масса электрона. За это время тепловое движение электронов «замажет» возникшую флуктуацию.

Если флуктуация плотности возникла в объёмчике с размером l , превышающем дебаевскую длину, $l \gg \lambda_D$, тепловое движение не успевает её замазать за время $t \sim \sqrt{m_e/4\pi n e^2}$. В этом случае возникают чисто *потенциальные колебания* с длиной волны $\lambda = l$, в которых магнитное поле отсутствует. Они сопровождаются периодическим изменением плотности электронов вокруг среднего значения, равного плотности ионов.

Действительно, выделим плоский слой электронов, как показано на рис. 1.2, и для простоты пренебрежём тепловым разбросом скоростей (что оправдано, если $\lambda \gg \lambda_D$). Ионы можно считать неподвижными, поскольку одинаковое

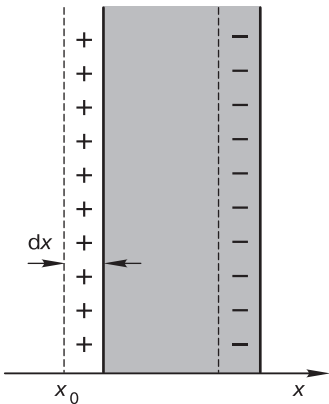


Рис. 1.2. Колебания слоя электронов

по величине электрическое поле вызывает несравненно меньшее смещение ионов из-за их бóльшей массы. Если слой электронов сдвинулся вправо вдоль оси x перпендикулярно своей плоскости на расстояние $dx = x - x_0$ от своего начального положения x_0 (когда плотность электронов была однородна и равна плотности ионов $n_i = n$), то слева от слоя возникнет избыток положительного заряда с величиной $\sigma = en(x - x_0)$ на единицу площади слоя, так как при своём движении слой «обнажает» ионный остов позади. Напротив, справа создаётся избыточный отрицательный заряд $-\sigma$. В результате образуется подобие плоского конденсатора, заряженные обкладки которого формируют электрическое поле

$$E_x = 4\pi\sigma.$$

Оно тормозит электроны в слое, стремясь вернуть их в исходное положение. Приравнявая ускорение электрона в слое \ddot{x} (помноженное на массу m_e) к возвращающей силе $-eE_x$, получим уравнение движения электрона:

$$m_e\ddot{x} = -4\pi e^2 n (x - x_0). \quad (8)$$

Оно описывает колебательное движение с частотой

$$\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m_e} \quad (9)$$

около его исходного положения x_0 (задача 1.3).

По свидетельству Ленгмюра [21], формула (9) была получена Моттом-Смитом. О существовании плазменных электронных колебаний догадывался Артур Дитмер (Arthur Dittmer) [31]. Они были обнаружены Франсом Пеннингом (Frans Penning) в 1926 г. [32, 33], но ни тот, ни другой не смогли понять природу этих колебаний. Теория потенциальных электронных колебаний, вполне современная по своему содержанию, была изложена в первой работе Тонкса и Ленгмюра 1929 г. [25]. Там же описаны потенциальные ионные колебания, которые сейчас называют *ионно-звуковыми*. Ленгмюр и Тонкс также предсказали, что потенциальные электронные колебания сильно затухают, если длина волны сопоставима с дебаевской длиной, предвосхитив теорию *затухания Ландау*. Вполне справедливо поэтому, что потенциальные электронные колебания называют *ленгмюровскими*, а их частоту ω_p — *ленгмюровской частотой*.

1.7. Практические формулы

В практических вычислениях удобной единицей измерения температуры T является электронвольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,6022 \times 10^{-12} \text{ эрг} = 11\,604 \text{ К.}$$

Плотность плазмы n обычно выражают в числе частиц того или иного сорта (электронов или ионов) на кубический сантиметр (см^{-3}), длину l , L , λ — в сантиметрах (см), время t — в секундах (с), круговую частоту ω в радианах в секунду (с^{-1}), а линейную частоту $\nu = \omega/(2\pi)$ — в герцах (Гц). Для вычисления дебаевской длины и ленгмюровской частоты удобны «практические» формулы, где коэффициенты из мировых констант преобразованы в числа:

$$\begin{aligned}\omega_p &= 5,64 \times 10^4 n^{1/2}, \\ \lambda_D &= 7,43 \times 10^2 T^{1/2} / n^{1/2}.\end{aligned}$$

Подобные формулы собраны в уникальном справочнике [34], который можно бесплатно заказать на веб-сайте <http://wwwppd.nrl.navy.mil/nrlformulary/>.

1.8. Плазма в природе

Нередко можно слышать, что 99,9% вещества во Вселенной находится в состоянии плазмы [4, 14]. Вероятно, эта оценка сильно завышена, так как недавние исследования убедили астрофизиков в существовании «тёмной массы», природа которой в настоящее время неясна [35]. Известно только, что она оказывает гравитационное воздействие на расширение Вселенной и движение далёких галактик. Однако звёзды, их атмосферы, газовые туманности и значительная часть межзвёздного газа действительно находятся в ионизованном состоянии. В непосредственном окружении нашей планеты, за пределами земной атмосферы, космические аппараты сталкиваются с плазмой радиационных поясов и солнечного ветра.

Для эффективной ионизации вещества его температура, как можно предположить, должна приближаться к энергии ионизации отдельного атома, а последняя по порядку величины составляет 10 эВ, что соответствует температуре 100 000 К. Позднее мы узнаем, что чем меньше плотность вещества, тем ниже температура, требуемая для ионизации, но всё равно условия существования плазмы несовместимы с условиями развития биологической жизни. В повседневной

Таблица 1.1

Типичные параметры лабораторной и космической плазмы

	$n, \text{см}^{-3}$	$T, \text{эВ}$
Солнечное ядро	10^{26}	10^3
Солнечная корона	10^9	10^2
Солнечный ветер	5	$10 \div 50$
Ионосфера Земли	$10^2 \div 10^6$	0,1
Газовая туманность	10^3	1
Межзвёздный газ	1	1
Газовый разряд	$10^6 \div 10^{14}$	1
Магнитный УТС	$10^{12} \div 10^{15}$	$10^3 \div 10^4$
Инерциальный УТС	$10^{20} \div 10^{24}$	$10^2 \div 10^3$

жизни наши встречи с плазмой ограничиваются редкими природными явлениями, такими как вспышка молнии, свечение полярного сияния, и некоторыми техническими устройствами наподобие неоновой рекламы или сварочной дуги.

Иногда плазму подразделяют на *низкотемпературную* ($T < 10 \text{ эВ}$) и *высокотемпературную* ($T > 10 \text{ эВ}$). Такое деление до некоторой степени условно. Оно всего лишь отражает тот факт, что в лабораторных условиях высокотемпературная водородная плазма полностью ионизована, тогда как в низкотемпературной плазме обычно велика доля нейтральных атомов. Однако межзвёздная плазма полностью ионизована уже при температуре 1 эВ. Для ориентировки в порядках величин в табл. 1.1 приведены типичные параметры плазмы, встречающейся в различных устройствах, в числе которых устройства управляемого термоядерного синтеза (УТС), и в природных объектах.

Газовый разряд

Исследования Ленгмюра и Тонкса в 20-х годах XX века были стимулированы разработкой вакуумных электронных ламп, которые могли пропускать большие токи, а для этого лампы нужно наполнять ионизованным газом. Сейчас бы мы сказали, что Ленгмюр с сотрудниками исследовал низкотемпературную плазму в *газовом разряде* низкого давления. Когда к газовому промежутку прикладывается высокое напряжение, происходит пробой: газ частично ионизируется,



Рис. 1.3. Тлеющий разряд в неоне; квазинейтральная светящаяся часть разряда занимает всё доступное пространство трубки, заполненной частично ионизованным газом; свечение газа обусловлено излучением спектральных линий атомов неона при столкновении с электронами (фото Pslawinski)

и образовавшиеся электроны и ионы, двигаясь в направлении разнополярных электродов, создают разрядный ток. В экспериментах Ленгмюра был получен *тлеющий разряд* с температурой электронов $T_e \approx 2$ эВ и плотностью $10^8 \text{ см}^{-3} < n < 10^{12} \text{ см}^{-3}$.

Газовый разряд можно повсеместно наблюдать в лампах дневного света и грозových разрядах, в ртутных выпрямителях и водородных тиратронах, электрических дугах и неоновых лампах (рис. 1.3). Газовый разряд составляет физический фундамент бурно развивающейся отрасли плазменной обработки материалов. Плазменные технологии используются для упрочнения поверхностей металлов и нанесения покрытий на различные материалы. Имплантация ионов и плазменное травление поверхностей вытесняют химическое травление в микроэлектронной промышленности. Существуют маломощные электроракетные двигатели на основе магнитогидродинамических ускорителей плазмы и разрабатываются более мощные.

Околосземное пространство

Развитие радиовещания в первой половине XX века привело к обнаружению земной *ионосферы* — слоя частично ионизованного газа в верхних слоях атмосферы, который отражает радиоволны. Ионосферу открыл Эдвард Эплтон (Edward Appleton) в 1924 г. Она простирается по высоте от 60 км до 400 км, заполнена слабоионизованной плазмой, плотность которой изменяется с высотой от 10^2 – 10^3 см^{-3}

до $10^5\text{--}10^6\text{ см}^{-3}$. Температура ионосферной плазмы составляет всего 0,1 эВ.

Благодаря отражению от ионосферы стала возможной передача радиосигнала за видимый горизонт. Ионосфера не только отражает и частично поглощает радиоволны, но и искажает форму радиосигнала, так как в магнитном поля Земли волны с разной поляризацией распространяются в ионосфере с разной скоростью. В результате появляются помехи в виде запаздывающего или опережающего эха.

Следующей вехой в изучении околоземной плазмы стало открытие *радиационных поясов* Земли. На основе данных счётчика Гейгера, переданных первым американским космическим спутником Explorer, запущенным 31 января 1958 г., Джеймс Ван Аллен (James van Allen) обнаружил внутренний радиационный пояс [36].

На втором советском искусственном спутнике Земли было установлено два газоразрядных счётчика. С 3 по 9 ноября 1957 г. были получены данные об интенсивности излучений над территорией СССР на высотах 225–700 км. Третий советский спутник, запущенный 15 мая 1958 г., обнаружил внешний радиационный пояс Земли [37]. За открытие радиационных поясов Земли в 1960 г. руководителю программы геофизических измерений С. Н. Вернову была присуждена Ленинская премия, но мировая слава досталась Ван Аллену. Он первым понял, что счётчик Гейгера зафиксировал тормозное излучение электронов в магнитном поле Земли, хотя сначала решил, что «космос радиоактивен».

Сейчас установлено, что радиационные пояса состоят из заряженных частиц, захваченных магнитным полем Земли. Внутренний радиационный пояс на высоте примерно от 700 до 10 000 км преимущественно удерживает протоны с энергией до 100 МэВ и электроны с энергией до 100 кэВ. Внешний радиационный пояс на высоте от 13 000 до 65 000 км состоит преимущественно из электронов с энергией в 0,1–10 МэВ.

С поверхности Солнца непрерывно стекает поток плазмы, называемый *солнечным ветром*. На орбите Земли плотность частиц в солнечном ветре составляет 5 см^{-3} , температура ионов 10 эВ, температура электронов 50 эВ, скорость солнечного ветра 300 км/с. Земная магнитосфера защищает обитателей Земли от губительных воздействий солнечного ветра, деформируясь под его давлением. Время от времени на поверхности Солнца происходят вспышки. При каждой вспышке в космос выплёскивается кратковременный сгусток заряженных частиц. Попадая в атмосферу Земли вблизи магнитных



Рис. 1.4. Полярное сияние на Аляске 18 января 2005 г.; свечение создаётся потоками солнечных частиц, сталкивающихся с газами в атмосфере Земли (фото Joshua Strang)

полюсов, эти частицы вызывают полярные сияния и магнитные бури, приводящие к нарушению длинноволновой радиосвязи (рис. 1.4).

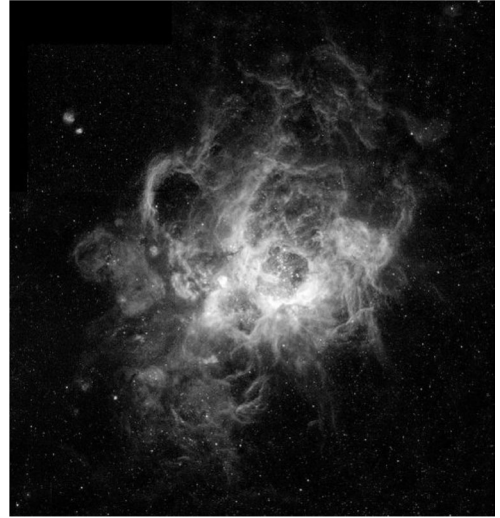
Астрофизика

Астрономы быстро поняли, что для лучшего понимания астрофизических явлений необходимо привлечь представления, позаимствованные из физики плазмы. Пионером в этой области был шведский физик Ханс Альфвен (Hannes Alfvén). В 1940 г. он написал систему уравнений магнитной гидродинамики [38, 39] и предсказал существование магнитогидродинамических волн [40]. Теория Альфвена, которую для краткости называют *теорией МГД*, выдержала проверку временем и сейчас широко используется как для объяснения астрофизических явлений, так и для лабораторных экспериментов по удержанию и нагреву плазмы.

Ядра и атмосферы звёзд настолько горячи, что находятся в плазменном состоянии (рис. 1.5), хотя плотность вещества в ядрах звёзд может превышать плотность твёрдых тел. Температура в центре Солнца равна 1,4 кэВ, а плотность — 160 г/см³. Солнечная корона, напротив, представляет собой разреженную плазму с плотностью (концентрацией) порядка $3 \times 10^8 \text{ см}^{-3}$ и температурой до 200 эВ.

Межзвёздная среда содержит ионизованный водород с температурой 1 эВ и плотностью 1 см⁻³, который пронизан космиче-

Рис. 1.5. Излучающая газовая туманность NGC 604 в спиральной ветви галактики Triangulum, расположенной в северном полушарии вблизи созвездий Персея и Овна на расстоянии 2,4 миллиона световых лет; эта газовая туманность имеет поперечный размер 1500 световых лет, содержит более 200 горячих звёзд, каждая из которых массивнее Солнца в 15–60 раз (фото NASA)



скими лучами, т. е. потоком частиц и фотонов с очень большой энергией.

Управляемый термоядерный синтез

Рождение физики высокотемпературной плазмы относят к началу 50-х гг. XX в., когда была выдвинута идея создания термоядерного реактора на основе управления реакциями синтеза, аналогичными тем, которые питают энергией Солнце и другие звёзды, а также протекают при взрыве термоядерной (водородной) бомбы. Ещё до того, как в США и СССР в 1952 и 1953 гг. соответственно были проведены испытательные взрывы первых термоядерных бомб, в обстановке строгой секретности были начаты работы по управляемому термоядерному синтезу (УТС), прокладывающему дорогу к мирному применению реакций синтеза. В 1958 г. эти работы были рассекречены и вскоре опубликованы [41, 42]. Теоретическая физика плазмы как строгая математическая дисциплина возникла именно в эти годы. Неудивительно, что физика плазмы в представлении многих людей ассоциируется прежде всего с проблемой УТС, которая в определённом смысле не решена до сих пор.

В недрах звёзд ядерное топливо при температуре и плотности, необходимых для протекания реакций синтеза, удерживается гравитационным полем. В земных условиях с той же целью можно

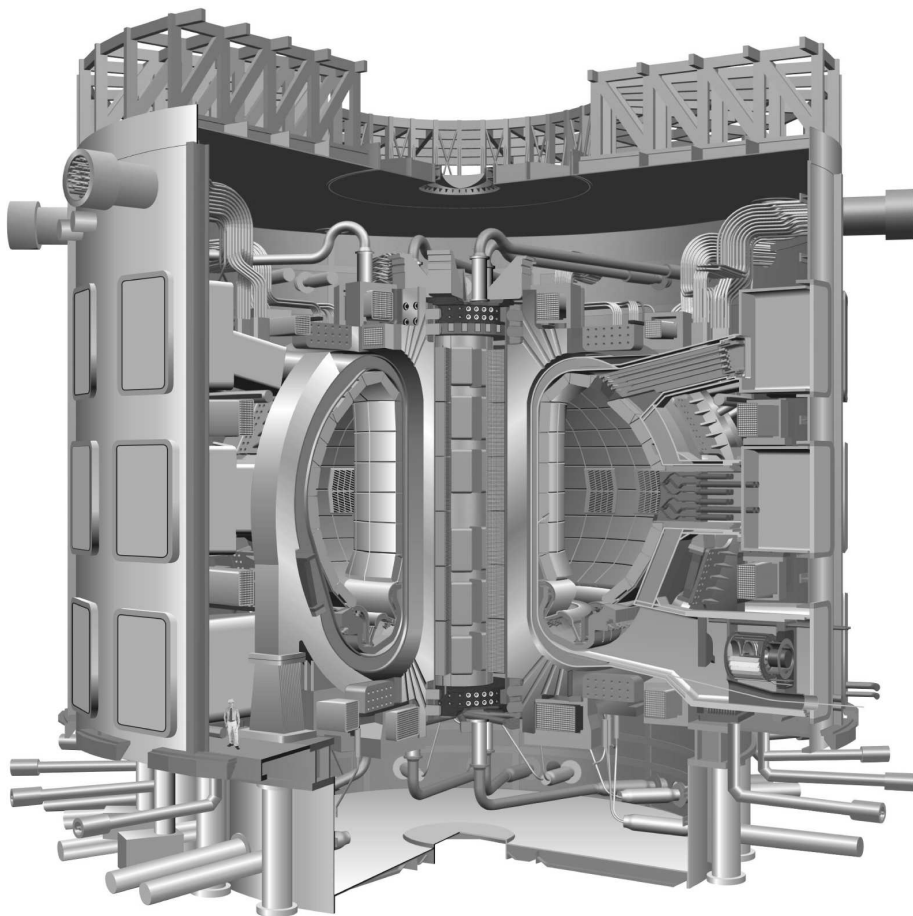


Рис. 1.6. Схема международного токамака ITER, сооружаемого в исследовательском центре «Кадаш» (Cadarache) во Франции; предполагается, что на этом токамаке будут испытаны все системы промышленного термоядерного реактора; на первом уровне сооружения слева показана фигурка человека для сопоставления с размерами этой гигантской установки (рисунок iter.org)

использовать магнитное поле. К настоящему времени установки для *магнитного удержания плазмы* достигли циклопических размеров, как показано на рис. 1.6.

Создание мощных лазеров в 1960-х гг. открыло новое направление *инерциального УТС*. Когда мощный лазерный пучок ударяет твёрдую мишень, происходит испарение (точнее — абляция) поверхностного слоя, в результате чего образуется плазменная оболочка. Условия, необходимые для термоядерного синтеза, достигаются за счёт чрез-

вычайно сильного обжатия мишени реактивной силой со стороны разлетающейся оболочки.

Литература

Возможно, лучшее описание плазмы как четвёртого состояния вещества дано Б. Б. Кадомцевым в первом параграфе учебника «Коллективные явления в плазме» [10]. История рождения физики плазмы описана в статье [43]. Там приведены ссылки на ключевые работы Ленгмюра, Дебая, Пеннинга, Шотки и других основоположников физики плазмы.

Задачи

Задача 1.1. Является ли переход вещества из газообразного состояния в плазменное фазовым переходом первого рода?

Задача 1.2. Оценить дебаевский радиус λ_D для плазмы, состоящей из электронов и ионов с зарядом $Z \gg 1$.

Задача 1.3. В момент времени $t = 0$ электроны плазмы приобрели скорость $v_x = v_0 \cos(kx_0)$, где x_0 — начальная координата электрона. Считая ионы неподвижными, а начальное распределение электронов однородным с заданной плотностью n_0 , описать движение электронов. ►► Ответ

Задача 1.4. Доказать, что в ленгмюровских волнах вихревое магнитное поле равно нулю.

Задача 1.5. Верно ли, что термины «ленгмюровские колебания», «потенциальные электронные колебания» и «плазменные колебания» означают одно и то же? ►► Ответ

Задача 1.6. Найти частоту потенциальных поверхностных колебаний на границе плазмы с вакуумом. ►► Ответ

Задача 1.7. Оценить равновесную плотность энергии электронных плазменных колебаний. ►► Решение

Задача 1.8. Облако электронов, имеющее форму длинного однородного цилиндра, удерживается от разлёта магнитным полем, направленным вдоль оси цилиндра. Показать, что под влиянием собственного электрического поля облако вращается вокруг своей оси. Найти частоту вращения и предельную плотность, при которой магнитное поле способно воспрепятствовать разлёту электронов. Вычислить электрическое поле в системе отсчёта, вращающейся вместе с облаком. ►► Решение

Дебаевское экранирование

Экранирование пробного заряда. Энергия кулоновского взаимодействия в плазме. Плазменный параметр. Идеальная и неидеальная, классическая и вырожденная плазма.

2.1. Экранирование пробного заряда

Плазма содержит свободные заряды и поэтому является проводником. Как любой проводник, она экранирует внешнее статическое электрическое поле. Это явление можно пояснить на примере двух электродов — двух шаров, соединённых с разноимёнными полюсами электрической батареи, как показано на рис. 2.1. В непроводящей среде между шарами возникает электрическое поле. В плазме из-за кулоновского притяжения зарядов противоположного знака отрицательно заряженный шар почти мгновенно будет окружён облаком ионов, а положительно заряженный — облаком электронов, которые компенсируют заряд шариков и тем самым экранируют их поле. Так будет, если шары покрыты слоем изолятора, который не позволяет электронам и ионам плазмы рекомбинировать с зарядами шаров, или если ёмкость батареи достаточно велика, чтобы поддерживать постоянную разность потенциалов.

В достаточно холодной плазме облако покрывает шарик тонким слоем, полностью экранируя его электрический заряд, так что вне

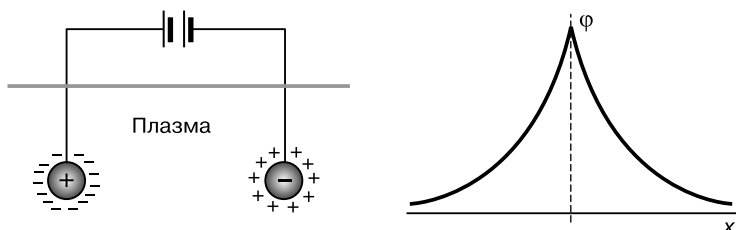


Рис. 2.1. Слева: дебаевское экранирование пробных зарядов в плазме; справа: потенциал дебаевского слоя в плазме вблизи заряженной сетки

облака электрическое поле равно нулю. Внутри слоя квазинейтральность отсутствует. Тепловое движение размывает экранирующий слой, увеличивая его толщину. Внешняя граница слоя располагается на таком удалении от поверхности шара, где потенциальная энергия взаимодействия частиц плазмы с электрическим полем шара примерно равна их тепловой энергии.

Эффект *электростатического экранирования* был детально описан Петером Дебаем (Peter Debye) и Эрихом Хюккелем (Erich Hückel) в 1923 г. на примере электролита, т. е. проводящей жидкости [28]. В наше время его чаще называют *дебаевским экранированием*, а экранирующий слой — *дебаевским слоем* — в честь авторов открытия. Им же принадлежит излагаемая ниже теория.

Представим, что в плазму помещён *пробный* (т. е. сторонний) точечный заряд q , и найдём распределение потенциала φ вблизи него. Учтём, что в потенциальном поле электроны и ионы плазмы распределены по закону Больцмана

$$n_s = n_{s0} \exp\left(-\frac{e_s \varphi}{T_s}\right), \quad (1)$$

где индекс s помечает сорт частиц (электроны, если $s = e$, либо ионы, если $s = i$), а n_{s0} — плотность частиц соответствующего сорта вдали от пробного заряда, где плазма квазинейтральна. Если предположить, что потенциальная энергия $e_s \varphi$ мала по сравнению с температурой T_s любого сорта частиц плазмы, т. е. $|e_s \varphi| \ll T_s$, экспоненту в правой части уравнения (1) можно разложить в ряд Тейлора, ограничившись парой первых членов разложения:

$$\exp\left(-\frac{e_s \varphi}{T_s}\right) \approx 1 - \frac{e_s \varphi}{T_s}.$$

Тогда плотность электрических зарядов

$$\rho_\varepsilon = \sum_s e_s n_s \approx \sum_s e_s n_{s0} \times \left(1 - \frac{e_s \varphi}{T_s}\right) = - \sum_s \frac{e_s^2 n_{s0}}{T_s} \varphi,$$

будет пропорциональна φ , поскольку в силу квазинейтральности сумма первых членов разложения (не зависящая от φ) обращается в нуль, $\sum_s e_s n_{s0} = 0$. Подставив найденную плотность электрических зарядов в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho_\varepsilon,$$

получим уравнение

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}, \quad (2)$$

где дебаевская длина λ_D вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_s \frac{4\pi e_s^2 n_s}{T_s}, \quad (3)$$

в которой n_{s0} для краткости заменено на n_s , так как далее различие между n_{s0} и n_s уже несущественно. Обозначение λ_D , определённое в предыдущей лекции формулой (1.4), фактически относилось только к одному сорту частиц плазмы. Из формулы (3) видно, что при вычислении «полной» длины электростатической экранировки складываются обратные квадраты парциальных дебаевских длин

$$\lambda_{Ds} = \sqrt{\frac{T_s}{4\pi e_s^2 n_s}}, \quad (4)$$

вычисленных отдельно для каждого сорта частиц. Так как λ_{Ds} не зависит от массы частиц, в простой плазме (где $e_i = |e_e| = e$, $n_e = n_i$) при одинаковой температуре ионов и электронов ($T_i = T_e = T$) дебаевские длины электронов и ионов одинаковы, так что $\lambda_D = \lambda_{Di}/\sqrt{2} = \lambda_{De}/\sqrt{2} = \sqrt{T/(8\pi e^2 n)}$. При большом различии величин λ_{Di} и λ_{De} дебаевская длина определяется частицами того сорта, для которого она меньше. Например, в лоренцевой плазме с многозарядными ионами ($e_i = Ze$, $n_e = Zn_i$, $Z \gg 1$) приближённо $\lambda_D \approx \lambda_{Di} = \lambda_{De}/\sqrt{Z}$.

Найдём сферически симметричное решение $\varphi = \varphi(r)$ уравнения (2). Опуская угловую часть оператора Лапласа ∇^2 , получаем уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}.$$

Его решение, обращающееся в нуль при $r \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\varphi = \frac{\mathbb{A}}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right).$$

Растущее решение вида $(\mathbb{B}/r) \exp(+r/\lambda_D)$ также удовлетворяет уравнению, но в данном случае не имеет смысла. Константа \mathbb{A} определяется из того условия, что при $r \rightarrow 0$ должен получиться кулоновский потенциал q/r . Значит, $\mathbb{A} = q$, поэтому окончательно имеем

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \quad (5)$$

Дебаевский потенциал (5) при больших r убывает значительно быстрее, чем кулоновский потенциал пробного заряда q/r . Он складывается из q/r и потенциала экранирующего облака зарядов плазмы

$$\varphi_p = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - \frac{q}{r}. \quad (6)$$

2.2. Энергия кулоновского взаимодействия в плазме

В пределе $r \rightarrow 0$ из (6) находим потенциал $\varphi_p(0) = -q/\lambda_D$, который создают частицы плазмы в точке, где находится пробный заряд. Умножая $\varphi_p(0)$ на q , находим энергию взаимодействия пробного заряда q с плазмой:

$$q\varphi_p(0) = -\frac{q^2}{\lambda_D}. \quad (7)$$

До сих пор речь шла о пробном заряде, помещённом в плазму извне. Однако всё сказанное выше верно и в отношении тех зарядов, из которых состоит сама плазма. Можно представить, что каждая заряженная частица плазмы окружена экранирующим облаком, а поле, которое она создаёт, с учётом экранировки экспоненциально убывает с расстоянием в соответствии с формулой (5).

Рассуждая таким образом, легко найти энергию взаимодействия зарядов плазмы друг с другом. В соответствии с формулой (7), для этого необходимо просуммировать квадраты всех зарядов и результат разделить на величину дебаевского радиуса. Однако при таком вычислении каждая пара зарядов была бы учтена дважды: один раз при умножении первого заряда на потенциал, который создаёт второй заряд в точке, где расположен первый заряд, а второй раз при умножении второго заряда на потенциал первого заряда. Правильный ответ получается делением результата суммирования на 2. Таким образом, энергия w электростатического взаимодействия зарядов плазмы в расчёте на единицу объёма есть

$$w = -\frac{1}{2\lambda_D} \sum_s e_s^2 n_s. \quad (8)$$

Вследствие электрической нейтральности плазмы среднее значение энергии кулоновского взаимодействия её частиц обратилось бы в нуль, если бы они все были равномерно распределены в пространстве независимо друг от друга. Первые ненулевые поправки к внутренней энергии плазмы (по сравнению с идеальным газом) возникают при учёте корреляций между положениями различных частиц, как это видно из предъявленного вывода формулы (8). В этой связи величину (8) называют *корреляционной поправкой* к внутренней энергии плазмы [44, §78].

Далее для простоты ограничимся случаем простой изотермической плазмы с однократно ионизованными ионами одного сорта. Тогда формула (8) принимает совсем простой вид

$$w = -\frac{2ne^2}{2\lambda_D},$$

где

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2 n}},$$

$n = n_e = n_i$ — плотность плазмы (имеющая смысл числа электрон-ионных пар в единице объёма), а $T = T_e = T_i$ — её температура. Так как суммарная плотность частиц (ионов и электронов) в такой плазме равна $2n$, на одну частицу приходится энергия $W = w/(2n)$, т. е.

$$W = -\frac{e^2}{2\lambda_D}. \quad (9)$$

Полезно обратить внимание, что эта энергия не совпадает с грубой оценкой энергии кулоновского взаимодействия частиц в плазме

$$W' \sim -e^2 n^{1/3}, \quad (10)$$

которую можно получить, считая, что она равна произведению зарядов пары соседних частиц e^2 , делённой на среднее расстояние $a \sim n^{-1/3}$ между ними.

Какая же формула верна? Ответ на этот вопрос зависит от величины плазменного параметра.

2.3. Плазменный параметр

Куб отношения дебаевской длины λ_D к среднему расстоянию $a \sim n^{-1/3}$ между частицами плазмы называют *плазменным параметром*. Иногда уточняют, что имеется в виду полное число частиц (электронов и ионов) в сфере с радиусом Дебая:

$$N_D = \frac{8}{3}\pi\lambda_D^3 n. \quad (11)$$

Отсюда происходит другое название плазменного параметра — число частиц в дебаевской сфере.¹⁾

Сравнивая формулы (9) и (10), легко видеть, что

$$W \approx W'/N_D^{1/3}.$$

Если $N_D \gg 1$, то корреляционная энергия W , определяемая формулой (9), будет в $N_D^{1/3}$ раз меньше, чем примитивная оценка W' по формуле (10), не учитывающая эффекта экранирования и поэтому не применимая в этом случае. Если же $N_D \lesssim 1$, то напротив, верна оценка (10),

¹⁾ Иногда используют *газовый параметр* $e^2 n^{1/3}/T \sim N_D^{-2/3}$, характеризующий отношение средней потенциальной энергии к средней кинетической энергии частицы [45, § 27].

поскольку плазма столь разрежена, что качественные представления об экранировании, использованные при выводе формулы (9), теряют смысл.

Парадоксальным образом, из двух формул (9) и (10) верна та, которая даёт меньшее (по абсолютной величине) значение энергии кулоновского взаимодействия.

2.4. Идеальная и неидеальная плазмы

Плазменный параметр играет важную роль в теории плазмы, разделяя состояния вещества с непохожими свойствами. Если в формуле (9) выделить плазменный параметр (11), переписав корреляционную энергию в виде

$$W = -\frac{3}{2}T/(9N_D),$$

станет ясно, что средняя кинетическая энергия частиц плазмы

$$K = \frac{3}{2}T \quad (12)$$

превышает энергию электростатического взаимодействия, т. е.

$$|W| \ll K \quad (13)$$

при выполнении условия

$$N_D \gtrsim 1.$$

В этом случае говорят об *идеальной* плазме. Термодинамические свойства идеальной плазмы мало отличаются от свойств идеального газа (задача 2.8). Например, её внутренняя энергия вычисляется по формуле

$$U = 2 \times \frac{3}{2} nT \left[1 - \frac{1}{9N_D} \right], \quad (14)$$

тогда как для идеального газа $U = \frac{3}{2}nT$. Лишний множитель 2 в правой части (14) связан с тем, что электроны и ионы дают одинаковый вклад, а второе слагаемое в скобках, связанное с кулоновским взаимодействием частиц плазмы, мало; во многих задачах им можно вообще пренебречь.

В обратном случае,

$$|W| \gtrsim K, \quad (15)$$

плазму называют *неидеальной*. В неидеальной плазме можно наблюдать образование периодических структур, напоминающих кристаллическую решётку.

2.5. Классическая и вырожденная плазмы

Предыдущее изложение базировалось на представлениях, выработанных классической, доквантовой физикой. Выясним условия, когда квантовые эффекты несущественны.

При заданной энергии ε частицы с массой m её импульс равен $p = \sqrt{2m\varepsilon}$. Согласно *принципу неопределённости*, имеется неустранимая погрешность (на языке квантовой механики — неопределённость) при одновременном измерении импульса p и соответствующей ему координаты x . Погрешности измерений Δp и Δx обусловлены волновой природой частицы и связаны *соотношением неопределённости* Гейзенберга (Werner Heisenberg, 1927 [46])

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar,$$

где $\hbar = 6,58 \times 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}$ — постоянная Планка (Max Planck, 1900 [47, 48]). Полагая, что неопределённость импульса Δp не может быть больше самого импульса p , находим, что минимальная неопределённость в положении частицы Δx равна *длине волны де Бройля* (Louis de Broglie, 1924 [49]):

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\varepsilon}}.$$

Если λ_B мала по сравнению с межчастичным расстоянием $a \sim n^{-1/3}$, то из волн де Бройля можно составить пакет, размер которого будет мал по сравнению с a и который будет двигаться квазиклассически.

В классической физике этот пакет отождествляют с частицей. Так как при равной энергии длина волны де Бройля для электронов существенно больше, чем для более тяжёлых ионов, при понижении температуры условие $\lambda_B \ll n^{-1/3}$ сначала нарушается для электронов, а уж затем для ионов, когда температура понизится ещё в $m_i/m_e = 1836$ раз. По этой причине, говоря о квантовых эффектах в плазме, имеют в виду прежде всего электроны. Обозначим через

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e\varepsilon}} \quad (16)$$

длину волны электрона (т. е. «длину волны де Бройля для электрона»). Тогда можно сказать, что плазма описывается классической физикой, если

$$\lambda_e \ll n^{-1/3} \quad (17)$$

при $\varepsilon \sim T$. С помощью формулы (16) это условие можно переписать в виде

$$T \gg \varepsilon_F, \quad (18)$$

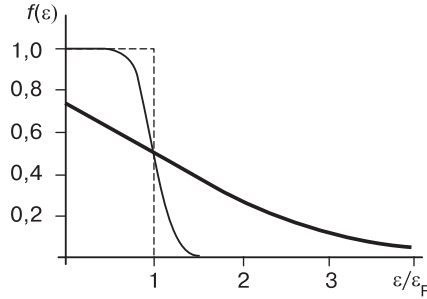


Рис. 2.2. Распределение Ферми—Дирака $f(\varepsilon) = 1/[\exp(\varepsilon/T - \varepsilon_F/T) + 1]$ — среднее число частиц с полуцелым спином в квантовом состоянии в зависимости от энергии состояния ε для трёх различных температур: $T/\varepsilon_F = 1$ (сплошная жирная линия), $T/\varepsilon_F = 0,1$ (сплошная тонкая линия) и $T = 0$ (штриховая линия); в пределе $T \rightarrow 0$ с вероятностью 1 заняты низшие состояния с энергией $\varepsilon \leq \varepsilon_F$; при $\varepsilon \gg \varepsilon_F$ распределение Ферми—Дирака переходит в распределение Максвелла

где величину

$$\varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_e} \quad (19)$$

называют *энергией Ферми* (для электрона).

По определению энергия Ферми (Enrico Fermi, 1926 [50]) равна энергии самого высшего квантового состояния, в котором может находиться *фермион* при абсолютном нуле температуры. К фермионам, в частности, принадлежат электроны и протоны. Так как энергия Ферми обратно пропорциональна массе, для ионов условие, аналогичное (18), фактически всегда выполняется, поэтому вплоть до экстремально низких температур ионы описываются классической физикой. Для свободных электронов в металлах, где их плотность $n_e \approx 10^{21} \div 10^{22} \text{ см}^{-3}$ очень велика, энергия Ферми варьируется в пределах от 1 до 3 эВ, так что неравенство (18) нарушается при комнатных температурах.

В *вырожденной плазме*, характеризуемой условием

$$T \lesssim \varepsilon_F, \quad (20)$$

средняя кинетическая энергия электронов

$$K' = \frac{3}{5} \varepsilon_F \quad (21)$$

примерно равна энергии Ферми и не зависит от температуры, а функция распределения существенно отличается от максвелловской, как показано на рис. 2.2. Происхождение термина *вырожденная плазма* связано с тем, что при низкой температуре квантовые

состояния электронов вырождены по энергии, а именно: на каждом энергетическом уровне находятся по два электрона (задача 2.5).

Избегая подробного изложения квантовой теории (что не является предметом данного курса), можно было бы предположить, что развитые выше представления о дебаевской экранировке в классической плазме сохраняют силу и в квантовом случае, если температуру T во всех формулах заменить на энергию Ферми (задача 2.7). Однако при $T \ll \varepsilon_F$ полная дебаевская длина $\lambda_D \approx \lambda_{Di}$ определяется меньшей по величине дебаевской длиной ионов $\lambda_{Di} = \sqrt{T/(4\pi e_i^2 n_i)}$, так что корреляционная часть энергии взаимодействия W по-прежнему вычисляется по классической формуле (9), если $N_D \gg 1$.

Новым эффектом в вырожденной плазме является обменное взаимодействие, не имеющее аналога в классической физике. В расчёте на одну частицу энергия обменного взаимодействия в квантовом пределе, т. е. при $K' \gg K$, приблизительно совпадает с величиной $W' \sim -e^2 n^{-1/3}$ (см. (10)). В классическом пределе, при $K \gg K'$, нужно использовать другую оценку (см. [44, §80]):

$$W'' \sim -e^2 \lambda_e^2 n. \quad (22)$$

В классическом пределе существует область параметров, где энергия обменного взаимодействия W'' превышает корреляционную поправку W к энергии кулоновского взаимодействия.

2.6. Классификация плазмы

В плоскости параметров n и T линии, соответствующие равенству энергий K , K' , $|W|$, $|W'|$ и $|W''|$ попарно в различных сочетаниях, разделяют различные виды плазмы. Из пяти перечисленных величин можно составить десять независимых равенств. Однако некоторые из них по существу приводят к одинаковой зависимости T от n . А другие если и выполняются, то за пределами применимости соответствующих формул. В итоге остаются всего четыре значимых равенства: $K = K'$, $K = |W|$ и $K' = |W'|$. На рис. 2.3 соответствующие им линии разделяют четыре области, отвечающие классической идеальной (I), классической неидеальной (II), вырожденной неидеальной (III) и вырожденной идеальной (IV) плазме. Ещё одно равенство, $W = W''$, выделяет внутри идеальной классической плазмы остров (I'), где энергия обменного взаимодействия больше (по абсолютной величине), чем корреляционная поправка к энергии кулоновского взаимодействия.

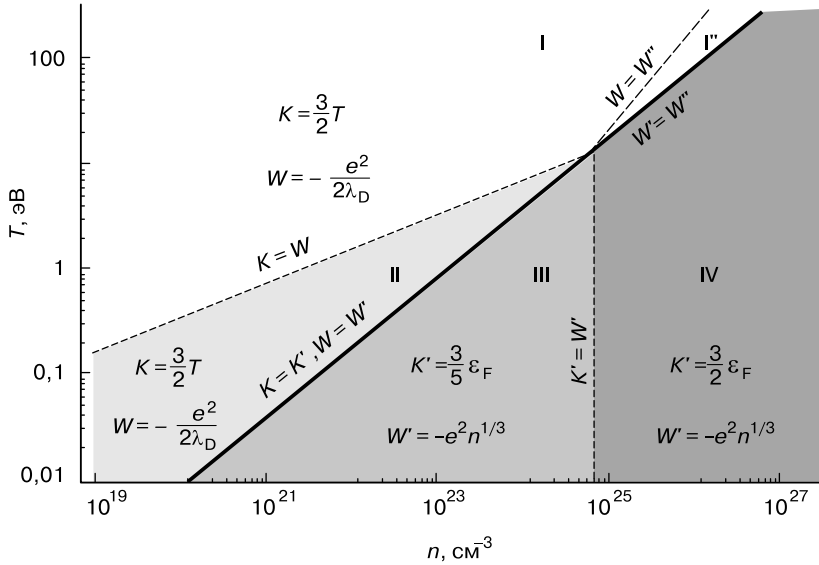


Рис. 2.3. Классификация плазмы: I — классическая идеальная ($K > |W|$), I' — классическая идеальная ($K > |W''|$), II — классическая неидеальная ($K < |W'|$), III — вырожденная неидеальная ($K' < |W'|$), IV — вырожденная идеальная ($K' > |W'|$); на границе между классической и вырожденной плазмой $K = K'$, $W = W'$, $N_D = 1$ и $T \propto n^{2/3}$; на границе между идеальной и неидеальной плазмой $K = W$, $T \propto n^{1/3}$ в классическом пределе и $K' = W'$, $n = \text{const}$ в квантовом пределе; внутри области I проходит граница $W = W''$, $T \propto n$, где корреляционная поправка к энергии сравнивается с энергией обменного взаимодействия

Чтобы разобраться в переплетениях границ, удобно ввести обозначения для боровского радиуса атома водорода

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \times 10^{-8} \text{ см},$$

энергии его ионизации

$$I = \frac{e^2}{2a_B} = 13,6 \text{ эВ}$$

и характерной плотности твёрдого тела

$$n_B = \frac{1}{a_B^3} = 6,75 \times 10^{24} \text{ см}^{-3}.$$

Если теперь перейти к безразмерным переменным, в которых любая энергия измеряется в единицах I , а плотность — в единицах n_B , без вычислений будет ясно, что с точностью до несущественного числового множителя

$$K' \sim n^{2/3},$$

так как $K' \sim \varepsilon_F \propto n^{2/3}$. Аналогичным образом легко установить, что

$$W \sim n^{1/2}/T^{1/2}, \quad W' \sim n^{1/3}, \quad W'' \sim n/T,$$

а кроме того

$$N_D \sim T^{3/2}/n^{1/2}.$$

Построение диаграммы на рис. 2.3 удобно начать с определения границы между классической и вырожденной плазмами. Так как

$$K \sim T,$$

из условия $K = K'$ на этой границе имеем

$$T \sim n^{2/3}. \quad (23)$$

Область применимости классических законов физики, $T \gg n^{2/3}$, на рис. 2.3 лежит выше сплошной линии $K = K'$; $W = W'$. В её пределах построим границу между идеальной и неидеальной плазмами. В принятых безразмерных обозначениях равенство $K = |W|$ имеет вид

$$T \sim n^{1/3}. \quad (24)$$

Плазма неидеальна ниже пунктирной линии $K = W$, где $N_D < 1$.

При очень большой плотности плазмы энергия обменного взаимодействия W'' может превысить корреляционную поправку W . Равенство величин W и W'' достигается на штриховой линии $W = W''$, или

$$T \sim n. \quad (25)$$

Ниже неё обменные эффекты важнее корреляционных, но нигде в классической области обменная энергия не превышает кинетическую. Действительно, равенство $K = |W''|$ даёт линию $T \sim n^{1/2}$ (не показана), а она проходит либо в области вырожденной плазмы (при $n > n_B$), либо там, где обменная энергия меньше корреляционной поправки (при $n < n_B$).

Переходя к квантовой области, $T \lesssim n^{2/3}$, заметим, что на её границе (23) энергия обменного взаимодействия W' сравнивается с корреляционной поправкой W (при $n < n_B$) и энергией обменного взаимодействия W'' в классическом пределе (при $n > n_B$). Таким образом, во всей квантовой области часть энергии, обусловленная наличием в плазме заряженных частиц, вычисляется по формуле для обменной энергии W' . Граница идеальной и неидеальной вырожденной плазмы

$$n \approx 1 \quad (26)$$

определяется из равенства $K' = |W'|$. В размерных единицах она соответствует вертикальной штриховой линии $n = n_B$. Правее неё вырожденная плазма идеальна.

Интересно, что классическая плазма становится более идеальной при уменьшении плотности, тогда как в вырожденной плазме роль электростатического взаимодействия уменьшается при увеличении плотности.

Границы всех областей (23)–(26), пересекаются в общей точке $T \sim 1, n \approx 1$ (т. е. $T = I, n = n_B$), как показано на рис. 2.3. Что происходит при удалении от этой точки в сторону очень больших или очень малых температур или плотностей? При малой температуре плазма превращается в нейтральный газ. При температуре $T \sim m_e c^2 \approx 500$ кэВ (1 кэВ = 10^3 эВ) начинают проявляться релятивистские эффекты. Релятивистская плазма плохо изучена, так как в близлежащей части Вселенной нет объектов с температурой в сотни кэВ, ведь даже в ядре Солнца $T \sim 1$ кэВ. Чрезвычайно разреженная плазма с плотностью $n \sim 1 \text{ см}^{-3}$ имеется в межзвёздном пространстве. Считается, что она полностью ионизована даже при её сравнительно малой температуре $T \sim 1$ эВ. Наконец, при сверхвысокой плотности, достижимой в ядрах массивных звёзд, вырожденная плазма становится релятивистской даже при невысокой температуре (задача 2.12). При чуть более высокой плотности начинается нейтронизация звёзд: электроны сливаются с протонами, образуя нейтроны (задача 2.13).

Литература

Хорошим введением в теорию электростатического экранирования и термодинамику классической идеальной плазмы могут служить «Лекции по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [3, глава I, §2; глава II, §1–3]. В строгом виде термодинамика слабонеидеальной классической и вырожденной плазмы изложена в «Статистической физике» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [45, §78, §80].

Задачи

Задача 2.1. Можно ли разлагать экспоненту в распределении Больцмана (1), как это сделано при выводе уравнения (2), учитывая, что его решение (5) обращается в бесконечность при $r = 0$? Убедиться, что в идеальной плазме минимальное расстояние r_* , на котором разложение ещё допустимо, меньше, чем межчастичное расстояние $n^{-1/3}$. ►► Решение

Задача 2.2. Найти распределение потенциала в *дебаевском слое* вблизи плоской заряженной сетки, помещённой в плазму и находящейся под

заданным потенциалом $eU \ll T$. В противоположном пределе, $eU > T$, вблизи сетки образуется *ленгмюровский слой*. Оценить его ширину с помощью закона «трёх вторых». ►► Решение

Задача 2.3. Плотность ионов в плазме задана как функция координат и имеет вид ступеньки: она равна n_0 при $x < 0$ и $n_0 + n_1$ при $x > 0$, причём $n_1 \ll n_0$. Найти распределение потенциала и плотности электронов, если электронная температура равна T . ►► Ответ

Задача 2.4. Найти условие идеальности лоренцевской плазмы, состоящей из электронов и многократно ионизованных ионов с большим зарядовым числом $Z = e_i/e \gg 1$. ►► Решение

Задача 2.5. Почему при абсолютном нуле температуры энергия газа электронов не равна нулю? ►► Решение

Задача 2.6. Вычислить энергию Ферми и среднюю кинетическую энергию электрона в вырожденном идеальном электронном газе с нулевой температурой. ►► Решение

Задача 2.7. Вычислить дебаевскую длину в вырожденном электронном газе с нулевой температурой. ►► Решение

Задача 2.8. Вычислить корреляционные поправки к свободной энергии и давлению идеальной классической плазмы. ►► Решение

Задача 2.9. Получить оценку (22) для энергии обменного взаимодействия в классической плазме. ►► Решение

Задача 2.10. К какому виду относится плазма в центре Солнца?

Задача 2.11. Чему равна глубина проникновения внешнего электрического поля в металл?

Задача 2.12. Оценить плотность, при которой вырожденная электронная плазма становится релятивистской. ►► Решение

Задача 2.13. Оценить плотность, при которой происходит нейтронизация водородной плазмы, т. е. электроны e прилипают к протонам p , образуя нейтроны n и электронные нейтрино ν_e . Учесть, что реакция $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ происходит с поглощением энергии $Q = 0,78$ МэВ в каждом акте. ►► Ответ

Ионизационное равновесие

**Уравнение Саха. Степень ионизации плазмы.
Ограниченность теории Саха.**

Чем выше температура, тем больше в газе частиц, которые имеют кинетическую энергию, достаточную для ионизации нейтрального атома при столкновении с ним. В процессе ионизации с внешней орбиты атома выбивается связанный электрон, который переходит в свободное состояние. Ясно, что доля ионизованных атомов и свободных электронов зависит от температуры, но как?

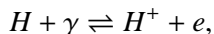
Универсальный ответ можно дать в том случае, когда ионизованный газ находится в состоянии термодинамического равновесия. На языке статистической физики *ионизация* и обратный ей процесс *рекомбинации* являются конкурирующими химическими реакциями. В состоянии равновесия прямая и обратная химические реакции идут с равной скоростью, что соответствует минимуму термодинамического потенциала. Для отыскания равновесной степени ионизации можно было бы минимизировать термодинамический потенциал, но мы воспользуемся более наглядным, хотя и менее строгим, подходом.

Для простоты рассмотрим ионизацию атомарного водорода, полагая, что при интересующих нас температурах молекулы водорода уже диссоциировали. В следующей записи



верхняя стрелка отвечает ионизации атома водорода H с образованием положительного иона H^+ (т. е. протона) и электрона e , а нижняя стрелка — рекомбинации продуктов ионизации с восстановлением нейтрального атома. Строго говоря, как в прямой, так и в обратной реакции (1) необходим ещё как минимум один реагент, без которого невозможно одновременно обеспечить выполнение законов сохранения энергии и импульса (задача 3.1). Этим реагентом может быть

фотон, как в реакции фотоионизации (фоторекомбинации)



или электрон, как в реакции ударной ионизации (тройной рекомбинации)



или другая частица. Для определения равновесной степени ионизации сорт этой четвёртой частицы не имеет значения. Важно только, чтобы скорости прямой и обратной реакций в каждом канале ионизации (рекомбинации) были равны (*принцип детального равновесия*). Скорости наиболее важных реакций будут вычислены в лекции 8.

3.1. Уравнение Саха

Пусть первоначально в объёме V имеется N_0 атомов водорода. В результате однократной ионизации возникнет N_i ионов, столько же электронов $N_e = N_i$ и останется $N_a = N_0 - N_i$ атомов.

Выделим одно атомное ядро — в данном случае это протон. Если рядом с протоном находится связанный электрон, то они образуют атом, в противном случае протон следует считать ионом. В термодинамическом равновесии с заданной температурой T вероятность обнаружить электрон в квантовом состоянии с энергией ε_k убывает с увеличением энергии по экспоненциальному закону:

$$w_k = \mathbb{A} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right). \quad (2)$$

Нормировочная константа \mathbb{A} определяется из условия, что суммарная вероятность обнаружить электрон (неважно, с какой энергией и в каком квантовом состоянии) равна единице:

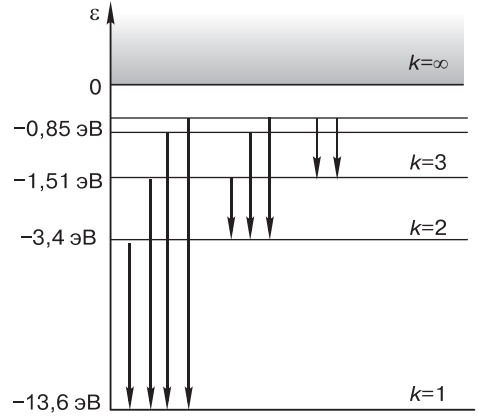
$$\sum_k w_k = 1. \quad (3)$$

Отрицательным значениям энергии $\varepsilon_k < 0$ в формуле (2) отвечают связанные состояния, а положительная энергия $\varepsilon_k > 0$ соответствует свободному движению (рис. 3.1). Энергия связанных состояний составляет *дискретный спектр* и в атоме водорода определяется формулой (задача 3.2)

$$\varepsilon_k = -\frac{I}{k^2}, \quad (4a)$$

где k принимает целые значения, $k = 1, 2, \dots$, а модуль энергии низшего атомарного уровня $I = m_e e^4 / 2\hbar^2 = 13,6 \text{ эВ}$ называют *энергией ионизации* атома водорода.

Рис. 3.1. Энергия электрона в поле протона; связанные состояния имеют отрицательную энергию; переходы между ними формируют излучение в дискретном спектре; энергия свободного электрона положительна и в макроскопических системах фактически не квантуется, принимая любые значения; при захвате свободного электрона на основное состояние $k = 1$ излучается гамма-квант с энергией $\hbar\omega = \varepsilon + 13,6 \text{ эВ}$, которая изменяется пропорционально энергии ε захваченного электрона



В свободном состоянии энергию удобно выразить через импульс электрона p на большом удалении от протона:

$$\varepsilon_k = \frac{p^2}{2m_e}. \quad (46)$$

Поскольку импульс электрона в макроскопических системах фактически не квантуется, составляя непрерывный набор возможных значений, свободному движению отвечает *непрерывный спектр* энергии.

Вычислим коэффициент \mathbb{A} в формуле (2). Разделяя в условии нормировки (3) состояния с положительной и отрицательной энергией, имеем

$$\mathbb{A} = \left[\sum_{\varepsilon_k < 0} \exp(-\varepsilon_k/T) + \sum_{\varepsilon_k > 0} \exp(-\varepsilon_k/T) \right]^{-1}. \quad (5)$$

В сумме по связанным состояниям электрона с $\varepsilon_k < 0$ учтём только самый нижний уровень энергии в атоме, $k = 1$, полагая, что в связанном состоянии электрон с подавляющей вероятностью находится на основном уровне с энергией $\varepsilon_1 = -I$; точность такого приближения будет установлена позднее. Тогда

$$\sum_{\varepsilon_k < 0} \exp(-\varepsilon_k/T) \approx g_a \exp(I/T),$$

где g_a — статистический вес атома, т. е. число различных квантовых состояний атома с минимальной энергией $\varepsilon_1 = -I$. *Статистический вес*, или статвес, как таковой выражает наличие внутренних степеней свободы у частицы или системы частиц, которые в рамках применяемой теории не изменяют энергию системы.

Например, электрон имеет спин, который может быть направлен «вверх» либо «вниз». Учёт внутренних степеней свободы (т. е. спина) в

первом приближении не меняет энергию уровней электрона в атоме. В этом случае говорят, что уровни *вырождены*. При подсчёте вероятности найти электрон в состоянии с заданной энергией должны быть учтены все возможные квантовые состояния с этой энергией. Это обстоятельство учитывают, вводя статвес энергетического уровня, в данном случае статвес основного состояния атома g_a .

Статвес атома вычисляется как произведение статвеса ядра и статвеса электронной оболочки.¹⁾ Статвес атомарного электрона в состоянии с орбитальным моментом $\hbar L$ (где L — целое число) и спиновым моментом $\hbar S$ (где $S = \frac{1}{2}$) вычисляется по формуле $g = (2S + 1)(2L + 1)$, как следует из решения задачи 3.4. В основном состоянии $L = 0$, т. е. $g = 2$. Такой же статвес имеет ядро, а поэтому $g_a = 4$.

Свободному электрону и свободному иону также приписывают статвес, соответственно, g_e и g_i . Энергия свободного электрона, согласно (46), зависит только от его импульса, а каждому значению импульса у электрона со спином $S = \frac{1}{2}$ соответствуют $2S + 1 = 2$ квантовых состояния, т. е. $g_e = 2$. Такой же статвес имеет свободный протон, $g_i = 2$.

Поскольку состояния с $\varepsilon_k > 0$ образуют непрерывный спектр, суммирование по положительным значениям энергии в (5) можно заменить интегрированием. Квантовая теория доказывает, что при переходе к классическому описанию каждому квантовому состоянию электрона с импульсом p соответствует ячейка фазового пространства, объём которой $d^3p d^3x$ равен $(2\pi\hbar)^3$. Иными словами, переход к интегрированию происходит по правилу

$$\sum_{\varepsilon_k > 0} \exp(-\varepsilon_k/T) \Rightarrow g_e g_i \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} \exp(-p^2/(2m_e T)),$$

где множитель $g_e g_i$ добавлен, дабы учесть наличие нескольких квантовых состояний, отвечающих одной и той же энергии $\varepsilon_k = p^2/2m_e$ пары электрон—ион. Вычислив интеграл, получаем

$$\begin{aligned} g_e g_i \int \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/(2m_e T)} &= \frac{g_e g_i}{(2\pi\hbar)^3} \times \int d^3x \times \int_0^\infty 4\pi p^2 dp e^{-p^2/(2m_e T)} = \\ &= \frac{g_e g_i}{(2\pi\hbar)^3} \times V_e \times (2\pi m_e T)^{3/2} = \\ &= \frac{g_e g_i V_e}{(2\pi\hbar^2/(m_e T))^{3/2}}. \end{aligned}$$

¹⁾ Такое правило подразумевает, что квантовое состояние ядра совершенно не влияет на энергию электрона в атоме.

Из интеграла по d^3x в последнее выражение вошёл объём V_e , доступный одному свободному электрону. Вообще говоря, каждый свободный электрон может находиться в любой точке объёма V , занятого плазмой. Однако при подсчёте вероятности найти электрон рядом с заданным ядром не важно, какой именно из полного набора N_e свободных электронов есть тот самый электрон. Поэтому в качестве V_e нужно взять объём, равный отношению полного объёма плазмы к количеству свободных электронов, $V_e = V/N_e = n_e^{-1}$. Обозначая через

$$\lambda_{T_e} = \sqrt{2\pi\hbar^2/(m_e T)}$$

длину волны электрона со скоростью порядка тепловой, запишем результат вычисления нормировочной константы в компактном виде:

$$\mathbb{A} = \left(g_a e^{I/T} + g_e g_i / (\lambda_{T_e}^3 n_e) \right)^{-1}.$$

Вероятность w_a того, что рассматриваемый протон является ядром нейтрального атома (т. е. вблизи него находится электрон в связанном состоянии), равна сумме вероятностей по состояниям с отрицательной энергией. Эта сумма фактически уже вычислена выше:

$$w_a = \frac{g_a e^{I/T}}{g_a e^{I/T} + g_e g_i / (\lambda_{T_e}^3 n_e)}.$$

Все остальные квантовые состояния соответствуют ионизованному атому. Их доля равна

$$w_i = 1 - w_a = \frac{g_e g_i / (\lambda_{T_e}^3 n_e)}{g_a e^{I/T} + g_e g_i / (\lambda_{T_e}^3 n_e)}.$$

Отношение двух вероятностей определяет отношение плотностей ионов и атомов в плазме:

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{w_i}{w_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_{T_e}^3 n_e}.$$

После умножения на n_e отсюда получается *уравнение Саха* (Meghnad Saha, 1920, [52]):

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_{T_e}^3}. \quad (6)$$

Функция температуры

$$K(T) = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_{T_e}^3} \quad (7)$$

в правой части уравнения называется *константой равновесия*.

3.2. Степень ионизации плазмы

Степень ионизации плазмы характеризует отношение

$$\alpha = N_i/N_0.$$

Через α нетрудно выразить плотности (концентрации) частиц всех сортов в долях от суммарной плотности ядер (как в атомах, так и в ионах) $n_0 = N_0/V$:

$$n_e = n_i = \alpha n_0, \quad n_a = (1 - \alpha) n_0.$$

Уравнение Саха связывает степень ионизации α с n_0 и T . Вводя обозначение

$$G(T) = \frac{g_i g_e / g_a}{\lambda_{T_e}^3 n_0},$$

его удобно переписать в виде

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = G(T) e^{-I/T}. \quad (8)$$

Зависимость $\alpha(T)$ при разных значениях n_0 изображена на рис. 3.2. При малых температурах α стремится к нулю, при больших — к единице. Условно приняв за точку перехода в ионизованное состояние значение $\alpha = \frac{1}{2}$, из (8) получим уравнение

$$T_* = I / \ln[2G(T_*)] \quad (9)$$

для определения температуры перехода T_* .

На первый взгляд температура ионизации T_* по порядку величины должна равняться энергии ионизации I , поскольку тогда средняя кинетическая энергия свободных электронов как раз достаточна для

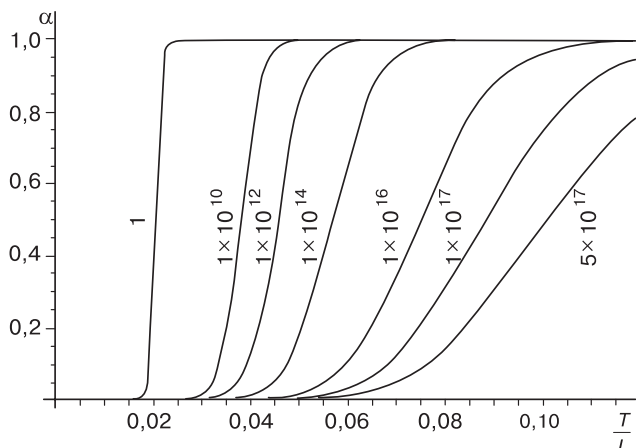


Рис. 3.2. Степень ионизации термодинамически равновесной водородной плазмы при различных значениях плотности частиц n_0 (в см^{-3})

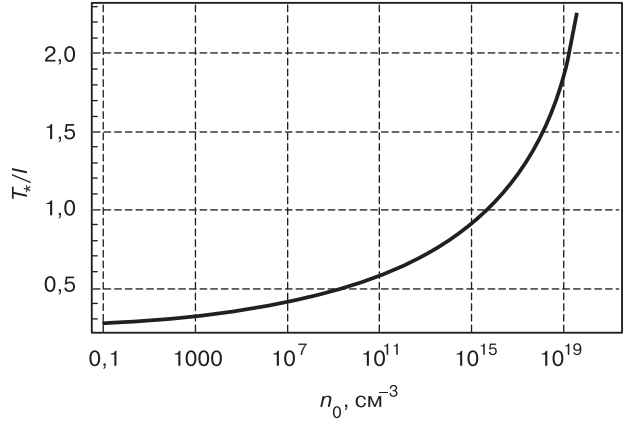


Рис. 3.3. Температура перехода в ионизованное состояние атомарного водорода в зависимости от плотности газа

однократной ионизации атома из основного энергетического состояния. На самом деле, температура перехода оказывается значительно ниже, $T_* \ll I$, так как перед экспонентой в правой части уравнения (8) стоит множитель $G(T) = g_i g_e / g_a \lambda_{T_e}^3 n_0 \sim (T/\varepsilon_F)^{3/2}$, который в классической плазме, где $T \gg \varepsilon_F \sim \hbar^2 n_0^{2/3} / 2m_e$, имеет очень большую величину. Например, $G = 1,5 \times 10^8$ в плазме с плотностью $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и температурой $T = I = 13,6 \text{ эВ}$. При этом доля ионизованных частиц α уже очень близка к единице:

$$1 - \alpha = 1,8 \times 10^{-8}.$$

Точное решение уравнения (9) приведено на рис. 3.3. При указанной выше плотности получаем $T_* = 0,065 I = 0,88 \text{ эВ}$.

Огромная величина $G(T)$ обусловлена тем фактом, что свободному электрону доступен практически весь объём плазмы в отличие от связанного электрона, который привязан к ядру атома. Поэтому вероятность обнаружить электрон в свободном состоянии существенно больше, чем можно было бы ожидать, сравнивая экспоненциально убывающие с ростом энергии вероятности (2) квантовых состояний. Можно также сказать, что в непрерывном спектре велика плотность квантовых состояний, а $G(T)$ есть эффективный статистический вес состояния с энергией порядка тепловой в непрерывном спектре.

Если велико значение не только $G(T_*)$, но и $\ln G(T_*)$, под знаком логарифма в (9) с приемлемой точностью можно заменить T_* на I , получив в результате оценку

$$T_* \approx I / \ln G(I).$$

В разреженном газе переход в ионизованное состояние происходит в сравнительно узком диапазоне температур шириной

$$\Delta T_* \approx T_*^2 / I \approx I / \ln^2 G(I).$$

Это хорошо видно из рис. 3.2.

3.3. Ограниченность теории Саха

Обсудим теперь, насколько большую ошибку мы сделали, исключив из суммы по связанным состояниям возбуждённые уровни атома водорода. Поскольку заметная ионизация происходит при $T \approx T_* \ll I$, а расстояние от основного ($k = 1$) до первого возбуждённого уровня ($k = 2$) равно $\frac{3}{4}I$, вероятность электрону перейти в первое возбуждённое состояние из основного, пропорциональная $\exp\left[-\frac{3}{4}I/T\right]$, очень мала. Другими словами, электрон «предпочитает» перейти в непрерывный спектр, вместо того чтобы «сесть» на следующий уровень. Причина такого поведения заключается в том, что количество уровней в непрерывном спектре очень велико, и хотя вероятность находиться на каждом из них относительно мала, суммарная вероятность попасть на какой-то уровень непрерывного спектра оказывается значительной уже при $T \ll I$.

Более пристальный анализ показывает, что отброшенная часть ряда по возбуждённым атомарным уровням расходится, так как статвес высших возбуждённых уровней стремится к бесконечности (задача 3.4). Однако эта расходимость носит формальный характер, так как высшие возбуждённые уровни существуют только в идеализированной задаче об энергетических уровнях изолированного атома. Воздействие соседних атомов, а также электрического поля заряженных частиц приводит к исчезновению этих уровней (задача 3.5).

Применимость уравнения Саха к расчёту ионизационного состояния газа может быть ограничена по причинам, более фундаментальным, нежели величина членов, отброшенных при её выводе. Уравнение Саха неприменимо, если плазма не является замкнутой системой, например если из неё свободно выходит излучение, которое сопровождает процесс рекомбинации. В этом случае степень ионизации находят, сравнивая скорости реакций ионизации и рекомбинации. Анализу этих реакций посвящена лекция 8. В задаче 3.8 приведён ещё один пример, когда уравнение Саха заведомо неправильно предсказывает степень ионизации в центре Солнца.

Литература

В «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [3, гл. 2, §§4–9] дано наиболее детальное и вместе с тем наименее формализованное изложение теории Саха в учебной литературе. Вывод уравнения Саха методами статистической физики имеется в курсе «Теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [44, §104], там же указан способ вычисления статического веса атома и иона.

Задачи

Задача 3.1. Доказать, что в реакции (1) законы сохранения импульса и энергии не могут быть выполнены одновременно.

Задача 3.2. Найти энергию связанного электрона в атоме водорода, используя планетарную модель атома.

Решение. Энергия электрона, движущегося по круговой орбите вокруг протона, состоит из кинетической энергии и энергии кулоновского взаимодействия с протоном:

$$\varepsilon_k = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{r}.$$

Равновесный радиус орбиты определяется из равенства центростремительной силы и силы кулоновского притяжения электрона к положительно заряженному протону:

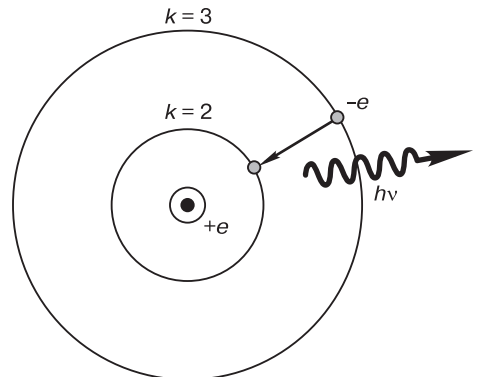
$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}.$$

В итоге получается, что потенциальная энергия по абсолютной величине в 2 раза превышает кинетическую, а полная энергия электрона отрицательна:

$$\varepsilon_k = -\frac{m_e v^2}{2} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Согласно постулату Нильса Бора (Niels Bohr, 1913 [53]), электрон в атоме водорода может находиться только на стационарных орбитах (рис. 3.4),

Рис. 3.4. Модель Бора атома водорода: электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите; переход с одной орбиты на другую сопровождается излучением или поглощением кванта электромагнитной энергии $h\nu$; радиусы орбит пропорциональны квадрату главного квантового числа k ; изображённый переход $3 \rightarrow 2$ сопровождается излучением фотона с длиной волны 656 нм в первую линию серии Бальмера (Balmer)



которым соответствуют значения орбитального момента $m_e v r$, кратные постоянной Планка $\hbar = h/2\pi$, т. е.

$$m_e v r = \hbar k,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число. Подставляя это соотношение в уравнения баланса сил, находим радиус орбиты

$$r_k = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} k^2,$$

скорость

$$v_k = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{c}{k}$$

электрона, а затем и энергию соответствующего уровня

$$\varepsilon_k = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{k^2}.$$

Правило квантования орбитального момента по Бору означает, что на окружности орбиты $2\pi r$ укладывается целое число длин волн де Бройля $\lambda_e = 2\pi\hbar/m_e v$, но это стало ясно только после открытия волнового дуализма электрона Луи де Бройлем (Louis de Broglie, 1924 [49]).

Радиус орбиты первого (основного) уровня

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,5 \times 10^{-8} \text{ см}$$

называют *боровским радиусом*. Радиусы орбит возбуждённых состояний с $k > 1$ увеличиваются пропорционально квадрату их номера k , т. е. $r_k = a_B k^2$.

Минимальная энергия, которую необходимо передать атомарному электрону на низшем энергетическом уровне, чтобы ионизовать атом, равна (со знаком минус) энергии основного состояния (энергии ионизации)

$$I = \frac{e^2}{2a_B} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}.$$

Энергия более высоких (возбуждённых) атомарных уровней $\varepsilon_k = -I/k^2$ с увеличением их номера k ступается к нулевой величине. Соответственно, для ионизации возбуждённого атома требуется меньшая энергия.

Отношение скорости электрона на основном уровне к скорости света $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ известно в квантовой физике под названием *постоянной тонкой структуры*. Соответственно, на основном энергетическом уровне скорость электрона примерно в 137 раз меньше скорости света, а на более высоких уровнях она уменьшается пропорционально k^{-1} , $v_k = \alpha c/k$. Через постоянную тонкой структуры можно выразить также боровский радиус $a_B = (e^2/m_e \alpha^2 c^2)$ и энергию ионизации $I = \frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2$.

Задача 3.3. Обобщить решение предыдущей задачи на случай водородоподобного иона с зарядом ядра Ze и одним связанным электроном. ►► Решение

Задача 3.4. Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием, найти статистический вес атома водорода для энергетического уровня с главным квантовым числом k . ►► Решение

Задача 3.5. Статвес атома на k -м энергетическом уровне равен $2k^2$, поэтому сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \exp(-\varepsilon_k/T)$, представляющая вероятность электрону находиться в связанном состоянии, формально расходится. Означает ли это, что пренебрежение вкладом уровней с $k \rightarrow \infty$ при выводе формулы Саха ошибочно? ►► Ответ

Задача 3.6. Почему при фиксированной температуре степень ионизации тем выше, чем меньше плотность?

Задача 3.7. Используя данные из табл. 1.1, оценить степень ионизации межзвёздного газа. ►► Решение

Задача 3.8. Вычислить долю нейтральных атомов в центре Солнца, где $T = 1,6 \times 10^7$ К, а массовая плотность равна $\rho = 160$ г/см³. По данным спектральных измерений, Солнце приблизительно на 90% состоит из водорода (по числу атомов), на 10% — из гелия, остальные элементы составляют менее 0,1%. Энергия ионизации водорода $I_H = 13,595$ эВ, гелия $I_{He} = 24,580$ эВ. ►► Ответ

Задача 3.9. Водород с плотностью $n = 10^{17}$ см⁻³ нагрет до температуры 0,3 эВ. Чтобы увеличить проводимость плазмы, в неё добавляют калий. Какова должна быть доля примесных атомов, чтобы число свободных электронов увеличилось в 2 раза? Энергия ионизации калия равна $I_K = 4,339$ эВ, а его основное состояние двукратно вырождено. ►► Решение

Задача 3.10. Неионизованный одноатомный газ с начальной плотностью n и температурой T сжимают без отвода или подвода тепла. Оценить температуру T_* перехода в ионизованное состояние. ►► Решение

Задача 3.11. Получить уравнение ионизационной адиабаты, связывающее плотность и температуру ионизованного газа при сжатии газа без подвода тепла. ►► Решение

Движение заряженных частиц

Дрейфовое приближение.

Дрейф под действием малой силы.

Электрический, градиентный и центробежный дрейфы.

Поляризационный дрейф. Дрейф в неоднородном электрическом поле. Скорость движения ведущего центра.

Современная физика плазмы базируется на фундаменте кинетической теории. В свою очередь, кинетическая теория строится на анализе движения отдельной заряженной частицы в электромагнитном поле. С такого анализа мы и начнём, причём будем считать, что зависимость электрического и магнитного полей от координат и времени полностью задана. Уравнения для определения электрического и магнитного полей в плазме являются составной частью магнитной гидродинамики и будут изложены позднее.

4.1. Дрейфовое приближение

В лабораторных условиях для удержания плазмы в замкнутом объёме обычно используют магнитное поле. Оно обеспечивает *термоизоляцию плазмы*, препятствуя тепловому контакту со стенками лабораторных устройств, который иначе мгновенно бы остужал плазму, превращая её в нейтральный газ. Магнитное поле имеется в звёздах и межзвёздном пространстве. В отличие от электрического поля статическое магнитное поле сравнительно легко проникает в плазму (задача 4.1), искривляя траектории движения заряженных частиц.

В общем случае пространственно неоднородного и переменного во времени электромагнитного поля движение частиц чрезвычайно запутано. Найти точное решение уравнений движения удаётся только в исключительных случаях, например когда поле обладает какой-либо пространственной симметрией. Но есть и хорошие новости. Во многих практических приложениях магнитное поле можно считать почти однородным и почти постоянным. «Почти» здесь означает, что лар-

морозовский радиус частицы ρ мал по сравнению с пространственным масштабом изменения электрического и магнитного полей ℓ ,

$$\rho \ll \ell, \quad (1)$$

а период циклотронного вращения $2\pi/\Omega$ мал по сравнению с характерным временем изменения полей τ ,

$$2\pi/\Omega \ll \tau. \quad (2)$$

Малость параметров ρ/ℓ и $2\pi/(\Omega\tau)$ позволяет разложить движение частицы на быстрое циклотронное вращение и медленное движение воображаемого центра ларморовской окружности. Это сравнительно медленное движение называют *магнитным дрейфом*. Скорость дрейфа удаётся вычислить в общем случае произвольной геометрии магнитного поля. Однако последовательный вывод уравнений дрейфового движения весьма громоздок, поэтому мы ограничимся менее строгим, но не менее поучительным эвристическим обсуждением.

4.2. Движение в однородном магнитном поле

Для начала напомним основные сведения о движении заряженной частицы в постоянном и однородном поле. Это будет нулевой порядок дрейфового разложения.

В магнитном поле B на заряженную частицу действует сила Лоренца (Hendrik Lorentz, 1892 [54])

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (3)$$

Она перпендикулярна как направлению магнитного поля, так и скорости частицы \mathbf{v} . Из уравнений движения,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (4б)$$

частицы с зарядом e и массой m следует, что энергия частицы сохраняется.¹⁾ Действительно, после умножения уравнения (4б) скалярно

¹⁾В этой лекции для краткости мы опускаем индекс, обозначающий принадлежность e , m и других подобных величин тому или иному сорту частиц. В частности, следует отличать обозначение e , имеющее здесь смысл заряда e_s частиц сорта s с учётом знака заряда, от элементарного заряда e в других лекциях, который всегда положителен.

на mv его правая часть обращается в ноль, поскольку $\mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$, а слева имеем $m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(mv^2/2)$, т. е.

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = 0.$$

Аналогичным образом доказывается, что в однородном и постоянном магнитном поле сохраняется проекция скорости v_{\parallel} на направление \mathbf{B} . Умножив обе части уравнения (46) скалярно на \mathbf{B} , справа вновь получим ноль, так как $\mathbf{B} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. В левой части вектор \mathbf{B} можно внести под знак дифференцирования, так как он не изменяется вдоль траектории движения частицы: $(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{v}) = d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})$. Затем надо учесть, что $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) = Bv_{\parallel}$, и вновь вынести постоянную величину B за знак дифференцирования: $d(Bv_{\parallel}) = B dv_{\parallel}$. В результате получаем:

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0.$$

Из постоянства полной скорости частицы v и её проекции v_{\parallel} на направление магнитного поля следует, что сохраняющейся величиной также является абсолютное значение перпендикулярной скорости

$$v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_{\parallel}^2}.$$

Подчеркнём, что v_{\parallel} и v_{\perp} будут постоянными только в однородном и постоянном магнитном поле, иначе приведённые выше рассуждения с вносом и выносом \mathbf{B} за знак дифференцирования не проходят.

Чтобы упростить обозначения, перепишем уравнение (46) в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}], \quad (5)$$

где вектор

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e\mathbf{B}}{mc}$$

коллинеарен \mathbf{B} , а по величине совпадает с *циклотронной частотой*

$$\Omega = \frac{eB}{mc}.$$

Условимся здесь и далее, что знак циклотронной частоты совпадает со знаком заряда e , а $B = |\mathbf{B}|$ обозначает абсолютную величину магнитного поля. Так как $v = \text{const}$, ясно, что уравнение (5) описывает вращение вектора \mathbf{v} , а так как неизменна проекция скорости v_{\parallel} на вектор $\boldsymbol{\Omega}$, очевидно, что вектор \mathbf{v} вращается вокруг направления $\boldsymbol{\Omega}$. Угловая частота вращения равна Ω , причём направление вращения

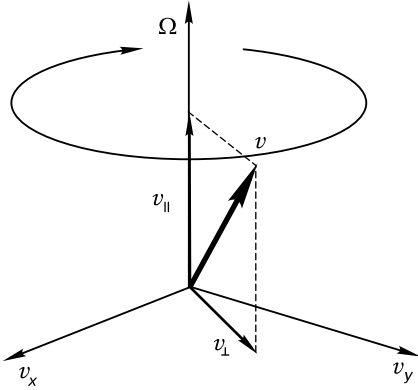


Рис. 4.1. Направление вращения вектора скорости заряженной частицы в магнитном поле составляет левый винт с направлением вектора $\Omega = eB/(mc)$, определённого с учётом знака заряда e

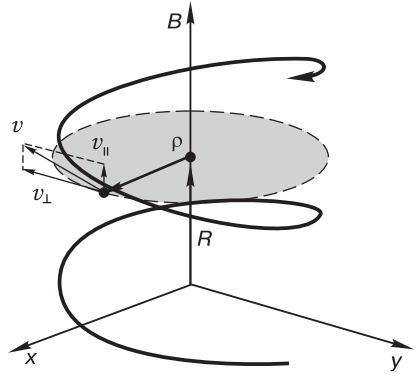


Рис. 4.2. Орбита частицы в однородном магнитном поле образует спираль; штрихами показана ларморовская окружность; в её центре находится вообразимый ведущий центр частицы

составляет левый винт с направлением вектора Ω , как показано на рис. 4.1.

В однородном постоянном магнитном поле траекторию движения заряженной частицы нетрудно вычислить в явном виде. Направляя ось z по вектору $B = B\hat{z}$, имеем

$$\dot{v}_x = \Omega v_y, \quad (6a)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x, \quad (6б)$$

$$\dot{v}_z = 0. \quad (6в)$$

Последнее уравнение (6в) подтверждает, что скорость частицы $v_z = v_{\parallel}$ вдоль направления магнитного поля постоянна.

Чтобы решить уравнения (6а) и (6б), сложим их, предварительно умножив второе уравнение на мнимую единицу i :

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\Omega(v_x + iv_y).$$

Полученное уравнение легко интегрируется, связывая комплексный вектор $(v_x + iv_y)$ с его значением $(v_x + iv_y)_0$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$(v_x + iv_y) = (v_x + iv_y)_0 \exp(-i\Omega t). \quad (7)$$

Выполнив ещё одно интегрирование по времени, найдём координаты частицы:

$$(x + iy) = (X + iY) + \frac{(v_x + iv_y)_0}{-i\Omega} \exp(-i\Omega t). \quad (8)$$

Смысл констант X и Y станет ясен позже. Вводя начальную фазу вращения ψ_0 (вещественную) и поперечную скорость v_\perp (также вещественную) посредством $(v_x + iv_y)_0 = v_\perp \exp(i\psi_0)$, а затем отделяя вещественную и мнимую части в уравнениях (7), (8), получим

$$v_x = v_\perp \cos(\psi_0 - \Omega t), \quad x = X - \rho \sin(\psi_0 - \Omega t), \quad (9a)$$

$$v_y = v_\perp \sin(\psi_0 - \Omega t), \quad y = Y + \rho \cos(\psi_0 - \Omega t). \quad (9б)$$

Эти формулы описывают циклотронное вращение по окружности с *ларморовским радиусом*

$$\rho = \frac{v_\perp}{\Omega}$$

вокруг точки (X, Y) в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} . На это вращение накладывается движение с постоянной скоростью v_\parallel вдоль \mathbf{B} :

$$v_z = v_\parallel, \quad z = z_0 + v_\parallel t. \quad (9в)$$

Таким образом, в однородном постоянном магнитном поле заряженная частица в общем случае движется по спирали, как показано на рис. 4.2. Воображаемый центр спиральной траектории перемещается по прямой, совпадающей с магнитной силовой линией.¹⁾

В теории магнитного дрейфа этот центр называют *ведущим* или *ларморовским центром*. Его положение в произвольный момент времени будем характеризовать вектором

$$\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}.$$

В данном случае первые две координаты этого вектора X и Y остаются постоянными при движении частицы, а третья координата $Z = z_0 + v_\parallel t$ изменяется пропорционально времени.

Концепция ведущего центра ларморовской орбиты частицы даёт ключ к анализу движения заряженной частицы в электромагнитном поле, слабо неоднородном в пространстве и медленно меняющемся во времени. Можно ожидать, что при достаточно слабой неоднородности и достаточно медленном изменении поля траектория движения приближённо останется спиралью. Если при этом отвлечься от быстрого вращения частицы вокруг ведущего центра, то для описания её движения достаточно проследить за движением ведущего центра.

¹⁾Магнитные силовые линии не являются линиями действия силы в точном смысле этого слова, однако неправильный по своей сути термин увековечен трудами многих поколений физиков. В технических науках используется термин «линии магнитной индукции».

4.3. Электрический дрейф

В общем случае ведущий центр, двигаясь преимущественно вдоль магнитной силовой линии, медленно смещается поперёк магнитного поля. Этот эффект проще всего продемонстрировать, если к предыдущему анализу добавить однородное постоянное электрическое поле \mathbf{E} . Из уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (10a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] \quad (10b)$$

теперь следует, что кинетическая энергия частицы $\frac{1}{2}mv^2$ не сохраняется, так как, умножив скалярно уравнение (10b) на \mathbf{v} , на этот раз получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}).$$

Вообще говоря, не сохраняется и продольная проекция скорости v_{\parallel} (см. ниже), но полная энергия частицы $\frac{1}{2}mv^2 - e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})$, разумеется, остаётся интегралом движения.

В рассматриваемом случае, когда и магнитное, и электрическое поля однородны и постоянны, т. е. не зависят ни от координат, ни от времени, решение задачи (10) легко свести к рассмотренному в п.4.2 движению заряженной частицы в однородном магнитном поле. Для этого достаточно перейти в систему отсчёта, движущуюся со скоростью

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (11)$$

Выполнив в уравнениях (10) формальную замену переменных

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_E, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_E t, \quad (12)$$

получим

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}', \quad (13a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\parallel} + [\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}], \quad (13b)$$

где $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\perp}$ — проекция электрического поля на направление вектора \mathbf{B} , а $\mathbf{E}_{\perp} = [\mathbf{B} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]]/B^2$ — проекция на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} . Используя известную векторную формулу $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, нетрудно проверить, что $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}/B^2$.

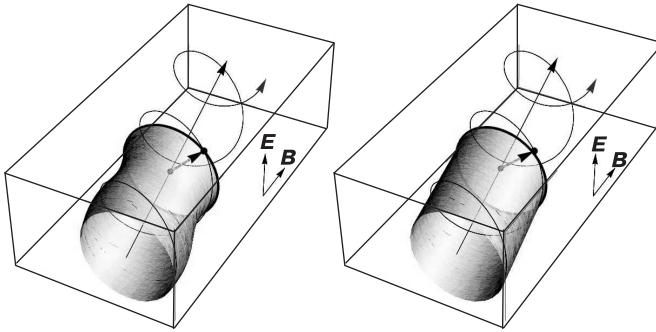


Рис. 4.3. В скрещенных электрическом и магнитном полях, каждое из которых однородно и постоянно, заряженная частица движется по ларморовской спирали, а ведущий центр равномерно смещается в направлении вектора $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$; в зависимости от способа определения ведущего центра (ведь это воображаемая точка!) мгновенный радиус ρ ларморовской окружности в один и тот же момент времени может иметь разную длину; на рисунке слева ларморовский радиус осциллирует с циклотронной частотой, так что ларморовская окружность описывает гофрированную поверхность; на рисунке справа ларморовский радиус ρ' имеет постоянную величину, а ларморовская окружность замечает прямой цилиндр; слева использовано определение ведущего центра (21), «естественное» для лабораторной системы отсчёта, а справа — определение (20), «естественное» для сопутствующей системы отсчёта; мы выберем вариант (20)

Если теперь расписать векторное уравнение (13б) в проекциях на оси декартовой системы координат, то, по сравнению с уравнениями (6), изменится только проекция вектора ускорения на направление магнитного поля (ось z'):

$$\dot{v}'_x = \Omega v'_y, \quad (14a)$$

$$\dot{v}'_y = -\Omega v'_x, \quad (14б)$$

$$\dot{v}'_z = \frac{e}{m} E_{\parallel}. \quad (14в)$$

Уравнение (14в) описывает равноускоренное движение вдоль поля \mathbf{B} :

$$v'_z = v_{z0} + \frac{e}{m} E_{\parallel} t. \quad (15)$$

Другие два уравнения (14) описывают движение по окружности, замкнутой в плоскости (x', y') ; их решение получается из формул (9) при помощи очевидных переобозначений. Ускорение под действием электрического поля E_{\parallel} вдоль оси z' «разматывает» эту окружность в спираль с постепенно увеличивающимся шагом.

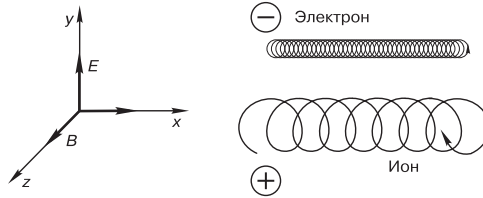


Рис. 4.4. Дрейф частиц в скрещённых электрическом и магнитном полях; траектория отрицательного заряда рассчитана для частицы с массой в 10 раз меньше массы положительного заряда; при одинаковой энергии и фактическом соотношении масс ионов и электронов радиус ларморовской спирали электронов был бы неразличим в выбранном масштабе; в квазинейтральной плазме электрический дрейф не создаёт электрического тока, так как скорость дрейфа одинакова для электронов и ионов

Сопутствующая система отсчёта (x', y', z') движется относительно исходной системы (x, y, z) с постоянной скоростью

$$\mathbf{v}_E = \{cE_y/B, -cE_x/B, 0\}$$

перпендикулярно оси z , поэтому в исходной системе отсчёта центр спиральной траектории смещается поперёк магнитной силовой линии,¹⁾ как показано на рис. 4.3. В данном случае такое смещение вызвано электрическим полем, поэтому его называют *электрическим дрейфом*. Такое название, строго говоря, противоречит определению дрейфа как движения, вызванного или неоднородностью, или непостоянством поля. Но это определение можно сохранить для *магнитного* дрейфа. По сути же, электрический дрейф относится к нулевому порядку дрейфовой теории, в котором как магнитное, так и электрическое поля считаются постоянными во времени и однородными в пространстве, а уравнения движения имеют точное решение.

Скорость движения ведущего центра поперёк направления магнитного поля называют *скоростью дрейфа*. Скорость электрического дрейфа v_E , согласно формуле (11), перпендикулярна как направлению магнитного поля \mathbf{B} , так и направлению электрического поля \mathbf{E} . Важно заметить, что она не зависит ни от заряда e , ни от массы частицы m , ни от скорости ларморовского вращения v_\perp .

Этот факт можно пояснить с помощью рис. 4.4. На первом (левом) полуобороте ларморовской орбиты положительно заряженный ион

¹⁾ Это лишний раз показывает условность понятия магнитной силовой линии, так как в сопутствующей системе отсчёта ведущий центр движется по силовой линии магнитного поля.

получает энергию от электрического поля, следовательно, увеличивается скорость v_{\perp} , а вместе с ней и ларморовский радиус ρ . На втором (правом) полуобороте ион теряет энергию, а ρ уменьшается. Возникшая разница в величине ρ на верхней и нижней половинах орбиты и вызывает дрейф в направлении v_E . Отрицательно заряженный электрон вращается в противоположном направлении, но и энергию от поля он получает при движении в направлении, противоположном движению иона. Следовательно, ион и электрон дрейфуют в одном направлении. При одинаковой скорости более лёгкие частицы имеют меньший радиус орбиты и поэтому испытывают меньшее смещение за один оборот. Однако у лёгких частиц выше частота вращения, и два эффекта в точности компенсируют друг друга, так что скорость электрического дрейфа не зависит от сорта частиц.

Формально скорость электрического дрейфа, вычисленная по формуле (11), превышает скорость света, если $E > B$. Однако это всего лишь означает, что при околосветовых скоростях нужно использовать релятивистские уравнения движения (задача 4.2). Формула (11) верна, если электрическое поле мало по сравнению с магнитным, т. е.

$$E/B \ll 1. \quad (16)$$

Существует поучительная интерпретация электрического дрейфа, которая, помимо прочего, позволяет без большого труда найти скорость электрического дрейфа при произвольной величине E/B . Напомним, что в результате преобразования (12) из уравнений движения (10) исчезла часть электрического поля \mathbf{E}_{\perp} , перпендикулярная магнитному полю. Тот факт, что преобразованные в сопутствующую систему отсчёта уравнения движения (13) содержат только \mathbf{E}_{\parallel} , означает, что в этой системе отсчёта электрическое поле коллинеарно магнитному. С помощью преобразований Лоренца (Hendrik Lorentz, 1904 [55]) можно показать (задача 4.3), что в общем случае скорость такой системы отсчёта будет равна

$$\mathbf{w} = c \frac{1 - \sqrt{1 - 4\xi^2}}{2\xi^2} \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2 + E^2}, \quad (17)$$

где $\xi = |[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/(B^2 + E^2)| < \frac{1}{2}$. При $\xi \ll 1$ она совпадает с v_E и, таким образом, является релятивистским аналогом скорости электрического дрейфа.

Особого рассмотрения заслуживает случай $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$, когда электрическое поле перпендикулярно магнитному. Так как скалярное

произведение $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ наряду с разностью $B^2 - E^2$ является релятивистским инвариантом, поля \mathbf{E} и \mathbf{B} будут взаимно перпендикулярны в любой системе отсчёта. В этом случае формула (17) упрощается. Если $E < B$, $\mathbf{w} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/B^2 = \mathbf{v}_E$ даёт скорость системы отсчёта, где $\mathbf{E} = 0$, а частица движется по ларморовской спирали. Иными словами, при $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$ и $E < B$, формула $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/B^2$ является точной даже в релятивистском пределе. Если же $E > B$, то $\mathbf{w} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/E^2$ есть скорость системы отсчёта, где $\mathbf{B} = 0$, а частица неограниченно ускоряется электрическим полем.

Вернёмся к нерелятивистскому случаю, который характеризуется условием (16). Даже при $E/B \ll 1$ скорость электрического дрейфа \mathbf{v}_E может быть велика по сравнению со скоростью ларморовского вращения $\mathbf{v}'_{\perp} = (v'_x, v'_y, 0)$, но при любом соотношении \mathbf{v}_E и \mathbf{v}'_{\perp} в среднем за период \mathbf{v}'_{\perp} обращается в нуль. Это означает, что спираль вырождается в траекторию движения ведущего центра $\mathbf{R}(t)$, если траекторию движения $\mathbf{r}(t)$ усреднить по циклотронному вращению в сопутствующей системе отсчёта.

Чтобы формализовать сказанное, удобно ввести вектор ρ' ларморовского радиуса, проведённый из ведущего центра к частице (как на рис. 4.2); для него имеем выражение

$$\rho' = -\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{h}], \quad (18)$$

где

$$\mathbf{h} = \mathbf{B}/B \quad (19)$$

обозначает единичный вектор вдоль направления магнитного поля — *вектор касательной* к силовой линии. Разность между радиусом-вектором частицы \mathbf{r} и вектором ρ' составляет радиус-вектор \mathbf{R}' ведущего центра:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \rho' = \mathbf{r} + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{h}]. \quad (20)$$

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{R}' = \left(v_{\parallel 0} t + \frac{e}{m} E_{\parallel} \frac{t^2}{2} \right) \mathbf{h} + \mathbf{v}_E t.$$

Так как ведущий центр — это воображаемый, а не реальный объект, в научной литературе встречаются иные варианты выбора вектора \mathbf{R}' . Зачастую это связано с тем, что в плазме скорость электрического дрейфа, как правило, мала по сравнению с тепловой скоростью частиц (задача 4.4), поэтому её с самого начала относят к первому, а не нулевому порядку теории дрейфов (как это делаем мы). Тогда вместо

(20) де-факто принимают иное определение радиуса-вектора ведущего центра

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{h}], \quad (21)$$

связывая вектор ларморовского радиуса

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{h}] \quad (22)$$

со скоростью \mathbf{v} в исходной системе отсчёта. Очевидно, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{h} \times \mathbf{v}_E], \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}' - \frac{1}{\Omega} [\mathbf{h} \times \mathbf{v}_E]. \quad (23)$$

Длина $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ вектора $\boldsymbol{\rho}$ осциллирует с циклотронной частотой Ω , в отличие от вектора $\boldsymbol{\rho}'$, длина которого $\rho' = |\boldsymbol{\rho}'|$ остаётся постоянной. Амплитуда осцилляций тем больше, чем больше отношение E/B . Различие между $\boldsymbol{\rho}'$ и $\boldsymbol{\rho}$ имеет своим следствием перемену качественной картины явления. В исходной системе отсчёта (слева на рис. 4.3) мгновенная ларморовская окружность с центром в точке \mathbf{R} при перемещении ведущего центра описывает поверхность гофрированного цилиндра, тогда как окружность с центром в точке \mathbf{R}' замечает прямой цилиндр (справа на рис. 4.3).

В п. 4.9 мы увидим, что в переменном электрическом поле небольшое различие между \mathbf{R}' и \mathbf{R} изменяет интерпретацию поляризационного дрейфа.

Сознательно ограничивая себя нерелятивистской теорией, будем далее считать отношение E/B малым по сравнению с единицей, $E/B \ll 1$, чтобы скорость электрического дрейфа была мала по сравнению со скоростью света, а более жёсткое ограничение $v_E \ll v_\perp$ (эквивалентное условию $E/B \ll v_\perp/c$) будет использовано только при анализе некоторых предельных случаев. В этой связи далее будет принято определение радиуса-вектора ведущего центра в соответствии с формулами (18) и (20), но штрих у величин $\boldsymbol{\rho}'$ и \mathbf{R}' для краткости будет снят.

4.4. Дрейф под действием малой силы

Заменив в уравнении движения (10б) электрическую силу $e\mathbf{E}$ на формальное обозначение \mathbf{F} , найдём, что скорость дрейфа ведущего центра, вызванного силой иного происхождения, в самом общем случае равна

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (24)$$

Эту формулу вывел шведский учёный Ханнес Альфвен (Hannes Alfvén, 1940 [56]). Ввиду её значимости, покажем, что она получается путём усреднения точного уравнения движения

$$m \frac{dv}{dt} = F + \frac{e}{c} [v \times B]$$

по периоду циклотронного вращения вдоль траектории частицы.

Если сила F ориентирована строго перпендикулярно B , то ускорение dv/dt в левой части уравнения в результате усреднения заменяется нулём. Усреднение правой части приводит к замене v на среднюю скорость v_F , а локальная сила F в точке, где находится частица, заменяется на среднее значение $\langle F \rangle$ по траектории движения:

$$0 = \langle F \rangle + \frac{e}{c} [v_F \times B].$$

После векторного умножения на B отсюда получается формула (24) с небольшим уточнением, что F в ней на самом деле обозначает среднюю за период циклотронного вращения силу $\langle F \rangle_\perp$, действующую на частицу в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Проекция силы F_\parallel , которая действует вдоль направления магнитного поля, даёт нулевой вклад в скорость дрейфа, вычисляемую по формуле (24), поэтому индекс \perp у величины $\langle F \rangle_\perp$ в ней обычно опускают. Однако эта проекция вызывает постоянное продольное ускорение, приводя к изменению скорости движения v_\parallel вдоль магнитной силовой линии, как при наличии продольного электрического поля E_\parallel .

В практически важном случае, когда сила F мала по сравнению с силой Лоренца $(e/c)[v \times B]$, нетривиальную задачу усреднения F по истинной траектории движения можно приближённо заменить усреднением по невозмущённой траектории, по которой частица двигалась бы в однородном магнитном поле при $F = 0$. Это наблюдение даёт простой рецепт вычисления скорости дрейфа, который в дальнейшем будет неоднократно использован. Он состоит в том, что значения любых величин, зависящих от координат, например B , нужно вычислять в точке с радиусом-вектором $r = R$, где находится ведущий центр частицы.

Действительно, если разложить $B(R + \rho)$ в ряд Тэйлора

$$B(R + \rho) = B(R) + (\rho \cdot \nabla)B(R) + \dots$$

по малому отношению ρ/ℓ вблизи ведущего центра, линейные члены разложения, пропорциональные компонентам вектора ρ , при усреднении по циклотронному вращению в сопутствующей системе отсчёта

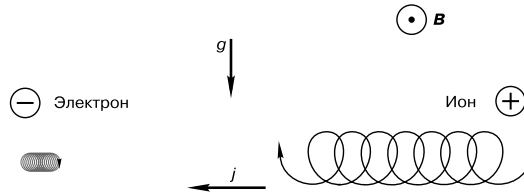


Рис. 4.5. В поле силы тяжести электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны, создавая электрический ток \vec{j} в направлении вектора $[\vec{g} \times \vec{B}]$; ток электронов мал по сравнению с током ионов

обратятся в нуль. Следующие же члены разложения (обозначенные выше многоточием) в первом порядке теории дрейфов можно просто отбросить. Тогда

$$\langle B(\vec{r}) \rangle = B(R).$$

Это же правило усреднения применимо к электрическому полю \vec{E} и вообще к любой функции координат частицы.

4.5. Гравитационный дрейф

В качестве первого применения формулы (24) рассмотрим движение в поле силы тяжести mg . Соответствующий дрейф можно назвать гравитационным:

$$v_g = \frac{mc}{e} \frac{[\vec{g} \times \vec{B}]}{B^2}. \quad (25)$$

Гравитационный дрейф похож на дрейф в электрическом поле тем, что его направление перпендикулярно как приложенной силе, так и направлению магнитного поля \vec{B} . Однако скорость гравитационного дрейфа v_g меняет направление в зависимости от знака заряда частицы.

Своим происхождением гравитационный дрейф (рис. 4.5), как и электрический, обязан изменению ларморовского радиуса вдоль траектории движения частицы из-за того, что частица попеременно отдаёт и получает энергию от гравитационного поля. Но теперь силы, действующие на электроны и ионы, направлены в одну сторону, поэтому дрейфуют эти частицы в противоположных направлениях, поскольку вращаются в разные стороны.

Величина скорости дрейфа v_g , вызванного обычной силой тяжести, в большинстве случаев пренебрежимо мала. Гравитационный дрейф заслуживает упоминания лишь в связи с тем, что в теории с его помощью моделируют более сложные явления, вводя фиктивную силу тяжести такой величины, чтобы скорость гравитационного дрейфа была примерно равна скорости дрейфа в неоднородном магнитном поле.

4.6. Градиентный дрейф

Обратимся теперь к реальной ситуации, когда электромагнитное поле слабо неоднородно и медленно меняется во времени. Как уже было отмечено, малость параметров ρ/ℓ и $2\pi/(\Omega\tau)$ позволяет выделить медленное дрейфовое движение частицы на фоне быстрого циклотронного вращения и вычислить скорость дрейфового движения. Ввиду всё той же малости различные виды дрейфов, вызванные разными видами неоднородности или нестационарности магнитного и электрического полей, можно анализировать по отдельности, полагая, что суммарный эффект подчиняется приближённому принципу суперпозиции.

Этот анализ начнём со случая, когда электрическое поле отсутствует, а магнитное поле постоянно во времени, но неоднородно, причём его направление всюду одинаково, а меняется лишь напряжённость B из-за наличия слабого градиента ∇B , перпендикулярного направлению B , как показано на рис. 4.6. При этом возникает *градиентный дрейф*.

Используя качественные представления, развитые выше для объяснения электрического дрейфа, можно заранее предвидеть, как будут двигаться в таком поле заряженные частицы. Из-за уменьшения поля B в нижней части орбиты частица проходит её по окружности большего радиуса, чем верхнюю часть траектории. В итоге на каждом ларморовском обороте возникает некомпенсированное смещение вдоль оси x . Оно создаёт дрейф в этом направлении, перпендикулярном как B , так и ∇B . Очевидно, что величина скорости дрейфа должна быть пропорциональна v_\perp и ρ/ℓ . Таким образом, по порядку величины, скорость дрейфа равна $v_\perp \rho |\nabla B|/B$, так как $\ell \sim B/|\nabla B|$.

Для аккуратного вычисления скорости градиентного дрейфа усредним силу Лоренца $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ по периоду вращения частицы.

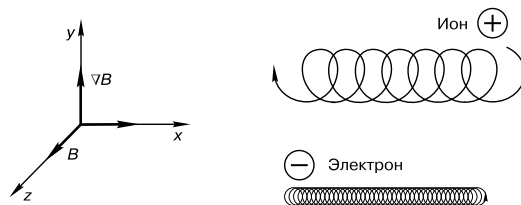


Рис. 4.6. Градиентный дрейф частиц в неоднородном магнитном поле; электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны, создавая электрический ток в направлении вектора $[\mathbf{B} \times \nabla B]$; при заданной энергии частиц величина тока не зависит от их массы

В однородном магнитном поле среднее значение $\langle \mathbf{F} \rangle$ силы \mathbf{F} было бы в точности равно нулю, поскольку, оставаясь постоянным по величине, вектор \mathbf{F} вращается вместе с частицей. Вычислим поправку к $\langle \mathbf{F} \rangle$, пропорциональную градиенту магнитного поля, выполнив усреднение по невозмущённой орбите частицы в слабо неоднородном магнитном поле $\mathbf{B} = B(y)\hat{z}$. Она описывается уравнениями (9), в которых для краткости приравняем нулю начальную фазу ψ_0 , что эквивалентно простому сдвигу начала отсчёта времени:

$$\begin{aligned} v_x &= v_\perp \cos(\Omega t), & x &= X + \rho \sin(\Omega t), \\ v_y &= -v_\perp \sin(\Omega t), & y &= Y + \rho \cos(\Omega t). \end{aligned}$$

Разложив $B(y)$ в ряд Тейлора до линейного по ρ слагаемого включительно,

$$B(y) \approx B(Y) + (y - Y) \frac{\partial}{\partial Y} B(Y),$$

получим

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{e}{c} v_y B(y) \approx -\frac{e}{c} v_\perp \sin(\Omega t) \left[B(Y) + \rho \cos(\Omega t) \frac{\partial B}{\partial Y} \right], \\ F_y &= -\frac{e}{c} v_x B(y) \approx -\frac{e}{c} v_\perp \cos(\Omega t) \left[B(Y) + \rho \cos(\Omega t) \frac{\partial B}{\partial Y} \right]. \end{aligned}$$

Среднее значение F_x равно нулю. При усреднении F_y по периоду вращения первый член в правой части последнего уравнения даёт нуль, а среднее от $\cos^2(\Omega t)$ равно $\frac{1}{2}$, так что

$$\langle F_y \rangle = -\frac{e}{2c} v_\perp \rho \frac{\partial B}{\partial Y}.$$

Похожее выражение получилось бы для $\langle F_x \rangle$ при наличии градиента B вдоль оси x . Следовательно,

$$\langle \mathbf{F} \rangle_\perp = -\frac{e}{2c} v_\perp \rho \nabla_\perp B = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \nabla_\perp B. \quad (26)$$

Подставляя эту силу в формулу (24) для скорости дрейфа в поле малой силы,

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\langle \mathbf{F} \rangle_\perp \times \mathbf{B}]}{B^2},$$

получим *скорость градиентного дрейфа*:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{v_\perp^2}{2\Omega} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (27)$$

Она перпендикулярна как направлению \mathbf{B} , так и направлению ∇B . Здесь и далее все величины, зависящие от координат, вычисляются в точке ведущего центра, а $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ вновь обозначает единичный вектор

в направлении магнитного поля. По-видимому, первым формулу (27) получил Ханнес Альфвен (Hannes Alfvén) в 1940 г. [56].

Так как знак циклотронной частоты $\Omega = eB/(mc)$ определяется знаком заряда, электроны и ионы в неоднородном магнитном поле дрейфуют в противоположных направлениях. Поскольку отношение v_{\perp}^2/Ω не зависит от массы частицы при заданной энергии $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2$, скорости дрейфа электрона и иона равны по абсолютной величине, если равны их энергии.

4.7. Центробежный дрейф

Учтём теперь, что линии магнитного поля могут быть изогнуты и что магнитное и электрическое поля могут изменяться во времени. Все эти эффекты можно учесть единым способом, если перейти в систему отсчёта, сопутствующую ведущему центру. В нулевом порядке дрейфовой теории она движется относительно неподвижной системы отсчёта со скоростью

$$\mathbf{u} = v_{\parallel}\mathbf{h} + \mathbf{v}_E. \quad (28)$$

В системе отсчёта, движущейся ускоренно, на частицу действует сила инерции

$$\mathbf{F} = -m\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (29)$$

которая, в соответствии с формулой Альфвена (24), инициирует дрейфовое движение поперёк направления магнитного поля со скоростью

$$\mathbf{v}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (30)$$

Производя дифференцирование в этом выражении, нужно учесть, что изменение вектора \mathbf{u} может быть связано как с его явной зависимостью от времени, так и с перемещением ведущего центра со скоростью \mathbf{u} :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

Соответственно, скорость дрейфа будет содержать два слагаемых. Первое связывают со скоростью *поляризационного дрейфа*:

$$\mathbf{v}_{\text{pol}} = \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}. \quad (31)$$

Второе слагаемое отвечает за *центробежный дрейф*:

$$\mathbf{v}_{\text{cf}} = \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (32)$$

Сосредоточимся на анализе этого слагаемого, отложив детальный анализ поляризационного дрейфа до следующего параграфа.

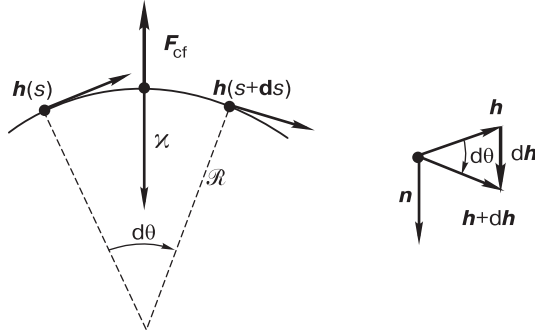


Рис. 4.7. На заряженную частицу, движущуюся вдоль искривлённой магнитной силовой линии, действует центробежная сила F_{cf} ; она направлена против вектора кривизны $\kappa = \partial \mathbf{h} / \partial s$, где \mathbf{h} — вектор, касательный к силовой линии в каждой её точке, а s — координата вдоль силовой линии, отмеряющая её длину; справа показан результат параллельного переноса векторов $\mathbf{h} = \mathbf{h}(s)$ и $\mathbf{h} + d\mathbf{h} = \mathbf{h}(s + ds)$ в одну точку

Подставляя $\mathbf{u} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_E$ в формулу (32), в её правой части получаем выражение из четырёх слагаемых:

$$\frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times (v_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \nabla) v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times (\mathbf{v}_E \cdot \nabla) v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times (v_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E + \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times (\mathbf{v}_E \cdot \nabla) \mathbf{v}_E.$$

Оно заметно упрощается в том случае, когда скорость электрического дрейфа мала по сравнению со скоростью частицы, $v_E \ll v$. Для этого как минимум необходимо, чтобы выполнялось условие $E/B \ll v/c$. Электрическое поле в плазме обычно мало, поэтому, как правило, последнее условие выполнено для частиц с тепловыми скоростями. Тогда из четырёх слагаемых можно оставить только первое. Оно также упрощается, так как дифференцирование сомножителя v_{\parallel} даёт ноль ввиду тождества $[\mathbf{h} \times \mathbf{h}] = 0$. В результате получаем формулу

$$v_{cf} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times \kappa], \quad (33)$$

где введено обозначение

$$\kappa = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \quad (34)$$

для вектора кривизны магнитной силовой линии.

Векторный оператор $(\mathbf{h} \cdot \nabla)$ имеет смысл производной по направлению единичного вектора \mathbf{h} . Её принято обозначать как частную производную по координате s вдоль силовой линии магнитного поля, то есть $(\mathbf{h} \cdot \nabla) = \partial / \partial s$.¹⁾ Таким образом, вектор кривизны есть

¹⁾ Такое обозначение подразумевает, что другие две криволинейные координаты остаются постоянными на силовой линии.

производная вектора \mathbf{h} вдоль себя самого:

$$\kappa = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s}. \quad (35)$$

Как следует из построения на рис. 4.7,

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} = \frac{\mathbf{n}}{\mathcal{R}}, \quad (36)$$

где \mathbf{n} — единичный *вектор нормали*, а \mathcal{R} — радиус кривизны магнитной силовой линии.

Действительно, рассмотрим элемент окружности радиуса \mathcal{R} , опирающийся на малый угол $d\theta$. Изменение $d\mathbf{h}$ перпендикулярно \mathbf{h} , поскольку длина единичного вектора \mathbf{h} постоянна. Следовательно, $(\mathbf{h} \cdot d\mathbf{h}) \approx |\mathbf{h} + d\mathbf{h}| - |\mathbf{h}| = 0$. С той же точностью $dh \approx |\mathbf{h}| d\theta = d\theta$, а длина элемента окружности равна $\mathcal{R} d\theta$, т. е. $dh/ds = 1/\mathcal{R}$.

С учётом векторных соотношения (34)–(36) формулу для скорости центробежного дрейфа можно записать в виде

$$\mathbf{v}_{\text{cf}} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega \mathcal{R}} [\mathbf{h} \times \mathbf{n}]. \quad (37)$$

Отсюда видно, что центробежный дрейф направлен по *вектору бинормали* $\mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{n}]$. Как и градиентный дрейф, он зависит от знака заряда частицы. При одинаковой энергии продольного движения $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ абсолютная величина скорости центробежного дрейфа одинакова для лёгких частиц (электронов) и тяжёлых частиц (ионов), но разноимённо заряженные частицы дрейфуют в противоположные стороны, как и в случае градиентного дрейфа.

Своим происхождением центробежный дрейф обязан одноимённой силе

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{\mathcal{R}} \mathbf{n}. \quad (38)$$

В свою очередь, центробежная сила есть частный случай силы инерции (29). Соответственно, скорость v_{in} , определяемую формулой (30), можно было бы назвать скоростью инерционного дрейфа. Однако это название не является общепринятым, равно как и использование терминов поляризационный и центробежный дрейфы применительно к формулам (31) и (32). Только упрощённую формулу (33) без сомнения соотносят со скоростью центробежного дрейфа, и такую же упрощённую формулу (40) из следующего параграфа — со скоростью поляризационного дрейфа.

4.8. Поляризационный дрейф

Обратившись к общей формуле (31) для скорости поляризационного дрейфа, которая для удобства воспроизведена ниже,

$$v_{\text{pol}} = \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},$$

подставим в её правую часть скорость движения ведущего центра (28) в нулевом приближении:

$$v_{\text{pol}} = \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial v_{\parallel} \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t}. \quad (39)$$

Так как $\mathbf{h} \times \mathbf{h} = 0$, первое слагаемое в последнем выражении не изменится, если из-под знака дифференцирования вынести произвольный скалярный множитель. Вынося v_{\parallel}/B и вспоминая, что $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$, а $\partial \mathbf{B}/\partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$, имеем

$$\frac{\mathbf{h}}{\Omega} \times \frac{\partial v_{\parallel} \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{v_{\parallel} \mathbf{h}}{\Omega B} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{v_{\parallel} c}{\Omega B} \mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Отсюда видно, что это слагаемое мало, если электрическое поле близко к потенциальному, которое характеризуется уравнением $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Но даже если электрическое поле является вихревым, это слагаемое мало, если топология магнитного поля не меняется, т. е. $\mathbf{h} \times (\partial \mathbf{h}/\partial t) = 0$. Так или иначе, при рассмотрении поляризационного дрейфа первым слагаемым в (39) обычно пренебрегают по сравнению со вторым.

При вычислении производной во втором слагаемом

$$\frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}$$

можно дифференцировать только электрическое поле \mathbf{E} , так как дифференцирование магнитного поля даст члены, квадратичные по малому отношению E/B . В результате получаем упрощённую формулу для скорости поляризационного дрейфа:

$$v_{\text{pol}} = \frac{c}{\Omega B} \left[\left[\mathbf{h} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \times \mathbf{h} \right] = \frac{c}{\Omega B} \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t}. \quad (40)$$

В медленно меняющемся поле скорость поляризационного дрейфа значительно меньше скорости электрического дрейфа, $v_{\text{pol}} \ll v_E$, но в отличие от него зависит от массы и заряда частицы (через частоту Ω). Поэтому в переменном электрическом поле электроны и ионы дрейфуют с чуть разной скоростью. В результате плазма поляризуется.

Поляризация твёрдых или жидких диэлектриков вызывается изменением ориентации или величины атомных диполей. В плазме

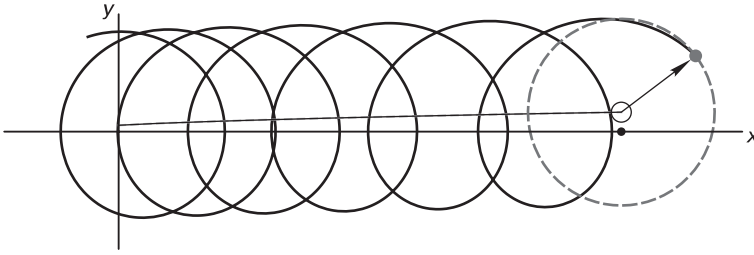


Рис. 4.8. Электрический и поляризационный дрейфы: магнитное поле B_z перпендикулярно плоскости рисунка, электрическое поле направлено вдоль оси y и увеличивается по закону $E_y = (1 + t/\tau) E_0$; ведущие центры иона (кружок) и электрона (точка) дрейфуют с одинаковой скоростью $v_E = cE_y/B_z$ вдоль оси x , но с разной скоростью вдоль оси y ; ларморовский радиус электрона при одинаковой энергии электрона и иона неразличим в масштабе рисунка; так как среднее (за циклотронный период) значение вектора ларморовского радиуса равно нулю, $\langle \rho' \rangle = 0$, среднее значение радиуса-вектора иона равно радиусу-вектору ведущего центра: $\langle \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{R}' \rangle + \langle \rho' \rangle = \mathbf{R}'$

диполем можно считать пару частиц, состоящую из иона и электрона с приблизительно общим ведущим центром. Величина такого диполя изменяется, если изменяется расстояние между ведущими центрами составляющих его частиц. В отличие от диэлектриков в плазме нельзя создать постоянную поляризацию, так как плазма является проводником и поляризационные заряды за конечное время релаксируют. Однако в переменном электрическом поле \mathbf{E} возникает переменный поляризационный ток, преимущественно вызванный инерцией ионов, который вызывает реальную поляризацию плазмы.

На рис. 4.8 показан пример расчёта траектории движения иона в однородном постоянном магнитном поле $B_z = B$ и однородном линейно растущем во времени электрическом поле $E_y = E \times (1 + t/\tau)$. Уравнения движения в этом случае допускают точное решение в аналитическом виде, которое нетрудно получить с помощью компьютерных систем символьных вычислений, таких как *Mathematica* (см. задачу 4.8). Однако ответ оказывается чрезмерно громоздким, поэтому приведём только выражение для скорости ведущего центра частицы, вернув на время штрих в обозначениях параметров, относящихся к сопутствующей системе отсчёта:

$$\frac{d\mathbf{R}'}{dt} = \left\{ c \frac{E}{B} (1 + t/\tau), \frac{c}{\Omega\tau} \frac{E}{B}, v_{\parallel} \right\}.$$

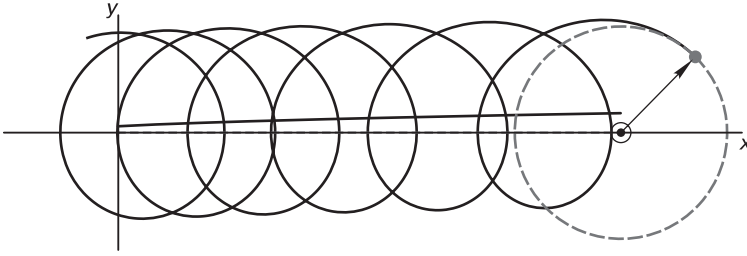


Рис. 4.9. Альтернативная интерпретация поляризационного дрейфа: если мгновенный радиус ларморовской орбиты вычислять по формуле (22) вместо (18), а радиус-вектор ведущего центра — по формуле (21) вместо (20), то ларморовская окружность (штриховая окружность) осциллирует с циклотронной частотой Ω ; ведущие центры иона и электрона \mathbf{R} движутся вдоль оси x , а средний радиус-вектор иона $\langle \mathbf{r} \rangle = \mathbf{R} + \langle \boldsymbol{\rho} \rangle$ дополнительно смещается в направлении электрического поля (сплошная линия), так как среднее (за циклотронный период) значение $\langle d\boldsymbol{\rho}/dt \rangle$ не равно нулю; таким образом, при учёте поляризационного дрейфа $\langle d\mathbf{r}/dt \rangle \neq d\mathbf{R}/dt$, тогда как $\langle d\mathbf{r}/dt \rangle = d\mathbf{R}'/dt$

Интересно, что оно отличается от скорости движения ведущего центра, если тот задан радиусом-вектором \mathbf{R} , а не \mathbf{R}' :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left\{ c \frac{E}{B} (1 + t/\tau), 0, v_{\parallel} \right\}.$$

Величина $d\mathbf{R}/dt$ совершенно одинакова для ионов и электронов и поэтому не отвечает за возникновение поляризационного дрейфа. Сравнение формул (18) и (22) для $\boldsymbol{\rho}'$ и $\boldsymbol{\rho}$ показывает, что среднее значение $\langle \boldsymbol{\rho} \rangle = -[\mathbf{v} \times \mathbf{h}]/\Omega = -[\mathbf{v}_E \times \mathbf{h}]/\Omega$ не равно нулю в отличие от $\langle \boldsymbol{\rho}' \rangle = -[\mathbf{v}' \times \mathbf{h}]/\Omega = 0$, поэтому среднее значение $\langle \mathbf{r} \rangle$ радиуса-вектора частицы $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}$ вовсе не равно \mathbf{R} , как поясняет рис. 4.9. С другой стороны, $\mathbf{r} = \mathbf{R}' + \boldsymbol{\rho}'$, поэтому $\langle \mathbf{r} \rangle = \mathbf{R}'$. Разность $d\mathbf{R}'/dt - d\mathbf{R}/dt = \langle d\boldsymbol{\rho}/dt \rangle$ как раз составляет скорость поляризационного дрейфа.

Два способа определения ведущего центра по формулам (21) и (20) в итоге дают одинаковое значение скорости движения центра ларморовской орбиты $\langle d\mathbf{r}/dt \rangle = \langle d\mathbf{R}'/dt \rangle = \langle d\mathbf{R}/dt \rangle + \langle d\boldsymbol{\rho}/dt \rangle$, но данный пример показывает, что описание дрейфа в терминах \mathbf{R}' и $\boldsymbol{\rho}'$ вместо \mathbf{R} и $\boldsymbol{\rho}$ делает его интерпретацию более естественной и понятной.

Далее мы вновь снимаем штрихи в обозначениях, подразумевая, что \mathbf{R} и $\boldsymbol{\rho}$ обозначают соответственно \mathbf{R}' и $\boldsymbol{\rho}'$.

4.9. Дрейф в неоднородном электрическом поле

Завершая анализ различных эффектов, приводящих к дрейфу заряженных частиц, посмотрим, к чему приводит учёт неоднородности электрического поля. Пусть магнитное поле однородно и постоянно, а электрическое — слабо неоднородно, лишь незначительно изменяясь на длине порядка радиуса ларморовской орбиты. Как показано в п. 4.2, однородное электрическое поле, перпендикулярное магнитному полю, создаёт электрический дрейф со скоростью

$$v_E = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (41)$$

При небольшой неоднородности \mathbf{E} нужно усреднить по невозмущённой ларморовской окружности, вычислив интеграл

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint d\psi \mathbf{E}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}(\psi)),$$

где ψ обозначает фазу ларморовского вращения.

Чтобы выполнить усреднение, введём локальную систему координат с началом в ведущем центре частицы \mathbf{R} , ориентированной так, что вектор $\boldsymbol{\rho}$ лежит в плоскости x_y , и разложим $\mathbf{E}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho})$ в ряд Тейлора по степеням ρ_x, ρ_y . Далее учтём, что $\langle \rho_x \rangle = \langle \rho_y \rangle = 0$, поэтому первые не исчезающие поправки к $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ возникают во втором порядке разложения. Поскольку $\langle \rho_x^2 \rangle = \langle \rho_y^2 \rangle = \rho^2/2$, а $\langle \rho_x \rho_y \rangle = 0$, получаем:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{1}{4} \rho^2 \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}),$$

где

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Заменяя \mathbf{E} на $\langle \mathbf{E} \rangle$ в (41), находим скорость электрического дрейфа в неоднородном электрическом поле:

$$v_E = \frac{c}{B^2} \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{4} \rho^2 \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} \right) \times \mathbf{B} \right]. \quad (42)$$

Второй член в круглых скобках описывает эффект, связанный с конечной величиной ларморовского радиуса частицы. Второе слагаемое значительно меньше первого, но в отличие от него имеет разную величину для ионов и электронов. Сколь бы ни мала была поправка, пропорциональная ρ^2 , благодаря ей скорость дрейфа различна для электронов и ионов. Как следствие, электрический дрейф в неоднородном электрическом поле создаёт электрический ток, который приводит к разделению зарядов. Это явление известно как *эффект конечного ларморовского радиуса* (эффект КЛР), существенным образом влияющий на устойчивость плазмы.

4.10. Скорость движения ведущего центра

Скорость движения ведущего центра есть сумма скоростей всех рассмотренных дрейфов:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{h} + v_E + v_{\nabla B} + v_{cf} + v_{pol}. \quad (43)$$

Здесь v_{\parallel} обозначает скорость движения ведущего центра вдоль силовой линии. Скорость электрического дрейфа v_E вычисляется по формуле (11) или (42) в зависимости от требуемой точности. Скорость градиентного дрейфа $v_{\nabla B}$ определяется по формуле (27). Скорость центробежного дрейфа v_{cf} обычно рассчитывают по более простой формуле (33) вместо более общей (32), а скорость поляризационного дрейфа v_{pol} — по формуле (40) вместо более сложной (31), которую имеет смысл использовать только при наличии достаточно сильного электрического поля.

Общее выражение заметно упрощается в практически важном случае, когда и магнитное, и электрическое поля стационарны (не зависят от времени). Тогда формула (43) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}], \quad (44)$$

чаще всего приводимый в учебниках по физике плазмы.

Искривлённое магнитное поле почти всегда оказывается неоднородным, поэтому к центробежному дрейфу (последнее слагаемое в последней формуле) всегда примешивается градиентный дрейф (предпоследнее слагаемое). По крайней мере, именно так обстоит дело в случае, когда магнитное поле потенциально, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0.$$

В лабораторных условиях, где стационарное магнитное поле создаётся с помощью магнитных катушек, оно заведомо потенциально в той части экспериментальных установок, которая не занята самими катушками и плазмой, т. е. в вакууме. В связи с этим *потенциальное магнитное поле* иногда называют *вакуумным*. Токи, текущие в плазме, часто слишком малы по сравнению с током магнитных катушек, поэтому даже внутри плазмы магнитное поле можно считать вакуумным. В таком поле направления центробежного и градиентного дрейфов совпадают.

Чтобы доказать это утверждение, используем равенство

$$[\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}] = -\boldsymbol{\kappa},$$

следующее из векторного тождества

$$[\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}] = \nabla \frac{h^2}{2} - (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$$

для единичного вектора \mathbf{h} (для которого $\nabla h^2 = 0$) и определения вектора кривизны (34) магнитной силовой линии. Замечаем также, что

$$\text{rot } \mathbf{h} = \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B} \text{rot } \mathbf{B} + \left[\nabla \frac{1}{B} \times \mathbf{B} \right] = - \left[\frac{\nabla B}{B} \times \mathbf{h} \right],$$

поэтому

$$\boldsymbol{\kappa} = -[\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}] = \left[\mathbf{h} \times \left[\frac{\nabla B}{B} \times \mathbf{h} \right] \right] = \frac{\nabla B}{B} - \mathbf{h} \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\nabla B}{B} \right).$$

Следовательно,

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] = \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right].$$

В итоге градиентный и центробежный дрейфы объединяются в единый блок:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_{\text{cf}} = \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (45)$$

Вероятно, первым эту формулу получил Г. И. Будкер в работе 1951 г. [57]. Формула часто используется при расчёте траекторий движения заряженных частиц в установках для магнитного удержания плазмы.

Литература

Изложение теории дрейфов на элементарном уровне имеется в «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [3]. В третьей главе вычислены дрейфы в стационарном магнитном поле и поляризационный дрейф.

В «Физике плазмы для физиков» Л. А. Арцимовича, Р. З. Сагдеева [6] без применения векторных формул рассмотрены некоторые виды дрейфовых движений (§2.1), а также исследованы траектории движения частиц в термоядерных установках типа пробкотрон и токамак (§2.2).

Последовательный вывод полной системы дрейфовых уравнений двумя разными способами изложен Д. В. Сивухиным [58] и А. И. Морозовым, Л. С. Соловьёвым [59] в двух первых выпусках «Вопросов теории плазмы». Там же на качественном уровне обсуждается происхождение дрейфов.

Элементарный вывод скорости градиентного и центробежного дрейфов в релятивистском случае можно найти в «Классической электродинамике» Джона Джексона (John Jackson) [60].

Задачи

Задача 4.1. Считая, что проводимость плазмы равна проводимости лучших проводников, оценить время проникновения магнитного поля в столб плазмы с радиусом 1 метр. ►► Решение

Задача 4.2. Найти траекторию движение релятивистской частицы во взаимно перпендикулярных однородных постоянных электрическом и магнитном полях. ►► Решение

Задача 4.3. Найти скорость движения системы отсчёта, где магнитное и электрическое поля параллельны. ►► Решение

Задача 4.4. При каких условиях скорость электрического дрейфа мала по сравнению с тепловой скоростью частиц плазмы? Для оценки принять, что плазма имеет форму цилиндра с радиусом a и заряжена до потенциала порядка температуры плазмы, $\varphi \sim T/e$. ►► Ответ

Задача 4.5. Найти скорость градиентного дрейфа релятивистской частицы.

Задача 4.6. Найти скорость центробежного дрейфа релятивистской частицы.

Задача 4.7. Найти скорость электрического дрейфа в поле электростатической волны, не предполагая, что ларморовский радиус частицы ρ мал по сравнению с длиной волны λ . ►► Ответ

Задача 4.8. Найти скорость дрейфа заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле и однородном, медленно меняющемся электрическом поле, выполнив приближенное интегрирование уравнений движения. ►► Решение

Задача 4.9. Исследовать движение заряженной частицы в поле прямого тока и сравнить с дрейфовым приближением.

Задача 4.10. За какое время протон с энергией 5 кэВ совершит полный оборот вокруг Земли, если он стартует из экваториальной плоскости, его скорость вдоль магнитного поля равна нулю, а расстояние до центра Земли составляет 20 000 км? Считать, что магнитное поле создаётся диполем с величиной $7,8 \times 10^{19} \text{ Гс} \times \text{м}^3$, который расположен в центре Земли. ►► Ответ

Задача 4.11. Найти силу, действующую на заряженную частицу в системе отсчёта ведущего центра. ►► Решение

Задача 4.12. Для заданной траектории ведущего центра $R(t)$ найти направляющий вектор мгновенной оси вращения ω (вектор Дарбу), полагая, что направление касательной к траектории движения во вращающейся системе отсчёта неизменно. ►► Решение

Задача 4.13. Вычислить радиусы кривизны и кручения траектории движения заряженной частиц в однородном магнитном поле. ►► Ответ

Задача 4.14. Найти магнитное поле системы коаксиальных катушек по заданному полю $B_0(z)$ на оси системы. ►► Решение

Задача 4.15. Вычислить скалярный потенциал магнитного поля с прямой осью. ►► Решение

Задача 4.16. Найти уравнение силовой линии в квадрупольном магнитном поле. Вычислить её кривизну и кручение. ►► Решение

Задача 4.17. Записать квадрупольное магнитное поле в потоковых координатах. ►► Решение

Задача 4.18. Вывести формулы для скорости дрейфа, усреднив уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле. ►► Решение

Адиабатические инварианты

Магнитный момент. Первый адиабатический инвариант. Система уравнений ведущего центра. Магнитные пробки. Иерархия адиабатических инвариантов.

5.1. Магнитный момент

Виток с током обладает магнитным моментом

$$\mu = \frac{SI}{c} N,$$

где N — единичный вектор нормали к плоскости витка, составляющий правый винт с направлением тока в витке I , как показано на рис. 5.1. В системе отсчёта, сопутствующей ведущему центру ларморовской орбиты, траектория частицы в магнитном поле замкнута, составляя токовый виток. Ток равен заряду частицы e , делённому на период циклотронного вращения, т. е.

$$I = \frac{e\Omega}{2\pi},$$

где $\Omega = eB/(mc)$ обозначает циклотронную частоту. Направление тока одинаково для положительно и отрицательно заряженных частиц, что учтено в приведённой формуле, где Ω меняет знак при смене знака заряда e . Вспоминая, что направление циклотронного вращения составляет *левый* винт с вектором $\Omega = eB/(mc)$, нетрудно сообразить,

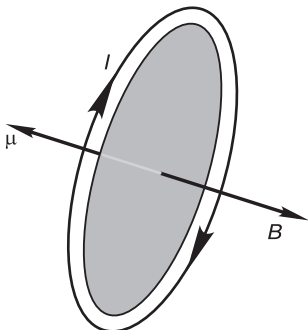


Рис. 5.1. Ларморовская окружность образует замкнутый виток с током в системе отсчёта ведущего центра; такой виток обладает магнитным моментом μ , который направлен по нормали к плоскости витка в сторону, противоположную магнитному полю B

что направление тока также составляет левый винт, но с направлением магнитного поля \mathbf{B} . Следовательно, правый винт направление тока образует с вектором $\mathbf{N} = -\mathbf{h} = -\mathbf{B}/B$. Площадь витка $S = \pi\rho^2$ выражается через ларморовский радиус $\rho = v_{\perp}/\Omega$ (в сопутствующей системе отсчёта). Собирая все множители, находим в системе отсчёта ведущего центра

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu \mathbf{h}. \quad (1)$$

Здесь

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \quad (2)$$

обозначает длину вектора магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$. Именно её, а не вектор $\boldsymbol{\mu}$, чаще всего называют орбитальным магнитным моментом заряженной частицы в магнитном поле.

Чтобы учесть релятивистские эффекты, μ нужно умножить на релятивистский фактор $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, так что «правильный» магнитный момент равен $\mu_{\gamma} = \gamma\mu$ (задача 5.1). Учёт релятивистских эффектов в лабораторной плазме, как правило, избыточен. Однако он поможет нам уточнить физический смысл первого адиабатического инварианта.

5.2. Первый адиабатический инвариант

Поток магнитного поля

$$\Phi = \pi\rho^2 B \quad (3)$$

через площадь ларморовской окружности в сопутствующей системе отсчёта ведущего центра является *адиабатическим инвариантом*, т. е. приближённо сохраняется при медленных изменениях магнитного и электрического полей, вызванных как явной зависимостью полей от времени, так и перемещением частицы в неоднородных полях.

Постоянство Φ следует из закона электромагнитной индукции Фарадея и закона Ома. Действительно, в соответствии с законом Фарадея (Michael Faraday, 1831) изменение магнитного потока $\dot{\Phi} = \pi\rho^2 \times (\partial B/\partial t)$ через замкнутый контур создаёт электродвижущую силу $\mathcal{E} = -c^{-1}\dot{\Phi}$. С другой стороны, по закону Ома (Georg Ohm, 1827), она равна произведению RI тока I в контуре на его сопротивление R . Сопротивление контура, образованного идеальным проводником, равно нулю, а вместе с ним равно нулю и изменение магнитного потока. Движение заряженной частицы по замкнутой ларморовской окружности под действием одной только силы Лоренца

означает отсутствие какого-либо электрического сопротивления и поэтому эквивалентно протеканию электрического тока по проводу с нулевым сопротивлением. Следовательно, магнитный поток через ларморовскую окружность есть сохраняющаяся величина.

Для формального доказательства инвариантности Φ воспользуемся общей теоремой механики об адиабатических инвариантах [61, §49]. Эта теорема будет незаменима при поиске других инвариантов.

Адиабатическими инвариантами вообще являются интегралы

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (4)$$

взятые по периоду изменения *циклической* координаты q_i , которой в невозмущённой системе соответствует периодическое движение. Упомянутая теорема утверждает, что величина J_i будет приближённым интегралом движения при наличии малых возмущений, если p_i есть импульс, канонически сопряжённый циклической координате q_i .

Невозмущённую систему в данном случае образует однородное постоянное магнитное поле \mathbf{B} и однородное постоянное электрическое поле \mathbf{E} , а периодическим (циклическим) является движение заряженной частицы в системе отсчёта ведущего центра, имеющей скорость $\mathbf{u} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_E$ относительно исходной системы отсчёта. Следовательно, адиабатическим инвариантом является интеграл¹⁾

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \oint (\mathbf{P}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}), \quad (5)$$

взятый по периоду движения в системе отсчёта ведущего центра частицы, где она вращается в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Подставляя

$$\mathbf{P}_{\perp} = m\mathbf{v}_{\perp} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_{\perp}$$

в правую часть уравнения (5) и учитывая, что $(\mathbf{A}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}) = (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_{\perp})$, имеем

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \oint m (\mathbf{v}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}) + \frac{e}{2\pi c} \oint (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_{\perp}),$$

где \mathbf{A} обозначает векторный потенциал. В первом интеграле учтём, что скорость \mathbf{v}_{\perp} параллельна $d\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} dt$, а ко второму интегралу применим теорему Стокса, обозначив через $d\mathbf{S}$ элемент поверхности, охватываемой контуром интегрирования:

$$J_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \int m v_{\perp}^2 dt + \frac{e}{2\pi c} \int (\text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}).$$

¹⁾ В лекции 4 величины, относящиеся к системе отсчёта ведущего центра, отмечались штрихом, но здесь мы не будем этого делать.

В первом интеграле подынтегральное выражение постоянно, поэтому он равен произведению mv_{\perp}^2 на период движения $2\pi/|\Omega|$; в итоге первое слагаемое будет равно $mv_{\perp}^2/|\Omega|$. Во втором интеграле вектор $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ также нужно считать постоянным, поскольку в невозмущённой системе магнитное поле однородно. Направление $d\mathbf{S}$ в теореме Стокса составляет правый винт с направлением обхода контура, которое в данном случае совпадает с направлением ларморовского вращения, а направление вращения образует левый винт с направлением Ω , т. е. правый винт с направлением $-\Omega$. Следовательно, $(e/2\pi c)\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -(m/2\pi)|\Omega| dS$. Так как полная площадь равна $S = \pi\rho^2 = \pi v_{\perp}^2/\Omega^2$, второй интеграл составит половину первого, имея противоположный знак, а поэтому

$$J_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2|\Omega|} = \frac{|e|}{2\pi c} \Phi. \quad (6)$$

Заметим, что

$$J_x = \frac{1}{2\pi} \oint P_x dx, \quad J_y = \frac{1}{2\pi} \oint P_y dy$$

также являются адиабатическими инвариантами, однако они не несут новой информации, так как $J_x = J_y = \frac{1}{2}J_{\perp}$.

Факту инвариантности Φ можно дать ещё одну интерпретацию. Подставляя $\rho = mcv_{\perp}/(eB)$ в формулу (3), находим, что с точностью до коэффициента, составленного из мировых констант, магнитный поток пропорционален магнитному моменту $\mu = mv_{\perp}^2/(2B)$:

$$\Phi = \frac{2\pi mc^2}{e^2} \mu.$$

Таким образом, магнитный момент также можно было бы называть адиабатическим инвариантом. Однако это утверждение верно лишь в нерелятивистском приближении. В релятивистской теории адиабатическим инвариантом является произведение $\gamma^2\mu$, тогда как релятивистский магнитный момент

$$\mu_{\gamma} = \gamma\mu = \gamma \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

не является инвариантом.

Инвариантность J_{\perp} и $\Phi = \pi\rho^2 B$ даже в релятивистском случае нетрудно доказать без ссылок на теоремы механики, выполнив усреднение уравнений движения заряженной частицы в медленно

меняющемся магнитном поле (задача 5.4). Наконец, если подставить релятивистские выражения $\rho = cp_{\perp}/(eB)$ и $p_{\perp} = \gamma m v_{\perp}$ для ларморовского радиуса и импульса в формулу (3), нетрудно заметить, что комбинация p_{\perp}^2/B также является адиабатическим инвариантом.

Суммируя всё сказанное, заключаем, что величины

$$\Phi, \quad \gamma^2 \mu, \quad p_{\perp}^2/B$$

являются адиабатическими инвариантами. Строго говоря, ни магнитный момент μ , ни его релятивистский аналог μ_{γ} не являются адиабатическими инвариантами. При переходе из одной системы отсчёта в другую магнитный дипольный момент преобразуется в электрический дипольный момент (задача 5.6), тогда как инвариант, по определению, не может зависеть от выбора системы отсчёта. И когда всё-таки говорят, что магнитный момент является адиабатическим инвариантом, фактически подразумевают значение μ в системе отсчёта ведущего центра в нерелятивистском пределе. Следуя сложившейся традиции, так мы и будем делать далее.

5.3. Система уравнений ведущего центра

В нерелятивистском приближении ведущий центр движется со скоростью

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{u} + \frac{1}{\Omega} \left[\mathbf{h} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \right] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right], \quad (7)$$

где $\mathbf{u} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_E$. Помимо этого уравнения, замкнутая система уравнений должна содержать ещё рецепт вычисления v_{\perp} и v_{\parallel} .

Уравнение для поперечной скорости v_{\perp} в сопутствующей системе отсчёта фактически уже получено в п. 5.2. В дрейфовом приближении при нерелятивистских скоростях $\mu = mv_{\perp}^2/(2B)$ является интегралом движения, т. е.

$$\frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (8)$$

Отсюда следует, что v_{\perp} однозначно выражается через величину магнитного поля:

$$v_{\perp} = \sqrt{2\mu B/m}. \quad (9)$$

Продольную скорость v_{\parallel} проще всего найти из уравнения для кинетической энергии частицы:

$$\frac{dK}{dt} = e \left(\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) + \mu \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (10)$$

Поля \mathbf{E} и \mathbf{B} в уравнениях (9) и (10) относятся к точке, где находится ведущий центр частицы в данный момент времени, а кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \quad (11)$$

складывается из энергии ведущего центра $\frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_E^2)$ и энергии ларморовского вращения $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2$. Уравнение (10) можно вывести путём усреднения $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$ по ларморовской орбите (задача 5.5). Однако результат усреднения почти очевиден, поэтому ограничимся краткими пояснениями. Первое слагаемое в правой части (10) описывает работу электрического поля над ведущим центром частицы. Второе слагаемое отвечает работе вихревого электрического поля по замкнутой ларморовской окружности. При изменении B ларморовские окружности адиабатически сжимаются или расширяются, соответственно этому уменьшается или увеличивается поперечная энергия частицы $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2$.

Уравнение (10) можно переписать в ином виде, выделив из кинетической энергии (11) последнее слагаемое $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \mu B$. Так как

$$\frac{d}{dt}\mu B = \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \mu \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \nabla B \right),$$

уравнение (10) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_{\parallel}^2 + mv_E^2}{2} = (e\mathbf{E} - \mu \nabla B) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

В стационарном поле электрический (φ) и магнитный (A) потенциалы можно выбрать так, что они не будут зависеть от времени. Тогда $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, а правая часть последнего уравнения преобразуется в полную производную по времени $d(-e\varphi - \mu B)/dt$. Следовательно, полная энергия частицы

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_E^2 + \mu B + e\varphi \quad (12)$$

сохраняется, т. е.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (13)$$

Второе слагаемое $\frac{1}{2}mv_E^2$ в правой части (12) часто мало по сравнению с тремя другими. Если принять для оценки, что $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \sim \mu B \sim e\varphi \sim T$, $E \sim \varphi/a$, где T — температура облака плазмы и a — его минимальный размер, то это слагаемое оказывается примерно в a^2/ρ^2 раз меньше других. Обычно им пренебрегают, так как $a \gg \rho$.

5.4. Магнитные пробки

В неоднородном магнитном поле на магнитный момент действует сила [60, формула (5.69)]

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}).$$

Так как $\boldsymbol{\mu} = -\mu\mathbf{h}$, $(\mathbf{h} \cdot \mathbf{B}) = B$, а $\mu = \text{const}$, она равна

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla B. \quad (14)$$

Если подставить её в общее выражение

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F} \times \mathbf{B}]}{B^2}$$

для скорости магнитного дрейфа под действием произвольной силы \mathbf{F} , получится уже известная формула (27) скорости градиентного дрейфа

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right].$$

Это обстоятельство было отмечено Альфвеном (Hannes Alfvén) в той же статье [56], где он впервые вычислил скорость градиентного дрейфа.

Он же (и там же) объяснил, что продольная составляющая этой силы

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (15)$$

которая не влияет на скорость дрейфа, тормозит частицу при движении в направлении более сильного поля, как показано на рис. 5.2. Появление магнитной силы, действующей на ведущий центр частицы в направлении магнитного поля, может показаться удивительным, так как сила Лоренца $\mathbf{F} = (e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ перпендикулярна \mathbf{B} . Удивление проходит, если рассмотреть силы, возникающие при движении частицы в неоднородном магнитном поле. На малом участке пути движение частицы, очевидно, можно рассматривать как перемещение ларморовской окружности вдоль силовой линии. Если силовые линии параллельны друг другу, то в каждой точке окружности сила Лоренца направлена строго по радиусу к центру окружности и не может изменить продольную компоненту скорости. В нарастающем поле, где силовые линии сходятся, появляется проекция силы, перпендикулярная плоскости ларморовской окружности. Эта проекция стремится вытолкнуть частицу из области более сильного поля.

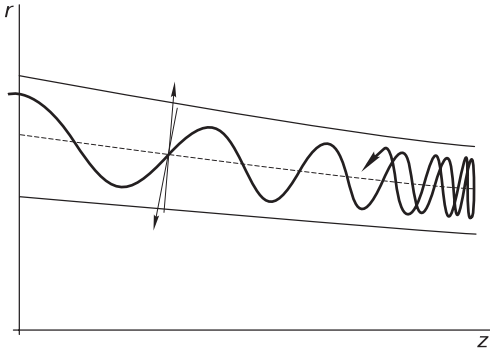


Рис. 5.2. Отражение заряженной частицы от магнитной пробки; сила Лоренца, перпендикулярная скорости частицы в каждой точке её траектории (толстая кривая), в неоднородном магнитном поле имеет проекцию на направление движения ведущего центра (штриховая линия), причём векторная сумма пары стрелок (изображающих силу Лоренца на краях траектории) направлена от области сгущения силовых линий в сильном поле

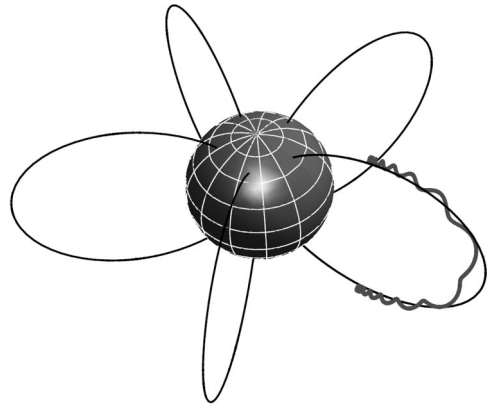


Рис. 5.3. Типичная траектория заряженной частицы, захваченной в магнитное поле Земли (толстая кривая); частица вращается вокруг магнитной силовой линии (тонкие кривые), попеременно отражаясь от северного и южного магнитных полюсов; магнитная ось наклонена под углом $11,5^\circ$ к оси вращения Земли, а магнитные полюса перемещаются по эллиптическим траекториям на поверхности Земли со скоростью 10 км в год

Адиабатические ловушки для удержания плазмы

Альфвен применял свою теорию к анализу движения заряженных частиц в дипольном магнитном поле Земли (рис. 5.3). Он предположил, что частицы должны отражаться от областей сильного магнитного поля вблизи магнитных полюсов. На этом же эффекте основан предложенный независимо Г. И. Будкером [62] и Р. Постом (Richard Post) [42] способ удержания плазмы в *адиабатической ловушке* с «магнитными пробками». Простейший вариант такой ловушки называют *пробкотроном*. Название связано с тем, что магнитные линии сгущаются в области сильного поля, формируя что-то вроде горлышка бутылки, как показано на рис. 5.4, а. Магнитное поле вблизи такого горлышка выполняет роль пробки, отражая большую часть частиц, в связи с чем в зарубежной литературе магнитные пробки называют магнитными зеркалами (magnetic mirrors). К настоящему времени предложено множество модификаций пробкотрона Будкера—Поста. Все эти модификации объединяют единым термином *линейные*

системы для магнитного удержания плазмы. Ранее их также называли *открытыми ловушками*.

Рассмотрим, как движется заряженная частица в адиабатической ловушке. В простом пробкотроне магнитное поле создаётся двумя кольцевыми катушками с током. Оно имеет минимум между катушками и на каждой силовой линии максимально вблизи плоскости катушек. На рис. 5.4, б изображён профиль магнитного поля на оси; примерно такова же зависимость $B(s)$ на силовых линиях, близких к оси.

Сначала рассмотрим движение ведущего центра частицы в нулевом приближении по параметру ρ/ℓ , т. е. пренебрежём дрейфом. Если радиус катушек b порядка расстояния L между ними, то характерный масштаб изменения магнитного поля в этой задаче $\ell \sim L \sim b$. В пределе $\rho/\ell \rightarrow 0$ и при отсутствии электрического поля имеем

$$\dot{R} = v_{\parallel} h, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{const}, \quad \mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \text{const}.$$

У частицы, стартующей из минимума поля, по мере продвижения в пробку увеличивается поперечная скорость

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2}{m} \mu B},$$

перпендикулярная направлению магнитного поля, а продольная скорость

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon - \mu B)},$$

параллельная магнитному полю, уменьшается, пока не обратится в нуль в *точке остановки*, где

$$\varepsilon = \mu B.$$

Затем частица начнёт двигаться обратно, «отразившись» от точки остановки. Полная скорость $v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$ всё это время остаётся

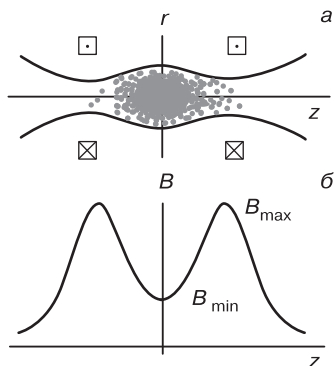
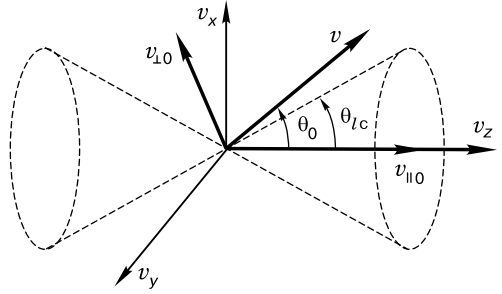


Рис. 5.4. Схема адиабатической ловушки Будкера—Поста; заряженные частицы удерживаются магнитным полем от разлёта поперёк силовых линий; разлёту плазмы вдоль магнитного поля препятствуют магнитные пробки — области сильного магнитного поля, где силовые линии сгущаются; форма силовых линий (на верхнем рисунке) напоминает бутылку с двумя горлышками; её форма может быть найдена из условия сохранения магнитного потока через сечение бутылки $\pi r^2 B(z) = \text{const}$, где $B(z)$ — поле на оси ловушки (на нижнем рисунке)

Рис. 5.5. Конус потерь в пространстве скоростей; в ловушке с магнитными пробками удерживаются частицы с питч-углом $\theta_0 = \arcsin(v_{\perp 0}/v)$, большим угла конуса потерь $\theta_{lc} = \arcsin \sqrt{B_{\min}/B_{\max}}$; частицы, каким-либо образом попавшие в конус потерь, быстро вылетают из ловушки



постоянной вследствие сохранения энергии $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$, а частица движется вдоль одной и той же магнитной линии, поскольку мы пока что пренебрегли дрейфом.

Если поперечную скорость в минимуме магнитного поля B_{\min} на данной магнитной линии обозначить $v_{\perp 0} \equiv v \sin \theta_0$, можно записать

$$\mu = \frac{mv^2}{2B_{\min}} \sin^2 \theta_0.$$

Следовательно, в точке остановки

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2 \sin^2 \theta_0}{2B_{\min}} B$$

и

$$B = B_{\min} / \sin^2 \theta_0.$$

Параметр θ_0 называют *питч-углом*. Если $B_{\min} / \sin^2 \theta_0$ формально больше, чем максимальное магнитное поле B_{\max} на данной магнитной линии, частица беспрепятственно вылетает из ловушки. В ловушке могут удерживаться только частицы с достаточно большим питч-углом, таким что

$$\sin^2 \theta_0 > B_{\min} / B_{\max}. \quad (16)$$

Пробочное отношение B_{\max}/B_{\min} является важной характеристикой пробкотрона, так как именно оно определяет область удержания заряженных частиц в пространстве скоростей. Соответствующее ему значение питч-угла θ_{lc} определяется из равенства

$$\sin^2 \theta_{lc} = B_{\min} / B_{\max}.$$

Условие, $\theta_0 > \theta_{lc}$, эквивалентное неравенству (16), выделяет в пространстве скоростей область удержания заряженной частицы. Противоположное условие $\theta_0 < \theta_{lc}$ определяет *конус потерь* (loss cone). Эта область действительно имеет форму конуса, как показано на рис. 5.5. Если заряженная частица каким-либо образом попадает в конус потерь, она быстро теряется из ловушки, тем самым оправдывая его название. Соответственно, θ_{lc} называют *углом конуса потерь*.

Взаимные столкновения частиц приводят к изменению их питч-угла. Частицы, первоначально находившиеся вне конуса потерь, в результате столкновений всё-таки туда попадают и уходят из пробкотрона. Из-за меньшей массы и, соответственно, большей скорости электроны чаще испытывают столкновения и быстрее попадают в конус потерь, чем более тяжёлые ионы. В итоге плазма в адиабатических ловушках приобретает положительный потенциал $\varphi \sim T_e/e$, который препятствует уходу электронов, уравнивая скорость потерь электронов и ионов. Этот потенциал называют *амбиполярным*. Он служит инструментом поддержания квазинейтральности плазмы. Положительный амбиполярный потенциал изменяет форму конуса потерь, сужая его для электронов и расширяя для ионов (задача 5.7).

5.5. Второй адиабатический инвариант

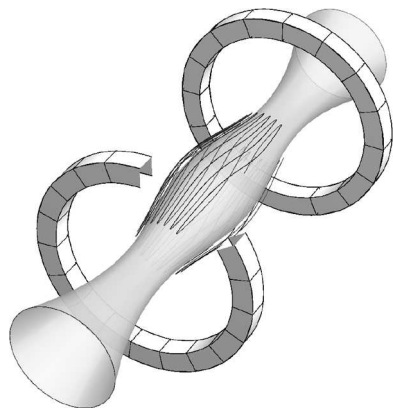
Сделаем теперь следующий шаг по параметру ρ/ℓ и учтём дрейф частицы в неоднородном магнитном поле, а также установленный выше факт наличия электрического поля в плазме, удерживаемой в адиабатической ловушке:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}]. \quad (17)$$

В пробкотроне, создаваемом коаксиальными катушками, силовая линия плоская, а скорость дрейфа $\mathbf{v}_{dr} = d\mathbf{R}/dt$ направлена по азимуту. Частица медленно дрейфует в азимутальном направлении, быстро осциллируя между магнитными пробками. Траектория ведущего центра покрывает *дрейфовую оболочку*, которая в осесимметричном пробкотроне представляет собой поверхность вращения, образованную вращением силовой линии вокруг оси пробкотрона, как показано на рис. 5.6. Направление дрейфа изменяется на противоположное при смене знака кривизны, поэтому траектория ведущего центра частицы, у которой точка остановки находится вблизи магнитной пробки, описывает петлю наподобие восьмёрки, в среднем смещаясь в ту же сторону, что и траектория частицы, локализованной вблизи экваторальной ловушки. За время пролёта между точками остановки частица смещается по азимуту на малый угол, поэтому её траектория плотно устилает поверхность дрейфовой оболочки, как показано на рис. 5.7.

Чтобы найти форму дрейфовой оболочки в более сложной геометрии, не обязательно решать дрейфовые уравнения движения. При

Рис. 5.6. В простом аксиально-симметричном пробкотроне заряженная частица дрейфует по азимуту; фрагмент катушки на переднем плане удалён, чтобы показать траекторию частицы; траектория, доходящая до магнитных пробок, описывает петлю наподобие восьмёрки, в среднем смещаясь в ту сторону, куда дрейфует частица, запертая вблизи экватора



определённых условиях дрейфовая оболочка однозначно характеризуется постоянными значениями энергии ε , магнитного момента μ и так называемого продольного адиабатического инварианта J_{\parallel} .

В нулевом приближении по параметру ρ/ℓ , когда дрейфовым движением полностью пренебрегают, частица движется по одной и той же силовой линии постоянного во времени магнитного поля между точками остановки, причём это движение строго периодически. Таким образом, невозмущённым является движение строго вдоль силовой линии по координате s , а канонически сопряжённым импульсом — проекция обобщённого импульса $P_{\parallel} = mv_{\parallel} + (e/c)A_{\parallel}$ на направление

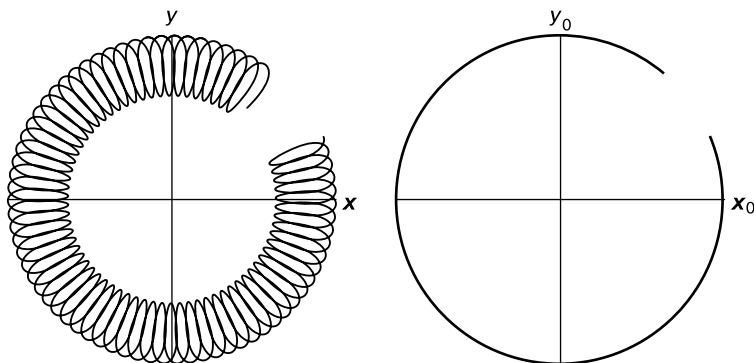


Рис. 5.7. Проекция дрейфовой траектории, изображённой на рис. 5.6, на экваториальную плоскость пробкотрона; *слева* — ортогональная проекция, *справа* — проекция по магнитным линиям; дрейфовые оболочки образуют систему вложенных непересекающихся поверхностей вращения (не показано)

силовой линии в каждой её точке. Интеграл по периоду этого движения

$$J_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint P_{\parallel} ds = \frac{1}{2\pi} \oint mv_{\parallel} ds + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{e}{c} A_{\parallel} ds$$

является адиабатическим инвариантом для частицы с заданной энергией ε и магнитным моментом μ . Второй интеграл в правой части обращается в нуль при интегрировании по замкнутой траектории (в отличие от первого, где v_{\parallel} меняет знак одновременно со сменой знака ds). Поэтому окончательно имеем

$$J_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int \sqrt{2m \left(\varepsilon - e\varphi - \mu B - \frac{1}{2}mv_E^2 \right)} ds, \quad (18)$$

где интегрирование идёт по силовой линии между точками отражения частицы, в которых $\varepsilon = e\varphi + \mu B + mv_E^2/2$. Величину J_{\parallel} называют *продольным адиабатическим инвариантом*. Он приближённо сохраняется при появлении небольшого возмущения, которое нарушает строгую периодичность движения.

В качестве такого возмущения можно рассматривать дрейф частиц, который приводит к медленному смещению частицы на соседние силовые линии магнитного поля. «Медленность» означает, что характерное время изменения τ_{dr} магнитного или электрического поля, вызванное переходом частицы на другие силовые линии, велико по сравнению с периодом продольных колебаний:

$$\tau_{dr} \gg \ell/v. \quad (19)$$

Для выполнения этого условия в адиабатических ловушках требуется, чтобы ларморовский радиус ионов был значительно меньше поперечного размера плазмы (задача 5.9).

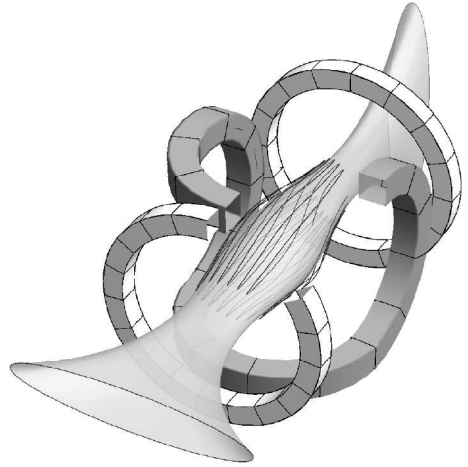
Чтобы отследить процесс перехода частицы с одной силовой линии на другую, прежде всего их нужно как-то пометить. В качестве маркера силовой линии обычно используют её координаты пересечения с какой-то заранее выбранной поверхностью. Выбор такой поверхности определяется только соображениями удобства. Часто выбирают экваториальную плоскость, которая рассекает магнитную ловушку примерно пополам. Пусть x_0, y_0 — координаты пересечения силовой линии с такой поверхностью. Тогда можно записать, что

$$\varphi = \varphi(x_0, y_0, s), \quad B = B(x_0, y_0, s).$$

При этом продольный адиабатический инвариант оказывается функцией параметров $\varepsilon, \mu, x_0, y_0$:

$$J_{\parallel} = J_{\parallel}(\varepsilon, \mu, x_0, y_0),$$

Рис. 5.8. Дрейф заряженной частицы в квадрупольной адиабатической ловушке; квадрупольное поле создаётся катушкой типа «baseball», размещённой между круглыми катушками; фрагменты катушек удалены, чтобы показать траекторию частицы; поверхность, составленная из магнитных линий, выпущенных из окружности в экваториальной плоскости ловушки, вблизи магнитных пробок приобретает форму «рыбьих хвостов»; для уменьшения выдрейфовывания частиц плазмы на стенки ловушки «рыбьи хвосты» развёрнуты на 90° относительно друг друга



а уравнение $J_{\parallel} = \text{const}$ даёт зависимость y_0 от x_0 для частицы с заданными ε и μ , т. е. линию пересечения дрейфовой оболочки с выбранной плоскостью (x_0, y_0) . Дрейфовая поверхность составляется из силовых линий, выпущенных из всех точек этой линии пересечения.

В аксиально-симметричном пробкотроне (рис. 5.6 и 5.7) дрейфовая поверхность является поверхностью вращения. Для частиц с разными значениями ε и μ поверхности совпадают, если, конечно, одинаков радиус поверхности $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

В ловушке с квадрупольным полем (рис. 5.8 и 5.9) дрейфовая поверхность имеет более сложную форму. Сравнив рис. 5.9, где показана проекция дрейфовых траекторий на экваториальную плоскость, и особенно его правую часть, где проекция построена вдоль магнитных линий, с аналогичным рис. 5.7 для аксиально-симметричного пробкотрона, нетрудно заметить, что в квадрупольной ловушке эта проекция имеет конечную ширину, тогда как для аксиально-симметричного пробкотрона она равна нулю. Этот эффект называется расщеплением дрейфовой оболочки. Поверхность $J_{\parallel} = \text{const}$ располагается где-то внутри такой расщеплённой оболочки. Читателю предлагается самому объяснить причину расщепления и оценить толщину дрейфовой оболочки (задача 5.18).

5.6. Третий адиабатический инвариант

Наконец, расскажем о *третьем адиабатическом инварианте* $\Phi_{\text{др}}$. Представим, что в предыдущей задаче φ и B медленно меняются,

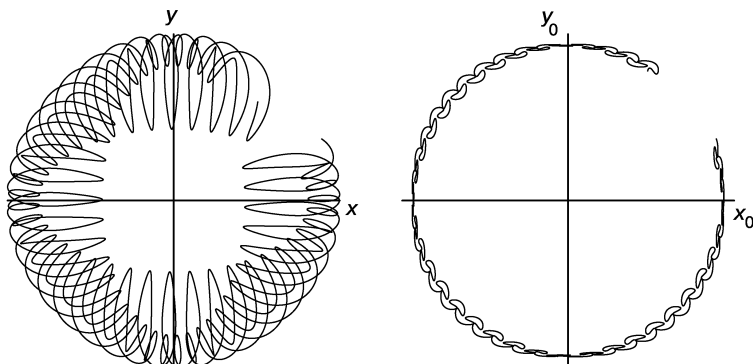


Рис. 5.9. Проекция дрейфовой траектории, изображённой на рис. 5.8, на экваториальную плоскость ловушки; *слева* — ортогональная проекция, *справа* — проекция по магнитным линиям; поверхности $J_{\parallel} = \text{const}$ для разных ε и μ образуют систему взаимно пересекающихся поверхностей (не показано)

причём характерное время изменения значительно больше времени $\ell/v_{\text{др}}$, за которое частица обходит дрейфовую оболочку. При этом сохраняется магнитный поток через сечение дрейфовой оболочки:

$$\Phi_{\text{др}} = \int_{S_{\text{др}}} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}).$$

С формальной точки зрения, $\Phi_{\text{др}}$ есть функция энергии частицы ε , её магнитного момента μ и «номера» дрейфовой оболочки, который определяется величиной продольного адиабатического инварианта. При медленном изменении электрического и магнитного полей адиабатические инварианты μ , J_{\parallel} и $\Phi_{\text{др}}$ сохраняются, а энергия частицы меняется. Зависимость энергии от времени $\varepsilon(t)$ можно найти из совместного решения уравнений $J_{\parallel} = \text{const}$ и $\Phi_{\text{др}} = \text{const}$ при заданном начальном значении μ .

Литература

Краткое изложение теории адиабатических инвариантов дано в книге Л. А. Арцимовича и Р. З. Сагдеева «Физика плазмы для физиков» [6] (§2.3), где также обсуждается точность сохранения адиабатических инвариантов.

Строгую теорию адиабатических инвариантов изложили в обзорной статье А. И. Морозов и Л. С. Соловьёв [59]; они также указали критерий абсолютного удержания в аксиально-симметричном пробкотроне.

Д. Д. Рютов и Г. В. Ступаков описали способ отыскания дрейфовых оболочек в линейной адиабатической ловушке с квадрупольным магнитным полем [63].

Точность сохранения магнитного момента на простых моделях магнитных ловушек изучена Б. В. Чириковым [64]. И. А. Котельников доказал, что малозаметная гофрировка магнитного поля, связанная с дискретной структурой магнитной системы, существенно усиливает неадиабатические эффекты [65].

Эксперименты по проверке принципа адиабатического удержания выполнили С. Н. Родионов [66], Г. Гибсон и Е. Лауер [67].

Задачи

Задача 5.1. Вычислить магнитный момент заряженной релятивистской частицы в магнитном поле. ►► Решение

Задача 5.2. Показать, что при ускорении заряженной релятивистской частицы электрическим полем, параллельным магнитному, магнитный поток через ларморовскую окружность, в отличие от магнитного момента, не меняется. ►► Решение

Задача 5.3. Используя теорему об адиабатических инвариантах, доказать, что отношение p_{\perp}^2/B является адиабатическим инвариантом не только в нерелятивистском пределе.

Задача 5.4. Доказать, что отношение p_{\perp}^2/B является адиабатическим инвариантом, выполнив усреднение уравнений движения частицы в системе отсчёта ведущего центра. ►► Решение

Задача 5.5. Вывести уравнение (10), выполнив усреднение уравнений движения частицы в системе отсчёта ведущего центра частицы. ►► Указание

Задача 5.6. Записать преобразования Лоренца для дипольных моментов при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Противоречит ли адиабатическая инвариантность магнитного момента преобразованию Лоренца? ►► Решение

Задача 5.7. Найти форму конуса потерь при наличии амбиполярного потенциала. Для простоты принять, что потенциал плазмы φ почти всюду равен $\varphi_0 > 0$ и лишь непосредственно вблизи магнитных пробок скачком обращается в нуль. Отдельно рассмотреть удержание электронов и положительно заряженных ионов. ►► Решение

Задача 5.8. Найти область абсолютного удержания в аксиально-симметричном пробкотроне. ►► Решение

Задача 5.9. Выяснить условия сохранения продольного адиабатического инварианта в адиабатических ловушках для удержания плазмы. ►► Решение

Задача 5.10. В «катушке Гельмгольца» расстояние между витками с током равно их радиусу. Вычислить пробочное отношение на оси. ►► Решение

Задача 5.11. В пробочное магнитное поле захвачен пучок заряженных частиц с одинаковым питч-углом. Пучок отражается в точке, где $B = B_*$,

а его плотность в минимуме поля B_0 равна n_0 . Найти распределение плотности пучка вдоль силовой линии, определив её зависимость от величины магнитного поля B при $B_0 < B < B_*$. ►► Ответ:

Задача 5.12. Заряженная частица дрейфует в поле магнитного диполя. Величина диполя адиабатически медленно увеличивается в 2 раза. Во сколько раз изменится энергия частицы? ►► Решение

Задача 5.13. Во сколько раз изменится энергия заряженной частицы с начальным питч-углом $\theta_0 = 90^\circ$, если магнитное поле в пробкотроне очень медленно увеличить в 2 раза?

Задача 5.14. Заряженная частица удерживается в пробкотроне в области минимального магнитного поля, где приближённо $B(z) = B_{\min}(1 + z^2/L^2)$. Магнитное поле в пробкотроне очень медленно увеличивается без изменения его геометрии. Во сколько раз изменится энергия частицы с заданным начальным питч-углом θ_0 при увеличении поля в n раз? ►► Решение

Задача 5.15. (Механизм Ферми ускорения космических лучей.) Протон захвачен в ловушку с пробочным отношением 5. В начальный момент энергия протона равна 1 кэВ, а питч-угол в минимуме магнитного поля составляет 45° . Магнитные пробки сближаются со скоростью 10 км/с. До какой энергии разгонится протон, прежде чем покинет ловушку? ►► Ответ

Задача 5.16. Оценить точность сохранения магнитного момента заряженной частицы в магнитной адиабатической ловушке. ►► Решение

Задача 5.17. Оценить время уменьшения магнитного момента заряженной частицы из-за циклотронного излучения в магнитном поле. Что происходит быстрее: уход частицы из пробкотрона вследствие неадиабатических эффектов или её уход из-за уменьшения магнитного момента при циклотронном излучении?

Задача 5.18. Оценить толщину дрейфовых оболочек в линейной магнитной ловушке с квадрупольным полем.

Задача 5.19. Исследовать форму дрейфовых траекторий в квадрупольной адиабатической ловушке.

Задача 5.20. Исследовать форму дрейфовых траекторий в токамаке.

Кулоновские столкновения

Дифференциальное и транспортное сечение.

Рассеяние на кулоновском центре.

Кулоновский логарифм. Парные столкновения.

Торможение и остывание пробной частицы.

Когда сталкиваются две частицы, в простейшем случае происходит *рассеяние* — частицы обмениваются импульсом и энергией. В более сложном варианте — изменяется состояние или состав сталкивающихся частиц: атомы становятся ионами, а ионы — вновь нейтральными атомами. Могут также испускаться и поглощаться фотоны. В столкновениях ионов больших энергий происходят реакции деления и синтеза ядер. Наконец, одновременно могут сталкиваться три или большее число частиц.

Все столкновения можно условно разделить на *упругие* и *неупругие*. Первые отличаются от вторых тем, что суммарная кинетическая энергия сталкивающихся частиц не изменяется. В рамках классической физики представление об упругих столкновениях заряженных частиц следовало бы считать идеализацией реальных явлений, так как любая заряженная частица, движущаяся с ускорением, обязана излучать, теряя энергию. Квантовая теория вносит существенные поправки в классическую картину мира, предсказывая, что излучение имеет вероятностный характер и что только малая доля столкновений сопровождается излучением фотона, который способен унести заметную долю кинетической энергии. Этим оправдывается традиционный подход, когда изучение процессов, сопровождающих столкновения частиц, начинают с *кулоновского рассеяния*. Так принято называть упругие столкновения при пролёте одной заряженной частицы мимо другой.

6.1. Параметры столкновений

Различные явления, случающиеся в столкновениях частиц, характеризуют *сечением процесса*. Поясним это понятие на примере

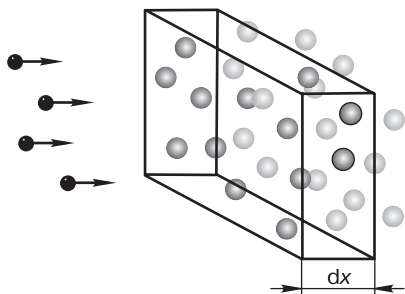


Рис. 6.1. Пучок частиц ударяет атомы мишени, занимающей полупространство $x > 0$; предположим, что, попадая в атом, частица «прилипает» к нему; тогда плотность частиц пучка n_b убывает в $e = 2,718\dots$ раз на длине свободного пробега $\lambda = 1/(\sigma n_a)$, если n_a — это число атомов в единице объёма мишени, а σ — площадь видимого сечения атома, равная πa^2 в модели твёрдых шариков с радиусом a

абсолютно неупругого поглощения пучка частиц при падении на мишень, как показано на рис. 6.1. Пусть поток частиц с плотностью n_b , летящих с одинаковой скоростью v , падает на полупространство $x > 0$, занятое веществом из очень массивных частиц (назовём их атомами) с плотностью n_a штук в единице объёма. Пусть dn_b есть изменение плотности пучка за счёт выбывания частиц, которые «прилипают» к атомам на дифференциально малом расстоянии dx . Ясно, что это число пропорционально n_a , n_b и dx . Следовательно,

$$dn_b = -\sigma n_a n_b dx, \quad (1)$$

где константа пропорциональности σ имеет размерность площади и называется *сечением процесса*. Знак минус отвечает убыли частиц пучка.

В воображаемом процессе «прилипания» σ можно интерпретировать как площадь кружка вокруг каждого атома мишени, при попадании в который частица пучка прилипает к нему. Тогда $\sigma n_a dx$ есть доля геометрического сечения мишени, перекрытая атомами в слое толщины dx , перпендикулярном направлению движения пучка. Она равна доле частиц $(-dn_b)/n_b$, удалённых из пучка, что и отражает уравнение (1). Его решение

$$n_b = n_{b0} \exp(-x/\lambda)$$

описывает экспоненциальное убывание частиц в пучке, причём расстояние

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_a} \quad (2)$$

на котором плотность пучка убывает в $e = 2,718\dots$ раз, называется *длиной свободного пробега*. Это понятие было введено Рудольфом Клаузиусом (Rudolf Clausius) в 1858 г. Среднее время между столкновениями

$$\tau = \lambda/v \quad (3)$$

называют *временем свободного пробега*. Обратная величина

$$\nu = n_a \sigma v \quad (4)$$

называется *частотой столкновений*.

В столкновениях одного и того же набора частиц могут происходить разные явления. Например, электрон может упруго рассеяться на ионе, но возможна также излучательная рекомбинация, когда электрон захватывается на атомарную орбиту, а излишек энергии и импульса уносит фотон. Каждому из возможных процессов сопоставляют своё сечение, а наиболее вероятный процесс имеет сечение большей величины.

6.2. Дифференциальное сечение рассеяния

Пусть поток частиц с зарядом e_b , скоростью v и плотностью n_b налетает на неподвижный *кулоновский центр* с зарядом e_a . Неподвижным кулоновским центром можно считать заряженную частицу с массой, значительно превышающей массу налетающей частицы, — тогда ускорением тяжёлой частицы можно пренебречь по сравнению с ускорением лёгкой частицы. Позднее мы избавимся от этого допущения, равно как и от предположения об одинаковой величине скорости налетающих частиц.

Пусть b обозначает *прицельный параметр* налетающей частицы (не путать с индексом в обозначениях типа e_b и n_b), т. е. кратчайшее расстояние между участком траектории частицы на достаточно большом удалении от рассеивающего центра и параллельной ей осевой линией, проходящей через рассеивающий центр (рис. 6.2). Выделим в налетающем потоке пучок частиц, пролетающих через небольшой сегмент в виде сектора тонкого колечка с внутренним радиусом b и внешним радиусом $b + db$, опирающегося на азимутальный угол $d\psi$. Через площадь этого сегмента

$$d\sigma = db \times b d\psi \quad (5)$$

в единицу времени пролетает $n_b v d\sigma$ частиц. Каждая частица отклоняется на угол θ , зависящий от прицельного расстояния b в соответствии с формулой Резерфорда (Ernest Rutherford, 1911 [68]):

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{e_a e_b}{m v^2 b} = \frac{b_*}{b}. \quad (6)$$

Параметр

$$b_* = \frac{e_a e_b}{m v^2} \quad (7)$$

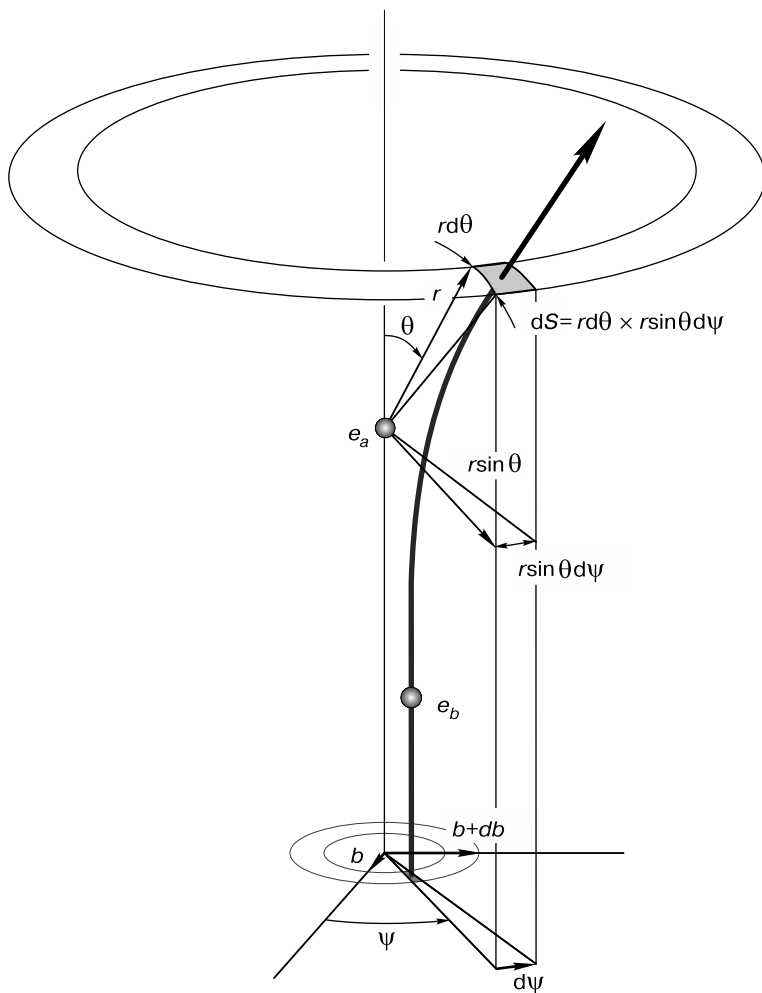


Рис. 6.2. Дифференциальное сечение рассеяния на неподвижном кулоновском центре; частицы налетающего потока, пересекающие площадку $d\sigma = db \times b d\psi$, после рассеяния разлетаются в телесном угле $d\Omega = dS/r^2 = d\theta \times \sin \theta d\psi$

называют *кулоновским радиусом*. Прицельный параметр $b = b_*$ отвечает рассеянию на 90° .

Соответственно разбросу прицельного параметра db траектории рассеянных частиц расходятся в диапазоне углов

$$d\theta = \frac{d\theta}{db} db,$$

а поперечные размеры пучка рассеянных частиц непрерывно увеличиваются по мере удаления от рассеивающего центра. На расстоянии r

от рассеивающего центра площадь выделенного сегмента пучка будет равна $dS = r d\theta \times r \sin \theta d\psi$. Однако величина телесного угла $d\Omega = dS/r^2$, опирающегося на эту площадь,

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi, \quad (8)$$

остаётся неизменной. Отношение $d\sigma/d\Omega$ оказывается удобной характеристикой процесса рассеяния и называется *дифференциальным сечением рассеяния*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (9)$$

Знак модуля $|\dots|$ введён для того, чтобы величина дифференциального сечения не зависела от выбора направления отсчёта углов θ и $d\theta$. Продифференцировав обе стороны формулы (6), находим производную $db/d\theta$ и затем дифференциальное сечение *кулоновского рассеяния*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(b_*/2)^2}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (10)$$

Дифференциальное сечение характеризует вероятность рассеяния на определённый угол, вернее, в определённый интервал углов. Дифференциал $d\sigma = (d\sigma/d\Omega) d\Omega$ отвечает рассеянию частиц на неподвижной мишени в интервал телесного угла $d\Omega$ около направления Ω . Дифференциальным сечением называют как $d\sigma/d\Omega$, так и $d\sigma$. Полное сечение рассеяния σ получается интегрированием $d\sigma$ по всему телесному углу, однако в теории кулоновских столкновений более ясный смысл имеет не полное, а транспортное сечение.

6.3. Транспортное сечение

Вычислим силу, действующую на рассеивающий центр со стороны потока частиц. Так как рассеивающий центр неподвижен, кинетическая энергия налетающей частицы $\frac{1}{2}mv^2$ вдалеке от него до и после рассеяния одинакова. Следовательно, абсолютная величина импульса mv также неизменна. Однако каждая частица, которая отклоняется на угол θ , передаёт рассеивающему центру часть импульса в направлении своего первоначального движения

$$\Delta p_{\parallel} = mv(1 - \cos \theta).$$

Часть переданного импульса $\Delta p_{\perp} = mv \sin \theta$, перпендикулярная скорости налетающего потока, компенсируется вкладом других частиц (рис. 6.3), поэтому искомая сила F направлена вдоль скорости налетающего потока частиц. Она равна импульсу, переданному рассеивающему центру в единицу времени. Так как в единицу времени площадку сечением $d\sigma$ пересекают $n_b v d\sigma$ частиц, имеем

$$F = \int \Delta p_{\parallel} n_b v d\sigma.$$

Переходя от интегрирования по площади сечения налетающего потока $d\sigma$ к интегрированию по телесному углу в направлении движения рассеянных частиц путём замены $d\sigma = (d\sigma / d\Omega) d\Omega$, получаем окончательное выражение для силы, действующей на рассеивающий центр:

$$\mathbf{F} = mv n_b v \sigma_t. \quad (11)$$

Здесь

$$\sigma_t = \int (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (12)$$

обозначает *транспортное сечение*. Оно имеет смысл площади сечения, которое имел бы рассеивающий центр в виде твёрдого шарика, если бы тот полностью поглощал импульс падающих на него частиц.

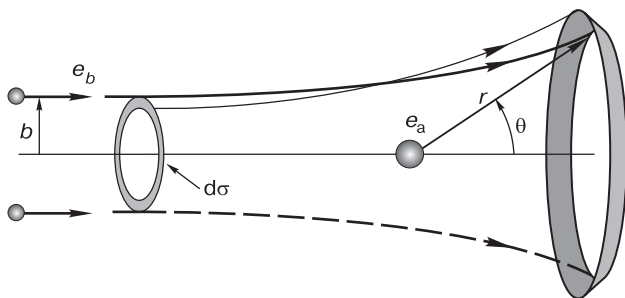


Рис. 6.3. Траектория частицы с зарядом e_b при рассеянии на неподвижном кулоновском центре с зарядом e_a ; разница между импульсом частицы после и до рассеяния передаётся рассеивающему центру; часть переданного импульса $\Delta p_{\perp} = mv \sin \theta$, перпендикулярная скорости налетающего потока, компенсируется частицей, которая налетает на том же прицельном расстоянии b с противоположной стороны от рассеивающего центра (её траектория показана пунктиром)

6.4. Кулоновский логарифм

Продолжая вычисления, подставим формулу Резерфорда (10) в интеграл (12) и распишем элемент телесного угла $d\Omega$ с помощью формулы (8). Интегрирование по азимутальному углу ψ даёт множитель 2π . В оставшемся интеграле

$$\sigma_t = 2\pi (b_*/2)^2 \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin^4(\theta/2)} \sin \theta d\theta$$

используем тригонометрические тождества: $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ и $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$. Затем перейдём к интегрированию по переменной $\sin(\theta/2)$, заметив, что $\cos(\theta/2) d\theta = 2 d \sin(\theta/2)$:

$$\sigma_t = 4\pi b_*^2 \int_0^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Получившийся интеграл логарифмически расходится на нижнем пределе, т. е. при малых значениях угла рассеяния θ . Предваряя дальнейшее разбирательство по существу дела, заменим нуль в нижнем пределе на неопределённый пока параметр $\sin(\theta_{\min}/2) \approx \theta_{\min}/2 \ll 1$:

$$\sigma_t \approx 4\pi b_*^2 \int_{\theta_{\min}/2}^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = 4\pi b_*^2 \ln \frac{2}{\theta_{\min}}. \quad (13)$$

Возникшая бесконечность сигнализирует, что какие-то явные или неявные предположения, сделанные нами, ошибочны. Поскольку малым углам рассеяния θ , согласно формуле Резерфорда (6), соответствуют большие значения прицельного параметра,

$$b \approx 2b_*/\theta,$$

очевидно, что расходимость не возникла бы, будь потенциал взаимодействия налетающего заряда с рассеивающим центром более короткодействующим, убывая при удалении от рассеивающего центра быстрее, чем по закону $1/r$. Тут самое время вспомнить, что в плазме потенциал кулоновского центра (как и вообще потенциал любого точечного заряда) экранируется, так что на расстояниях, больших дебаевской длины λ_D , поле спадает экспоненциально. Из-за этого прицельные расстояния b , существенно большие λ_D , на самом деле дают вовсе не бесконечный, а практически нулевой вклад в транспортное сечение. Выбрав в качестве нижнего предела в интеграле (13) величину $\theta_{\min} = 2b_*/\lambda_D$, получим

$$\sigma_t = 4\pi \Lambda b_*^2, \quad (14)$$

где параметр

$$\Lambda = \ln \frac{\lambda_D}{b_*} \quad (15)$$

называют *кулоновским логарифмом*. Окончательные формулы получаются после подстановки выражения (7) для кулоновского радиуса. В частности,

$$\sigma_t = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda}{m^2 v^4}. \quad (16)$$

Транспортное сечение убывает обратно пропорционально квадрату энергии $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$ налетающих частиц (если пренебречь зависимостью Λ от ε). В практической формуле

$$\sigma_t \simeq 10^{-12} \varepsilon^{-2}$$

энергия ε измеряется в электронвольтах (эВ), транспортное сечение σ_t — в квадратных сантиметрах (см²), а также принято, что $\Lambda = 15$, заряды частиц e_a и e_b равны элементарному заряду e . Для сравнения укажем, что сечение процессов с участием нейтральных атомов $\sigma_{at} \sim 10^{-16}$ см² заметно меньше транспортного сечения кулоновских столкновений заряженных частиц, $\sigma_{at} < \sigma_t$, вплоть до энергии $\varepsilon \sim 10^2$ эВ, заметно превышающей энергию ионизации. Таким образом, кулоновские столкновения играют важную роль даже в слабо ионизованной плазме. В той же области температур, где $\sigma_{at} > \sigma_t$, плазма полностью ионизована (лекция 3).

Кулоновский логарифм де-факто был вычислен Ленгмюром в его первой статье [21] по физике плазмы, но сам термин вошёл в обиход с середины 1950-х гг. В идеальной плазме, характеризуемой большой величиной плазменного параметра $N_D = (8\pi/3)n\lambda_D^3$, отношение $2\lambda_D/b_* = 6N_D$ (для частиц со скоростью порядка тепловой, когда $b_* = T/e^2$) также очень велико, и под знаком логарифма в формуле (15) его точное значение не очень существенно, что вполне оправдывает процедуру «обрезания» интеграла (13) на нижнем пределе (задача 6.4).

6.5. Приближение далёких пролётов

Налетающая частица может рассеяться на значительный угол $\theta \sim \pi/2$ либо в одном столкновении, либо испытав многократные отклонения на малый угол, как показано на рис. 6.4. Отмеченная выше расходимость транспортного сечения при малых углах рассеяния показывает, что второй процесс явно доминирует. Чтобы рассеяться на большой

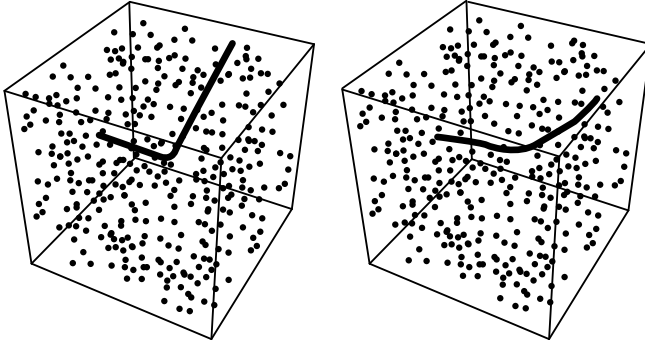


Рис. 6.4. Налетающая частица может рассеяться на значительный угол $\theta \sim \pi/2$ либо в одном столкновении (рисунок слева), либо испытав многократные отклонения на малый угол (рисунок справа); из-за дальнего действия кулоновской силы эффект многократного рассеяния на малые углы в далёких столкновениях накапливается примерно в Λ раз быстрее, чем в близких столкновениях с рассеянием на большой угол в одном акте

угол в одном столкновении, частицы должны сблизиться на расстояние порядка b_* . Напротив, рассеяние на малый угол происходит при пролётах частиц на большом расстоянии $b \gg b_*$ относительно друг друга. Такие далёкие столкновения происходят столь часто, что в идеальной плазме каждая частица в каждый момент времени фактически находится в «процессе столкновения» с множеством других частиц. Из-за дальнего действия кулоновской силы эффект многократного рассеяния на малые углы в далёких столкновениях накапливается примерно в Λ раз быстрее, чем случаются близкие столкновения с рассеянием на большой угол в одном акте (задача 6.1). Угол рассеяния при далёких пролётах легко вычислить, не прибегая к точной формуле Резерфорда (6). Метод вычисления столь поучителен, что заслуживает отдельного изложения.

При $\theta \ll 1$ можно считать, что частица движется по прямолинейной траектории с постоянной скоростью v (рис. 6.5), и тогда вычислять расстояние от неё до рассеивающего центра по формуле $r = (b^2 + v^2 t^2)^{1/2}$. Изменение поперечного импульса частицы находим, интегрируя по времени перпендикулярную к траектории проекцию кулоновской силы $F_\perp = (e_a e_b / r^2)(b/r)$:

$$\Delta p_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} F_\perp dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_a e_b b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2e_a e_b}{v b}.$$

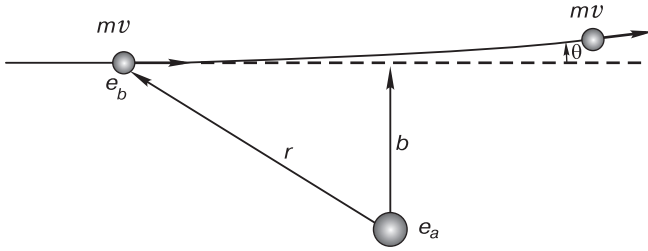


Рис. 6.5. В приближении далёких пролётов реальная траектория заменяется прямой линией, вдоль которой налетающая частица летит с постоянной скоростью; расстояние от рассеивающего центра до частицы вычисляется по формуле $r = \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$, где момент времени $t = 0$ соответствует максимальному сближению частицы с рассеивающим центром

Угол рассеяния θ равен отношению Δp_{\perp} к полному импульсу частицы mv :

$$\theta \approx \frac{2e_a e_b}{v b} / (mv) = \frac{2b_*}{b}. \quad (17)$$

Этот результат совпадает с формулой Резерфорда (6) в пределе $\theta \ll 1$. Использование приближенной формулы Резерфорда вместо точной приводит к появлению дополнительной расходимости на верхнем пределе интегрирования в формуле (13) для транспортного сечения, поскольку приближенная формула (17) неприменима при $\theta \gtrsim 1$. Действительно, заменяя в (13) $\sin(\theta/2)$ на $\theta/2$, получаем

$$\sigma_t = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2}{m^2 v^4} \int \frac{d\theta}{\theta} = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2}{m^2 v^4} \int \frac{db}{b}.$$

Логарифмически расходящийся интеграл «обрезают» как на нижнем, так и на верхнем пределе, записывая кулоновский логарифм в виде

$$\Lambda = \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}, \quad (18)$$

где $b_{\min} \approx b_*$, $b_{\max} \approx \lambda_D$.

Если длина волны де Бройля $\lambda_B = \hbar/mv$ больше, чем кулоновский радиус $b_* = e^2/(mv^2)$, то в качестве b_{\min} нужно взять именно её, $b_{\min} \approx \lambda_B$, так как, согласно постулатам квантовой физики, прицельное расстояние невозможно зафиксировать с точностью, превышающей λ_B . Если заряды e_a и e_b по абсолютной величине равны элементарному заряду e , условие $\lambda_B > b_*$ эквивалентно неравенству

$$v > \alpha c,$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, а c — скорость света. Для сравнения полезно указать, что скорость электрона в основном состоянии атома водорода равна αc . Соответственно, $b_{\min} \approx \lambda_B$, если энергия налетающего электрона больше, чем энергия ионизации атома водорода $I = \alpha^2 m_e c^2 / 2 = 13,6 \text{ эВ}$.

В практических вычислениях кулоновский логарифм почти всегда оценивают по температуре плазмы, игнорируя тот факт, что вообще-то в аргумент логарифма входит относительная скорость сталкивающихся частиц. Для совсем грубых оценок берут $\Lambda = 15$.

6.6. Парные столкновения

Избавимся от предположения, что рассеивающий кулоновский центр неподвижен, и рассмотрим движение двух заряженных частиц в кулоновском поле друг друга. Не делая заранее каких-либо предположений о составе взаимодействующих частиц, будем помечать величины, относящиеся к первой и второй частицам, соответственно индексами a и b . Сложив уравнение движения первой частицы

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = e_a e_b \frac{\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \quad (19a)$$

с таким же уравнением для второй частицы

$$m_b \ddot{\mathbf{r}}_b = e_a e_b \frac{\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3}, \quad (19b)$$

легко заметить, что

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a + m_b \ddot{\mathbf{r}}_b = 0.$$

Это означает, что центр масс двух частиц с радиусом-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{m_a \mathbf{r}_a + m_b \mathbf{r}_b}{m_a + m_b}$$

движется с постоянной скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b}{m_a + m_b}.$$

Если ввести также обозначение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a,$$

для радиуса-вектора частицы b относительно частицы a (рис. 6.6), то радиус-вектор каждой частицы можно выразить через \mathbf{R} и \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R} - \frac{m_b}{m_a + m_b} \mathbf{r}, \quad (20a)$$

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{R} + \frac{m_a}{m_a + m_b} \mathbf{r}. \quad (20b)$$

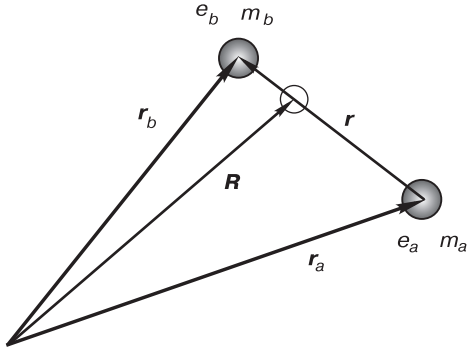


Рис. 6.6. Радиус-вектор R системы центра масс и радиус-вектор приведённой частицы $r = r_b - r_a$ для двух заряженных частиц

Так как $\ddot{R} = 0$, после подстановки (20) оба уравнения (19) приводятся к одинаковому виду

$$m_{ab}\ddot{r} = e_a e_b \frac{r}{r^3}, \quad (21)$$

где

$$m_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$$

обозначает *приведённую массу*. Фиктивную частицу с приведённой массой иногда называют *приведённой частицей*. Её положение задано вектором r . Так как

$$m_{ab}\ddot{r} = -m_a\ddot{r}_a = m_b\ddot{r}_b,$$

движение реальных частиц a и b можно найти, решив задачу о движении приведённой частицы, причём сила, действующая на приведённую частицу, с точностью до знака равна силе, действующей на реальные частицы с массами m_a и m_b . Скорость приведённой частицы

$$\dot{r} = \dot{r}_b - \dot{r}_a$$

равна скорости движения частицы b относительно частицы a .

Теперь ясно, что если в формуле (10) для дифференциального сечения рассеяния на неподвижном кулоновском центре масс и скорость налетающей частицы заменить соответственно на массу приведённой частицы m_{ab} и относительную скорость сталкивающихся частиц $u = v_b - v_a$, то будет найдено дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (22)$$

В дальнейшем нам не придётся пересчитывать сечение рассеяния в лабораторную систему координат, поскольку вычисления удобнее делать именно в системе центра масс.

6.7. Торможение пробной частицы

Уравнение (21) означает, что приведённая частица движется в поле неподвижного кулоновского центра, расположенного в точке $\mathbf{r} = 0$, а эта задача решена в п. 6.3. Там была вычислена сила (11), действующая на кулоновский центр со стороны потока частиц с массой m , плотностью n_b , налетающих со скоростью v . Она равна

$$\mathbf{F} = m v n_b v \sigma_t,$$

где $\sigma_t = 4\pi\Lambda_e^2 e_b^2 / (m^2 v^4)$. Переходя к рассеянию реальных частиц, скоростью налетающей частицы v теперь нужно считать разность $\mathbf{u} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a$ скоростей сталкивающихся частиц на бесконечно большом удалении друг от друга, а в качестве m взять массу приведённой частицы m_{ab} . Полезно заметить, что абсолютная величина относительной скорости $u = |\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|$ до и после рассеяния одинакова, так как рассеяние приведённой частицы является абсолютно упругим. Таким образом, транспортное сечение теперь равно

$$\sigma_t = \frac{4\pi\Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 |\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|^4}, \quad (23)$$

где Λ_{ab} обозначает кулоновский логарифм, вычисленный по параметрам приведённой частицы. После всех замен находим силу

$$\mathbf{F}_{ab} = \frac{4\pi\Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2 n_b}{m_{ab} |\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|^2} \frac{\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a}{|\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|}, \quad (24)$$

действующую на частицу a в потоке частиц сорта b . Для вычисления силы \mathbf{F}_{ba} , действующей на частицу b в потоке частиц сорта a , в последней формуле нужно переставить местами индексы a и b :

$$\mathbf{F}_{ba} = - \frac{4\pi\Lambda_{ba} e_a^2 e_b^2 n_a}{m_{ab} |\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|^2} \frac{\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a}{|\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a|}, \quad (25)$$

причём $\Lambda_{ba} = \Lambda_{ab}$. Интересно, что силы \mathbf{F}_{ab} и \mathbf{F}_{ba} , вообще говоря, не удовлетворяют третьему закону Ньютона:

$$\mathbf{F}_{ab} \neq -\mathbf{F}_{ba}.$$

Но удивляться тут нечему, так как каждая из этих сил хотя и действует на одну частицу, но создаётся множеством частиц. А вот суммарная сила, действующая на единицу объёма, равна нулю:

$$n_a \mathbf{F}_{ab} + n_b \mathbf{F}_{ba} = 0.$$

Учтём теперь, что в реальной плазме скорости частиц различны вследствие теплового разброса. Выделим какую-то одну — *пробную* — частицу с зарядом e_b и скоростью $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}$. Можно думать, что эта

пробная частица не принадлежит собственно плазме, а влетает в неё в составе пучка частиц столь малой плотности, что пучок не влияет на распределение частиц плазмы по скоростям. В таком контексте частицы плазмы называют *полевыми*, подразумевая, что их распределение по скоростям задано и неизменно.

Выберем группу полевых частиц, скорость которых находится в интервале d^3v' вблизи $v_a = v'$. Число таких частиц равно

$$dn_a = f_a(v') d^3v',$$

где $f_a(v')$ обозначает функцию распределения, нормированную так, что

$$n_a = \int f_a(v') d^3v'.$$

Выбранная группа частиц действует на пробную частицу с силой dF_{ba} , которая получается из выражения (25) путём замены n_a на dn_a . Чтобы найти полную силу, действующую на пробную частицу, нужно проинтегрировать dF_{ba} по скорости полевых частиц:

$$F_{ba} = - \frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2}{m_{ab}} \int \frac{v - v'}{|v - v'|^3} f_a(v') d^3v'. \quad (26)$$

Сумма сил по всем сортам полевых частиц даёт скорость изменения направленного импульса $p_b = m_b v$ пробной частицы:

$$\frac{dp_b}{dt} = \sum_a F_{ba}. \quad (27)$$

Если $f_a(v')$ — изотропная функция, т. е. $f_a(v') = f_a(v)$, то для вычисления интеграла в (26) можно воспользоваться аналогией с известной задачей электростатики. Действительно, присмотревшись, в этом интеграле можно распознать электрическое поле сферически симметричного распределения зарядов с объёмной плотностью $f_a(v')$ в точке с радиусом-вектором v . На расстоянии v от центра распределения это поле равно полю заряда внутри сферы радиуса v , делённому на v^2 . Следовательно,

$$F_{ba} = - \frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2}{m_{ab}} \frac{v}{v^3} \int_0^v f_a(v') 4\pi v'^2 dv'. \quad (28)$$

«Заряд», внешний по отношению к сфере радиуса v , поля не создаёт. Формулу (28) можно переписать в виде

$$F_{ba} = - \sum_a v_{ba}^{(p)} p_b. \quad (29)$$

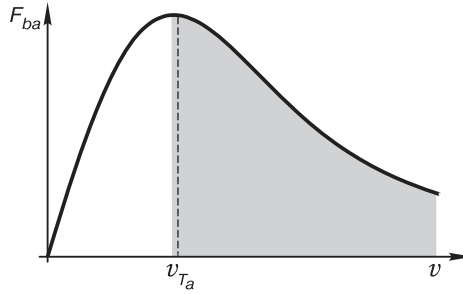


Рис. 6.7. Сила трения в плазме с максвелловским распределением в зависимости от скорости v пробной частицы; на заштрихованной стороне графика невозможно устойчивое движение под действием ускоряющего электрического поля, так как при спонтанном увеличении скорости сила трения уменьшается и скорость ещё более возрастает; трение максимально при $v = 0,97v_{Ta}$; если ускоряющая сила больше максимальной силы трения $F_{\max} = 5,38\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2n_a/(m_{ab}v_{Ta}^2)$, ускоряемые частицы «уходят в просвист»

Здесь

$$v_{ba}^{(p)} = \frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2}{m_{ab}m_bv^3} \int_0^v f_a(v') 4\pi v'^2 dv' \quad (30)$$

имеет смысл частоты столкновений, которая характеризует потерю направленного импульса $p_b = m_b v$ пробной частицы; это подчёркивает индекс (p) в обозначении частоты. Так как функция распределения f_a неотрицательна при любом значении v' , частота столкновений $v_{ba}^{(p)}$ положительна, так что сила F_{ba} направлена против импульса пробной частицы p_b . В связи с этим её можно назвать силой торможения.

Вычисление можно продолжить, задавшись к примеру максвелловской функцией распределения (задача 6.8). График зависимости силы трения от скорости пробной частицы для максвелловской плазмы показан на рис. 6.7. Существенно, что сила имеет максимум при скорости, примерно равной тепловой скорости полевых частиц. При большей скорости пробной частицы сила трения уменьшается. Это делает невозможным устойчивое движение пробной частицы при больших скоростях под действием ускоряющего электрического поля, так что на графике может быть реализована только незаштрихованная половина. Вторым следствием является существование предельного электрического поля, которое может быть создано в плазме без того, чтобы основная доля электронов плазмы дружно перешла в режим неограниченного ускорения, который называют «просвистом». Это предельное поле называют *полем Драйсера* (Harry Dreicer, 1959

[69, 70], задача 6.14). При малой скорости пробной частицы сила трения пропорциональна скорости. Вычислив эту силу, нетрудно найти электрическую проводимость плазмы (задача 6.15).

6.8. Остывание пробной частицы

Всё было бы просто, будь пробная частица настоящей частицей. В действительности она представляет собой ансамбль частиц, которые в процессе рассеяния в плазме приобретают разные скорости, поэтому энергия пробной частицы ε_b не равна $p_b^2/(2m_b)$. Пробная частица сохранил какую-то долю своей начальной энергии, даже если полностью потеряет направленный импульс p_b .

Чтобы подсчитать скорость потери энергии, заметим, что приведённая частица в системе центра инерции энергию сохраняет, так как рассеивается на неподвижном центре. Следовательно, абсолютная величина её скорости \dot{r} после рассеяния равна её начальной скорости. Поскольку в системе центра масс мгновенная скорость частицы b связана со скоростью приведённой частицы соотношением

$$\dot{r}_b = \frac{m_a \dot{r}}{m_a + m_b},$$

то величина скорости частицы b (как и частицы a) до и после столкновения также одинакова. Значит, обмен энергией между сталкивающимися частицами в этой системе отсчёта не происходит.

Система центра инерции движется со скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b}{m_a + m_b} = \mathbf{v}_b - \frac{m_a}{m_a + m_b} \mathbf{u} = \mathbf{v}_b - \frac{m_{ab}}{m_b} \mathbf{u}$$

относительно лабораторной. Возвращаясь в лабораторную систему, следует заключить, что сила \mathbf{F}_{ba} в единицу времени совершает работу

$$A_{ba} = \mathbf{F}_{ba} \cdot \mathbf{V} = - \frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2n_a}{m_{ab}} \frac{\mathbf{u}}{u^3} \cdot \left(\mathbf{v}_b - \frac{m_{ab}}{m_b} \mathbf{u} \right).$$

Заменяя плотность полевых частиц n_a интегралом по их функции распределения, как это было сделано в п. 6.7, и переобозначая \mathbf{v}_b на \mathbf{v} , \mathbf{v}_a на \mathbf{v}' и \mathbf{u} на $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$, получаем

$$A_{ba} = - \frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2}{m_{ab}} \left[v \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_a(\mathbf{v}') d^3v' - \frac{m_{ab}}{m_b} \int \frac{f_a(\mathbf{v}') d^3v'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \right]. \quad (31)$$

Вычисленная работа идёт на увеличение энергии пробной частицы $\varepsilon_b = \frac{1}{2}m_b v^2$. Иными словами,

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt} = \sum_a A_{ba}. \quad (32)$$

По аналогии с частотой трения $\nu_{ba}^{(p)}$ можно определить частоту потери энергии $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$, формально выделив в A_{ba} энергию пробной частицы:

$$A_{ba} = -\nu_{ba}^{(\varepsilon)} \varepsilon_b. \quad (33)$$

В отличие от $\nu_{ba}^{(p)}$ частота $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$ может быть отрицательной. Последнее означает, что пробная частица, замедляясь, может приобретать энергию от плазмы!

Такое было бы невозможно, будь пробная частица обычной частицей, движение которой подчиняется законам обычной динамики. Действительно, если $\varepsilon = p^2/(2m)$, а импульс p уменьшается, то должна уменьшаться и энергия ε . Однако «пробная частица» на самом деле представляет собой ансамбль частиц, например пучок частиц, влетающих в плазму. Когда говорят об импульсе или энергии пробной частицы, подразумевают средний импульс или среднюю энергию частиц пучка. Точно так же сила, действующая на пробную частицу, есть средняя сила, действующая на частицы пучка.

Торможение пробной частицы означает уменьшение среднего импульса $p_b = m_b v$ в направлении первоначального движения частиц пучка. Частицы пучка отклоняются в случайном направлении от прямой траектории, приобретая импульс δp_\perp , перпендикулярный этому направлению, а также некоторый разброс импульсов δp_\parallel в направлении движения. Если обозначить через $\delta p = \delta p_\perp + \delta p_\parallel$ отклонение импульса отдельной частицы ансамбля от среднего импульса p_b , то нужно признать, что среднее значение $\langle \delta p \rangle$ равно нулю. Однако $\langle (\delta p)^2 \rangle > 0$, поэтому энергия пробной частицы $\varepsilon_b = \langle (p_b + \delta p)^2 \rangle / (2m_b) = p_b^2 / (2m_b) + \langle p_b \cdot \delta p \rangle / m_b + \langle \delta p^2 \rangle / (2m_b) = p_b^2 / (2m_b) + \langle \delta p^2 \rangle / (2m_b)$ оказывается больше энергии направленного движения $p_b^2 / (2m_b)$ пробной частицы.

Доказав, что $\varepsilon_b > p_b^2 / (2m_b)$, для вычисления $\nu_{ba}^{(\varepsilon)}$ мы всё-таки подставим $\varepsilon_b = p_b^2 / (2m_b)$ в формулу (33). Равенство $\varepsilon_b = p_b^2 / (2m_b)$ заведомо верно в начальный момент, когда разброс по скоростям в пучке пробных частиц ещё невелик. Тогда

$$\nu_{ba}^{(\varepsilon)} = \frac{8\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2}{m_{ab}m_bv^2} \left[v \int \frac{v-v'}{|v-v'|^3} f_a(v') d^3v' - \frac{m_{ab}}{m_b} \int \frac{f_a(v') d^3v'}{|v-v'|} \right]. \quad (34)$$

В пределе бесконечно тяжёлых неподвижных рассеивающих центров, когда формально $m_a \rightarrow \infty$, а функция распределения выражается через δ -функцию Дирака, т. е. $f_a(v') = n_a \delta(v')$, величина A_{ba} обращается в нуль, как можно убедиться при помощи подстановки дельта-функции в правую часть формулы (34). При этом пробная частица тормозится (поскольку $F_{ba} \neq 0$), не теряя энергию. В реальной

плазме, конечно же, нет частиц с бесконечно большой массой. Однако фактом является то, что обмен энергией между частицами с существенно различными массами подавлен. И этот факт будет ключом к пониманию сценария релаксации начального (возможно, приготовленного искусственно) состояния плазмы к состоянию равновесия.

6.9. Релаксация начального состояния

Принципиальное отличие электрон-электронных столкновений от упругого рассеяния электронов на тяжёлых ионах состоит в том, что в столкновениях с электронами плазмы электроны пучка теряют энергию так же быстро, как они теряют импульс в направлении первоначального движения, тогда как в столкновениях с ионами они преимущественно рассеиваются, почти не теряя энергию.

Вообще же анализ эволюции — говорят также: *релаксации* — какого-то состояния плазмы нужно начинать с выяснения, какие столкновительные процессы идут быстрее, а какие медленнее. Для этого нужно сравнить частоты столкновений $\nu_{ab}^{(p)}$ и $\nu_{ab}^{(e)}$ для всех сочетаний сортов частиц, присутствующих в плазме. Примером такого анализа является решение задач 6.10 и 6.11. Из него следует, что при инъекции пучка быстрых электронов в плазму с многозарядными ионами самым быстрым процессом является упругое угловое рассеяние электронов пучка на ионах. Если каждый ион в среднем ионизован Z раз, причём $Z \gg 1$, то торможение и остывание электронов пучка на электронах плазмы идёт в Z раз медленнее. В результате столкновений с ионами плазмы пучок тормозится, но почти не остывает. Это означает, что средний направленный импульс электронов пучка p_e уменьшается, а пучок приобретает угловой разброс. Покажем, как можно вычислить средний квадрат угла отклонения электронов пучка от первоначального направления, пользуясь теми сведениями, которые изложены в лекции.

В результате столкновений, преимущественно с ионами, средний импульс электронов пучка p_e будет уменьшаться в соответствии с уравнением

$$\frac{dp_e}{dt} = F_{ei} = -\nu_{ei}^{(p)} p_e. \quad (35)$$

Это уменьшение связано с тем, что в результате столкновений электроны начинают двигаться под углом к исходному направле-

нию движения пучка. Так как при рассеянии на малый угол θ продольный импульс отдельного электрона изменяется на величину $\Delta p_e = p_e (\cos \theta - 1) \approx -p_e \theta^2/2$, его уменьшению, описываемому уравнением (35), соответствует скорость нарастания среднего квадрата угла, равная

$$\frac{d}{dt} \langle \theta^2 \rangle = 2\nu_{ei}^{(p)}, \quad (36)$$

где усреднение, обозначенное угловыми скобками, производится по всем электронам пучка. Выражение (36) справедливо до тех пор, пока среднеквадратичный угол рассеяния мал по сравнению с единицей, т. е. $\langle \theta^2 \rangle^{1/2} \ll 1$. Отметим также, что использованное нами предположение $Z \gg 1$ непринципиально. От него нетрудно отказаться, обобщив предъявленное решение на случай плазмы произвольного состава (задача 6.16).

В заключение лекции укажем на факт, который может показаться парадоксальным, если вспомнить, что обмен энергией между частицами, значительно различающимися по массе, затруднён. Оказывается, что в термоядерном реакторе альфа-частицы (т. е. ядра гелия), являющиеся продуктами термоядерной реакции, передают свою энергию преимущественно электронам плазмы (задача 6.12). Поэтому в термоядерном реакторе температура электронов может быть выше температуры ионов.

Литература

Кулоновские столкновения частиц в плазме и связанные с ними эффекты на уровне простых оценок описаны в классическом учебнике Л. А. Арцимовича и Р. З. Сагдеева «Физика плазмы для физиков» [6, §1.4] и в монографии Ю. П. Райзера «Физика газового разряда» [8, гл.2].

В монографии М. Либермана и А. Лихтенберга [71, гл. 3] изложены основы теории рассеяния, причём кулоновское взаимодействие рассматривается в ряду других, таких как поляризационное взаимодействие заряженных частиц с нейтральными атомами.

Наиболее последовательно теория кулоновских столкновений изложена в обзорах Б. А. Трубникова [72, §§ 1–7] и Д. В. Сивухина [73, §§ 1–13], и более кратко — в «Теории плазмы» Б. А. Трубникова [12, §§ 31, 32].

Задачи

Задача 6.1. Вычислить вклад в транспортное сечение близких столкновений с рассеянием на угол $\theta > \pi/2$.

►► Решение

Задача 6.2. Найти транспортное сечение рассеяния ультрарелятивистского электрона на неподвижном кулоновском центре. ➤ Ответ

Задача 6.3. Электрон, имеющий на бесконечности скорость v , налетает на другой электрон, первоначально неподвижный. Какую энергию приобретёт второй электрон после столкновения? Прицельный параметр равен b . ➤ Ответ

Задача 6.4. Оценить кулоновский логарифм в лабораторной плазме с типичными параметрами. Проверить, что уточнение аргумента логарифма лишь незначительно меняет величину логарифма. ➤ Решение

Задача 6.5. Как магнитное поле влияет на кулоновское рассеяние? Определить кулоновский логарифм в сильном магнитном поле. ➤ Решение

Задача 6.6. Как кулоновские столкновения влияют на поглощение высокочастотных волн в плазме? ➤ Решение

Задача 6.7. Верно ли для пробной частицы равенство $d\varepsilon = v \cdot dp$, связывающее приращение импульса и энергии частицы?

Задача 6.8. Вычислить силу трения для пробной частицы в плазме с максвелловским распределением по скоростям. ➤ Решение

Задача 6.9. Вычислить скорость изменения энергии пробной частицы в плазме с максвелловским распределением по скоростям. ➤ Ответ

Задача 6.10. На примере пучка быстрых электронов и пучка быстрых ионов в плазме сравнить частоты столкновений $\nu_{ee}^{(p)}$, $\nu_{ei}^{(p)}$, $\nu_{ie}^{(p)}$ и $\nu_{ii}^{(p)}$. ➤ Решение

Задача 6.11. На примере пучка быстрых электронов и пучка быстрых ионов в плазме, сравнить частоты столкновений $\nu_{ee}^{(\varepsilon)}$, $\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$, $\nu_{ie}^{(\varepsilon)}$ и $\nu_{ii}^{(\varepsilon)}$. ➤ Решение

Задача 6.12. В термоядерном реакторе, работающем на смеси дейтерия и трития, образуются заряженные α -частицы (ядра гелия-4) с энергией, в 300 раз большей температуры смеси. В реакторе с магнитным удержанием α -частицы остаются в плазме и отдают ей свою энергию. Какой процесс будет определять энергетический баланс реактора: торможение α -частиц на ионах плазмы или торможение на электронах плазмы? Сравнить время выравнивания температуры ионов и электронов со временем торможения α -частиц. ➤ Решение

Задача 6.13. Оценить длину свободного пробега электронов с энергией 1 МэВ в плазме с плотностью $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Можно ли нагреть плазму релятивистским пучком в лабораторной установке за счёт кулоновских столкновений?

Задача 6.14. Оценить поле Драйсера. ➤ Решение

Задача 6.15. Используя результат задачи 6.8, вычислить электрическую проводимость плазмы, предполагая, что ионы неподвижны, а распределение электронов изотропно в системе отсчёта, двигающейся относительно ионов с токовой скоростью $u = j/(e_e n_e)$, и описывается там функцией Максвелла. ➤ Решение

Задача 6.16. Найти угловой разброс пучка частиц после прохождения тонкого слоя плазмы. ►► Ответ

Задача 6.17. Полупространство $x > 0$ занято однородной плазмой, которая удерживается магнитным полем. В плазму по нормали к её границе влетает быстрый нейтральный атом и сразу же ионизуется. Найти координату x иона после его полного торможения, если вначале ларморовский радиус иона был равен ρ_0 . ►► Решение

Задача 6.18. Найти потенциал взаимодействия медленного иона с нейтральным атомом (поляризационное взаимодействие). ►► Решение

Задача 6.19. Используя результат предыдущей задачи, найти сечение захвата при поляризационном рассеянии. ►► Решение

Задача 6.20. Оценить транспортное сечение поляризационного рассеяния. ►► Ответ

Задача 6.21. В борновском приближении вычислить сечение рассеяния для кулоновского взаимодействия с дебаевским экранированием. ►► Решение

Излучение плазмы

**Типы радиационных переходов. Виды спектров.
Тормозное излучение. Рекомбинационное излучение.
Длина пробега излучения. Циклотронное излучение.**

Излучение является одним из основных каналов потерь энергии из плазмы, существенным образом воздействуя на её энергетический баланс. Свойство плазмы излучать электромагнитные волны в различных диапазонах частот используется как в бытовых осветительных приборах, так и при спектроскопических измерениях разнообразных объектов, от искры в научной лаборатории до далёкой галактики в расширяющейся Вселенной.

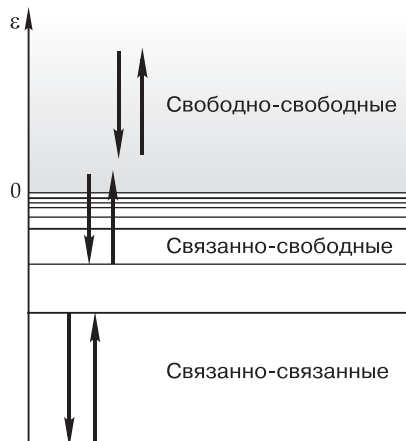
Спектр излучения слабоионизованной плазмы является *линейчатым*: в нём доминируют дискретные линии излучения молекул, атомов и не полностью ионизованных «остатков» тяжёлых атомов (ядра которых содержат больше одного протона). По мере увеличения температуры плазмы степень ионизации увеличивается, а интенсивность линейчатого излучения ослабевает. Полностью ионизованная плазма имеет *непрерывный спектр*.

Мы рассмотрим два основных типа излучения с непрерывным спектром: тормозное и рекомбинационное, а затем — циклотронное излучение. В области низких частот циклотронное излучение характеризуется линейчатым спектром, который переходит в сплошной спектр в области высоких частот; в достаточно плотной плазме циклотронное излучение в плазме же и поглощается, не выходя наружу.

7.1. Типы радиационных переходов

Световые кванты появляются и исчезают при радиационных (излучательных) переходах электронов между различными энергетическими состояниями, поэтому классифицировать механизмы излучения и поглощения удобнее всего, перебирая возможные варианты переходов.

Рис. 7.1. Схема энергетических уровней и излучательных переходов электрона в поле положительного иона; свободно-свободные переходы с понижением энергии электрона сопровождаются тормозным излучением, с повышением энергии — тормозным поглощением; переход из свободного состояния в связанное вызывает рекомбинационное излучение; переход из связанного состояния в свободное происходит при фотоионизации атома; переходы между связанными состояниями дают линии излучения и поглощения в дискретном спектре



Рассмотрим систему, состоящую из электрона и положительного иона — «атомарного остатка». На рис. 7.1 изображена типичная схема энергетических уровней электрона. Энергия отсчитывается от границы непрерывного спектра, разделяющей свободные состояния (с положительной энергией) и связанные состояния (с отрицательной энергией). Дискретные уровни связанных состояний к границе сгущаются. Самый нижний уровень соответствует основному состоянию атома. Электроны с положительной энергией свободно перемещаются в пространстве, не будучи привязаны к конкретному атому. Энергия свободных электронов в макроскопических системах фактически не квантуется и поэтому может принимать любые положительные значения. Стрелками на рисунке показаны возможные типы переходов: свободно-свободные, связанно-свободные, связанно-связанные. Переходы сверху вниз сопровождаются излучением кванта энергии $\hbar\omega$, равной разности между энергиями верхнего и нижнего уровней; переходы снизу вверх — поглощением.

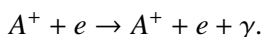
Свободно-свободные переходы представляют собой *тормозное излучение* при кулоновских столкновениях электронов с ионами и обратные процессы *тормозного поглощения*. Связанно-свободные переходы — это процессы *фотоионизации* и *фоторекомбинации*, в которых происходит освобождение и связывание электронов. Свободно-свободные и связанно-свободные переходы дают *непрерывный спектр*, или *континуум*, поскольку либо начальное, либо конечное, либо оба этих состояния электрона лежат в непрерывном энергетическом спектре.

Связанно-связанные переходы электрона между дискретными уровнями энергии в атоме приводят к появлению в спектрах излучения и поглощения *спектральных линий*. Разновидностью *линейчатых спектров* являются *полосатые спектры* молекул, которые своим происхождением также обязаны связанно-связанным переходам: насыщенность молекулярных спектров линиями, которые внутри полосы располагаются очень тесно, обусловлена сложностью системы энергетических уровней молекулы. Каждому электронному уровню соответствует множество колебательных и вращательных уровней, поэтому возможно много вариантов переходов между ними.

7.2. Тормозное излучение

Тормозное излучение возникает при неупругом рассеянии заряженных частиц. Напомним, что рассеянием называется столкновение, в результате которого число и состав взаимодействующих частиц не изменяются.

Оценим мощность излучения при столкновении электрона с ионом — тяжёлым ядром, имеющим заряд $e_i = Ze$. Этот процесс описывается *химическим уравнением*



Из-за огромной разницы в массе излучение иона ничтожно мало по сравнению с излучением электрона, а так как тепловая скорость электронов по той же причине значительно больше скорости ионов, последние можно считать неподвижными. Что касается излучения при электрон-электронных столкновениях, то оно мало, так как дипольное излучение в таких столкновениях отсутствует (задача 7.1).

Для простоты предположим, что искривлением траектории электрона можно пренебречь (рис. 7.2), так как он пролетает на большом удалении от иона, таком, что его кинетическая энергия $\frac{1}{2}m_e v^2$ велика по сравнению с энергией кулоновского взаимодействия Ze^2/r даже при максимальном сближении с ионом. Двигаясь почти по прямой линии, электрон приближается к иону на расстояние r , примерно равное прицельному параметру b . Следовательно, приближение далёких пролётов верно, если

$$b \gg Ze^2/(m_e v^2). \quad (1)$$

В таком случае ускорение электрона равно

$$a = \frac{Ze^2/m_e}{b^2 + v^2 t^2}.$$

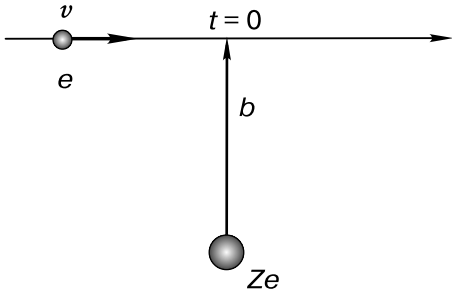


Рис. 7.2. При $b \gg 2Ze^2/(m_e v^2)$ (далёкие пролёты) траектория электрона лишь незначительно отклоняется от прямой линии; скорость электрона приблизительно постоянна как по величине, так и по направлению

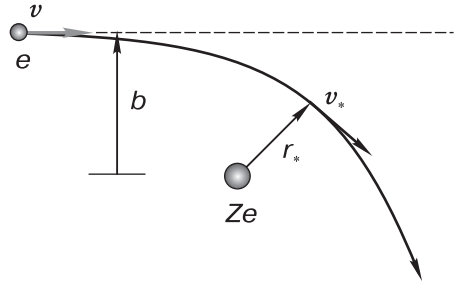


Рис. 7.3. При $b \lesssim 2Ze^2/(m_e v^2)$ (близкие пролёты) траектория электрона сильно искривляется, однако результат вычисления мощности излучения от учёта искривления траектории изменяется незначительно

Смысл используемых обозначений разъяснён в п. 6.5. Энергия, излучаемая электроном в единицу времени, вычисляется по формуле Лармора (Joseph Larmor, 1897 [74]) для интенсивности дипольного излучения:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}. \quad (2)$$

Соответственно, полная энергия излучения будет равна

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3}. \quad (3)$$

Однородный поток электронов с плотностью n_e , налетающих на ион со скоростью v , в единицу времени излучает энергию

$$\int \mathcal{E} n_e v 2\pi b db.$$

Умножение этой величины на плотность ионов n_i даёт *удельную мощность*, т. е. энергию, которую излучает единица объёма плазмы в единицу времени:

$$P = \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3} \int \frac{db}{b^2}. \quad (4)$$

Интеграл в формуле (4) расходится на нижнем пределе. Расходимость сигнализирует о том, что принятая модель расчёта имеет ограниченную применимость. В самом деле энергия \mathcal{E} , вычисленная с помощью формулы (3), стремится к бесконечности при $b \rightarrow 0$, тогда

как электрон заведомо не может излучить энергию, которая была бы больше его кинетической энергии $\frac{1}{2}m_e v^2$.¹⁾

На первый взгляд может показаться, что причиной расходимости является приближение далёких пролётов, заменяющее реальную траекторию электрона прямой линией. Однако ещё более сильная расходимость возникает, если учесть искривление его траектории (задача 7.2). Истинную причину возникших трудностей вскрывает квантовая теория. Она доказывает, что *квазиклассическая* (т. е. почти классическая) картина движения электрона верна, если механический момент свободного электрона (относительно иона) $m_e v b$ значительно больше кванта \hbar , поэтому проделанный расчёт имеет смысл, если

$$b \gg \lambda_e,$$

где $\lambda_e = \hbar/(m_e v)$ обозначает длину волны электрона. Указанное условие эквивалентно ограничению

$$l \gg 1 \quad (5)$$

на орбитальное квантовое число

$$l = b/\lambda_e = m_e v b/\hbar.$$

Что касается приближения далёких пролётов, то условие его применимости (1) эквивалентно неравенству

$$l \gg Ze^2/(\hbar v). \quad (6)$$

Из сравнения неравенств (5) и (6) видно, что при условии

$$Ze^2/(\hbar v) \ll 1 \quad (7)$$

область применимости *квазиклассического приближения* (5) целиком уместается в области далёких пролётов (6). В таком случае правильный по порядку величины результат можно получить, «обрезав» интегрирование в формуле (4) на нижнем пределе значением прицельного параметра порядка длины волны электрона $b \approx \lambda_e$:

$$P_{\text{т.и}} \approx \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 \lambda_e}. \quad (8)$$

Индекс «т.и» в обозначении мощности излучения $P_{\text{т.и}}$ происходит от слов *тормозное излучение*; используется также немецкое слово *bremsstrahlung*, которое также означает вообще любое излучение,

¹⁾ Это утверждение относится к случаю, когда в конечном состоянии электрон остаётся свободным. Как указано в следующем параграфе, электрон может дополнительно излучить энергию, равную энергии ионизации, если он переходит в связанное состояние.

сопряжённое с ускорением заряженной частицы. Само явление тормозного излучения было осознано как побочный результат бум, последовавшего за открытием Вильгельмом Рёнтгеном (Wilhelm Röntgen) рентгеновских лучей в 1895 г. [75]. Открытие тормозного излучения также приписывают Николе Тесла, который в период между 1888 и 1897 гг. экспериментировал с устройствами, похожими на рентгеновскую трубку.

В квантовой теории рассеяния условие (7) характеризует *борновское приближение*. Оно эквивалентно требованию, чтобы энергия налетающего электрона, $\varepsilon = \frac{1}{2}m_e v^2$, была больше энергии ионизации I_Z многозарядного иона,

$$\varepsilon \gg I_Z. \quad (9)$$

Здесь

$$I_Z = IZ^2 = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} Z^2 = 13,6 Z^2 \text{ [эВ]}.$$

Частоту излучения легко оценить с помощью следующих рассуждений. Пролетая на расстоянии b от иона, электрон излучает импульс с длительностью $\tau \approx b/v$. Характерная круговая частота излучения ω приблизительно равна $1/\tau$, следовательно

$$\omega \approx v/b.$$

Подставляя $b = \hbar l / (m_e v)$, приходим к выводу, что энергия фотона $\hbar\omega$, испущенного электроном с орбитальным моментом l , приблизительно в l раз меньше кинетической энергии электрона:

$$\hbar\omega \approx \varepsilon/l. \quad (10)$$

Поскольку ε — это максимальная энергия, которую может унести излучённый фотон (при условии, что электрон остаётся свободным), ещё раз заключаем, что интегрирование в формуле (4) по прицельным параметрам $b < \lambda_e$ было бы лишено смысла. Точная теория предсказывает, что в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям максимум спектра излучения соответствует фотонам с энергией $2T_e$ (задача 7.4 и рис. 7.4).

Число фотонов, испущенных электроном при пролёте на расстоянии b от иона, найдём, поделив излучённую им энергию \mathcal{E} на энергию фотона $\hbar\omega$. Для этого сначала перепишем формулу (3), выделив в явном виде орбитальное квантовое число $l = m_e v b / \hbar$ и постоянную тонкой структуры $\alpha = e^2 / (\hbar c) \approx 1/137$:

$$\mathcal{E} \approx (\alpha^3 Z^2 / l^3) \varepsilon. \quad (11)$$

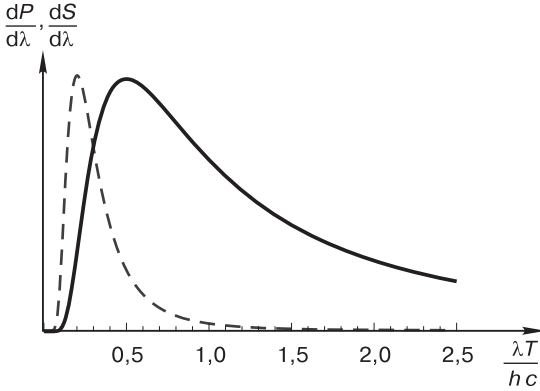


Рис. 7.4. Спектральная мощность тормозного излучения оптически тонкой плазмы (сплошная линия, $T = T_e$ — температура электронов, задача 7.4) и спектр излучения абсолютно чёрного тела (штриховая линия, задача 7.8) в шкале длин волн; графики нормированы на максимальное значение спектральной мощности

Результат деления

$$w_l = \mathcal{E}/(\hbar\omega) \approx \alpha^3 Z^2 / l^2 \quad (12)$$

лучше назвать вероятностью излучения, так как она очень мала. Это означает, что квантовая (истинная) картина тормозного излучения существенно отличается от интуитивно ожидаемой: при столкновении с ионом электрон лишь в редких случаях испускает «жёсткий» фотон с «предписанной» энергией $\hbar\omega \approx \mathcal{E}$, а не сонм фотонов. Например, в водородной плазме с $Z = 1$ жёсткий фотон с энергией $\hbar\omega \sim \mathcal{E}$ излучается не чаще, чем в одном-двух столкновениях из миллиона. Даже в плазме, состоящей из самых тяжёлых ядер ($Z \approx 100$), имеющих в природе, вероятность излучения не превышает двух процентов.

Тем не менее ожидания вовсе не безосновательны, так как полное сечение тормозного излучения потока электронов на незэкранированном ядре бесконечно. В самом деле, действуя по общему рецепту, указанному в п. 6.2, определим дифференциальное сечение тормозного излучения как произведение вероятности испускания фотона w_l при заданном значении прицельного параметра $b = \lambda_e l$ на площадь кольца $2\pi b db = 2\pi \lambda_e^2 l dl$, соответствующего этому значению:

$$d\sigma = 2\pi w_l b db. \quad (13)$$

Подставляя сюда w_l из формулы (12), получаем выражение

$$d\sigma \approx 2\pi \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{dl}{l}, \quad (14)$$

которое при интегрировании логарифмически расходится как при $l \rightarrow 0$ ($b \rightarrow 0$), так и при $l \rightarrow \infty$ ($b \rightarrow \infty$). Как мы уже знаем, расходимость на нижнем пределе устраняется путём обрезания интеграла на минимальном значении орбитального момента $l = 1$, которое соответствует прицельному параметру порядка длины волны электрона, $b = \lambda_e$. Что

касается расходимости на верхнем пределе, то в плазме она обходится обрезанием на максимальном значении порядка длины Дебая, $b \sim \lambda_D$. Однако при торможении потока электронов на неэкранированном ядре эта расходимость принципиально неустранима и в квантовой электродинамике известна как инфракрасная катастрофа [51, §98].

Смысл дифференциального сечения тормозного излучения состоит в том, что через $d\sigma$ выражается дифференциал числа испущенных фотонов

$$dN = n_i n_e v d\sigma \quad (15)$$

и дифференциал удельной мощности излучения

$$dP = \hbar\omega n_i n_e v d\sigma. \quad (16)$$

Раскрывая все множители в последнем выражении, легко проверить, что оно совпадает с подынтегральным выражением в формуле (4).

В отличие от расчёта числа фотонов при расчёте мощности излучения расходимость на верхнем пределе интегрирования не возникает (так как $dP \propto dl/l^2$). Этот факт означает, что «мягкие» фотоны (с энергией $\hbar\omega \ll \varepsilon$) дают пренебрежимо малый вклад в энергетический баланс излучения. Другое следствие указанного различия состоит в том, что процедура обрезания интегралов от dN и dP даёт существенно различные выражения для полного сечения тормозного излучения. Первый интеграл будет содержать большой множитель $\ln(\lambda_D/\lambda_e)$, тогда как второй интеграл такого множителя не имеет. Поскольку и в теории, и в эксперименте число фотонов упоминается редко, определим полное сечение тормозного излучения $\sigma_{т.и}$, выразив через него удельную мощность излучения. Сравнивая

$$P_{т.и} = \varepsilon n_e v n_i \sigma_{т.и} \quad (17)$$

с формулой (8), получаем

$$\sigma_{т.и} \approx \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2. \quad (18)$$

По порядку величины интегральное сечение тормозного излучения $\sigma_{т.и}$ равно произведению вероятности w_1 испускания жёсткого фотона электроном с орбитальным моментом $l = 1$ на видимую площадь сечения $\pi\lambda_e^2$ области формирования излучения.

Интересно, что оценка вероятности излучения (12), в отличие от формул (10) и (11), верна и в том случае, когда борновское приближение неприменимо и следует учитывать искривление траектории электрона (задача 7.2). Соответственно, формулы (8), (12) и (18) также верны как в борновском, так и в «антиборновском» приближении.

Выполнив в формуле (8) усреднение по функции распределения электронов (что с точностью до числового коэффициента соответствует замене скорости v на тепловую скорость $v_e = \sqrt{2T_e/m_e}$), можно оценить удельную мощность тормозного излучения из плазмы с заданной температурой электронов:

$$P_{\text{т.и}} \approx \frac{Z^2 e^6 n_e n_i T_e^{1/2}}{m_e^{3/2} c^3 \hbar}. \quad (19)$$

Точный расчёт добавляет к этой оценке довольно большой численный коэффициент (задача 7.5). В практической формуле

$$P_{\text{т.и}} = 1,5 \times 10^{-32} Z^2 n_e n_i \sqrt{T_e} \left[\text{Вт/см}^3 \right]$$

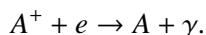
плотности n_e и n_i измеряются в см^{-3} , а температура T_e — в электрон-вольтах.

Тормозное излучение может быть использовано для *диагностики плазмы*, а именно для измерения температуры и плотности. Температура электронов определяется из анализа формы спектра (рис. 7.4), а плотность плазмы — по измеренной мощности излучения.

7.3. Рекомбинационное излучение

Рекомбинационное излучение возникает в процессе фотозахвата (фоторекомбинации), в результате которого при столкновении электрона с ионом образуется нейтральный атом или же зарядовое число Z многозарядного иона понижается.

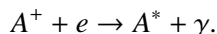
Акту фоторекомбинации с захватом электрона на основной уровень атома соответствует химическое уравнение



При таком захвате излучённый фотон должен унести всю начальную энергию электрона плюс энергию, равную энергии ионизации:

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}m_e v^2 + I_Z.$$

Возможен также фотозахват с образованием возбуждённого атома, который для отличия от атома в основном состоянии принято отмечать звёздочкой в верхнем индексе:



При захвате на атомарный уровень с квантовым числом $k > 1$ происходит излучение фотона с меньшей энергией:

$$\hbar\omega = \varepsilon + I_Z/k^2,$$

но затем испускается ещё один фотон (или ещё несколько фотонов) при переходе электрона на основной уровень.

Чтобы оценить мощность рекомбинационного излучения, укажем, что в антиборновском приближении, при $\varepsilon \ll I_Z$, сечение фоторекомбинации примерно равно сечению тормозного излучения (18). Такое совпадение особенно просто пояснить для фотозахвата электрона на сильно возбуждённые связанные состояния в кулоновском поле ядра. Эти состояния по своим свойствам мало отличаются от близких к их границе свободных состояний, поэтому электрон в поле ядра почти с равной вероятностью может излучить энергию как немного меньше своей начальной энергии ε (тормозное излучение), так и немного больше её (рекомбинационное излучение). Квантовая теории в антиборновском приближении даёт следующее выражение для сечения фоторекомбинации в основное состояние водородоподобного атома [51, §56]:

$$\sigma_{\text{ф.р}} = \frac{2^8 \pi^2}{3 e^4} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2. \quad (20)$$

Разница между формулой (20) и простейшей оценкой (18) составляет всего 17%. Далее нужно подправить формулу (17), просто заменив $\sigma_{\text{т.и}}$ на $\sigma_{\text{ф.р}}$ и ε на $\varepsilon + I_Z$:

$$P_{\text{ф.р}} = (\varepsilon + I_Z) n_e v n_i \sigma_{\text{ф.р}}. \quad (21)$$

Так как $\sigma_{\text{ф.р}} \approx \sigma_{\text{т.и}}$ при $\varepsilon \approx T_e \ll I_Z$, финальную оценку мощности рекомбинационного излучения для случая $T_e \ll I_Z$ проще всего получить, умножив (19) на I_Z/T_e :

$$P_{\text{ф.р}} \approx \frac{Z^4 e^{10} n_e n_i}{m_e^{1/2} T_e^{1/2} c^3 \hbar^3}. \quad (22)$$

Практическая формула с правильным численным коэффициентом имеет вид

$$P_{\text{ф.р}} = 3,3 \times 10^{-31} \frac{Z^4 n_e n_i}{\sqrt{T_e}} \left[\text{Вт/см}^3 \right],$$

где температура T_e измеряется в электронвольтах, а плотности электронов и ионов — в единицах на кубический сантиметр (задача 7.6).

Вследствие сильной зависимости от Z рекомбинационное излучение значительно возрастает при загрязнении плазмы тяжёлыми ионами. Оно преобладает над тормозным в низкотемпературной плазме, где $T_e < I_Z$. В этом случае при расчёте мощности излучения траекторию электронов уже нельзя считать прямолинейной, как

это сделано при выводе формулы (19) для мощности тормозного излучения. Однако её по-прежнему можно использовать, по крайней мере, в качестве оценки по порядку величины (задача 7.2). Что касается формулы (22) для мощности рекомбинационного излучения, то она получена именно для случая $T_e < I_Z$.

В противоположном случае, при $T_e \gg I_Z$, нужно принять во внимание, что сечение фоторекомбинации быстро убывает с ростом энергии электрона. Квантовая теория предсказывает,¹⁾ что

$$\sigma_{\text{ф.р}} = \frac{2^7 \pi}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \left(\frac{I_Z}{\hbar \omega} \right)^{3/2}, \quad (23)$$

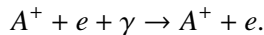
если $\hbar \omega \gg I_Z$. Так как $\hbar \omega = \varepsilon + I_Z$, энергия, уносимая фотоном в пределе $T_e \gg I_Z$, увеличивается пропорционально температуре. Однако сечение фотоионизации, согласно формуле (23), убывает быстрее — пропорционально $T_e^{-3/2}$. Следовательно, мощность рекомбинационного излучения можно найти, умножив оценку (22) на $(I_Z/T_e)^{1/2}$:

$$P_{\text{ф.р}} \approx \frac{Z^5 e^{12} n_e n_i}{T_e c^3 \hbar^4}.$$

Эта мощность мала по сравнению с мощностью тормозного излучения.

7.4. Длина пробега излучения

Прежде чем отождествлять вычисленную мощность излучения из единицы объёма плазмы с потерями энергии, надо убедиться, что излучённые фотоны покидают плазму, а не поглощаются в ней недалеко от места излучения. Процесс *тормозного поглощения* является обратным по отношению к тормозному излучению. Фотон сталкивается со свободным электроном, когда тот находится вблизи иона и поглощается электроном:



Процесс $e + \gamma \rightarrow e$ запрещён законами сохранения энергии и импульса.

Вычислим длину, на которой поглощается электромагнитная волна в плазме, используя методы классической физики.

¹⁾ Имеющиеся в литературе оценки сечения фоторекомбинации, полученные из классической теории Х. Крамерса для тормозного излучения, дают неправильную зависимость сечения от энергии электрона. См., например, [1, 7, 8, 76].

Пусть E_ω — амплитуда электрического поля волны частотой ω . В поле такой волны электроны осциллируют со скоростью

$$v_\omega = \frac{eE_\omega}{m_e\omega},$$

а соответствующая «осцилляторная» энергия в единице объёма равна

$$n_e \frac{m_e v_\omega^2}{2} = \frac{n_e e^2 E_\omega^2}{2m_e \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E_\omega^2}{8\pi}, \quad (24)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}$ — ленгмюровская частота. За счёт столкновений с ионами направленное движение электронов становится изотропным, а энергия (24) превращается в тепло, причём скорость диссипации энергии пропорциональна удвоенной частоте электрон-ионных столкновений $2\nu_{ei}$ (удвоенной потому, что квадрат скорости v_ω убывает в 2 раза быстрее, чем сама скорость). Так как электромагнитные волны с частотой ниже ω_p не могут распространяться в плазме без магнитного поля,¹⁾ будем считать, что $\omega \gg \omega_p$. Тогда поток энергии в волне равен $c E_\omega^2 / (8\pi)$. Выбирая ось x в направлении распространения волны, получаем уравнение

$$\frac{d}{dx} c \frac{E_\omega^2}{8\pi} = -2\nu_{ei} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E_\omega^2}{8\pi}.$$

Его решением является экспоненциально убывающая функция

$$\frac{E_\omega^2}{8\pi} = \frac{E_{\omega 0}^2}{8\pi} e^{-2x/\ell}.$$

Здесь

$$\ell = \frac{c}{\nu_{ei}} \frac{\omega^2}{\omega_p^2}$$

есть искомая длина пробега излучения. Выражая частоту столкновений через сечение, в соотношении

$$\nu_{ei} = n_i \sigma_i v$$

следует учесть, что формула (6.16) для транспортного сечения

$$\sigma_i = 4\pi \Lambda Z^2 e^4 / (m_e^2 v^4)$$

относится к случаю далёких пролётов, когда прицельный параметр b порядка дебаевского радиуса λ_D . При далёких пролётах излучаются

¹⁾ Этот факт доказывается в других курсах.

или поглощаются электромагнитные волны с частотой порядка $v/\lambda_D \sim v_{Te}/\lambda_D \sim \omega_p \ll \omega$. Фотоны с энергией $\hbar\omega \sim T_e \gg \hbar\omega_p$ поглощаются при близких пролётах. Соответствующее сечение примерно в Λ раз меньше (задачи 6.1 и 6.6). Полагая, что $v \approx v_{Te}$ и $\hbar\omega \approx T_e$, получаем

$$\ell \approx \frac{cm_e^{3/2} T_e^{7/2}}{n_e n_i Z^2 e^6 \hbar^2}. \quad (25)$$

Точные вычисления дают

$$\ell = 2,5 \times 10^{37} \frac{T_e^{7/2}}{n_e n_i Z^2} [\text{см}], \quad (26)$$

где температура T_e измеряется в электронвольтах, а плотности электронов и ионов n_e и n_i — в см^{-3} . Длина пробега излучения даже в сравнительно плотной и холодной плазме очень велика. Например, для водородной плазмы с $T_e = 10 \text{ эВ}$, $n_e = n_i = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ имеем $\ell = 8 \times 10^5 \text{ км}$. Таким образом, лабораторная плазма обычно прозрачна для тормозного излучения. Непрозрачны ядра звёзд.

Пусть L — характерный линейный размер излучающего тела. Обозначим через S мощность излучения, отнесённую к площади излучающей поверхности, и установим зависимость S от L . При $L \ll \ell$ плотность потока излучения S пропорциональна размеру тела L :

$$S \approx \frac{PL^3}{L^2} \approx PL.$$

При $L \gg \ell$ излучение выходит только из поверхностного слоя толщины порядка ℓ :

$$S \approx \frac{PL^2 \ell}{L^2} \approx P\ell.$$

Подставив сюда мощность тормозного излучения, получим:

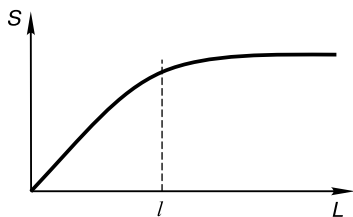
$$S \approx \frac{T_e^4}{c^2 \hbar^3}.$$

С точностью до численного коэффициента этот результат совпадает с законом Стефана—Больцмана (Jozef Stefan, 1879 [77]; Ludwig Boltzmann, 1884 [78]), согласно которому плотность потока излучения абсолютно чёрного тела (задача 7.8) равна

$$S = \frac{\pi^2}{60} \frac{T_e^4}{c^2 \hbar^3}. \quad (27)$$

Абсолютно чёрное тело — физическая абстракция, применяемая в термодинамике. Так называют тело, поглощающее всё падающее на

Рис. 7.5. Мощность излучения с единицы поверхности излучающего тела при заданной температуре и плотности плазмы увеличивается пропорционально линейным размерам тела L , пока они меньше длины пробега излучения ℓ ; при $L > \ell$ мощность излучения с единицы поверхности определяется законом Стефана—Больцмана



него электромагнитное излучение во всём спектральном диапазоне и ничего не отражающее. Несмотря на название, абсолютно чёрное тело само может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально иметь цвет, но это излучение сначала «переваривается» внутри тела, поэтому находится с ним в тепловом равновесии. Спектр излучения абсолютно чёрного тела определяется только его температурой. Как видно из рис. 7.5, равновесное излучение всегда имеет большую мощность, чем неравновесное. Среди тел Солнечной системы свойствами абсолютно чёрного тела в наибольшей степени обладает Солнце. Термин абсолютно чёрное тело был введён Густавом Кирхгофом (Gustav Kirchhoff) в 1862 г.

7.5. Излучение спектральных линий

Реальная картина излучения усложняется конкуренцией между излучением с непрерывным спектром и излучением в дискретных линиях испускания атомов и молекул, а также убыванием температуры к поверхности излучающего тела из-за радиационного остывания. Как правило, в линейчатом спектре сосредоточена лишь малая доля мощности излучения, поэтому распределение температуры в излучающем слое зависит, главным образом, от характеристик непрерывного спектра.

Спектральные линии излучения имеют конечную ширину. Различают *естественную* и *аппаратную* ширину спектральных линий.

Естественное уширение спектральной линии связано с тем, что время жизни атома в возбуждённом квантовом состоянии конечно, так как атом спонтанно в среднем за время $\tau_{с.и}$ испускает фотон и переходит в основное состояние (или другое возбуждённое состояние с меньшей энергией). Естественная полуширина спектральной линии $\Delta\omega$ связана с временем жизни соотношением

$$\Delta\omega = 1/\tau_{с.и}, \quad (28)$$

которое следует из соотношения неопределённостей.

Аппаратная ширина спектральной линии определяется разрешающей способностью спектрального прибора, используемого для измерения спектра излучения. Если аппаратное уширение больше естественного, прибор не может различить естественную ширину спектральной линии.

В плазме существуют дополнительные механизмы уширения спектральных линий. *Ударное уширение* вызывается столкновениями атомов с другими частицами плазмы. В результате столкновений переходы атома между квантовыми состояниями происходят чаще, что эквивалентно уменьшению времени жизни возбуждённых состояний. Соответственно этому увеличивается ширина спектральной линии.

Тепловое движение атомов (даже без учёта столкновений) приводит к *доплеровскому уширению* спектральных линий. Если неподвижный атом излучает плоскую волну с частотой ω' , то в системе отсчёта, в которой он движется с нерелятивистской скоростью v , частота излучения будет равна

$$\omega = \omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (29)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор. Величина доплеровского сдвига $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = kv \cos \theta$ пропорциональна скорости атома и косинусу угла θ между \mathbf{k} и \mathbf{v} . Так как в плазме имеются атомы с различными скоростями, частота излучаемых ими спектральных линий оказывается различной, а спектральный прибор фактически производит усреднение по функции распределения атомов по скоростям. В результате измеряемая ширина спектральной линии будет больше естественной ширины; по её величине иногда удаётся определить температуру плазмы (задача 7.9).

Из-за резонансного характера поглощения длина пробега линейчатого излучения значительно меньше, чем длина пробега излучения в непрерывном спектре. В результате тело, прозрачное в непрерывном спектре, испускает линейчатый спектр (рис. 7.6), так как интенсивность линий оказывается ближе к состоянию термодинамического равновесия, соответствующем насыщению, как на рис. 7.5 при $L > \ell$.

Напротив, в спектре излучения непрозрачного тела имеются линии поглощения (рис. 7.7), так как линейчатое излучение выходит только из тонкого приповерхностного слоя, в котором температура ниже, чем в глубине тела, где формируется излучение с непрерывным спектром.

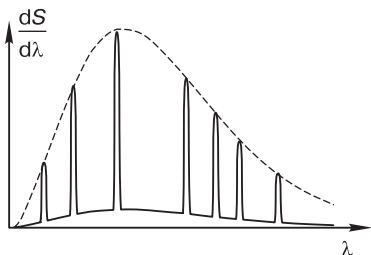


Рис. 7.6. Спектр излучения нагретого тела, прозрачного в непрерывном спектре и непрозрачного в линиях; штриховая линия соответствует планковскому спектру излучения абсолютно чёрного тела при данной температуре; площадь под этой кривой даёт полное количество энергии, излучённой с единицы площади поверхности абсолютно чёрного тела в единицу времени, которое вычисляется по формуле (27)

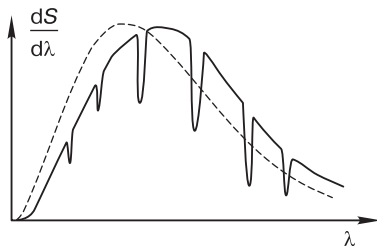


Рис. 7.7. Спектр излучения тела с температурой, уменьшающейся к поверхности; малые частоты поглощаются сильнее, чем большие; штрихом показан планковский спектр, отвечающий средней эффективной температуре излучения; в спектре вырезаны линии селективного поглощения; поток излучения в центрах линий равен планковскому потоку, отвечающему температуре поверхности

7.6. Циклотронное излучение

*Циклотронное излучение*¹⁾ неизбежно возникает, если в плазме имеется магнитное поле. Согласно постулатам квантовой механики, орбитальный момент электрона в магнитном поле квантуется и может принимать значения, кратные постоянной Планка \hbar . Поэтому часть кинетической энергии электрона, отвечающая движению в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, также квантуется. Она может принимать значения

$$\frac{1}{2}m_e v_{\perp}^2 = \left(s + \frac{1}{2}\right) \hbar |\Omega_e|,$$

пропорциональные циклотронной частоте

$$|\Omega_e| = \frac{eB}{m_e c}.$$

Квантовые состояния, соответствующие различным значениям индекса $s = 0, 1, 2, \dots$, называют уровнями Л. Д. Ландау [79, §112]. Переходы электронов между уровнями Ландау приводят к излучению или поглощению электромагнитных волн на частотах, кратных Ω_e . Излучение на первой гармонике, т. е. на частоте $\omega = |\Omega_e|$, описывается

¹⁾ Оно же *магнитотормозное излучение*. В релятивистском пределе его также называют *синхротронным*.

в рамках дипольного приближения, а излучение на более высоких гармониках, $\omega = 2|\Omega_e|$, $\omega = 3|\Omega_e|$ и т. д., возникает в следующих порядках мультипольного разложения (задача 7.10).

Можно также сказать, что излучение высших гармоник связано с релятивистскими эффектами. Релятивистские эффекты малы, если $T_e \ll m_e c^2$. Однако чем выше номер гармоники, тем быстрее возрастает интенсивность излучения при увеличении энергии электрона. Кроме того, существенно отличается угловое распределение излучения низших и высших гармоник. Первая гармоника излучается преимущественно вдоль магнитного поля, а высшие гармоники — поперёк (задача 7.11).

Подсчитаем полную интенсивность излучения в дипольном приближении на первой гармонике. Подставляя $a = \Omega_e v_\perp$ в формулу Лармора (2), получаем

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} (\Omega_e v_\perp)^2.$$

В соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt} \frac{m_e v_\perp^2}{2} = -I,$$

энергия электрона уменьшается в $e = 2,71 \dots$ ¹⁾ раз за время

$$\tau = 3m_e^3 c^5 / 4e^4 B^2. \quad (30)$$

При $B = 50$ кГс это «время высвечивания» составляет 0,1 с. Удельную мощность циклотронного излучения находим, умножив I на плотность электронов n_e и приняв во внимание, что среднее значение $\langle \frac{1}{2} m v_\perp^2 \rangle = T_e$:

$$P_{ц.и} = \frac{4}{3} \frac{e^4 B^2 T_e n_e}{m_e^3 c^5}. \quad (31)$$

Она может быть больше мощности, выделяемой в термоядерных реакциях (лекция 9). Однако в плотной плазме низшие гармоники сильно поглощаются и не выходят наружу (задача 7.12). В результате излучаются преимущественно высшие гармоники, а их интенсивность при $T_e \ll m_e c^2$ на порядки меньше, чем по нашей оценке. Кроме того, циклотронное излучение относительно длинноволновое. При $B = 50$ кГс длина волны составляет $\lambda = 2\pi c / |\Omega_e| = 2$ мм. Такое излучение (в отличие от тормозного) хорошо отражается металлическими стенками и может быть возвращено в плазму.

¹⁾ Следует различать основание натурального логарифма e и элементарный заряд e .

В однородном магнитном поле основным механизмом уширения спектральных линий циклотронного излучения обычно является эффект Доплера. Согласно формуле (29), доплеровский сдвиг частоты тем больше, чем меньше длина волны. Следовательно, доплеровское уширение более существенно для коротковолновых высоких гармоник циклотронного излучения, чем для низких гармоник. Эффект уширения может быть столь сильным, что в области высоких частот гармоники перекрываются и поэтому спектр циклотронного излучения становится непрерывным.

В реальных лабораторных установках магнитное поле неоднородно. Неоднородность имеет два важных последствия. Во-первых, линии излучения в низших гармониках превращаются в полосы, а высшие гармоники вообще сливаются в сплошной спектр. Во-вторых, неоднородность затрудняет резонансное поглощение гармоник циклотронной частоты, а в результате длина пробега циклотронного излучения возрастает.

Литература

В «Физике плазмы для физиков» Л. А. Арцимовича и Р. З. Сагдеева [6] на элементарном уровне изложена спектральная теория излучения плазмы в непрерывном спектре (§1.8).

Более детальное изучение радиационных процессов в плазме можно начинать с классической монографии «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений» Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [7, гл. V, §§1–4] или многократно переизданной «Физики газового разряда» Ю. П. Райзера [8, гл. 8]. Обзор В. Я. Когана и В. С. Лисицы в «Итогах науки и техники» [80] дополняет эти монографии.

Аккуратные вычисления спектральной мощности тормозного излучения в рамках классической физики выполнены в §70 «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [81]; там же в §74 изложена теория магнитотормозного излучения. Квантовая теория тормозного излучения разработана Арнольдом Зоммерфельдом (Arnold Sommerfeld) в 1931 г. Она изложена в «Квантовой электродинамике» В. Б. Берестецкого, Е. М. Лифшица и Л. П. Питаевского [51] в §92. Там же в §56 вычислено сечение фоторекомбинации, а квантовая теория магнитотормозного излучения изложена в §90. Предложенная Б. А. Трубниковым аппроксимационная формула для универсального коэффициента выхода циклотронного излучения из плазмы приведена в его статье [82] в «Вопросах теории плазмы».

Методы оптических измерений параметров плазмы обсуждаются в книге «Горячая плазма и управляемый ядерный синтез» С. Ю. Лукьянова и Н. Г. Ковальского [13, гл. VI].

Задачи

Задача 7.1. Доказать, что при столкновении частиц с одинаковым отношением электрического заряда к массе, мощность дипольного излучения равна нулю. ►► Решение

Задача 7.2. Оценить мощность тормозного и рекомбинационного излучения при $\frac{1}{2}m_e v^2 \ll I_Z$, (рис. 7.3), когда в процессе излучения доминируют близкие столкновения с заметным искривлением траектории электрона. ►► Решение

Задача 7.3. Определить зависимость сечения тормозного излучения от частоты. ►► Решение

Задача 7.4. Найти спектр тормозного излучения в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям. ►► Решение

Задача 7.5. Вычислить мощность тормозного излучения в полностью ионизованной плазме. ►► Решение

Задача 7.6. Вычислить мощность рекомбинационного излучения. ►► Решение

Задача 7.7. Найти планковский спектр — спектр излучения абсолютно чёрного тела. ►► Решение

Задача 7.8. Найти плотность потока энергии излучения с поверхности абсолютно чёрного тела. ►► Решение

Задача 7.9. Найти форму спектральной линии излучения, предполагая, что она определяется доплеровским уширением, а распределение атомов является максвелловским.

Задача 7.10. Объяснить происхождение высших гармоник в спектре циклотронного излучения. ►► Решение

Задача 7.11. Найти угловое распределение циклотронного излучения на первой и второй гармониках циклотронной частоты. ►► Решение

Задача 7.12. Оценить длину пробега циклотронного излучения в пределе $T_e \rightarrow 0$. ►► Решение

Задача 7.13. Оценить номер гармоники циклотронного излучения, выше которой линии излучения перекрываются.

Задача 7.14. Найти спектр циклотронного излучения в области низких частот, где плазма непрозрачна для циклотронного излучения. ►► Решение

Элементарные процессы в плазме

**Ионизация электронным ударом. Тройная рекомбинация.
Фоторекомбинация и фотоионизация.
Ступенчатые процессы. Корональное равновесие.
Резонансная перезарядка.**

Как показано в лекции 3, степень ионизации термодинамически равновесной плазмы однозначно определяется её температурой T и плотностью n в соответствии с уравнением Саха. В неравновесной плазме необходимо анализировать *элементарные процессы*, протекающие при столкновении атомов, ионов и электронов. К числу таких процессов принадлежат *ионизация*, т. е. выбивание связанного электрона из нейтрального или частично ионизованного атома, *рекомбинация* — захват ионом свободного электрона, *перезарядка* — передача связанного электрона от атома к иону, *возбуждение* — переход связанного электрона в связанное состояние с большей энергией, *тушение (дезактивация)* — переход связанного электрона в связанное состояние с меньшей энергией, *диссоциация* — распад молекулы на более простые молекулы, атомы или ионы, *ассоциация* — объединение атомов или ионов в молекулы или простых молекул в более сложные.

Этот список можно было бы продолжить за счёт таких процессов, как диссоциативное прилипание электронов к молекулам, передача возбуждения и т. д. И нужно иметь в виду, что многие процессы идут по нескольким каналам. Например, ионизация случается при столкновении атома с электроном, ионом или фотоном, а перезарядка бывает резонансной и нерезонансной. Подобные элементарные процессы изучаются в курсах низкотемпературной плазмы и газового разряда. Мы рассмотрим только некоторые процессы, главным образом, те, которые удаётся описать при помощи простых теоретических моделей.

8.1. Ионизация электронным ударом

Изучение элементарных процессов начнём с *ионизации электронным ударом*



на примере атома водорода. Простейшая модель этого процесса предложена Дж. Томсоном (Joseph Thomson). Следуя ему, рассмотрим столкновение свободного электрона со связанным атомарным электроном, который первоначально был неподвижен. Такое предположение оправдано, если начальная скорость свободного электрона v значительно больше, чем скорость v_1 его связанного собрата на основном уровне $k = 1$ (на более высоких уровнях скорость связанного электрона ещё меньше). Иными словами, мы предполагаем, что энергия свободного электрона $\varepsilon = \frac{1}{2}m_e v^2$ велика по сравнению с энергией ионизации $I = \frac{1}{2}m_e v_1^2 = \frac{1}{2}m_e e^4 / \hbar^2$. В столкновении свободный электрон передаёт часть своей энергии связанному электрону. Если переданная энергия \mathcal{E} превысит энергию ионизации I , произойдёт ионизация атома из основного состояния в результате всего лишь одного столкновения.

Для вычисления \mathcal{E} при $\varepsilon \gg I$ воспользуемся приближением далёких пролётов (рис. 8.1), считая, что траектория свободного электрона почти не отклоняется от прямой. Тогда импульс, переданный атомарному электрону, после столкновения будет направлен почти перпендикулярно скорости налетающего электрона, так как работа проекции силы кулоновского взаимодействия электронов $\mathbf{F} = e^2 \mathbf{r} / r^3$ на направление движения при интегрировании за полное время пролёта обратится в нуль. Импульс атомарного электрона в направлении, перпендикулярном скорости налетающего электрона, легко найти, интегрируя по времени проекцию силы $F_{\perp} = (b/r)F$ на это

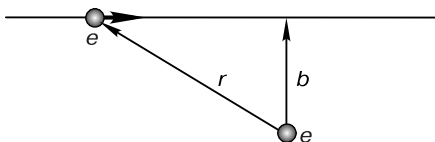


Рис. 8.1. Приближение далёких пролётов при вычислении сечения ионизации электронным ударом; предполагается, что скорость атомарного электрона пренебрежимо мала по сравнению со скоростью налетающего электрона, который движется по прямой с постоянной скоростью

направление. Эти вычисления уже проделаны в п. 6.5:

$$p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2 b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2e^2}{vb}.$$

Отсюда выражаем квадрат прицельного расстояния

$$b^2 = \frac{e^4}{\varepsilon \mathcal{E}} \quad (2)$$

через энергию $\varepsilon = \frac{1}{2} m_e v^2$ налетающего электрона и энергию $\mathcal{E} = \frac{1}{2} p_{\perp}^2 / m_e$, переданную им атомарному электрону. Дифференцируя затем πb^2 по \mathcal{E} , находим дифференциальное сечение кулоновского рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} = \left| \pi \frac{db^2}{d\mathcal{E}} \right| = \frac{\pi e^4}{\varepsilon \mathcal{E}^2} \quad (3)$$

в зависимости от \mathcal{E} . Для столкновений тождественных частиц полученная формула является точной: её можно вывести из формулы Резерфорда (6.6), не используя приближение далёких пролётов (задача 8.1).

Налетающий электрон должен затратить на ионизацию энергию, как минимум, превышающую энергию ионизации I , но не больше всей своей энергии ε . Поэтому полное сечение ионизации получается интегрированием (3) по \mathcal{E} в пределах от I до ε :

$$\sigma_{y.и} = \int_I^{\varepsilon} \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left[\frac{1}{I} - \frac{1}{\varepsilon} \right].$$

Эта формула получена Дж. Томсоном в 1912 г. [83]. Ей можно придать более запоминающийся вид, если ввести обозначение $a_B = e^2 / (2I)$ для радиуса Бора:

$$\sigma_{y.и} = 4\pi a_B^2 \frac{I}{\varepsilon} \left[1 - \frac{I}{\varepsilon} \right]. \quad (4)$$

Формула Томсона качественно верно отражает зависимость сечения ударной ионизации от энергии налетающего электрона. Она предсказывает, что максимальное сечение $\sigma_{\max} = \pi a_B^2 \approx 0,9 \times 10^{-16} \text{ см}^2$ достигается при $\varepsilon = 2I$. Даже вблизи порога ионизации $\varepsilon = I$, где предположение $v \gg v_1$ заведомо нарушается, она правильно предсказывает, что сечение ионизации, $\sigma_{y.и} \approx \sigma_0 \times (\varepsilon - I)/I$, пропорционально разности $\varepsilon - I$. Однако для количественных расчётов формула Томсона непригодна. Её сравнение с экспериментальными данными

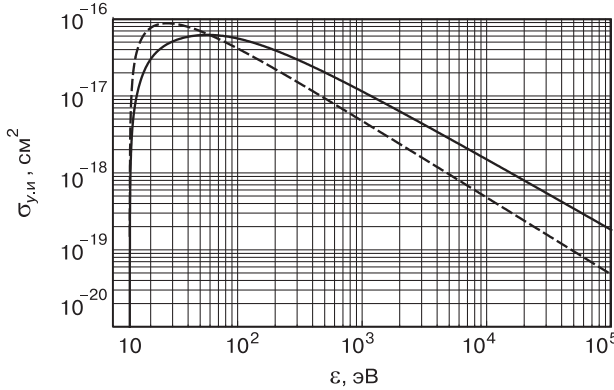


Рис. 8.2. Сечение ионизации атома водорода электронным ударом из основного состояния; сплошная линия — экспериментальное сечение [84], штриховая — вычисленное по формуле Томсона (4)

(рис. 8.2) показывает, что вблизи порога ионизации она завышает коэффициент пропорциональности σ_0 в 4,3 раза. При $\varepsilon \gg I$, напротив, экспериментальное сечение заметно превышает теоретическое. В точных расчётах используют аппроксимирующие формулы, которые можно найти в базе данных [84] Международного агентства по атомной энергии (МАГАТЭ).

Один электрон со скоростью v в единицу времени производит $n_a \sigma_{y,и} v$ пар ионов и электронов, если считать, что плотность атомов равна n_a . Величина $n_a \langle \sigma_{y,и} v \rangle$, усреднённая по распределению свободных электронов, имеет смысл частоты ионизации. Её произведение на плотность имеющихся свободных электронов n_e даёт число новых электронов, рождённых в единице объёма за единицу времени. Следовательно, скорость нарастания плотности электронов описывается уравнением

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y,и} = k_{y,и} n_e n_a, \quad (5)$$

где коэффициент в правой части

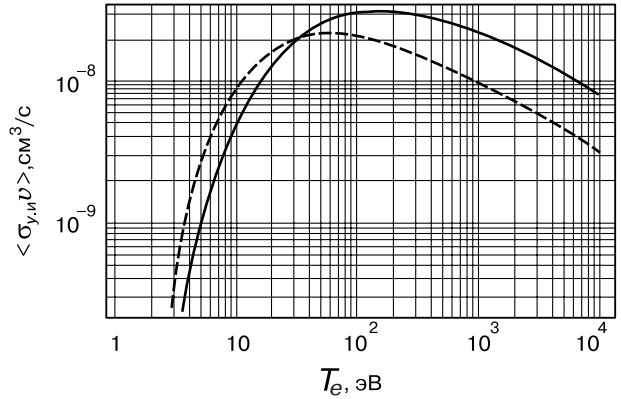
$$k_{y,и} = \langle \sigma_{y,и} v \rangle$$

называют *константой скорости ударной ионизации*. Подстановка формулы Томсона (4) с последующим усреднением по максвелловской функции распределения в пределе $T_e \ll I$ (задача 8.2) даёт формулу

$$k_{y,и}^{\text{пр}} = 8 \sqrt{\pi} \alpha c a_B^2 (T_e/I)^{1/2} \exp(-I/T_e), \quad (6)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, а индекс «пр» в обозначении $k_{y,и}^{\text{пр}}$ напоминает, что коэффициент ударной ионизации вычислен для случая, когда ионизация происходит «прямо» из основного состояния за одно столкновение атома с электроном. Формула (6) примерно в 4 раза завышает константу скорости ударной

Рис. 8.3. Коэффициент ионизации атома водорода электронным ударом из основного состояния; сплошная линия — экспериментальные данные [84], штриховая — расчёт по формуле Томсона (4)



ионизации по сравнению с экспериментальными данными (рис. 8.3), поскольку во столько же раз формула Томсона завышает сечение ионизации вблизи порога процесса. Полезно обратить внимание, что множитель αc в формуле (6) равен скорости v_1 атомарного электрона в основном состоянии атома водорода.

Наряду с рассмотренным процессом «прямой» ионизации возможен и другой сценарий выбивания электрона из атома, при котором атом сначала переходит в возбуждённое состояние. При следующих столкновениях он ещё более возбуждается, а уж затем ионизируется. В этом сценарии атом проходит целую серию возбуждённых состояний, а соответствующий процесс называется *ступенчатой ионизацией*. В отличие от неё ионизация в одну стадию называется *прямой*. Константы прямой $k_{y,и}^{пр}$ и ступенчатой $k_{y,и}^{ст}$ ударной ионизации мы сравним в п. 8.3. Константа $k_{y,и}$ в уравнении (5) должна учитывать как прямую, так и ступенчатую ионизацию.

8.2. Тройная рекомбинация

Пока электронов мало, уравнение (5) описывает нарастание их плотности по экспоненциальному закону $n_e \propto \exp(t/\tau)$, с постоянной времени $\tau = (k_{y,и} n_a)^{-1}$. По мере увеличения плотности электронов в игру вступает обратный процесс *рекомбинации*, который ведёт к уменьшению числа электронов.

Если температура плазмы достаточно высока, молекулярные ионы в ней отсутствуют, а рекомбинация электрона и иона происходит при столкновении с третьей частицей. Чаще всего третьей частицей

является электрон, так что *тройная рекомбинация* электрона и иона на электроне протекает по схеме



т. е. происходит реакция, противоположная ионизации электронным ударом (1). При столкновении двух электронов один электрон захватывается на атомарный уровень (если поблизости находится подходящий ион), а второй электрон улетает, унося избыточную энергию.

Сразу после акта рекомбинации вновь образованный атом не обязательно оказывается в основном состоянии. В процессе тройной рекомбинации, как правило, сначала образуется атом в возбуждённом состоянии, что принято отмечать звёздочкой в верхнем индексе:



Затем после нескольких столкновений с другими электронами атом переходит в основное состояние, т. е. весь процесс является ступенчатым, протекая в несколько стадий.

Тройная рекомбинация приводит к уменьшению плотности электронов, а её скорость пропорциональна плотности всех трёх сортов частиц, участвующих в столкновении, т. е. n_i , n_e и ещё раз n_e :

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y,p} = -k_{y,p} n_e^2 n_i. \quad (9)$$

В рассматриваемом случае $T_e \ll I$ коэффициент рекомбинации $k_{y,p}$ определяется первыми стадиями процесса, при которых атом проходит ряд возбуждённых состояний. Более того, ключевую роль играет самая первая стадия, когда свободный электрон впервые захватывается на возбуждённый атомарный уровень. Соответствующую константу $k_{y,p}^*$ будем помечать звёздочкой в верхнем индексе в отличие от константы прямой рекомбинации в основное состояние $k_{y,p}^{\text{пр}}$, константы ступенчатой рекомбинации $k_{y,p}^{\text{ст}}$, и константы тройной рекомбинации вообще $k_{y,p}$, включающей как прямую, так и ступенчатую рекомбинацию.

Не все электроны, первоначально захваченные на высоковозбуждённый уровень, затем «сваливаются» на основной уровень. Часть из них вновь выбивается из атома при последующих столкновениях вместо того, чтобы перейти на более низкий энергетический уровень в атоме. Поэтому коэффициент ступенчатой рекомбинации $k_{y,p}^{\text{ст}}$, вообще говоря, должен быть меньше, чем коэффициент рекомбинации в возбуждённое состояние $k_{y,p}^*$. Однако в столкновениях одинаковых частиц энергия перераспределяется в равных пропорциях, поэтому если константы $k_{y,p}^{\text{ст}}$ и $k_{y,p}^*$ отличаются, то только численным коэффициентом.

Оценим константу ступенчатой тройной рекомбинации $k_{y.p}^{ст}$, полагая, что она примерно равна константе тройной рекомбинации $k_{y.p}^*$ в возбуждённое состояние. В соответствии с формулой (2), столкновение электронов, сопровождающееся передачей всей кинетической энергии налетающей частицы $\mathcal{E} \approx \varepsilon$, происходит в том случае, когда $b \approx e^2/\varepsilon$. Так как в среднем $\varepsilon \approx T_e$, соответствующее сечение столкновения оценивается как $\sigma_{ee} \approx \pi b^2 \approx \pi (e^2/T_e)^2$. Число таких столкновений электронов в единице объёма за единицу времени равно $\langle \sigma_{ee} v_e \rangle n_e^2 \approx \pi (e^2/T_e)^2 v_{Te} n_e^2$, где $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ — тепловая скорость электронов. Однако рекомбинация происходит только в том случае, когда поблизости, на расстоянии порядка $b \approx e^2/T_e$, находится ион. Число таких столкновений в $n_i b^3 \approx n_i (e^2/T_e)^3$ раз меньше полного числа столкновений электронов с указанной передачей энергии. В результате оказывается, что количество актов рекомбинации в единице объёма как раз описывается формулой (9) с константой

$$k_{y.p}^{ст} \approx \pi (e^2/T_e)^5 \sqrt{T_e/m_e}.$$

Полученную оценку константы тройной рекомбинации $k_{y.p}$ перепишем, выделив боровский радиус a_B и нормировав температуру на энергию ионизации:

$$k_{y.p}^{ст} = A_{y.p}^{ст} \alpha c a_B^5 (I/T_e)^{9/2}. \quad (10)$$

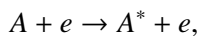
Здесь $A_{y.p}^{ст}$ — численный коэффициент порядка $2^{9/2}\pi \approx 71$, который набирается при замене $e^2 = 2I a_B$ и $m_e = 2I/(\alpha c)^2$. Для оценки коэффициента ударной рекомбинации используют практическую формулу [34]

$$k_{y.p}^{ст} = 8,75 \times 10^{-27} T_e^{-9/2} [\text{см}^6/\text{с}], \quad (11)$$

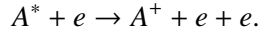
где температура T_e задана в электронвольтах. Эта формула получается из (10), если взять коэффициент $A_{y.p} = 76$, который менее чем на 10% отличается от полученного выше в результате простых оценок по порядку величины.

8.3. Ступенчатая ионизация

В низкотемпературной плазме ударная ионизация атома из основного состояния за одно столкновение может происходить только за счёт надтепловых электронов с энергией, значительно превышающей среднюю. Имеется альтернативный процесс *ступенчатой ионизации*, когда атом предварительно проходит целую серию возбуждённых состояний под воздействием соударений с электронами



а затем ионизуется из возбуждённого состояния:



Скорость ионизации возбуждённых атомов пропорциональна их плотности n_a^* , плотности электронов n_e и константе скорости ударной ионизации из возбуждённого состояния $k_{y.и}^*$. Соответствующее уравнение можно записать по аналогии с универсальным уравнением (5) ударной ионизации:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \Big|_{y.и}^* = k_{y.и}^* n_e n_a^*.$$

Однако в большей степени интерес представляет константа ступенчатой ударной ионизации $k_{y.и}^{ст}$, которая связывает скорость ионизации с плотностью всех ионов, независимо от их состояния:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \Big|_{y.и}^{ст} = k_{y.и}^{ст} n_e n_a.$$

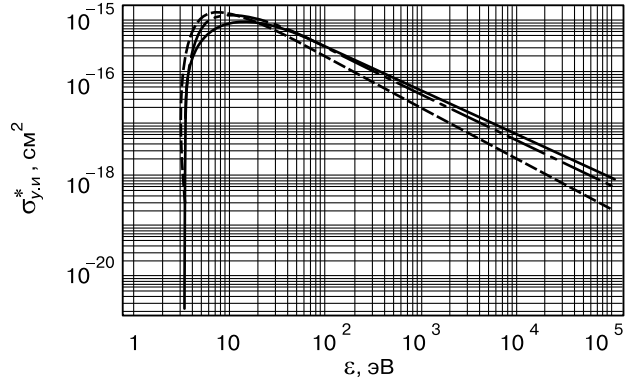
Покажем сначала, что константа ионизации из возбуждённого состояния заметно больше, чем из основного состояния: $k_{y.и}^* \gg k_{y.и}^{пр}$. Формула Томсона (4) получена для ионизации из основного состояния, но её нетрудно обобщить на случай, когда атом находится в возбуждённом состоянии. Для этого достаточно учесть, что радиус орбиты атомарного электрона увеличивается пропорционально квадрату главного номера k квантового состояния, т. е. $r_k = a_B k^2$, а энергия ионизации с соответствующего энергетического уровня $I_k = e^2/(2r_k) = I/k^2$, напротив, уменьшается обратно пропорционально k^2 :

$$\sigma_{y.и}^* = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left[\frac{1}{I_k} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = 4\pi a_B^2 \frac{I_k}{\varepsilon} \left[1 - \frac{I_k}{\varepsilon} \right] \times k^4. \quad (12)$$

Эта формула неплохо согласуется с экспериментом (рис. 8.4). Максимальное сечение $\sigma_{max} = \pi a_B^2 k^4$ достигается при меньшей энергии $\varepsilon = 2I/k^2$ и быстро увеличивается с ростом k . Получается, что ионизовать возбуждённый атом действительно легче, поэтому в некоторых ситуациях ступенчатая ионизация доминирует над прямой. Имея формулу (12), константу ионизации из возбуждённого состояния можно вычислить тем же способом, что и константу прямой ионизации (6), но от этого не будет много проку, так как надо ещё суметь вычислить плотность возбуждённых атомов n_a .

Для вычисления константы ступенчатой ионизации, исходя из динамики столкновений, следовало бы проанализировать всю цепочку превращений атома в ион из основного состояния через промежуточные возбуждённые состояния. Существующая теория не позволяет

Рис. 8.4. Сечение ударной ионизации атома водорода из возбуждённого состояния 2s (сплошная линия) и 2p (штрих-пунктирная линия) [84]; штриховой линией показано сечение, вычисленное по формуле (12) с $k = 2$



сделать это.¹⁾ Однако константу ступенчатой ионизации $k_{y,i}^{ст}$ всё-таки можно найти, если считать, что плотность электронов в системе достаточно велика, так что все переходы между возбуждёнными состояниями осуществляются только в результате столкновений с электронами, а не за счёт излучения или поглощения фотонов. В этом случае процесс ступенчатой ионизации оказывается детально противоположным по отношению к процессу тройной рекомбинации. Иными словами, в ходе этих двух процессов атомы претерпевают одинаковую цепочку превращений, но в противоположных направлениях.

Воспользуемся *принципом детального равновесия*. Пусть электроны находятся в термодинамическом равновесии с атомами, причём образование заряженных частиц происходит за счёт ступенчатой ионизации, а их уничтожение — в результате ступенчатой тройной рекомбинации, так что уравнение баланса для плотности электронов имеет вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = k_{y,i}^{ст} n_e n_a - k_{y,p}^{ст} n_e^2 n_i,$$

причём $\partial n_e / \partial t = 0$, т. е.

$$n_e n_i / n_a = k_{y,i}^{ст} / k_{y,p}^{ст}.$$

В соответствии с уравнением Саха (3.6), в состоянии термодинамического равновесия

$$n_i n_e / n_a = K(T),$$

¹⁾ Возбуждение электронной оболочки атома является существенно квантовым процессом, поскольку энергия связанного электрона при переходе с одного квантового уровня на другой может меняться только дискретным образом. Экспериментальные измерения сечений возбуждения также чрезвычайно трудны.

где константа равновесия

$$K(T) = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_{Te}^3} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{a_B^3} \left(\frac{T}{4\pi I} \right)^{3/2}$$

зависит от общей температуры T электронов и ионов, поскольку в состоянии термодинамического равновесия $T_e = T_i$. В рассматриваемом случае, вообще говоря, $T_e \neq T_i$. Поэтому температуру T в константе равновесия нужно заменить на температуру электронов T_e , так как движение ионов никак не влияет на скорость процесса ввиду того, что средняя скорость ионов мала по сравнению со скоростью электронов. Отсюда следует, что константа ступенчатой ионизации $k_{y,i}^{ct}$ связана с константой ступенчатой тройной рекомбинации $k_{y,p}^{ct}$ соотношением

$$k_{y,i}^{ct} = k_{y,p}^{ct} K(T_e).$$

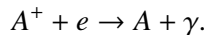
Подставляя сюда формулу (10) для $k_{y,p}^{ct}$, получаем

$$k_{y,i}^{ct} = A_{y,i}^{ct} \alpha c a_B^2 (I/T_e)^3 \exp(-I/T_e), \quad (13)$$

где $A_{y,i}^{ct} \approx (g_e g_i / g_a) A_{y,p}^{ct} / (4\pi)^{3/2}$ — числовой коэффициент порядка единицы. Константа ступенчатой ионизации при низкой температуре $T_e \ll I$ примерно в $(I/T_e)^{7/2}$ раз больше константы ударной ионизации (6) из основного состояния.

8.4. Фоторекомбинация

Ещё одним каналом образования атомов при столкновениях ионов с электронами является *фоторекомбинация*. В этом процессе энергию, высвободившуюся при переходе свободного электрона в связанное состояние, уносит фотон:



Число актов рекомбинации в единице объёма пропорционально плотности каждого сорта рекомбинирующих частиц, поэтому

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right|_{\text{ф.р.}} = k_{\text{ф.р.}} n_i n_e. \quad (14)$$

Константа фоторекомбинации

$$k_{\text{ф.р.}} = \langle \sigma_{\text{ф.р.}} v \rangle \quad (15)$$

равна усреднённому произведению сечения рекомбинационного излучения $\sigma_{\text{ф.р.}}$ на скорость v относительного движения электрона и иона. Из-за большей массы ионы можно считать неподвижными, а усреднение производить только по распределению скоростей электронов. Уже отсюда ясно, что результат усреднения будет зависеть от температуры электронов, но не ионов.

Для вычисления $k_{\text{ф.р}}$ используем оценку (7.18) сечения тормозного излучения, полученную в лекции 7:

$$\sigma_{\text{ф.р}} \approx \frac{4\pi^2}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2.$$

Как указано в п. 7.3, она приблизительно верна и для рекомбинационного излучения в случае низких температур, когда $T_e \ll I_Z$ и фотон в среднем уносит энергию, лишь немногим превышающую энергию ионизации, т. е. $\hbar\omega \approx I_Z$. Заменяя далее v на v_{T_e} , с учётом легко проверяемого равенства $\lambda_e^2 = (I/\varepsilon) a_B^2$ получаем

$$k_{\text{ф.р}} = A_{\text{ф.р}} \alpha^3 Z^2 \alpha c a_B^2 (I/T_e)^{1/2}. \quad (16)$$

Точный расчёт [45, § 24, задача 1] даёт $A_{\text{ф.р}} = 2^9 \pi^{3/2} / 3 (2,71 \dots)^4 \approx 17,4$, что близко к нашей оценке по порядку величины. В практических вычислениях используют формулу [34]

$$k_{\text{ф.р}} \approx 2,7 \times 10^{-13} Z^2 T_e^{-1/2} [\text{см}^3/\text{с}], \quad (17)$$

где числовой коэффициент почти в 2 раза больше. Увеличение константы фоторекомбинации по сравнению с расчётным значением только отчасти можно объяснить вкладом рекомбинации на возбуждённые уровни.

8.5. Фотоионизация

Процессом, обратным фоторекомбинации, является *фотоионизация*. В квантовой теории её называют *фотоэффектом*. Ионизацию атома производит фотон с достаточно большой энергией:



Скорость процесса

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right|_{\text{ф.и}} = k_{\text{ф.и}} n_a \quad (19)$$

пропорциональна плотности атомов. По логике вещей, она должна быть также пропорциональна плотности фотонов, но та плохо определена, так как из-за очень большой длины пробега излучение в плазме (см. п. 7.4) существенным образом зависит от размеров системы. Формально считают, что плотность фотонов включена в константу фотоионизации $k_{\text{ф.и}}$; в результате уже константа фотоионизации становится плохо определённой величиной, поэтому для неё не существует универсальных формул в системах, где излучение не заперто в плазме.

Если излучение заперто в плазме и находится в термодинамическом равновесии с ней, то число квантов в единице объёма есть функция

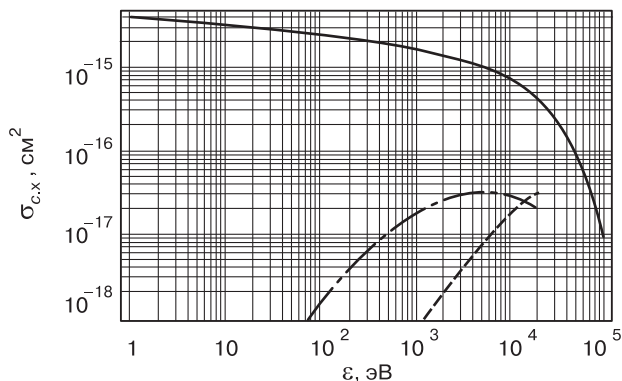


Рис. 8.5. Сечение резонансной перезарядки атома водорода на ионе водорода в зависимости от энергии налетающего атома (сплошная кривая); сечение нерезонансной перезарядки из основного состояния 1s в состояние 2p (штрих-пунктирная кривая) и 2s (штриховая линия) на несколько порядков меньше

температуры T . При этом можно установить связь между $k_{ф.и}$ и $k_{ф.р.}$, пользуясь принципом детального равновесия, который требует равенства скоростей фотоионизации и фоторекомбинации. Повторяя рассуждения, изложенные в конце п. 8.3, получаем

$$k_{ф.и} = k_{ф.р.} K(T_e). \quad (20)$$

8.6. Резонансная перезарядка

В процессе *перезарядки* атом в столкновении с ионом передаёт ему свой электрон:

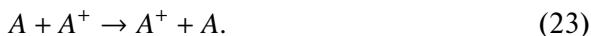


При этом число заряженных частиц не меняется, т. е.

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right|_{сх} = 0. \quad (22)$$

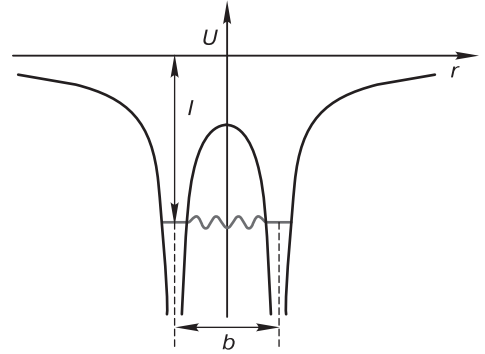
В лабораторных условиях перезарядка часто является нежелательным процессом, который увеличивает потери энергии из плазмы. Медленный атом, пришедший в плазму со стенок лабораторной установки, теряет электрон и застревает в плазме, если она удерживается, например, магнитным полем. Образовавшийся быстрый атом свободно вылетает на стенку, отдавая ей приобретённую энергию.

Особую опасность представляет *резонансная перезарядка*, когда атом и ион принадлежат одному химическому элементу:



Такой процесс имеет типичный резонансный характер; его сечение очень велико, так как энергия электрона не меняется при переходе с атомного уровня вблизи одного ядра на такой же уровень вблизи другого ядра. Для водорода при энергии сталкивающихся частиц

Рис. 8.6. Потенциальная энергия электрона в поле двух протонов; связанный электрон, находящийся на атомарном уровне с энергией ионизации I , может перейти на такой же уровень соседнего иона под потенциальным барьером; при равенстве энергий двух уровней процесс носит резонансный характер



порядка 1 эВ сечение резонансной перезарядки примерно в 20 раз больше «видимой» площади сечения атома πa_B^2 . По мере увеличения относительной скорости v атома и иона, особенно если она превышает скорость электрона в атоме $v_1 = \sqrt{2I/m_e}$, резонансный характер взаимодействия теряется, а сечение перезарядки быстро уменьшается с ростом энергии, как показано на рис. 8.5.

Оценим сечение резонансной перезарядки $\sigma_{\text{сх}}$ на примере атома водорода при $v \ll v_1$.

Движение ядер можно рассматривать классически, так как их длина волны де Бройля мала из-за большой массы. Более того, движение ядер можно считать прямолинейным, даже если их энергия меньше энергии ионизации. Пусть ион пролетает со скоростью v на прицельном расстоянии b от неподвижного атома. Согласно законам квантовой механики, вероятность обнаружить атомарный электрон на расстоянии $r \sim b$ от атома мала, но не равна нулю, даже если r значительно больше радиуса орбиты Бора a_B . Вследствие этого атомарный электрон может оказаться в области притяжения иона. Этот эффект называется подбарьерным прохождением, так как электрону нужно пройти под барьером с высотой порядка энергии ионизации I (рис. 8.6). Вероятность подбарьерного просачивания на расстояние b оценивается как $w \approx \exp(-2\sqrt{2I/m_e} b/\hbar) = \exp(-2b/a_B)$. Оказавшись ближе к иону, чем к ядру атома, электрон захватывается на атомарную орбиту иона, а ион становится атомом.

Время, в течение которого два ядра находятся на минимальном расстоянии b друг от друга, примерно равно $\Delta t \approx b/v$, тогда как связанный электрон обращается вокруг ядра атома за время $\tau \approx a_B/v_1$, где $v_1 = \alpha c$. Следовательно, за время сближения ядер электрон $\Delta t/\tau$ раз может оказаться на стороне пролетающего иона и каждый раз с

вероятностью w захватиться на его орбиту. Таким образом, вероятность перезарядки по порядку величины равна

$$w\Delta t/\tau \approx bv_1/(a_B v) \exp(-2b/a_B). \quad (24)$$

Если формально $w\Delta t/\tau > 1$, то электрон много раз за время сближения иона с атомом успеет поменять «прописку» и в итоге с вероятностью $\frac{1}{2}$ остаться на орбите другого ядра. Заменяя левую часть уравнения (24) на $\frac{1}{2}$, найдём максимальное расстояние $b_{сх}$, на котором процесс обмена электроном между ядрами не задавлен потенциальным барьером: $b_{сх} \approx a_B \ln(v_1/v)$. Сечение резонансной перезарядки оценивается по формуле

$$\sigma_{сх} \approx \pi b_{сх}^2 \approx \pi a_B^2 \ln^2(v_1/v). \quad (25)$$

Более аккуратный анализ предсказывает, что в аргументе логарифма имеется дополнительный большой множитель порядка 100 [8, § 2.7].

8.7. Корональное равновесие

С учётом всех рассмотренных процессов ионизации и рекомбинации уравнение баланса для плотности электронов принимает следующий вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = k_{y,и} n_e n_a - k_{y,р} n_e^2 n_i + k_{ф,и} n_a - k_{ф,р} n_e n_i. \quad (26)$$

В лабораторных условиях излучение обычно не заперто в плазме, и поэтому плотность фотонов значительно меньше термодинамически равновесной, при которой третье и четвёртое слагаемые в правой части уравнения (26) равны друг другу. Таким образом, в прозрачной плазме $k_{ф,и} n_a \ll k_{ф,р} n_e n_i$, и третьим слагаемым можно пренебречь по сравнению с четвёртым.

В не очень плотной плазме можно также пренебречь тройной рекомбинацией по сравнению с фоторекомбинацией. Сравнение второго и четвёртого членов в уравнении (26) с учётом формул (11) и (17) показывает, что при $T_e \ll I$ это можно сделать, если

$$n_e \ll k_{ф,р}/k_{y,р} \approx 10^{18} (T_e/I)^4 \text{ [см}^{-3}\text{]}. \quad (27)$$

При выполнении условия (27) вторым слагаемым в уравнении (26) можно пренебречь. Тогда равновесная концентрация электронов и ионов определяется *формулой Эльверта* (G. Elwert, 1952 [85])

$$\alpha = n_i/n_a = k_{y,и}/k_{ф,р}. \quad (28)$$

Она получается из сравнения оставшихся (первого и последнего) слагаемых в правой части уравнения (26). Это так называемое

корональное равновесие. Оно осуществляется в солнечной короне. Степень ионизации в корональном равновесии не зависит от плотности плазмы.

Литература

Статья А. В. Елецкого и Б. М. Смирнова [86] в 1-м томе «Основ физики плазмы» в краткой, но ясной форме излагает основы элементарных процессов в плазме. Содержанию лекции соответствует § 1.

Обширный перечень элементарных процессов в низкотемпературной плазме с участием атомов, молекул, электронов, атомарных и молекулярных ионов имеется в § 4 «Введения в физику плазмы» Б. М. Смирнова [87], а простейшая теория некоторых процессов изложена в § 5.

Монографии «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений» Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [7, §§ 10, 11, 16, 17] и «Физика газового разряда» Ю. П. Райзера [8, гл. 2, 3, 5, 8] признаны «классикой жанра».

Теория фоторекомбинации и фотоионизации изложена в «Квантовой электродинамике» В. Б. Берестецкого, Е. М. Лифшица и Л. П. Питаевского [51, § 56].

Задачи

Задача 8.1. Найти дифференциальное сечение кулоновского рассеяния $d\sigma/d\varepsilon$ электрона с начальной энергией ε на первоначально неподвижном другом электроны в зависимости от величины переданной ему энергии ε .

►► Решение

Задача 8.2. Вычислить $k_{y,i}^{pr} = \langle \sigma_{y,i} v \rangle$ при $T_e \ll I$, усреднив сечение ионизации (4) по максвелловской функции распределения электронов.

►► Ответ

Задача 8.3. Выяснить условия, при которых ионизация ионным ударом несущественна.

►► Ответ

Задача 8.4. Вычислить константу скорости прямой тройной рекомбинации $k_{y,p}^{pr}$ непосредственно в основное состояние, минуя захват электрона на возбуждённые уровни.

►► Решение

Задача 8.5. Найти сечение фоторекомбинации.

►► Решение

Термоядерные реакции

**Физика ядерных реакций. Топливные циклы.
Кулоновский барьер. Критерий Лоусона.
Управляемый термоядерный синтез.**

9.1. Физика ядерных реакций

В Периодической системе Д. И. Менделеева химические элементы расположены в порядке возрастания числа протонов в ядрах атомов. Каждый следующий элемент имеет на один протон больше. Соответственно, электрический заряд его ядер больше, чем у предшествующего элемента, на величину элементарного заряда e . Химические свойства элементов определяются структурой электронной оболочки атомов, а та в конечном итоге фиксируется зарядом ядер, так как в электрически нейтральном атоме число отрицательно заряженных электронов в точности равно числу положительно заряженных протонов.

Помимо *протонов* ядра атомов содержат электрически нейтральные *нейтроны*. Число нейтронов в ядрах атомов одного и того же химического элемента варьируется в некоторых пределах вокруг среднего значения, которое при переходе к каждому следующему элементу в периодической таблице растёт несколько быстрее числа протонов Z в ядре. Ядра с одинаковым Z , но с разным числом нейтронов относят к разным *изотопам* химического элемента. Отдельный изотоп характеризуется *атомным весом* A , который, по определению, равен числу *нуклонов* (т. е. протонов и нейтронов) в ядре. Атомный вес почти не влияет на физические и химические свойства вещества, поэтому в химии атомным весом называют среднюю массу атомов всех изотопов химического элемента с учётом их распространённости в природе. В ядерной физике под атомным весом подразумевают число нуклонов в ядре. Наконец, следует пояснить, что в ядрах атомов нуклоны удерживаются ядерными силами. Компенсируя кулоновское расталкивание протонов, они обеспечивают стабильность ядер.

Масса ядра m с атомным номером Z и атомным весом A меньше суммы масс Z протонов и $(A - Z)$ нейтронов на величину *дефекта массы*

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m.$$

Массы протона m_p и нейтрона m_n приблизительно равны, отличаясь на величину до 10 раз меньшую, чем дефект массы в расчёте на один нуклон. Дефект массы возникает из-за того, что ядро находится в состоянии с меньшей энергией, чем составляющие его нуклоны, когда они не упакованы в ядро. *Энергия связи Δmc^2* , пропорциональная дефекту массы, варьируется от элемента к элементу и от изотопа к изотопу.

Если два лёгких ядра сливаются в одно ядро большего размера, дефект массы которого больше суммы дефектов масс прореагировавших ядер, соответствующая разность энергии связи высвобождается в виде кинетической энергии продуктов *реакции ядерного синтеза*. Для преодоления кулоновского отталкивания сливающиеся ядра должны иметь большую энергию (см. ниже), которая естественным образом достигается при нагреве плазмы до очень большой температуры. В связи с этим ядерные реакции синтеза часто называют *термоядерными реакциями*. Термоядерные реакции с выделением энергии являются *экзотермическими*. Существуют также *эндотермические реакции* синтеза, которые идут с поглощением энергии.

Похожая ситуация имеет место в *реакциях деления ядер*, когда тяжёлое ядро расщепляется на более лёгкие осколки. Если суммарная энергия связи осколков превышает энергию связи исходного ядра, она выделяется в виде кинетической энергии осколков, а реакция является экзотермической.

График энергии связи Δmc^2 в расчёте на один нуклон в зависимости от числа нуклонов A в ядре приведён на рис. 9.1. Для ядра *протия* ${}^1\text{H}$ с атомным весом $A = 1$ (водород-1), состоящего из одного протона p , энергия связи равна нулю. Затем она быстро увеличивается с ростом A , достигая широкого максимума на уровне 8,8 МэВ на один нуклон в районе железа ${}^{56}\text{Fe}$ и никеля ${}^{62}\text{Ni}$, и затем слегка уменьшается. Для самых тяжёлых ядер $\Delta mc^2/A \approx 7,5$ МэВ. Особенно стоит отметить высокое значение $\Delta mc^2/A$ для ядра ${}^4\text{He}$ (гелий-4), которое также называют α -частицей. Изотоп ${}^2\text{H}$ (водород-2), известный также как *дейтерий*, обозначают буквой D . Водород-3 ${}^3\text{H}$ называют *тритием* и обозначают буквой T . Существуют и более тяжёлые изотопы водорода (вплоть до ${}^6\text{H}$), но они очень неустойчивы и быстро распадаются на составные части.

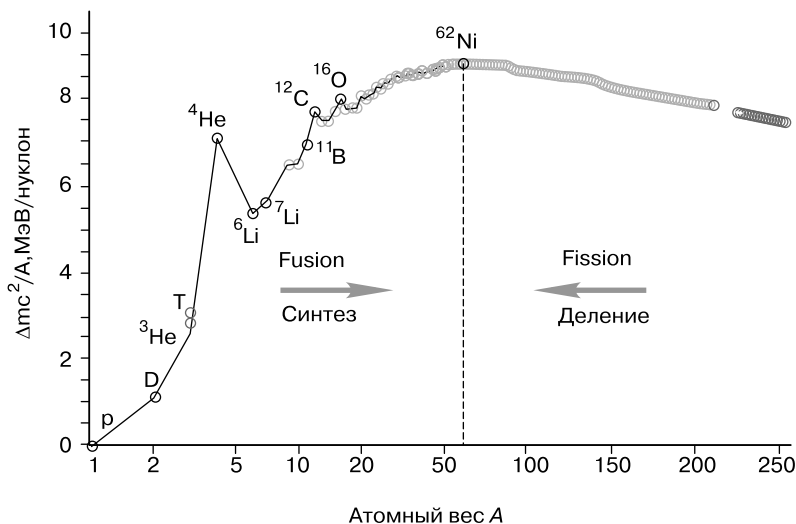


Рис. 9.1. Энергия связи ядер в расчёте на один нуклон в зависимости от атомного веса; шкала A логарифмическая в диапазоне 1–50 кэВ и линейная выше 50 кэВ; показаны стабильные и долгоживущие изотопы с временем жизни более 1 г.; в настоящее время известен 3181 изотоп, в том числе 256 стабильных изотопов и 47 изотопов с временем жизни более года

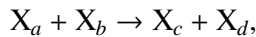
Реакции деления ядер элементов тяжелее железа, таких как уран ^{235}U или плутоний ^{239}Pu , используются в атомных реакторах для производства электроэнергии и в атомных бомбах. Реакции ядерного синтеза протекают в звёздах, где водород перерабатывается сначала в гелий, а затем в ещё более тяжёлые элементы.

Энергия, выделяемая в ядерных реакциях, значительно больше, нежели в химических реакциях, поскольку энергия связи, которая удерживает нуклоны в ядре, примерно в миллион раз больше, чем энергия, которая привязывает электроны к ядру. Например, при рекомбинации электрона на основной уровень атома водорода высвобождается энергия, равная энергии ионизации $I = 13,6 \text{ эВ}$, тогда как при слиянии ядра трития T с ядром дейтерия D выделяется $\Delta mc^2 = 17,6 \text{ МэВ}$. Если отвлечься от огромной разницы в порядке величин, то в остальном между ядерными и химическими реакциями имеется очевидная аналогия. Энергии ионизации можно сопоставить химический дефект масс I/c^2 . Это означает, что масса атома меньше суммы масс ядра и связанных электронов. Однако это уменьшение ничтожно даже по сравнению с массой электрона, тогда как ядерный дефект масс в максимуме приближается к 1 % массы ядра.

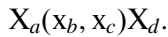
Факт существования дефекта масс обнаружил Фрэнсис Астон (Francis Aston). Он изобрёл масс-спектрометр, измерил массы многих изотопов и в 1919 г. предположил, что синтез изотопов водорода с образованием гелия должен сопровождаться выделением огромной энергии [88].

9.2. Топливные циклы

В большинстве реакций ядерного синтеза два ядра (X_a и X_b) сливаются, образуя более тяжёлое ядро (X_d) и лёгкую частицу (X_c). Такая реакция записывается как



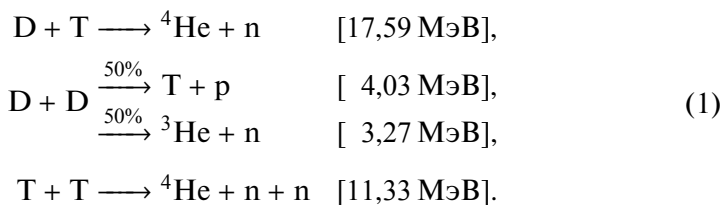
либо



Законы сохранения энергии и импульса запрещают слияние ядер с образованием только одного ядра без испускания второй частицы, но разрешают возникновение трёх частиц. Например, при слиянии двух ядер трития образуется α -частица и два нейтрона.

DT цикл

По свидетельству Л. А. Арцимовича [90], в конце 1950 г. А. Д. Сахаров и И. Е. Тамм сформулировали идею магнитного термоядерного реактора, работающего на смеси дейтерия и трития:



Похожие реакции протекают при взрыве водородной бомбы (рис. 9.2). Суммарная энергия $\mathcal{E}_{\text{fus}} = \Delta m c^2$, выделяемая в каждой реакции, указана в скобках в правой части схемы (1). В тех реакциях, где образуются две частицы, законы сохранения однозначно определяют энергию каждого продукта реакции (задача 9.1). Она распределяется обратно пропорционально массе частиц. Например, в реакции $T(d, n){}^4\text{He}$ нейтрон уносит энергию $\mathcal{E}_n = 14,1 \text{ МэВ}$ ($4/5$ от \mathcal{E}_{fus}), а α -частица — энергию $\mathcal{E}_{\text{ch}} = 3,5 \text{ МэВ}$ ($1/5$ от \mathcal{E}_{fus}). При большем числе продуктов, как в реакции $T(t, nn){}^4\text{He}$, можно указать диапазон энергий каждого продукта (задача 9.2).



Рис. 9.2. Взрыв первого термоядерного устройства Ivy Mike, осуществлённый США 31 октября 1952 г. на атолле Эниветок (Eniwetok) в Тихом океане; устройство, спроектированное по схеме Э. Теллера (Edward Teller) и С. Улама (Stanislaw Ulam), не было пригодно для боевого применения из-за больших размеров и криогенной системы охлаждения жидкого дейтерия, но было в 1000 раз мощнее атомной бомбы, сброшенной на Хиросиму; первая водородная бомба РДС-6с, испытанная в СССР 12 августа 1953 г. на Семипалатинском полигоне, соответствовала 30 «Хиросимам» и была спроектирована по схеме А. Д. Сахарова в виде чередующихся сферических слоёв термоядерного топлива и природного урана, окружённых химическим взрывчатým веществом; для увеличения доли сгоревшего дейтерия «слойка» была окружена оболочкой из природного урана, который при взрыве сжимал дейтерий, увеличивая скорость термоядерной реакции, и одновременно делился под действием быстрых нейтронов; эта «первая идея» — ионизационное обжатие дейтерия — была существенно дополнена В. Л. Гинзбургом «второй идеей», состоящей в использовании твёрдого дейтерида лития-6 [89]; всего в мире к сегодняшнему дню взорвано более 2000 ядерных и термоядерных зарядов, из них около 500 — в воздухе (фото United States Department of Energy)

В смеси дейтерия с тритием при энергии ядер менее 100 кэВ заметно быстрее других протекает реакция $D(t, n)^4\text{He}$.

Вероятности альтернативных каналов $D(d, p)T$ и $D(d, n)^3\text{He}$ реакции $D+D$ примерно одинаковы. Помимо этих двух основных, существуют и другие каналы, не указанные в (1). Так, при слиянии двух ядер дейтерия может образовываться основной изотоп гелия ^4He и фотон γ , но скорость реакции $D(d, \gamma)^4\text{He}$ на семь порядков меньше, чем $D(d, p)T$ или $D(d, n)^3\text{He}$ (задача 9.9). Продукты реакций вступают во вторичные реакции, порождая сложные цепочки (циклы) реакций.

Дейтерий был открыт в конце 1931 г. Гарольдом Уреем (Harold Urey) [91]. Вместе с другими сотрудниками Колумбийского университета из 5 литров сжиженного водорода он выделил 1 миллилитр жидкости и с помощью масс-спектрометра показал, что она содержит очень малое количество изотопа водорода с атомным весом 2. Тогда, за год до открытия нейтрона Джеймсом Чадвиком (James Chadwick), это вызвало шок в научном сообществе, хотя поисками тяжёлого водорода были заняты несколько групп исследователей.

Далее события развивались с поразительной быстротой и преимущественно в Кавендишской лаборатории Оксфордского университета, которой тогда руководил Эрнест Резерфорд (Ernest Rutherford).

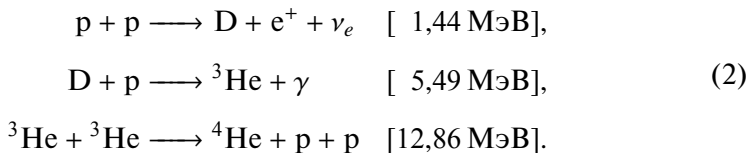
Ядерные реакции с участием изотопов водорода впервые наблюдали Джон Кокрофт (John Cockcroft) и Эрнест Уолтон (Ernest Walton) в 1932 г. [92, 93]. Они бомбардировали пучком протонов с энергией выше 100 кэВ образцы лития, окружённые сцинтиллятором, и предположительно обнаружили гелий в продуктах реакции. Это явление тогда было названо *трансмутацией ядер*.

Получив полмиллилитра тяжёлой воды, Марк Олифант (Markus Oliphant) и Поль Хартек (Paul Harteck) сообщили об открытии реакций синтеза в статье [94], опубликованной двумя годами позже. Они предположили, что наблюдаемое ими явление суть равновероятные реакции $D(d, p)T$ и $D(d, n)^3He$, хотя тритий и гелий-3 до того времени не были известны.

В лаборатории Резерфорда предполагали, что ядро трития нестабильно, но только в 1939 г. его радиоактивность окончательно была доказана Луисом Альварезом (Luis Alvarez) и Робертом Корногом (Robert Cornog) [95].

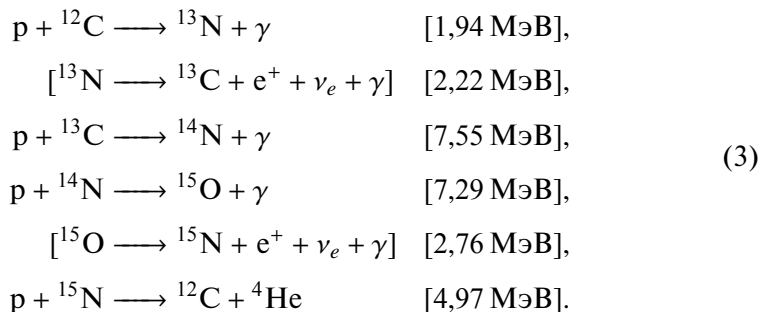
Астрофизические циклы

Излучая свет миллиарды лет, Солнце и другие звёзды черпают энергию из термоядерных реакций, перерабатывая водород в гелий. Имеются две основные цепочки реакций, и обе сопровождаются превращениями протонов в нейтроны с образованием нейтрино ν_e . В Солнце доминирует водородный (pp) цикл:



Наличие нейтрино ν_e и фотонов γ в продуктах реакций свидетельствует, что в синтез новых ядер вовлечено электро-слабое взаимодействие; следовательно, сечения этих реакций чрезвычайно малы. В более тяжёлых звёздах преобладает углеродный (CNO) цикл, в котором

углерод ^{12}C выступает в качестве катализатора (а не расходного материала):



В квадратных скобках в левой части указаны реакции бета-распада радиоактивных (неустойчивых) изотопов.

Гипотезу об энергии связи ядер как источнике излучения звёзд высказал Артур Эддингтон (Arthur Eddington) в 1920 г. [96] вслед за открытием Фрэнсиса Астона (п. 9.1). По прошествии почти ста лет частные подробности рассуждений Эддингтона кажутся наивными, но они были благожелательно восприняты его современниками, так как уже тогда было ясно, что никакие иные источники энергии не могут объяснить свечение звёзд на протяжении миллиардов лет. Предположение о ключевой роли pp-цикла в энергетике Солнца высказал фон Вейцзеккер (Ernst von Weizsäcker) в 1937 г. Через два года Ганс Бете (Hans Bethe) заложил основы теории CNO-цикла производства энергии в звёздах.

Анейтронные циклы

В реакции $\text{T}(d, n)^4\text{He}$ нейтроны уносят 80 % выделившейся энергии, так как $\varepsilon_n/\varepsilon_{\text{fus}} = 4/5$ (табл. 9.1). Взаимодействуя с элементами конструкции реактора, нейтроны образуют радиоактивные продукты во вторичных реакциях. Кроме того, нейтронное излучение вызывает смещение атомов в кристаллической решётке и ядерные реакции трансмутации, которые изменяют состав материалов. Основную роль здесь играют реакции (n, α) , которые приводят к появлению микропузырьков гелия, вызывая радиационное распухание материала. При больших дозах нейтронного облучения конструкционные материалы становятся хрупкими и теряют прочность. Если не будут найдены материалы, стойкие к нейтронному облучению, термоядерный реактор, работающий на смеси дейтерия и трития, будет производить радиоактивные отходы в большом количестве, как и реактор деления. Однако состав отходов будет различным.

Таблица 9.1

Коэффициенты активации для различных видов ядерного топлива

Топливо	Z	$\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$, МэВ	$\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle$, МэВ	$\langle \mathcal{E}_n \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$
DT	1 + 1	17,6	3,5	0,80
DD	1 + 1	14,4	8,9	0,38
D ³ He	1 + 2	20,0	18,9	0,05
p ¹¹ B	1 + 5	8,7	8,7	~ 0,002

В реакторе деления каждый акт ядерного распада сопровождается эмиссией примерно двух нейтронов и выделением энергии около 200 МэВ, преимущественно в виде кинетической энергии ядерных осколков деления. Основная доля остаточной активности содержится в радиоактивных отходах, а наведённая нейтронами радиационная активность элементов конструкции представляет относительно меньшую опасность.

В термоядерном DT-реакторе складывается иная ситуация. Радиоактивное отработанное топливо теперь отсутствует, но при равной мощности реактора активация элементов конструкции будет существенно выше по двум причинам. Во-первых, в одном акте ядерного синтеза выделяется энергия примерно в 10 раз меньше, чем в одном акте ядерного распада, поэтому в DT-реакторе поток нейтронов будет больше, чем в реакторе деления. Во-вторых, термоядерные нейтроны имеют существенно бóльшую энергию, чем нейтроны деления, поэтому каждый термоядерный нейтрон создаёт, вообще говоря, более значительную активацию. И всё-таки, по экспертным оценкам, суммарный экологический ущерб от DT-реактора будет меньше, чем от реактора деления, так как радиоактивность термоядерного реактора снижается до безопасного уровня за сравнительно небольшой срок — менее чем за 100 лет. Тем не менее это не решает проблему радиоактивного заражения по существу, поэтому имеет смысл рассмотреть другие реакции синтеза, где нейтроны производятся в меньшем количестве.

Нейтроны не возникают в реакции синтеза дейтерия с гелием-3:



Однако в смеси D и ³He нейтроны образуются в цепочках реакций, начинающихся с D(d, p)T и D(d, n)³He. Более «чистой» является смесь бора-11 и протия. В реакции между ними образуются три α-частицы:



С учётом всех других реакций, возможных в этой смеси, нейтроны уносят всего 0,2% выделившейся энергии [97], — меньше, чем при использовании любого другого вида ядерного топлива, представленного в табл. 9.1. В этой таблице приведены значения полной энергии $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$, энергии заряженных продуктов реакции $\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle$ и коэффициента активации $\langle \mathcal{E}_n \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle = \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} - \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$, рассчитанные с учётом вторичных реакций топливных циклов. В смеси дейтерия и трития почти все нейтроны возникают в первичной реакции $T(d, n)^4\text{He}$, поскольку сечения реакций $T(t, nn)^4\text{He}$ или $D(d, n)^3\text{He}$ существенно меньше; поэтому средние значения $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle$ и $\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle$ почти равны величине \mathcal{E}_{fus} и \mathcal{E}_{ch} в реакции $T(d, n)^4\text{He}$. При использовании чистого дейтерия или смеси дейтерия с гелием-3 приближённый результат усреднения несложно воспроизвести, используя данные из схем (1) и (4) (задачи 9.3 и 9.4).

Реакции, в которых нейтроны уносят не более процента выделившейся энергии, называют *анейтронными* или *безнейтронными*. Под это определение подходит смесь бора-11 и водорода-1, но и смесь дейтерия с гелием-3 можно считать анейтронной. Далее мы увидим, что для анейтронных реакций требуются существенно более высокая температура, чем для реакции дейтерия с тритием, а реактор при существующих технологических ограничениях должен иметь существенно большие размеры.

Термоядерное топливо

Протий p , первый изотоп водорода ^1H , является основным топливом природного термоядерного реактора в центре Солнца. Из-за очень малого сечения реакции $p(p, e^+ \nu_e)D$ попытки воспроизвести в чистом виде солнечный реактор на Земле обречены на провал. Запасы протия на Земле имеют гигантские размеры, но, как говорится, «видит око, да зуб неймёт».

Дейтерий D , второй изотоп водорода ^2H , как и основной изотоп ^1H , стабилен. Он содержится в обычной воде в виде молекул *полутяжёлой воды* HDO , где один атом протия замещён атомом дейтерия. Промышленность производит диоксид дейтерия D_2O , более известный под названием *тяжёлая вода*. В морской воде на 3 200 молекул H_2O приходится всего одна молекула HDO , что составляет 1 атом дейтерия на 6 400 атомов протия, но энергия, которую можно извлечь из литра морской воды, если выделить весь дейтерий и «сжечь» его в термоядерном реакторе, минимум в 200 раз больше теплотворной способности литра бензина (задача 9.5).

Тритий Т, третий изотоп водорода ^3H , бета-радиоактивен с периодом полураспада 12,32 г. Он расщепляется на гелий-3, электрон и антинейтрино в реакции



поэтому на Земле нет месторождений трития. Промышленный тритий получают, облучая литий быстрыми нейтронами в ядерных реакторах деления:



Образовавшийся медленный нейтрон может прореагировать с другим природным изотопом лития:



В результате получается положительный выход энергии, а на один быстрый нейтрон выходит более одного ядра трития.

Термоядерный реактор, работающий на смеси дейтерия с тритием, будет потреблять дейтерий и литий, а производить инертный газ гелий. Для работы реактора необходимо очень небольшое количество лития и дейтерия. Например, реактор с тепловой мощностью 1 ГВт сжигает около 200 кг дейтерия и 650 кг лития в год (задача 9.6).

Если предположить, что все термоядерные электростанции будут иметь суммарную мощность 10 ТВт — примерно в 5 раз больше, чем сегодня производят все электростанции Земли,¹⁾ то потребление дейтерия и лития составит всего 2 000 и 6 500 тонн в год соответственно. Ресурсы такого типа реакторов ограничены запасами лития. Разведанные рудные запасы лития составляют 24 млн тонн. Этих запасов должно хватить на тысячу лет. Кроме того, литий содержится в морской воде в количестве, превышающем в тысячи раз разведанные рудные запасы (задача 9.7).

Запасы энергии дейтерия в воде мирового океана практически безграничны. При нынешнем уровне производства электроэнергии жителям нашей планеты их хватило бы на миллиарды лет (задача 9.7). Для сравнения можно указать, что Солнце превратится в звезду красный гигант через 5 миллиардов лет, поглотив при раздувании нашу

¹⁾Интересно, что такую мощность имеют некоторые фемтосекундные лазеры.

планету.¹⁾ Мировое производство дейтерия уже сейчас составляет десятки тысяч тонн в год. Однако создание термоядерного реактора, работающего на чистом дейтерии, при современном уровне развития технологий если и возможно, то заведомо не оправдано по экономическим соображениям.

На Земле изотоп ^3He почти отсутствует: его запасы не превышают 1 тонны. Однако на поверхности Луны гелий-3 обнаружен в значительном количестве. Там его запасы оцениваются в размере от 0,5 до 10 млн. тонн. Кроме того, гелий-3 может производиться в реакторе, работающем на чистом дейтерии, существенным образом улучшая энергетический баланс этого реактора (задача 9.3).

9.3. Кулоновский барьер

Чтобы соединить два ядра с атомным весом A_a и A_b , их нужно сблизить на расстояние

$$r_n \approx 1,44 \times 10^{-13} (A_a^{1/3} + A_b^{1/3}) \text{ [см]},$$

примерно равное сумме радиусов ядер. На меньшем расстоянии начинают действовать ядерные силы, притягивающие нуклоны друг к другу. На большем расстоянии сближению ядер препятствует сила кулоновского отталкивания положительно заряженных ядер, создавая *кулоновский барьер*.

В рамках классической физики для преодоления кулоновского барьера (рис. 9.3) сближающиеся ядра должны были бы иметь кинетическую энергию больше его высоты

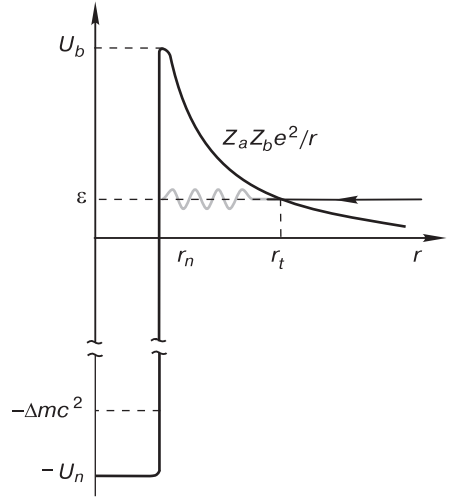
$$U_b = \frac{Z_a Z_b e^2}{r_n} \approx \frac{Z_a Z_b}{A_a^{1/3} + A_b^{1/3}} \text{ [МэВ]}.$$

Для изотопов водорода ($Z_{a,b} = 1$, $A_{a,b} = 1 \div 3$) такая энергия соответствует температуре порядка четырёх—шести миллиардов градусов ($0,4 \div 0,5$ МэВ). Ещё более высокая температура требуется для синтеза с участием более тяжёлых ядер. Однако даже в центре звёзд температура плазмы не превышает нескольких десятков миллионов градусов (нескольких кэВ).

Согласно квантовой теории, синтез возможен при любой энергии сталкивающихся ядер из-за эффекта туннельного перехода под потенциальным барьером, открытого Георгием Гамовым (George Gamow,

¹⁾ Глобальные катаклизмы, приводившие в прошлом почти к полному вымиранию животных и растений на Земле, случаются ещё чаще — примерно раз в 100–200 миллионов лет. В результате последней глобальной катастрофы вымерли динозавры.

Рис. 9.3. Потенциальная энергия взаимодействия ядер в зависимости от расстояния между ними; отмечены кулоновский барьер U_b , потенциальная яма $-U_n$, классическая точка отражения r_t и радиус сильного взаимодействия r_n ; если энергия относительного движения меньше высоты кулоновского барьера, $\varepsilon < U_b$, сталкивающиеся ядра с некоторой вероятностью соединяются, проходя под потенциальным барьером благодаря квантовому эффекту; синтезированное ядро переходит на квантовый уровень с отрицательной энергией $-\Delta mc^2$, при этом избыточная энергия $\varepsilon + \Delta mc^2$ выделяется в виде кинетической энергии продуктов реакции



1928). Однако сечение реакции экспоненциально мало, если энергия относительного движения ядер ε в системе центра масс мала по сравнению с энергией Гамова G :

$$\sigma \sim \lambda_{ab}^2 \exp(-\sqrt{G/\varepsilon}). \quad (7)$$

Для пары ядер с массами m_a, m_b и относительной скоростью движения $v = |v_a - v_b|$ энергия относительного движения $\varepsilon = \frac{1}{2} m_{ab} v^2$ пропорциональна приведённой массе $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$, $\lambda_{ab} = \hbar / (m_{ab} v)$ имеет смысл длины волны приведённой частицы, а энергия Гамова

$$G = 2\pi^2 m_{ab} e_a^2 e_b^2 / \hbar^2$$

с точностью до численного коэффициента совпадает с энергией ионизации для приведённой частицы в кулоновском поле (задача 9.8).

Сечения ядерных реакций принято измерять в барнах: $1 \text{ бн} = 10^{-24} \text{ см}^2$. Величины сечений некоторых реакций ядерного синтеза приведены в табл. 9.2 при энергии 10 кэВ и 100 кэВ в системе центра масс; здесь указаны также максимальное сечение σ_{max} и энергия ε_{max} , при которой сечение максимально; в скобках приведены результаты расчётов в тех случаях, когда экспериментальные данные отсутствуют. Как видно из данных, приведённых в таблице, максимум сечения реакции $T(d, n)^4\text{He}$ на порядок больше значения $\pi r_n^2 \approx 0,5 \text{ бн}$, которое можно было бы ожидать из простой оценки по величине радиуса действия r_n ядерных сил. Такая аномалия связана с тем, что реакция $T(d, n)^4\text{He}$ носит резонансный характер, так как слияние ядер дейтерия и трития происходит через образование долгоживущего

Таблица 9.2

Сечение некоторых реакций ядерного синтеза

Реакция	$\sigma_{10 \text{ кэВ}}$, бн	$\sigma_{100 \text{ кэВ}}$, бн	σ_{max} , бн	ε_{max} , кэВ
$T(d, n)^4\text{He}$	$2,7 \times 10^{-2}$	3,4	5,07	655
$D(d, p)T$	$2,8 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-2}$	0,090	1613
$D(d, n)^3\text{He}$	$2,8 \times 10^{-4}$	$3,7 \times 10^{-2}$	0,105	1109
$T(t, nn)^4\text{He}$	$7,9 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-2}$	0,16	994
$^3\text{He}(d, p)^4\text{He}$	$2,2 \times 10^{-7}$	$1,0 \times 10^{-1}$	0,82	262
$^6\text{Li}(p, ^3\text{He})^4\text{He}$	(6×10^{-10})	$2,8 \times 10^{-3}$	0,21	1800
$^{11}\text{B}(p, \alpha\alpha)^4\text{He}$	$(4,6 \times 10^{-17})$	$4,38 \times 10^{-4}$	0,8	573
$p(p, e^+ \nu_e)D$	$(3,6 \times 10^{-26})$	$(4,4 \times 10^{-25})$		
$^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$	$(1,9 \times 10^{-26})$	$1,1 \times 10^{-10}$	0,00012	425

(метастабильного) состояния. Резонансной также является реакция $^3\text{He}(d, p)^4\text{He}$, но максимум её сечения смещён в сторону существенно большей энергии, как видно из рис. 9.4. При энергии ε до 200 кэВ сечение реакции $T(d, n)^4\text{He}$ значительно больше сечений любых других реакций ядерного синтеза.

Реакции pp цикла в звёздах, сопровождающиеся превращением протона в нейтрон, идут за счёт слабого взаимодействия. Их сечения меньше на 20 с лишним порядков.

9.4. Параметры термоядерных реакций

Число событий реакции синтеза $X_a(x_b, x_c)X_d$ в единице объёма за единицу времени выражается через *константу скорости реакции* $\langle \sigma_{ab} v \rangle$ так же, как в любом элементарном процессе (лекция 8), где участвуют два реагента, a и b :

$$\left. \frac{\partial n_c}{\partial t} \right|_{\text{fus}} = \left. \frac{\partial n_d}{\partial t} \right|_{\text{fus}} = \langle \sigma_{ab} v \rangle \frac{n_a n_b}{1 + \delta_{ab}}. \quad (8)$$

Здесь $v = |v_a - v_b|$ — относительная скорость реагирующих ядер, а угловые скобки означают усреднение по функциям распределения обоих реагентов (задача 9.10). Если оба ядра принадлежат к одному сорту ($a = b$), как в реакции $D + D$, произведение $n_a n_b$ нужно поделить на 2, чтобы не подсчитывать дважды одну и ту же пару частиц. В формуле (8) это сделано при помощи множителя $1/(1 + \delta_{ab})$, где символ Кронекера δ_{ab} равен единице, если $a = b$, или нулю, если $a \neq b$.

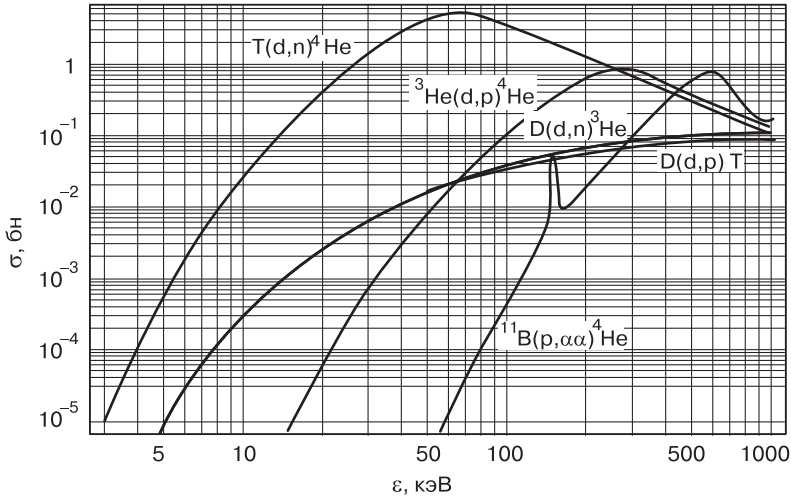


Рис. 9.4. Сечения некоторых реакций ядерного синтеза в зависимости от энергии в системе центра масс [98]

Если функция распределения реагентов по скоростям является максвелловской и если температура не превышает нескольких десятков килоэлектронвольт, основной вклад в константу реакции $\langle \sigma_{ab} v \rangle$ вносят надтепловые частицы с энергией, в несколько раз превышающей температуру. Это связано с тем, что сечение ядерных реакций синтеза в данной области энергий является быстро растущей функцией энергии. Графики зависимости $\langle \sigma_{ab} v \rangle$ от $\varepsilon = \frac{1}{2} m_{ab} v^2$ для некоторых реакций приведены на рис. 9.5.

Реакции ядерного синтеза не имеют порога в точном смысле этого слова, но из-за малости сечений необходимое для практических применений число актов синтеза в единицу времени может быть получено лишь при достаточно высоких температурах в сотни миллионов градусов (десятки кэВ). При более низких температурах требуется сжатие рабочего вещества до огромных плотностей, превышающих плотность твёрдого тела, чтобы обеспечить ту же интенсивность реакции синтеза.

Второй вариант, с высокой плотностью плазмы, реализуется в ядрах звёзд. В центре Солнца плотность достигает 160 г/см^3 ($n_{\text{H}} \approx 6,6 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$) при относительно низкой температуре $1,6 \times 10^7 \text{ К}$ (1,5 кэВ). Давление в центре Солнца в 3×10^{11} больше атмосферного. Такое давление невозможно получить в наземных устройствах стационарного действия, но развитие техники мощных лазеров и

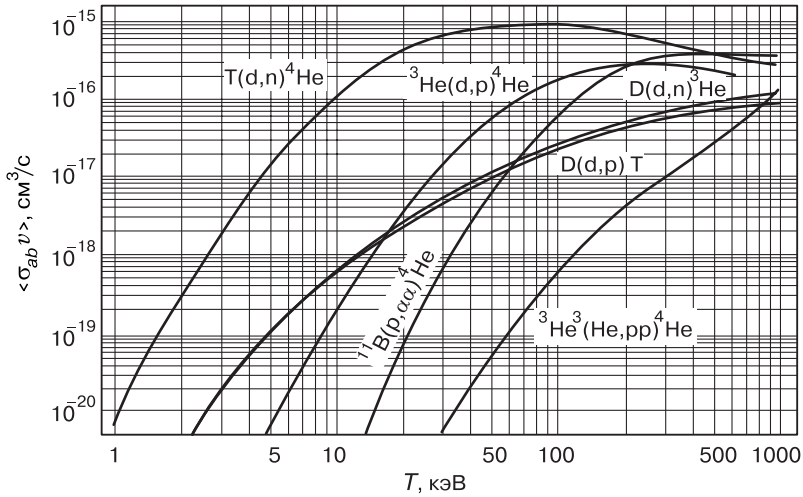


Рис. 9.5. Скорости некоторых реакций ядерного синтеза [98]

генераторов пучков заряженных частиц в принципе делает возможным импульсное сжатие и нагрев небольших твердотельных мишеней до состояния термоядерного горения. В этом состоит идея *инерциального термоядерного синтеза*.

Первый вариант, с высокой температурой плазмы при относительно низкой плотности, закладывают в проекты магнитного термоядерного синтеза, основанного на магнитном удержании плазмы. Чтобы успешно конкурировать с апробированными технологиями производства электрической энергии, термоядерный реактор должен иметь высокую удельную мощность.

Удельная мощность термоядерной реакции, т. е. мощность энерговыделения в расчёте на единицу объёма, получается умножением числа актов реакции синтеза (8) в единице объёма за единицу времени на энергию продуктов реакции \mathcal{E}_{fus} :

$$P_{\text{fus}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b. \tag{9}$$

Часть этой мощности

$$P_{\text{ch}} = \mathcal{E}_{\text{ch}} \frac{\langle \sigma_{ab} v \rangle}{1 + \delta_{ab}} n_a n_b, \tag{10}$$

выделяемая в виде кинетической энергии заряженных частиц \mathcal{E}_{ch} , естественным образом может быть использована для нагрева реагентов и реализации схем *термоядерного реактора* с самоподдерживающейся термоядерной реакцией. Например, если для удержания плазмы используется магнитное поле, то оно же удерживает в плазме и

заряженные продукты реакции, которые нагревают плазму, компенсируя потери энергии с излучением или выносом частиц плазмы на внутреннюю стенку реактора.

При заданной плотности ионов плазмы $n = n_a + n_b$ мощность реакции ядерного синтеза максимальна при равной доле реагентов, когда $n_a = n_b = \frac{1}{2}n$. Следовательно, максимальная (при заданной плотности) удельная мощность реакции ядерного синтеза вычисляется по формуле

$$P_{\text{fus}}^{(n)} = \frac{1}{4} (1 + \delta_{ab}) \mathcal{E}_{\text{fus}} \langle \sigma_{ab} v \rangle n^2, \quad (11)$$

где множитель $(1 + \delta_{ab})$ добавлен, чтобы правильно учесть случай $a = b$, когда в реакции синтеза участвуют ядра одного сорта. Мощность, выделяемая в виде заряженных частиц, получается отсюда при замене \mathcal{E}_{fus} на \mathcal{E}_{ch} .

В схемах термоядерного реактора с магнитным удержанием плазмы достижение предельных параметров упирается в ограничение по давлению плазмы p , которое не может превышать давление магнитного поля $B^2/(8\pi)$. Если в реакции синтеза участвуют ядра с зарядами Z_a и Z_b , то при заданном давлении $p = (1 + Z_a)n_a T + (1 + Z_b)n_b T$ максимум удельной мощности достигается при

$$n_a = \frac{p/2T}{1 + Z_a} = \frac{1 + Z_b}{2 + Z_a + Z_b} n, \quad n_b = \frac{p/2T}{1 + Z_b} = \frac{1 + Z_a}{2 + Z_a + Z_b} n$$

(задача 9.16). Например, для реакции бора-11 ($Z_a = 5$) с водородом-1 ($Z_b = 1$) плотность бора должна быть в 3 раза меньше плотности водорода. Подставляя произведение $n_a n_b$ в формулу для удельной мощности (9), его нужно умножить на $(1 + \delta_{ab})^2$, дабы формально учесть случай, когда в реакцию вступают ядра одного сорта:

$$P_{\text{fus}}^{(p)} = \frac{(1 + Z_a)(1 + Z_b)}{(2 + Z_a + Z_b)^2} \mathcal{E}_{\text{fus}} (1 + \delta_{ab}) \langle \sigma_{ab} v \rangle n^2. \quad (12)$$

При $Z_a = Z_b$ формулы (11) и (12) совпадают; в иных случаях $P_{\text{fus}}^{(n)}$ и $P_{\text{fus}}^{(p)}$ могут различаться в разы. Этот факт иллюстрирует эффект простейшей оптимизации термоядерного реактора. Если в результате подобной «игры с параметрами» удельная мощность может быть удвоена без существенного изменения конструкции реактора, то цена производимой электроэнергии почти наверняка уменьшится наполовину.

Ближайший к нам природный термоядерный реактор — Солнце — в этом смысле устроен очень неэффективно. Удельная мощность в нём даже меньше, чем в теле человека (задача 9.13). На Земле нужны более эффективные устройства. Ориентиром могут служить существующие

атомные реакторы, использующие реакцию деления тяжёлых ядер под действием медленных нейтронов, где удельная мощность составляет 100 Вт/см^3 .

9.5. Зажигание термоядерной реакции

Если P_{ch} превысит мощность энергетических потерь из плазмы P_{out} , для поддержания стационарного режима работы реактора не потребуются внешние источники нагрева плазмы после того, как произведено *зажигание* термоядерной реакции. В качестве промежуточного ориентира на заре термоядерных исследований была поставлена цель достижения положительного баланса термоядерной реакции, когда полная мощность P_{fus} больше потерь энергии из плазмы P_{out} в реакции $\text{T(d, n)}^4\text{He}$, имеющей самое большое сечение при энергии до 200 кэВ. Вводя коэффициент усиления

$$Q = P_{\text{fus}}/P_{\text{out}}, \quad (13)$$

можно сказать, что положительному балансу соответствует условие $Q > 1$, а зажиганию — условие $Q > \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle$.

В смеси дейтерия с тритием для зажигания необходимо $Q > 5$, а в смеси бора-11 с водородом-1 достаточно $Q > 1$, но это вовсе не означает, что реакцию $^{11}\text{B(p, } \alpha\alpha)^4\text{He}$ проще осуществить. В реакторах с магнитным удержанием зажигание этой реакции вряд ли возможно из-за огромных потерь на тормозное излучение, а удельная мощность энерговыделения при заданном ограничении на давление плазмы в 2 100 раз меньше, чем в смеси дейтерия с тритием (задача 9.15).

Потери на излучение

Для термоядерного синтеза нужны только ядра, но электроны неизбежно должны присутствовать в системе, чтобы нейтрализовать электрический заряд, образуя таким образом квазинейтральную плазму. Электроны в термоядерном реакторе имеют температуру, сравнимую с температурой ионов или даже больше её.¹⁾ При столкновениях с ионами они непрерывно испускают тормозное излучение. Солнце и другие звёзды непрозрачны для излучения, но в земных устройствах плазма имеет слишком малые размеры по сравнению с длиной пробега тормозного излучения. Если иные виды потерь энергии из

¹⁾ Быстрые заряженные продукты ядерных реакций при торможении в плазме передают свою энергию преимущественно электронам (задача 6.12).

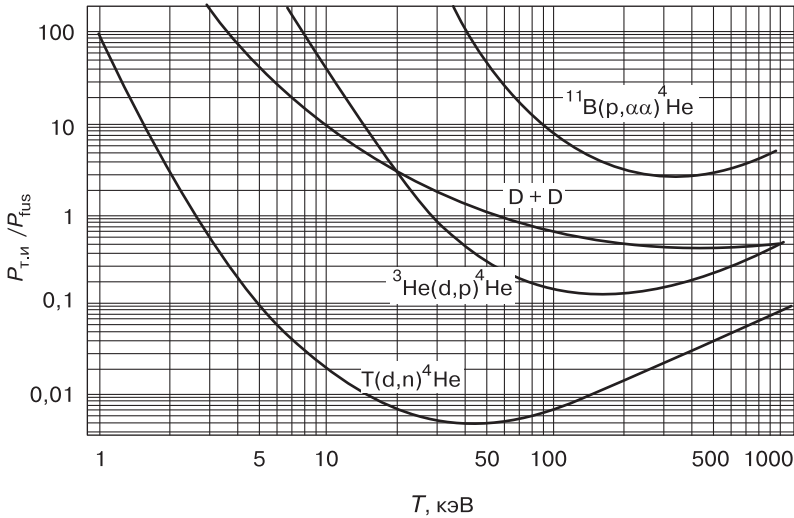


Рис. 9.6. Мощность тормозного излучения по отношению к термоядерной мощности для некоторых реакций ядерного синтеза при равной доле ядер разных сортов, участвующих в реакции

плазмы гипотетически можно устранить, увеличивая размеры плазмы, то тормозное излучение крайне сложно отразить обратно в плазму или напрямую конвертировать в электрическую энергию, поэтому отношение мощности тормозного излучения $P_{т.и}$ к мощности термоядерной реакции P_{fus} является важным контрольным параметром.

Поскольку и $P_{т.и}$, и P_{fus} пропорциональны n^2 , отношение $P_{т.и}/P_{fus}$ зависит только от температуры. Графики $P_{т.и}/P_{fus}$ для некоторых реакций показаны на рис. 9.6, а в табл. 9.3 указаны минимальные значения $P_{т.и}/P_{fus}$, температура T_{min} , при которой достигается минимум, а также минимальная температура $T_{т.и}$, при которой $P_{т.и} = P_{fus}$. Расчёты выполнены в предположении, что топливная смесь содержит равные доли реагентов, т. е. ядер, вступающих в первичную реакцию

Таблица 9.3

Параметры тормозного излучения для различных топливных циклов

Топливо	$T_{т.и}$, кэВ	T_{min} , кэВ	$\min(P_{т.и}/P_{fus})$
DT	2,7	39,4	$5,3 \times 10^{-3}$
DD	57,7	553	$4,1 \times 10^{-1}$
D^3He	29,0	152	$1,4 \times 10^{-1}$
$p^{11}B$		295	2,6

синтеза, при этом вклад вторичных реакций не учитывался. В смеси дейтерия и трития условие

$$P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}} < 1$$

выполняется при $T > 2,7 \text{ кэВ}$, а при $T = 10 \text{ кэВ}$ мощность тормозного излучения $P_{\text{т.и}}$ не превышает 2% от P_{fus} . В смеси бора-11 и водорода мощность тормозного излучения превышает термоядерный выход при любой температуре.

Если электрические заряды ядер не равны, как в смеси гелия-3 с дейтерием или бора-11 с протием, потери на тормозное излучение по отношению к мощности термоядерной реакции можно понизить, уменьшив долю реагента с большим зарядом, т. е. гелия-3 и бора-11, соответственно. Однако достигаемый при этом эффект трудно однозначно признать положительным. Например, в смеси бора и протия относительные потери на излучение можно снизить в 3 раза (приблизив $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$ к единице), если уменьшить долю бора до 9% (задача 9.17), но за такую «оптимизацию» придётся заплатить снижением удельной мощности термоядерной реакции.

В действующем термоядерном реакторе из-за накопления заряженных продуктов реакции отношение $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$ будет больше расчётного, поскольку мощность тормозных потерь быстро увеличивается с ростом среднего заряда ионов плазмы. Чтобы минимизировать последствия этого эффекта, необходимо обеспечить быстрое удаление заряженных продуктов реакции, после того как они отдадут плазме большую часть своей энергии.

Критерий Лоусона

В реальном термоядерном реакторе невозможно исключить потери энергии, связанные с уходом частиц из плазмы. Невозможно хотя бы потому, что часть термоядерной мощности нужно передавать электрическому генератору и одновременно удалять продукты реакции. Если время жизни отдельной частицы в плазме равно τ , то мощность потерь из единицы объёма составляет

$$P_{\text{out}} = \frac{3}{2} T [(1 + Z_a)n_a + (1 + Z_b)n_b] (1 + \delta_{ab})^{-1} / \tau, \quad (14)$$

так как каждый ион и каждый электрон, покидающий плазму, выносит энергию $\frac{3}{2} T$, а на каждый ион сорта a или b приходится, соответственно, Z_a или Z_b электронов; множитель $(1 + \delta_{ab})^{-1}$ вновь добавлен, чтобы правильно учесть случай, когда ионы a или b

тождественны. Сравнение удельной мощности (10) термоядерной реакции с мощностью потерь показывает, что положительный баланс $P_{\text{fus}} > P_{\text{out}}$ достигается, если:

$$\tau > \frac{3T}{2\varepsilon_{\text{fus}}\langle\sigma_{ab}v\rangle} \left[\frac{1+Z_a}{n_b} + \frac{1+Z_b}{n_a} \right].$$

Простое упражнение на поиск экстремума показывает, что при заданной плотности ядер $n_a + n_b$ правая сторона этого неравенства минимальна, если $n_a/n_b = \sqrt{1+Z_b}/\sqrt{1+Z_a}$. Подстановка

$$n_a = \frac{\sqrt{1+Z_b}}{\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b}} n, \quad n_b = \frac{\sqrt{1+Z_a}}{\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b}} n,$$

преобразует последнее условие к неравенству

$$n\tau > \frac{3T}{2\varepsilon_{\text{fus}}\langle\sigma_{ab}v\rangle} \frac{(\sqrt{1+Z_a} + \sqrt{1+Z_b})^2}{1 + \delta_{ab}} \equiv L(T), \quad (15)$$

где множитель $(1 + \delta_{ab})^{-1}$ вновь добавлен, чтобы правильно описать случай $a = b$. Функция $L(T)$ в правой части этого неравенства имеет минимум при некоторой температуре, так как при уменьшении T константа реакции $\langle\sigma_{ab}v\rangle$ быстро уменьшается, а при большой температуре растёт числитель. Как видно из графика функции $L(T)$ на рис. 9.7, для смеси DT её минимальное значение $L_{\text{min}} = 3 \times 10^{13} \text{ с/см}^3$ достигается при температуре $T_{\text{min}} = 26,5 \text{ кэВ}$. Снижение температуры плазмы относительно этого значения в $2 \div 3$ раза может иметь очень важное практическое значение, хотя при этом придётся увеличить $n\tau$. Обычно в качестве ориентира выбирают температуру

$$T = 10 \text{ кэВ}, \quad (16)$$

при которой $L = 0,6 \times 10^{14} \text{ с/см}^3$. Тогда условие (15) с некоторым запасом приводится к неравенству

$$n\tau > 10^{14} \text{ с/см}^3, \quad (17)$$

которое в совокупности с (16) называют *критерием Лоусона* (John Lawson, 1955). Для других видов термоядерного топлива критериальные параметры приведены в табл. 9.4.

Нужно понимать условность проведённых расчётов. В них не был принят во внимание КПД преобразования тепловой энергии в электрическую и предполагалось, что все 100 % термоядерной мощности можно преобразовать в электрический ток. Нужно также отметить, что если энергия теряется из плазмы быстрее, чем частицы, то в критерии Лоусона должно стоять время удержания энергии τ_E . Наконец, чтобы получить условие зажигания термоядерной реакции, в приведённом выводе нужно заменить ε_{fus} на ε_{ch} , что увеличит

Таблица 9.4

Выбор параметров УТС

Топливо	Критерий Лоусона		Тройное произведение	
	$T, \text{кэВ}$	$n\tau, \text{см}^{-3} \text{с}$	$T, \text{кэВ}$	$n\tau, \text{см}^{-3} \text{с}$
DT	26,5	$3,1 \times 10^{13}$	13,5	$4,1 \times 10^{13}$
DD	107,7	$3,6 \times 10^{15}$	15,6	$8,3 \times 10^{15}$
D^3He	102,1	$5,0 \times 10^{14}$	54,5	$6,9 \times 10^{14}$
p^{11}B	218,7	$2,0 \times 10^{15}$	137,1	$2,7 \times 10^{15}$

минимальное значение $n\tau$ для смеси дейтерия и трития в 5 раз (если по-прежнему не учитывать конечный КПД). После зажигания реакция синтеза может идти без применения внешних источников нагрева плазмы — нужно только обеспечить удаление «остывших» продуктов реакции синтеза и замещение израсходованного «горючего» материала.

Интересна история появления критерия Лоусона. Как вспоминал сам Джон Лоусон, вскоре после присоединения к секретной британской программе термоядерного синтеза он, будучи молодым инженером, спонтанно написал короткий доклад [99], где изложил условия осуществления управляемой термоядерной реакции, главным образом, для того чтобы умерить чрезмерные ожидания своих коллег. В августе 1956 г. (когда доклад Лоусона был ещё засекречен), условия осуществления управляемой термоядерной реакции были изложены Л. А. Арцимовичем на Международной конференции астрономического союза [90], причём в форме, более близкой к современной трактовке. Доклад Лоусона был спешно рассекречен и опубликован в январе 1957 г. в [100]. Ясно, что в какой-то форме условия зажигания термоядерной реакции были известны и другим физикам, работавшим в лабораториях

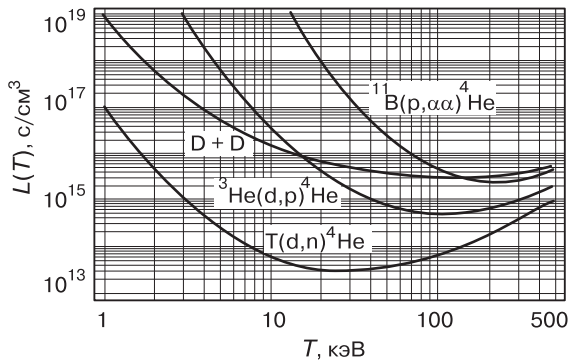


Рис. 9.7. Выбор параметров УТС по критерию Лоусона

разных стран. Однако термин «критерий Лоусона» закрепился в научной литературе.

Тройное произведение

При выводе критерия Лоусона для смеси дейтерия и трития температура была «вручную» подправлена более чем в 2 раза в сторону уменьшения. Интуитивные соображения, на основании которых это было сделано, легко формализовать, полагая, что достижение предельных параметров реактора упирается в ограничение по давлению плазмы, а не плотности. Как уже было сказано, в реакторе с магнитным удержанием плазмы её давление ограничено сверху давлением магнитного поля $B^2/(8\pi)$, а вот плотность плазмы можно варьировать в некоторых пределах, поддерживая давление плазмы на предельном уровне за счёт соответствующего изменения температуры. Это означает, что следует отыскивать минимум отношения $P_{\text{out}}/P_{\text{fus}}$ при постоянном значении $p = (1 + Z_a)n_aT + (1 + Z_b)n_bT$, а не n . Повторяя рассуждения, приведшие к критерию Лоусона, находим, что искомым минимум достигается при $n_a/n_b = (1 + Z_b)/(1 + Z_a)$, а вместо (15) имеем условие

$$nT\tau > \frac{3T^2}{\varepsilon_{\text{fus}}\langle\sigma_{ab}v\rangle} \frac{2 + Z_a + Z_b}{1 + \delta_{ab}} \equiv L_3(T). \quad (18)$$

Оно будет выполнено, если тройное произведение $nT\tau$ превышает минимум функции $L_3(T)$. Этот минимум достигается при меньшей температуре, нежели минимум функции $L(T)$ (рис. 9.8). Соответствующие значения приведены в табл. 9.4. Особенно впечатляет снижение в 6 раз оптимальной температуры для термоядерного реактора, где в качестве топлива используется только дейтерий.

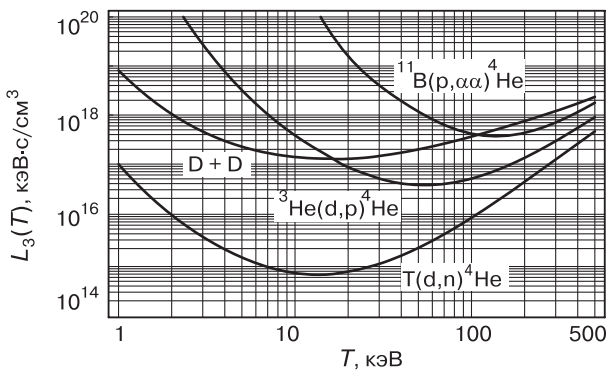


Рис. 9.8. Выбор параметров УТС по тройному произведению

9.6. Управляемый термоядерный синтез

Становление физики плазмы как науки в значительной степени было связано с проблемой *управляемого термоядерного синтеза* (сокращённо — УТС). Такое название получили работы по созданию термоядерного реактора для производства электрической энергии. Полностью эта проблема не решена до сих пор. О масштабах проводимых исследований некоторое представление даёт рис. 1.6, где изображена схема международного реактора-токамака ITER (International Tokamak Experimental Reactor), сооружение которого начато во Франции в 2008 г. и должно быть завершено к 2018 г.

В любом из известных вариантов управляемого термоядерного синтеза термоядерные реакции не могут войти в режим неконтролируемого нарастания мощности без последующего срыва плазмы и прекращения реакций. В этой связи говорят, что термоядерному реактору присуща внутренняя безопасность, исключая инциденты с выбросом в атмосферу большого количества радиоактивных материалов.

Магнитный УТС

Теоретические основы термоядерного реактора, где плазма имела бы форму тора и удерживалась магнитным полем, были разработаны в 1951 г. И. Е. Таммом и А. Д. Сахаровым [101–103]. Красивое название *токамак* в 1957 г. придумал И. Н. Головин как сокращение от слов тороидальная камера с магнитной катушкой. Всего было предложено около десятка различных схем удержания и нагрева плазмы, но не исключено, что главное изобретение на этом пути всё ещё впереди. Лидирующим направлением в настоящее время является токамак. Первый токамак был построен в 1954 г., и долгое время токамаки существовали только в СССР. Лишь после 1968 г., когда на токамаке ТЗ в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова под руководством Л. А. Арцимовича была достигнута температура плазмы 10 млн градусов [104], и английские учёные со своей аппаратурой подтвердили этот факт [105], в который поначалу отказывались верить, в мире начался настоящий бум токамаков. Всего было сооружено около 300 токамаков.

Магнитное поле в токамаке выполняет две функции. Во-первых, оно разрывает механический контакт плазмы с металлическими стенками камеры. Во-вторых, оно подавляет теплопроводность. Первая

функция предполагает, что давление магнитного поля больше давления плазмы. Вторая функция даже более важна, так как гипотетически плазма может «опираться» на стенки камеры через слой холодной, но очень плотной плазмы, если теплопроводность подавлена. Без подавления теплопроводности плазма слишком быстро остывает, так что ионы не успевают вступить в реакцию синтеза.

31 октября 1999 г. на европейском токамаке JET в импульсном режиме в смеси дейтерия и трития достигнута мощность $P_{\text{fus}} = 16$ МВт, что составило 65 % от мощности нагрева плазмы. В апреле следующего года на японском токамаке JT-60 в дейтериевой плазме достигнут режим, который в пересчёте на дейтерий-тритиевую плазму эквивалентен превышению критерия Лоусона на 25 %. Это означает, что достигнут положительный выход в управляемой термоядерной реакции.

В новом токамаке ITER может быть осуществлено зажигание термоядерной реакции в смеси дейтерия и трития. Однако для создания первого промышленного термоядерного реактора необходимо решить ещё множество технических проблем. Некоторые физики считают, что токамак не может быть прототипом промышленного термоядерного реактора, не без оснований полагая, что будущие технологии позволят заново «изобрести термояд».

Инерциальный УТС

Создание мощных лазеров в 1960-х гг. открыло новое направление инерциального УТС. Идея лазерного синтеза проста. Нужно сфокусировать свет от множества мощных лазеров на маленькой мишени из смеси дейтерия и трития, как показано на рис. 9.9. Мгновенное испарение (точнее — абляция) внешнего слоя создаст реактивную силу, направленную к центру, что приведёт к сильному сжатию мишени и её разогреву до температуры зажигания термоядерной реакции. Реакция, начавшись в центре мишени, распространится наружу во внешние более холодные слои намного раньше, чем весь сжатый материал разлетится в стороны.

В настоящее время считается, что для получения положительного баланса энергия лазерного импульса должна превысить 1 МДж [106]. Такая энергия достигнута 10 марта 2009 г. на установке NIF (National Ignition Facility) в Ливерморской национальной лаборатории (Lawrence Livermore National Laboratory) в США. Вспышка длительностью миллиардные доли секунды ознаменовала завершение

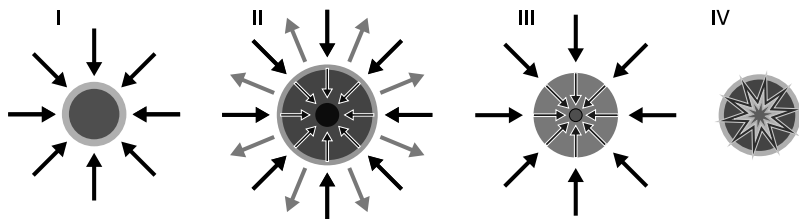


Рис. 9.9. Стадии инерциального ядерного синтеза; тёмные стрелки обозначают лазерные пучки, светлые стрелки от центра — поток испаряемого вещества, тонкие стрелки к центру — перенос тепловой энергии внутрь мишени; I) пучки лазера испаряют поверхностный слой мишени, образуя плазменную оболочку; II) реактивная сила от разлетающейся оболочки сжимает ядро мишени; III) ядро мишени нагревается, происходит зажигание реакции ядерного синтеза; IV) волна термоядерного горения распространяется наружу по сжатому топливу

дорогостоящего 12-летнего строительства крупнейшей лазерной системы на планете, состоящей из 192 лазеров. Сооружение лазера LMJ (Laser MégaJoule) с энергией в импульсе 1,8 МДж будет завершено во Франции в 2014 г. Ещё более мощный лазер УФЛ-2М с энергией 2,8 МДж планируется построить к 2020 г. в Сарове (Россия).

Эксперименты на лазерах предыдущего поколения показали, что даже с большим числом лазеров прямым облучением со всех сторон трудно добиться равномерного сжатия мишени. Микроскопические неравномерности приводят к тому, что горячая плазма «расплёскивается», прежде чем ударная волна внутри шарика мишени запустит реакцию синтеза.

Потому в NIF используется другой метод создания равномерного облучения мишени — так называемый непрямой привод (indirect drive). Заключается он в том, что лазеры направляют не в саму мишень с ядерным топливом, а в специальный полый цилиндр под названием холпраум (hohlraum), выполненный из золота, внутри которого на полимерной распорке подвешен топливный шарик. Мощный импульс лазеров, попадающий через торцевые отверстия на внутренние стенки цилиндра под точно рассчитанным углом, превращает его в плазму, которая окутывает топливный шарик и успевает выдать мощный импульс рентгеновского излучения, прежде чем разлетится прочь. Рентген взрывает главную мишень не хуже, чем прямое попадание лазеров.

Благодаря мгновенному испарению внешнего слоя шарика последний сжимается так, что плотность вещества в нём по расчётам

должна подскочить до 1 килограмма на миллилитр (что в 100 раз выше плотности свинца), а температура вырасти до 100 млн градусов — выше, чем в центре звёзд. Если цепная реакция в таком шарике будет запущена, она высвободит порядка 20 МДж.

Литература

В книге «Управляемые термоядерные реакции» [2, §§ 1.1, 1.2] многолетний руководитель советской программы токамаков Л. А. Арцимович изложил представления об управляемом термоядерном синтезе, сформированные на начальном этапе термоядерных исследований. Современное состояние УТС описано в книге «Горячая плазма и управляемый ядерный синтез» [13, §§ 3–5] С. Ю. Лукьянова и Н. Г. Ковальского. В книге «Физика лазерного термоядерного синтеза» Н. Г. Басова, И. Г. Лебо и В. Б. Розанова [107] в доступной форме изложены основы инерциального термоядерного синтеза.

Изучение анейтронных термоядерных реакций можно начать с оригинальных статей Д. Моро [108] и Л. Виттенберга с соавторами [109]. Огромная база данных по ядерным реакциям и смежным предметам собрана Международным агентством по атомной энергии (МАГАТЭ) [98].

История начального этапа развёртывания работ по созданию магнитного термоядерного реактора на основе ранее секретных документов описана в статье В. Д. Шафранова [110]. В том же номере журнала «Успехи физических наук» за 2001 г. опубликованы другие материалы на эту тему.

Задачи

Задача 9.1. Используя законы сохранения энергии и импульса, показать, что в реакции ядерного синтеза, где образуются две частицы, выделившаяся энергия распределяется между ними обратно пропорционально их массам.

Задача 9.2. Найти диапазон энергий продуктов реакции $T(t, nn)^4\text{He}$.

►► Ответ

Задача 9.3. Найти энергию, произведённую парой ядер дейтерия с учётом вторичных реакций ядерного синтеза, и вычислить коэффициент активации в термоядерном реакторе, работающем на чистом дейтерии. ►► Решение

Задача 9.4. Вычислить коэффициент активации в термоядерном реакторе, работающем на равнокомпонентной смеси дейтерия и гелия-3.

Задача 9.5. Во сколько раз энергия, которую можно извлечь из литра воды, если выделить весь дейтерий и «сжечь» его в термоядерном реакторе, больше теплотворной способности литра бензина? ►► Решение

Задача 9.6. Оценить массу дейтерия и лития, необходимую для работы ДТ реактора мощностью 1 ГВт в течение одного года. ►► Решение

Задача 9.7. Оценить, на сколько лет хватит разведанных запасов дейтерия и лития, если все термоядерные электростанции будут производить 10 трлн кВт · ч электроэнергии в год, что в 5 раз больше, чем производят все электростанции Земли в настоящее время. ►► Решение

Задача 9.8. Вычислить энергию Гамова.

►► Решение

Задача 9.9. Оценить сечение реакции $D(d, \gamma)^4\text{He}$.

►► Ответ

Задача 9.10. Записать константу $\langle \sigma_{ab} v \rangle$ реакции $X_a(x_b, x_c)X_d$ ядерного синтеза в виде интеграла по энергии ε относительного движения сталкивающихся ядер. Считать, что их функции распределения являются максвелловскими с заданной температурой T .

►► Решение

Задача 9.11. Вычислить константу реакции ядерного синтеза при температуре ниже энергии Гамова.

►► Решение

Задача 9.12. Используя данные из табл. 9.2, получить формулу Гамова для реакции $p(p, e^+ \nu_e)D$.

►► Решение

Задача 9.13. Оценить удельную мощность термоядерных реакций внутри Солнца.

►► Решение

Задача 9.14. Оценить плотность DT плазмы, необходимую для получения удельной мощности энерговыделения на уровне 100 Вт/см^3 , как в реакторах деления. Можно ли получить такую удельную мощность в реакторе с магнитным удержанием, работающем на чистом дейтерии, при максимальном магнитном поле, достижимом в настоящее время в стационарных устройствах?

Задача 9.15. Сравнить удельную мощность энерговыделения реакции ядерного синтеза в смеси дейтерия с тритием и бора-11 с водородом при условии, что давление плазмы не может превышать заданного значения.

Задача 9.16. При какой плотности ионов каждого сорта удельная мощность реакции ядерного синтеза максимальна, если в реакции участвуют ядра с зарядами Z_a и Z_b , а давление плазмы не может превышать заданной величины?

►► Решение

Задача 9.17. При какой плотности ионов каждого сорта отношение мощности тормозного излучения к мощности реакции ядерного синтеза минимально, если в реакции участвуют ядра с зарядами Z_a и Z_b ?

►► Решение

Задача 9.18. Найти тепловой поток на стенку трубы, внутри которой идёт термоядерная реакция в DT-плазме с плотностью $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и температурой $T = 10 \text{ кэВ}$. Радиус трубы R .

►► Решение

Задача 9.19. Можно ли получить положительный энергетический выход, облучая мишень из тяжёлой воды пучком ионов трития, ускоренных до высокой энергии?

►► Решение

Кинетическое уравнение

Функция распределения.

Уравнение Власова и самосогласованное поле.

Уравнение Фоккера—Планка.

10.1. Функция распределения

В кинетической теории описание каждого сорта частиц плазмы осуществляется *функцией распределения*

$$f = f(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t).$$

Она определена как плотность частиц в их *фазовом пространстве* и является, вообще говоря, функцией выбранных каким-либо образом *обобщённых координат* (совокупность которых обозначена через \mathbf{X}) и канонически сопряжённых им *обобщённых импульсов* (совокупность которых обозначена через \mathbf{P}), а в нестационарном состоянии — ещё и функцией времени t .

Если для исчерпывающего описания движения отдельной частицы необходимо задать s координат и s импульсов, фазовое пространство имеет $2s$ координатных осей, на которых отложены значения s координат и s импульсов. Произведение дифференциалов координат и импульсов,

$$d^s X = dX_1 \dots dX_s, \quad d^s P = dP_1 \dots dP_s,$$

интерпретируют как элемент объёма фазового пространства и определяют f так, что $f d^s X d^s P$ даёт *среднее* число частиц в этом элементе. Смысл среднего в этом определении мы уточним в п. 10.3.

В полностью ионизованной идеальной плазме иные степени свободы, кроме поступательного движения, не играют заметной роли, поэтому отдельный ион или электрон однозначно характеризуется тремя координатами. Соответственно, произведение $dN = f(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t) d^3 P d^3 X$ есть среднее число частиц, находящихся в заданном объёме $d^3 P d^3 X$

шестимерного фазового пространства, каждой точке которого сопоставлены три координаты и три компонента обобщённого импульса. Так как функция распределения есть плотность частиц в этом пространстве, интеграл по всему объёму плазмы и по всему пространству импульсов равен полному числу частиц данного сорта

$$N = \iint d^3P d^3X f(P, X, t). \quad (1)$$

Выбор обобщённых координат и обобщённых импульсов всецело определяется соображениями удобства при решении конкретной задачи. В частности, можно отказаться от использования импульсов, канонически сопряжённых выбранному набору координат, перейдя от фазового пространства к *конфигурационному* пространству с произвольным набором координат x и импульсов p . В этом случае, говоря о функции распределения, имеют в виду всё ту же плотность частиц в фазовом пространстве f , а элемент объёма фазового пространства пересчитывают по правилу преобразования переменных в кратных интегралах:

$$d^3P d^3X = J d^3p d^3x, \quad (2)$$

где $J = \partial(X, P)/\partial(x, p)$ — якобиан преобразования. Так как $dN = f J d^3p d^3x$, произведение Jf имеет смысл плотности частиц в конфигурационном пространстве.

В электромагнитном поле с векторным потенциалом $A(x, t)$ кинематический импульс p отличается от канонического импульса $P = p + (e/c)A$, сопряжённого вектору координат $X = x$, на слагаемое $(e/c)A$, зависящее от переменных x и t , независимых от p , поэтому $J = 1$ и $d^3x d^3p = d^3X d^3P$. Отсюда следует, что плотность частиц в фазовом пространстве $f(P, X, t)$ одновременно будет плотностью частиц и в конфигурационном пространстве координат x и импульсов p . Обозначим последнюю как $f(p, x, t)$, имея ввиду, что это всё та же функция распределения $f(P, X, t)$, аргументы которой P и X выражены через p и x .

Из сказанного ясно, что кинематический импульс p является равноценной заменой каноническому импульсу P . Чтобы не показалось, будто вместо P с тем же успехом можно взять вообще любой набор переменных, укажем для примера, что при переходе от p к переменным ε, μ, ϕ (энергия, магнитный момент, фаза ларморовского вращения) якобиан преобразования не равен единице.

В нерелятивистском пределе вместо $f(p, x, t)$ часто используют функцию распределения $f(v, x, t)$, выраженную через скорость частиц

$v = p/m$. Якобиан соответствующего преобразования равен константе $J = \partial(x, p)/\partial(x, v) = m^3$, поэтому функция $f(v, x, t) = m^3 f(p, x, t)$ с точностью до этой константы имеет смысл плотности частиц в фазовом пространстве, как и $f(p, x, t)$.

Обычная плотность частиц n получается интегрированием функции распределения по всему пространству импульсов:

$$n(x, t) = \int d^3p f(p, x, t), \quad (3)$$

если обобщённые координаты определены так, что дифференциал d^3x равен элементу объёма dV в пространстве координат. Если же $d^3x \neq dV$, в подынтегральное выражение дополнительным множителем войдёт якобиан преобразования от координат x к таким координатам X , что $d^3X = dV$ (задача 10.1). При тех же оговорках плотность потока Γ выражается через аналогичный интеграл с весом, равным скорости $v = \dot{x}$:

$$\Gamma(x, t) = \int d^3p v f(p, x, t). \quad (4)$$

10.2. Кинетическое уравнение

Каждая точка фазового пространства отвечает определённому состоянию системы. При эволюции системы изображающая её фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую фазовой траекторией. Рассмотрим интеграл $\int d^3X d^3P$, взятый по некоторой области фазового пространства, и представим себе, что каждая точка данного участка фазового пространства перемещается со временем согласно уравнениям движения рассматриваемой механической системы. Тем самым будет перемещаться и вся область. При этом её объём остаётся неизменным:

$$\int d^3X d^3P = \text{const}. \quad (5)$$

Это утверждение составляет теорему Лиувилля (Joseph Liouville, 1838).

С другой стороны, число частиц внутри выделенного объёма также постоянно:

$$\int d^3X d^3P f = \text{const}. \quad (6)$$

Так как можно взять любой объём, в том числе и достаточно малый, отсюда следует, что функция распределения также будет постоянна вдоль фазовой траектории, т. е.

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (7)$$

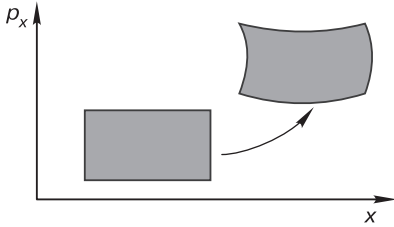


Рис. 10.1. Фазовая плоскость, соответствующая одномерному движению; площадь выделенного элемента сохраняется при движении заполняющих его частиц в самосогласованном электромагнитном поле; так как число частиц внутри элемента также сохраняется, их плотность постоянна вдоль фазовой траектории

Так как функция распределения f имеет смысл плотности частиц в фазовом пространстве, уравнение (7) означает, что (шестимерный) поток частиц в фазовом пространстве переменных X, P несжимаем, как показано на рис. 10.1 для случая одномерного движения (которому отвечает двумерное фазовое пространство).

Подчеркнём, что это утверждение имеет место для функции распределения $f(P, X, t)$, определённой как плотность частиц в фазовом пространстве (P, X) . Однако $f(P, X, t) = f(p, x, t)$ при том выборе переменных p и x , который обсуждался в п. 10.1, поэтому верно также уравнение $df(p, x, t)/dt = 0$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= [f(p + dp, x + dx, t + dt) - f(p, x, t)] / dt = \\ &= \left[dp \cdot \frac{\partial f}{\partial p} + dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + dt \frac{\partial f}{\partial t} \right] / dt = \\ &= \dot{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} + \dot{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}$$

уравнение (7) буквально означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (8)$$

Используя уравнения движения

$$\dot{x} = v, \quad \dot{p} = e \left(E(x, t) + \frac{1}{c} [v \times B(x, t)] \right) \quad (9)$$

заряженной частицы в заданном электромагнитном поле, нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p} \cdot \dot{p} = 0$$

(задача 10.2). Внося \dot{x} и \dot{p} под знак дифференцирования, получим другую (дивергентную) форму уравнения (8):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\dot{x} f) + \frac{\partial}{\partial p} \cdot (\dot{p} f) = 0. \quad (10)$$

При выборе канонических переменных эквивалентность уравнений (8) и (10) является очевидным следствием Гамильтоновых уравнений движения

$$\dot{X} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X},$$

где $\mathcal{H}(P, X, t)$ — функция Гамильтона (William Hamilton, 1833). Действительно, при переходе от уравнения (10), переписанного в канонических переменных X и P , к уравнению (8), слагаемые

$$f \frac{\partial}{\partial X} \cdot \dot{X} + f \frac{\partial}{\partial P} \cdot \dot{P} = f \frac{\partial}{\partial X} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} - f \frac{\partial}{\partial P} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}$$

взаимно сокращаются. В общем случае, когда импульсы и координаты не являются канонически сопряжёнными, уравнение (10) не эквивалентно уравнению (8), которое представляет наиболее общую форму записи кинетического уравнения.

Уравнение (10) имеет простой смысл. Его можно интерпретировать так, что изменение f в данной точке фазового пространства вызвано приходом в неё частиц из других точек и с другими импульсами. Действительно, поток частиц вдоль координатной линии x равен $\dot{x}f$.¹⁾ Составляя разность потоков через границы выделенного объёма площадью $dS_x = dy dz d^3p$ при x и $x+dx$, получим соответствующее приращение числа частиц $-\partial(\dot{x}f)/\partial x dx dS_x = -[\partial(\dot{x}f)/\partial x] d^3x d^3p$. Вклад потоков через другие грани шестимерного объёма вычисляются аналогичным образом. Приравнявая их сумму к $(\partial f/\partial t) d^3x d^3p$ и сокращая общий множитель $d^3x d^3p$, получаем уравнение (10).

10.3. Самосогласованное поле

После подстановки формул (9) в (8) получается *кинетическое уравнение для бесстолкновительной плазмы*:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f_a}{\partial x} + e_a \left(E + \frac{1}{c} [v \times B] \right) \cdot \frac{\partial f_a}{\partial p} = 0. \quad (11)$$

Индекс a здесь и далее помечает величины, относящиеся к частицам сорта a ; его значения e и i отвечают соответственно электронам и ионам.

Несмотря на кажущуюся простоту этого уравнения, его смысл требует пояснений. Как минимум следует понять, где при его выводе были потеряны эффекты столкновений частиц, ведь это

¹⁾ Это утверждение верно, если уравнения (8) и (10) эквивалентны.

уравнение относят к *бесстолкновительной* плазме (см. ниже). Для этого необходимо вернуться к понятию функции распределения как «средней» плотности частиц в фазовом пространстве.

Суть дела проясняет анализ понятия плотности частиц в обычном трёхмерном пространстве. Рассмотрим вначале газ молекул. Когда речь идёт о физически бесконечно малом элементе объёма d^3x газа, то подразумевается участок пространства, размеры которого малы по сравнению с характеристическими размерами задачи L , но в то же время велики по сравнению с размерами молекул. Утверждение о нахождении молекулы в данном элементе объёма d^3x определяет положение молекулы в лучшем случае лишь с точностью до расстояний порядка её размера d . Это обстоятельство весьма существенно. Если бы координаты частиц определялись точно, то при столкновении, скажем, двух атомов, движущихся по определённым классическим траекториям, результат столкновения был бы тоже вполне определённым. Если же речь идёт (как всегда в кинетической теории) о столкновении частиц, происходящем в данном физически малом элементе объёма, то ввиду неопределённости их точного взаимного расположения можно говорить лишь о вероятности того или иного исхода столкновения. Теперь можно уточнить, что, говоря о средней плотности числа частиц, имеют в виду усреднение по объёмам физически бесконечно малых элементов и соответственно по временам порядка величины времени пролёта частиц через такие элементы.

Трактовка функции распределения как результата усреднения по объёмам, включающим большое число частиц, вполне пригодна для описания плазмы, где говорить о размерах электрона или иона не приходится в виду их слишком малой величины. Поскольку размер молекул d одновременно является радиусом действия молекулярных сил, можно было бы думать, что в плазме его роль исполняет дебаевская длина λ_D и что усреднение в плазме нужно проводить по размерам больше, чем λ_D . Однако тогда кинетическое описание было бы слишком грубым, неспособным описать даже дебаевское экранирование. Размер усреднения вполне может быть меньше дебаевской длины λ_D , но больше среднего расстояния между частицами, если плазма является идеальной, т. е. выполняется условие

$$n^{-1/3} \ll \lambda_D. \quad (12)$$

Кроме того, существует альтернативная трактовка функции распределения, согласно которой $dN = f(P, X, t) d^3P d^3X$ есть вероятность

обнаружить частицу в элементе фазового объёма $d^3P d^3X$. При таком понимании функции распределения элемент объёма может быть бесконечно малым в математическом понимании этого слова, а условие (12) — излишним.

В случае нейтральных частиц (атомов или молекул) благодаря быстрому убыванию сил взаимодействия заметные изменения в их движении, интерпретируемые как столкновения, происходят лишь на малых прицельных расстояниях (порядка величины самих атомных размеров). В промежутках между такими столкновениями частицы движутся как свободные. В плазме, ввиду дальнедействующего характера кулоновских сил, заметное изменение движения частиц происходит даже на больших прицельных расстояниях; экранирование кулоновских сил в плазме происходит лишь на расстояниях $r \gtrsim \lambda_D$, которые, согласно условию идеальности плазмы (12), велики даже по сравнению с межчастичными расстояниями. Однако не все эти случаи должны интерпретироваться в кинетическом уравнении как столкновения.

Хаотические столкновения представляют собой механизм, который приближает систему к состоянию равновесия с соответствующим возрастанием энтропии. Между тем столкновения на больших ($r \sim \lambda_D$) прицельных расстояниях представляет собой в действительности коллективный эффект, в котором участвует большое число частиц. Соответственно и то эффективное поле, которым можно описать это взаимодействие, создаётся большим числом частиц, т. е. имеет макроскопический характер. Тем самым весь процесс приобретает макроскопически достоверный, а не случайный характер. Такие процессы не могут приводить к возрастанию энтропии системы. Они должны быть выделены из числа столкновений, увеличивающих энтропию.

Такому выделению формально отвечает представление точных микроскопических значений электрического и магнитного полей, действующих на некоторую частицу в плазме, в виде

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{e}, \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}, \quad (13)$$

где $\langle \mathbf{E} \rangle$ и $\langle \mathbf{B} \rangle$ — некие средние поля, создаваемые «средней» плотностью заряда и «средним» током в плазме, а *микрополя* \mathbf{e} и \mathbf{b} представляют собой мелкомасштабные флуктуации полей, отвечающие столкновениям частиц.

«Среднюю» часть электрического и магнитного полей принято по-прежнему обозначать через \mathbf{E} и \mathbf{B} . При этом кинетическое

уравнение формально сохраняет свой вид (11), но уже не учитывает эффект столкновений частиц. Выделение этой части истинных полей по сути производится феноменологически. А именно, постулируется, что среднее поле подчиняется уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_\varepsilon, \quad (15)$$

где плотность заряда

$$\rho_\varepsilon = \sum_a \int e_a f_a d^3p \quad (16a)$$

и плотность тока

$$\mathbf{j} = \sum_a \int e_a \mathbf{v} f_a d^3p \quad (16б)$$

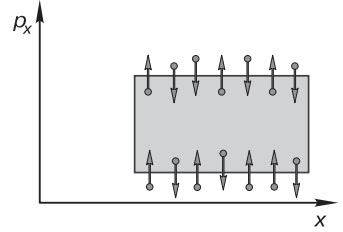
выражаются через функции распределения частиц всех сортов.

Уравнения (11) и (14)–(16) составляют согласованную систему уравнений, связывающих функцию распределения частиц каждого сорта с электрическим и магнитным полями. Определяемые таким образом поля \mathbf{E} и \mathbf{B} называют самосогласованными. *Самосогласованное поле* было введено в кинетическое уравнение А. А. Власовым (1938) [111]. В связи с этим систему уравнений (11) и (14)–(16) называют *уравнениями Власова*. Иногда уравнением Власова называют только кинетическое уравнение (11) с нулевой правой частью, но при этом всё равно подразумевается, что электрическое и магнитное поля согласованы с функцией распределения уравнениями (14)–(16).

Из дальнейшего станет ясно, что эволюция функции распределения частиц в бесстолкновительной плазме с самосогласованным полем не связана с увеличением энтропии и потому сама по себе не может привести к установлению статистического равновесия. Это очевидно и прямо из уравнения (11), в котором \mathbf{E} и \mathbf{B} выступают формально лишь как внешние поля, наложенные на плазму. Поэтому постулированный де-факто способ выделения среднего поля, как той его части, которая не связана со столкновениями частиц, оказывается по физическому смыслу совершенно правильным.

В литературе можно найти правдоподобное обоснование этого способа выделения самосогласованного поля, апеллирующее к усреднению полей по физически малым объёмам плазмы [45, §27], однако математически строгая процедура такого усреднения, несмотря на многочисленные попытки, отсутствует до сих пор.

Рис. 10.2. В столкновениях частиц их импульс изменяется на случайную величину за очень малое время; анализируя динамику системы за более длительное время, можно считать, что частицы испытывают мгновенные случайные блуждания, которые приводят к изменению числа частиц внутри выделенного объёма в фазовом пространстве



10.4. Уравнение Фоккера—Планка

Попытаемся теперь учесть столкновения частиц. Столкновения приводят к скачкообразному изменению скорости, которое в фазовом пространстве выглядит как переброс частиц из одной точки фазового пространства (p_1, x_1) в другую (p_2, x_2) , причём $x_1 = x_2$, как показано на рис. 10.2. Такие перескоки можно описать, добавив в правую часть уравнения Власова (11) дополнительный член

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a C_{ba}, \quad (17)$$

где суммирование идёт по всем сортам частиц, а отдельное слагаемое $C_{ba} \equiv C[f_b, f_a]$ называется *интегралом столкновений* частиц сорта b с частицами сорта a . Интеграл столкновений имеет смысл числа частиц, которые появляются за единицу времени в единице шестимерного объёма фазового пространства.

Кулоновские столкновения являют собой типичный пример кинетических процессов, в которых средние изменения величин (от которых зависит функция распределения) в каждом элементарном акте малы по сравнению с их характерными значениями. Характерные времена таких процессов велики по сравнению с временами элементарных актов, составляющих их микроскопический механизм; в этом смысле такие процессы можно назвать медленными. Медленность кулоновского рассеяния обусловлена доминированием далёких столкновений, в одном акте которых импульс частиц изменяется незначительно.

Обозначим через $w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q$ отнесённую к единице времени вероятность изменения импульса $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}$ частицы сорта b при её столкновении с частицей сорта a . Тогда кинетическое уравнение для функции $f_b(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ записывается в виде

$$\frac{df_b}{dt} = \sum_a \int \{w_{ba}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) - w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)\} d^3q,$$

где справа стоит разность между числом частиц, поступающих за 1 с в единичный элемент импульсного пространства и покидающих его за то же время. Для краткости несущественные аргументы x, t далее временно будут опущены.

Согласно сделанным предположениям, функция $w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ быстро убывает с увеличением \mathbf{q} , так что основную роль в интеграле играют значения \mathbf{q} , малые по сравнению со средним импульсом частиц \mathbf{p} . Это обстоятельство позволяет произвести в подынтегральном выражении разложение

$$w_{ba}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \approx w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}) - q_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} q_\mu q_\nu \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_b(\mathbf{p}), \quad (18)$$

где по повторяющимся индексам μ, ν (пробегающим значения x, y, z) подразумевается суммирование. В результате кинетическое уравнение из интегро-дифференциального становится дифференциальным:

$$\frac{df_b}{dt} = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left(\langle q_\mu \rangle f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \langle q_\mu q_\nu \rangle f_b \right). \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \langle q_\mu \rangle &= \sum_a \int q_\mu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q, \\ \langle q_\mu q_\nu \rangle &= \sum_a \int q_\mu q_\nu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение в правой стороне (19) имеет вид дивергенции $-\partial s_\mu / \partial p_\mu$ вектора

$$s_\mu = \langle q_\mu \rangle f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \langle q_\mu q_\nu \rangle f_b = F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b,$$

который определяет плотность потока частиц в импульсном пространстве. Коэффициенты

$$F_\mu = \langle q_\mu \rangle, \quad D_{\mu\nu} = \langle q_\mu q_\nu \rangle \quad (21)$$

называют соответственно *вектором силы трения* и *тензором диффузии* в пространстве импульсов. Итоговое уравнение

$$\frac{df_b}{dt} = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left(F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right) \quad (22)$$

имеет вид уравнения непрерывности в импульсном пространстве. В альтернативной форме записи

$$\frac{df_b}{dt} = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left(A_\mu f_b - \frac{1}{2} D_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f_b \right) \quad (23)$$

этого уравнения коэффициент

$$A_\mu = \langle q_\mu \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \langle q_\mu q_\nu \rangle, \quad (24)$$

называют *динамической силой*.¹⁾ Как станет ясно из дальнейшего, в отличие от F , сила A не является силой трения в обычном понимании этого слова.

Согласно формулам (21) и (24), коэффициенты кинетического уравнения выражаются через средние характеристики столкновений. В этом смысле их вычисление представляет собой механическую задачу. Существенно, что два первых члена разложения (18) дают вклад одного порядка величины в интеграл столкновений, а вот последующие члены разложения уже малы по сравнению с двумя первыми. Это наблюдение подтверждается тем (пока ещё не доказанным) фактом, что для равновесной — максвелловской — функции распределения правая часть уравнения (23) должна обращаться в нуль. Формально оно означает, что усреднение первых степеней знакопеременных величин q_μ связано с большим погашением, чем при усреднении квадратичных выражений $q_\mu q_\nu$. По сути же дела, наличие динамической силы $A_\mu f$ объясняется тем, что однородное (в пространстве импульсов) распределение не является равновесным. Если искусственно создать такое распределение, то по истечении некоторого времени оно само собой перейдёт в распределение Максвелла.

Кинетическое уравнение вида (23), в котором коэффициенты определены через усреднённые характеристики элементарных актов согласно (20), называют уравнением Фоккера—Планка (Adriaan Fokker, 1914 [113]; Max Planck, 1917 [114]). Специфические свойства переменных p как импульсов частиц в изложенном выводе не играли роли. Уравнение такого же типа будет справедливо и для функций распределения по другим переменным, если только выполнено условие, лежащее в основе вывода — относительная малость изменения величин в элементарных актах.

¹⁾ Реже динамической силой называют вектор $F = \langle q \rangle$ (см. [112], с. 155).

Фоккер и Планк рассматривали процессы, в которых интегральный оператор, выражающий изменение функции в элементарных актах, линеен по функции распределения f_b . В плазме коэффициенты A_μ и $D_{\mu\nu}$, вообще говоря, зависят от функций распределения частиц всех сортов. Однако начинать анализ уравнения Фоккера—Планка полезно именно с той ситуации, которую подразумевали его авторы. Этому посвящён следующий параграф.

10.5. Рассеяние пробных частиц

Процессы, описываемые уравнением Фоккера—Планка, проще понять, если рассмотреть ансамбль пробных частиц, плотность которых столь мала (по сравнению с другими — полевыми — частицами плазмы), что их можно не учитывать при определении коэффициентов уравнения Фоккера—Планка. Тогда эти коэффициенты оказываются заданными функциями импульса пробных частиц, конкретный вид которых пока не важен, а само уравнение — линейным относительно функции распределения пробных частиц.

Рассмотрим однородный плоский поток пробных частиц сорта b , первоначально имеющих одинаковый импульс p_b . Иными словами, в начальный момент времени $t = 0$ их распределение $f_b = n_b \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_b)$ выражается через δ -функцию с коэффициентом n_b , не зависящим от координат. Функция f_b и далее будет пространственно однородна, поэтому пространственные градиенты в задаче отсутствуют, а коэффициент n_b без ограничения общности можно приравнять единице:

$$f_b = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_b). \quad (25)$$

Электрическое и магнитное поля для простоты также исключим. Тогда $df_b/dt = \partial f_b/\partial t$, а уравнение Фоккера—Планка (22) принимает вид

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left(F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right). \quad (26)$$

Применим это уравнение для вычисления производной $d\bar{\mathbf{p}}/dt$, где черта сверху обозначает усреднение по распределению,

$$\bar{p}_\alpha = \int d^3p p_\alpha f_b. \quad (27)$$

Ограничившись небольшим интервалом времени вблизи $t = 0$, можно в это среднее подставить начальную функцию распределения пробных частиц (25). Тогда окажется, что $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_b$, а $d\bar{\mathbf{p}}/dt = d\mathbf{p}_b/dt$. С

другой стороны, производную $d\bar{p}/dt$ можно вычислить, выполнив дифференцирование непосредственно в правой части формулы (27).

Вычисляя производную, следует заметить, что при внесении полной производной d/dt под знак интеграла её следует заменить на частную производную, чтобы подчеркнуть, что импульс, как переменную интегрирования, дифференцировать не нужно, т. е.

$$\frac{d\bar{p}_\alpha}{dt} = \int d^3p p_\alpha \frac{\partial f_b}{\partial t}.$$

Подставляя сюда $\partial f_b/\partial t = -\partial s_\mu/\partial p_\mu$ из уравнения (26), преобразуем подынтегральное выражение с помощью цепочки тождеств

$$-p_\alpha \frac{\partial s_\mu}{\partial p_\mu} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\alpha s_\mu + s_\mu \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\mu} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\alpha s_\mu + s_\alpha.$$

Первое слагаемое в правой части цепочки представляет собой дивергенцию тензора $p_\alpha s_\mu$ в пространстве импульсов. Соответствующий интеграл с помощью теоремы Остроградского—Гаусса преобразуется к интегралу по бесконечно удалённой замкнутой поверхности в пространстве импульсов, где функция распределения равна нулю, а вместе с ней и сам интеграл. Интегрирование оставшегося слагаемого

$$s_\alpha = F_\alpha f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\alpha\nu} f_b$$

тривиально, так как f_b содержит δ -функцию. При этом второе слагаемое в s_α , содержащее тензор диффузии, также имеет вид дивергенции в пространстве импульсов и также обращается в нуль. В результате имеем

$$\frac{dp_b}{dt} = F_b, \quad (28)$$

где F_b обозначает вектор с компонентами F_α .

Напомним, что в п. 6.7 уже было получено уравнение (6.27), определяющее изменение направленного импульса пробной частицы dp_b/dt . В его правой части стоит сумма сил $\sum_a F_{ba}$, действующих на пробную частицу сорта b со стороны частиц плазмы сорта a . Таким образом, силу F_b следует отождествить с суммой сил $\sum_a F_{ba}$, которая уже была однажды вычислена.

Действуя аналогичным образом, можно также вычислить производную тензора

$$\frac{d}{dt} \overline{p_\alpha p_\beta} = \int d^3p p_\alpha p_\beta \frac{\partial f_b}{\partial t}.$$

После несложных вычислений, включающих двукратное интегрирование по частям с помощью теоремы Остроградского—Гаусса, находим

$$\frac{d}{dt} \overline{p_\alpha p_\beta} = F_\alpha p_{b,\beta} + p_{b,\alpha} F_\beta + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} D_{\beta\alpha}. \quad (29)$$

Так как тензор диффузии симметричен в соответствии со своим определением (21), т. е. $D_{\beta\alpha} = D_{\alpha\beta}$, последние два слагаемых в (29) равны друг другу. Поскольку

$$(\overline{p_\alpha - \overline{p_\alpha}})(\overline{p_\beta - \overline{p_\beta}}) = \overline{p_\alpha p_\beta} - \overline{p_\alpha} \overline{p_\beta},$$

уравнение (29) можно также переписать в виде

$$\frac{d}{dt} (\overline{p_\alpha - \overline{p_\alpha}})(\overline{p_\beta - \overline{p_\beta}}) = D_{\alpha\beta}. \quad (30)$$

Отсюда ясно, что величины $F_\alpha = \langle q_\alpha \rangle$ и $D_{\alpha\beta} = \langle q_\alpha q_\beta \rangle$ можно представить в символическом виде

$$\langle q_\alpha \rangle = \frac{\sum q_\alpha}{\tau}, \quad \langle q_\alpha q_\beta \rangle = \frac{\sum q_\alpha q_\beta}{\tau},$$

более отчётливо выражающем их смысл. Здесь знак \sum означает суммирование по большому числу столкновений, происходящих за время τ .

Тензор $\overline{p_\alpha p_\beta}$ не имеет столь очевидного смысла, как средний импульс пробной частицы $p_{b\alpha} = \overline{p_\alpha}$, но его свёртка $\overline{p_\alpha p_\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \overline{p_\alpha p_\beta}$ с единичным тензором $\delta_{\alpha\beta}$ связана с энергией пробной частицы

$$\varepsilon = \frac{\overline{p^2}}{2m_b}.$$

Вводя обозначение $v_b = p_b/m_b$ для скорости пробной частицы и составляя свёртку $\delta_{\alpha\beta}$ с уравнением (29), получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt} = v_b \cdot F_b + \frac{D_{\alpha\alpha}}{2m_b} \quad (31)$$

для скорости изменения энергии пробной частицы. Скорость изменения энергии пробных частиц была фактически вычислена в п. 6.8. Однако для определения всех элементов тензора диффузии этого не достаточно. Вывод интеграла столкновений будет завершён на следующей лекции.

Литература

Начальные сведения по физической кинетике плазмы наряду с выводом кинетических уравнений Власова и Фоккера—Планка изложены в «Лекциях по физике плазмы» Д. А. Франк-Каменецкого [3, гл. 6, §1–4, 6, 7]. В 10-м томе «Курса теоретической физике» [45], написанном Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским, содержанию лекции соответствуют §§21 и 27.

Задачи

Задача 10.1. Обобщить формулу (3) на случай $d^3x \neq dV$. ►► Решение

Задача 10.2. Проверить равенство $\frac{\partial}{\partial p} \cdot [v \times B] = 0$. ►► Решение

Задача 10.3. Найти радиус экранирования точечного заряда в плазме с изотропной, но не обязательно максвелловской функцией распределения. ►► Решение

Задача 10.4. Найти стационарное решение уравнения Власова в дрейфовом приближении. ►► Решение

Задача 10.5. Показать, что плотность и давление плазмы на фиксированной силовой линии зависят только от величины магнитного поля B . ►► Решение

Задача 10.6. Вычислить плотность и давление плазмы, в которой распределение ионов описывается функцией распределения $f = N \delta(\mu - \varepsilon/B_*) \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$, где N — нормировочная константа, B_* — магнитное поле в точке остановки частиц, а ε_0 — энергия ионов. Для простоты принять, что $\varphi = 0$ (плазма с холодными электронами).

Задача 10.7. Доказать, что уравнение Фоккера—Планка сохраняет полное число частиц. ►► Решение

Задача 10.8. Выразить силу динамического трения через тензор диффузии в состоянии термодинамического равновесия, когда распределение частиц всех сортов описываются функцией распределения Максвелла с одинаковой температурой. ►► Решение

Задача 10.9. Используя уравнение Фоккера—Планка, найти функцию распределения пробных частиц, считая, что в начальный момент все пробные частицы имели одинаковую скорость, а их плотность была всюду одинаковой.

Задача 10.10. Повторить вывод уравнений (28) и (29), не предполагая, что в плазме отсутствует самосогласованное поле, а плотность пробных частиц однородна. ►► Решение

Интеграл столкновений

Интеграл столкновений Ландау. Законы сохранения в столкновениях частиц. Упрощение интеграла столкновений. H-теорема.

Вывод кинетического уравнения с интегралом столкновений, изложенный в предыдущей лекции, трактует столкновения частиц как мгновенные события, происходящие локально в одной точке пространства за бесконечно малое время. Поэтому можно предположить, что уравнение Фоккера—Планка позволяет отслеживать эволюцию функции распределения лишь за промежутки времени, большие по сравнению с длительностью столкновений, и на расстояниях, больших по сравнению с размерами области столкновения. В плазме эти размеры характеризуются дебаевским радиусом λ_D , а время столкновения по порядку величины равно $\lambda_D/v_T \approx \omega_p^{-1}$. Таким образом, величины λ_D и ω_p^{-1} , казалось бы, устанавливают нижний предел расстояний и интервалов времени, которые допускаются кинетическим уравнением с интегралом столкновений. Однако при выводе уравнения Фоккера—Планка было использовано единственное предположение — малость изменения импульса частицы в акте столкновения, которое заведомо выполнено в идеальной классической плазме. На практике кинетическое уравнения используют и на меньших масштабах, и на меньших временах.

В реальных физических задачах существуют характерные параметры длины L и времени τ , навязываемые условиями задачи (такие как градиентные размеры макроскопических величин плазмы, длина и период распространяющихся в ней различных волн и т. п.). В таких задачах достаточно следить за поведением системы на расстояниях и временах, малых лишь по сравнению с этими L и τ . Другими словами, малыми лишь по сравнению с L и τ должны быть физически бесконечно малые элементы объёма и времени. Усреднёнными по таким элементам задаются и начальные условия задачи.

11.1. Интеграл столкновений Ландау

Чтобы вычислить коэффициенты уравнения Фоккера—Планка

$$\begin{aligned}\langle q_\mu \rangle &= \sum_a \int q_\mu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q, \\ \langle q_\mu q_\nu \rangle &= \sum_a \int q_\mu q_\nu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q,\end{aligned}$$

заметим, что отдельный интеграл, например

$$\int q_\mu w_{ba}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d^3q,$$

есть не что иное, как среднее приращение компоненты импульса p_μ частицы сорта b за единицу времени в результате кулоновского рассеяния на частицах сорта a . Используя сведения, изложенные в лекции 6, это же приращение можно выразить через сечение кулоновских столкновений $d\sigma$, относительную скорость сталкивающихся частицы $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ и функцию распределения частиц плазмы $f_a(\mathbf{p}')$:

$$\iint q_\mu u d\sigma f_a(\mathbf{p}') d^3p'.$$

Дифференциальное сечение, соответствующее передаче импульса \mathbf{q} с рассеянием на угол θ , определяется формулой Резерфорда

$$d\sigma = \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (1)$$

Таким образом, вычисление коэффициентов уравнения Фоккера—Планка включает двойное интегрирование по углам рассеяния и по распределению рассеивающих частиц:

$$\begin{aligned}\langle q_\mu \rangle &= \sum_a \iint q_\mu u d\sigma f_a(\mathbf{p}') d^3p', \\ \langle q_\mu q_\nu \rangle &= \sum_a \iint q_\mu q_\nu u d\sigma f_a(\mathbf{p}') d^3p'.\end{aligned} \quad (2)$$

Выполним отдельно усреднение по углам рассеяния. Для этого вычислим интегралы

$$\int q_\mu u d\sigma, \quad \int q_\mu q_\nu u d\sigma, \quad (3)$$

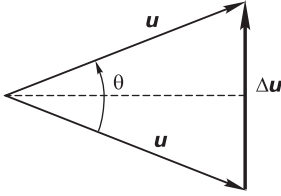


Рис. 11.1. В системе центра масс столкновение двух заряженных частиц поворачивает вектор относительной скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a$ на угол θ , не меняя его длину; изменение $\Delta \mathbf{u}$ вектора \mathbf{u} по абсолютной величине равно длине основания равнобедренного треугольника с длиной бёдер u и углом θ между ними, $\Delta u = 2u \sin(\theta/2)$

приняв во внимание, что формула Резерфорда (1) относится к системе центра инерции.

В этой системе абсолютная величина относительной скорости u в результате рассеяния не меняется, а изменение импульса

$$\mathbf{q} = m_{ab} \Delta \mathbf{u}$$

выражается через изменение вектора относительной скорости $\Delta \mathbf{u}$ и приведённую массу m_{ab} . Как показано на рис. 11.1,

$$\Delta u = 2u \sin(\theta/2).$$

Сохранение энергии сталкивающихся частиц $\frac{1}{2}m_{ab}u^2 = \frac{1}{2}m_{ab}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})^2$ в системе центра масс даёт ещё одно полезное равенство

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{2}m_{ab}\Delta u^2.$$

Интегрирование по $d\sigma$ в формулах (3) сводится к интегрированию по телесному углу $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Поскольку направление относительной скорости \mathbf{u} составляет единственное выделенное направление, очевидно, что результат интегрирования можно выразить через компоненты вектора \mathbf{u} и инвариантные тензоры, такие как единичный тензор второго ранга $\delta_{\mu\nu}$ и абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга $\epsilon_{\mu\nu\gamma}$; напомним, что инвариантным называется тензор, компоненты которого не изменяются при повороте или инверсии системы координат. Следовательно,

$$\int q_\mu u d\sigma = \mathbb{A} \frac{u_\mu}{u}, \quad (4a)$$

$$\int q_\mu q_\nu u d\sigma = \mathbb{B} \delta_{\mu\nu} + \mathbb{C} \frac{u_\mu u_\nu}{u^2} + \mathbb{D} \epsilon_{\mu\nu\gamma} \frac{u_\gamma}{u}, \quad (4б)$$

где \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{C} и \mathbb{D} — константы. Так как $q_\mu q_\nu$ не изменяется при замене \mathbf{u} на $-\mathbf{u}$, без дальнейших вычислений ясно, что должно быть $\mathbb{D} = 0$. Чтобы найти коэффициент \mathbb{A} , нужно составить свёртку

$$\frac{u_\mu}{u} \int q_\mu u d\sigma = \mathbb{A},$$

умножив $\int q_\mu u d\sigma$ на u_μ/u и затем выполнив суммирование по повторяющемуся индексу μ . Аналогичным образом коэффициенты \mathbb{B} и \mathbb{C} выражаются через свёртки $\int q_\mu q_\nu u d\sigma$ с $\delta_{\mu\nu}$ и $u_\mu u_\nu/u^2$:

$$\delta_{\mu\nu} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = 3\mathbb{B} + \mathbb{C},$$

$$\frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = \mathbb{B} + \mathbb{C}.$$

Левые части составленных уравнений нетрудно определить, вычислив свёртки под знаком интеграла в формулах (3):

$$\frac{u_\mu}{u} \int q_\mu u d\sigma = \int (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}) d\sigma = -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 d\sigma,$$

$$\delta_{\mu\nu} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) u d\sigma = m_{ab}^2 u \int \Delta u^2 d\sigma,$$

$$\frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \int q_\mu q_\nu u d\sigma = \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u})^2 u^{-1} d\sigma = \frac{m_{ab}^2}{4u} \int \Delta u^4 d\sigma.$$

Отсюда видно, что вычисление коэффициентов (2) в уравнении Фоккера—Планка сводится к вычислению средних значений Δu^2 и Δu^4 .

Используя формулу Резерфорда (1) и соотношение $\Delta u = 2u \sin(\theta/2)$, имеем:

$$\int \Delta u^2 d\sigma = \int [2u \sin(\theta/2)]^2 \frac{e_a^2 e_b^2}{4m_{ab}^2 u^4} \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{e_a^2 e_b^2}{m_{ab}^2 u^2} \int \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{\sin^2(\theta/2)}.$$

Интеграл логарифмически расходится на нижнем пределе, но происхождение расходимости, как установлено в лекции 6, вызвано тем, что формула Резерфорда не учитывает дебаевское экранирование кулоновского поля рассеивающего центра. Приблизительно правильный результат получается обрезанием интервала интегрирования со стороны малых углов. Выполнив интегрирование по θ от θ_{\min} до π , находим

$$\int \Delta u^2 d\sigma = \frac{8\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}^2 u^2}, \quad (5)$$

где $\Lambda_{ab} = \ln[1/\sin(\theta_{\min}/2)] \approx \ln[2/\theta_{\min}]$ — кулоновский логарифм.

При вычислении среднего значения Δu^4 получается сходящийся интеграл, поэтому результат не содержит кулоновского логарифма Λ_{ab} . Поскольку теория кулоновских столкновений верна с точностью до поправок порядка $\Lambda_{ab}^{-1} \ll 1$, можно (и даже нужно!) считать, что

$$\int \Delta u^4 d\sigma = 0. \quad (6)$$

Тогда

$$\mathbb{A} = -\frac{m_{ab}}{2} \int \Delta u^2 d\sigma, \quad \mathbb{B} = -\mathbb{C} = \frac{m_{ab}^2 u}{2} \int \Delta u^2 d\sigma.$$

Возвращаясь к коэффициентам (2) уравнения Фоккера—Планка, находим:

$$\langle q_\mu \rangle = -\frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}} \int \frac{u_\mu}{u^3} f_a(\mathbf{p}') d^3 p', \quad (7a)$$

$$\langle q_\mu q_\nu \rangle = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \int \left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) f_a(\mathbf{p}') d^3 p'. \quad (7b)$$

С помощью цепочки преобразований

$$-\frac{u_\mu}{u^3} = \frac{\partial}{\partial u_\mu} \frac{1}{u} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{u} \quad (8)$$

и

$$\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{u} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^3} \right) = \frac{\partial}{\partial u_\mu} \left(\frac{u_\nu}{u} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial u_\mu \partial u_\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \quad (9)$$

полученные формулы можно записать в элегантной форме

$$\langle q_\mu \rangle = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu}, \quad \langle q_\mu q_\nu \rangle = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu}, \quad (10)$$

где функции

$$h_a = \int u^{-1} f_a(\mathbf{p}') d^3 p', \quad g_a = \int u f_a(\mathbf{p}') d^3 p' \quad (11)$$

называются *потенциалами Розенблюта* (Marshall Rosenbluth). Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 h_a}{\partial v_\nu^2} = -4\pi f_a, \quad \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\nu^2} = 2h_a. \quad (12)$$

Первое уравнение следует из очевидной аналогии с уравнением Пуассона $\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho_\varepsilon$ и его решением

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho_\varepsilon(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'.$$

Второе уравнение проверяется дифференцированием под знаком интеграла в определении g_a при помощи тождества

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v_\nu^2} = \frac{2}{u},$$

которое является частным случаем цепочки преобразований (9).

Подстановка формул (10) в уравнение (10.19) и замена производных по импульсу $p = m_b v$ частиц сорта b (к которым относится уравнение) на производные по скорости v даёт

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left(\frac{m_b}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} f_b \right).$$

С помощью второй из формул (12) это уравнение легко преобразовать к канонической форме уравнения Фоккера—Планка, выполнив дифференцирование каждого сомножителя во втором слагаемом по отдельности. Результат дифференцирования потенциала g_a частично сокращается с первым слагаемым, приводя к малозаметной замене множителя m_b/m_{ab} на m_b/m_a :

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left(\frac{m_b}{m_a} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial}{\partial v_\nu} f_b \right). \quad (13)$$

В такой форме уравнение Фоккера—Планка для частиц с кулоновским взаимодействием было получено Розенблютом с соавторами в 1957 г. [115]. Но ещё раньше, в 1936 г., интеграл столкновений был вычислен Л. Д. Ландау [116, 117]. Свой результат Ландау представил в симметричной форме

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a 2\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int \left(f_b \frac{\partial f'_a}{\partial p'_\nu} - f'_a \frac{\partial f_b}{\partial p_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3 p', \quad (14)$$

где $f_b = f_b(p)$ и $f'_a = f_a(p')$, явно подчёркивающей нелинейную зависимость интеграла столкновений от функции распределения взаимодействующих частиц. В статье Розенблюта работа Ландау не упоминается. В других публикациях того времени можно найти отголоски былых представлений, будто Ландау не учёл силу динамического трения в уравнении Фоккера—Планка, хотя доказательство эквивалентности уравнений (13) и (14) не составляет большого труда (задача 11.2).

11.2. Законы сохранения в столкновениях частиц

Интеграл столкновений обладает свойствами, очевидными из его физического смысла как числа частиц, появляющихся в единицу времени в единице объёма пространства импульсов. Поскольку полное число частиц при рассеянии сохраняется, то

$$\int d^3 p C_{ba} = 0, \quad (15a)$$

где C_{ba} обозначает отдельное слагаемое в сумме \sum_a по сортам частиц в (13) или (14). Сохранение импульса и энергии сталкивающихся частиц означает, что

$$\int d^3p [m_a v C_{ab} + m_b v C_{ba}] = 0, \quad (156)$$

$$\int d^3p \left[\frac{1}{2} m_a v^2 C_{ab} + \frac{1}{2} m_b v^2 C_{ba} \right] = 0. \quad (15b)$$

Легче всего проверить равенство (15a). Так как C_{ba} имеет вид дивергенции в пространстве импульсов,

$$C_{ba} = - \frac{\partial}{\partial p} \cdot s_{ba},$$

с помощью теоремы Остроградского—Гаусса интеграл в левой части (15a) преобразуется к интегралу по бесконечно удалённой поверхности в пространстве импульсов, где подынтегральное выражение обращается в нуль:

$$\int d^3p C_{ba} = - \int d^3p \frac{\partial}{\partial p} \cdot s_{ba} = - \oint (dS_p \cdot s_{ba}) = 0.$$

Проверка законов сохранения импульса (156) и энергии (15b) представляет более трудоёмкое упражнение (задачи 11.4 и 11.5). Фактически же проверять нужно не сами законы сохранения, а тот факт, что конкретная форма интеграла столкновений удовлетворяет этим законам, поскольку равенства (15) по сути очевидны. Различные упрощённые формы интеграла столкновения зачастую этим законам не удовлетворяют (см. п. 11.3), поэтому следует критически воспринимать результаты расчётов, выполненных с их применением.

Интеграл столкновений в форме Ландау выдерживает проверку другими свойствами, очевидными из физических соображений. В частности, он обращается в нуль, если частицы всех сортов имеют максвелловское распределение с одной и той же температурой (задача 11.6). Можно также доказать, что решение кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау не может быть отрицательным ни при каких условиях (задача 11.7).

11.3. Упрощение интеграла столкновений

Тау-приближение

В самой примитивной форме интеграл столкновений записывают в так называемом тау-приближении:

$$\frac{df_b}{dt} = - \frac{f_b - f_{Mb}}{\tau}. \quad (16)$$

Оно описывает приближение распределения частиц к максвелловской функции f_{mb} с характерным временем τ .

Интеграл столкновений Ландау также описывает приближение распределения к равновесному, но в отличие от более простых аналогов удовлетворяет законам сохранения. К тому же реальный процесс установления равновесия характеризуется набором различных времён (см. пп. 6.7 и 6.8 в лекции 6), а не единственным параметром τ .

Лоренцева плазма

Плазму, состоящую из электронов ($e_e = -e$) и бесконечно тяжёлых холодных ионов ($e_i = Ze$) с большим зарядовым числом Z , принято называть *лоренцевой*. При $Z \gg 1$ рассеянием электронов на электронах можно пренебречь по сравнению с их рассеянием на ионах, оставив в правой части кинетического уравнения для электронов только слагаемое C_{ei} :

$$\frac{df_e}{dt} = C_{ei} = -\frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_{ei}}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{\partial h_i}{\partial v_\mu} f_e - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \frac{\partial}{\partial v_\nu} f_e \right). \quad (17)$$

То, что отброшенное слагаемое C_{ee} мало по сравнению с C_{ei} , проще всего проверить, сравнив частоты электрон-электронных и электрон-ионных столкновений, $\nu_{ee}^{(p)}$ и $\nu_{ei}^{(p)}$. Простые оценки показывают, что $\nu_{ei}^{(p)} \approx Z \nu_{ee}^{(p)} \gg \nu_{ee}^{(p)}$ (задача 6.10).

Малость отношения масс m_e/m_i позволяет пренебречь обменом энергией между электронами и ионами, если анализировать эволюцию плазмы на сравнительно малых интервалах времени, $t \ll 1/\nu_{ei}^{(\varepsilon)}$ (напомним, что $\nu_{ei}^{(\varepsilon)} \sim (m_e/m_i) \nu_{ei}^{(p)}$, задача 6.11). Тем самым можно ещё более упростить кинетическое уравнение (17), отбросив первое слагаемое в правой части, которое пропорционально m_e/m_i . Во второе слагаемое можно подставить $g_i = n_i v$, так как скорость электронов при сопоставимых энергиях, значительно больше скорости ионов. Действительно, в формуле

$$g_i(v) = \int u f_i(p') d^3 p'$$

можно произвести замену $u = |v - v'| \approx v$ и затем вынести v из под знака интеграла, после чего оставшийся интеграл оказывается

равным плотности ионов n_i . Последующее вычисление производной $\partial^2 g_i / \partial v_\mu \partial v_\nu = n_i \partial^2 v / \partial v_\mu \partial v_\nu$ по аналогии с (9) приводит к уравнению

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{v} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_\nu}, \quad (18)$$

куда входит вектор

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = \frac{\partial f_e}{\partial v} - \frac{\mathbf{v}}{v} \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right).$$

Он отличается от градиента $\partial f_e / \partial \mathbf{v}$ в пространстве скоростей тем, что из $\partial f_e / \partial \mathbf{v}$ вычтена проекция на направление \mathbf{v} . Иными словами, вектор $(\partial f_e / \partial \mathbf{v})_\perp$ перпендикулярен \mathbf{v} , так что

$$\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = 0.$$

Интеграл столкновений выражается через дивергенцию этого вектора в пространстве скоростей:

$$\frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{1}{v} \left(\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp - \frac{\mathbf{v}}{v^3} \cdot \left(\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_\perp.$$

В сферической системе координат (v, θ, ψ) она не содержит производных по модулю скорости v и поэтому выражается через угловую часть лапласиана,

$$\nabla_\perp^2 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \quad (19)$$

функции распределения электронов:

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^3} \nabla_\perp^2 f_e. \quad (20)$$

В коэффициенте перед ∇_\perp^2 в правой части (20) легко распознать половину частоты кулоновских столкновений $\nu_{ei}^{(p)}$ электронов с ионами (п. 6.7). В такой форме интеграл столкновений удобно использовать для вычисления электрической проводимости и электронной теплопроводности лоренцевой плазмы (лекция 12). Результат вычислений с точностью до численного коэффициента порядка единицы будет правильным даже при $Z = 1$.

Модель пробных частиц

В модели пробных частиц, описанной ранее в пп. 6.7, 6.8 и 10.5, интеграл столкновений линеен относительно функции распределения пробных частиц. Иными словами, потенциалы Розенблюта зависят только от функции распределения полевых частиц. Это существенное упрощение. Проведём дальнейшие упрощения в интеграле столкновений, предполагая, что функция распределения полевых частиц изотропна, т. е. зависит только от длины вектора \mathbf{p} , но не от его направления:

$$f_a(\mathbf{p}) = f_a(p).$$

Очевидно, что в этом случае потенциалы Розенблюта также изотропны, т. е. $h_a = h_a(v)$, $g_a = g_a(v)$. Следовательно,

$$\frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = \frac{v_\mu}{v} \frac{dh_a}{dv}.$$

Второй потенциал Розенблюта входит в интеграл столкновений в виде производной

$$\frac{\partial^2 g_a}{\partial v_\mu \partial v_\nu} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{v_\nu}{v} \frac{dg_a}{dv} = \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} + \frac{1}{v} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{dg_a}{dv}.$$

Подстановка этих производных в кинетическое уравнение (13) приводит его к виду

$$\begin{aligned} \frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_b^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} & \left[\frac{m_b}{m_a} \frac{v_\mu}{v} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{1}{v} \frac{dg_a}{dv} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{v_\nu}{v} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} = \frac{\partial f_b}{\partial v},$$

первое и второе слагаемые в правой части имеют одинаковую структуру, их удобно объединить в одно выражение

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[\frac{m_b}{m_a} \frac{v_\mu}{v} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right] = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[\frac{v_\mu}{v} \left(\frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) \right].$$

Далее, из-под знака дифференцирования можно вынести множитель v_μ/v^3 ввиду того, что

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{v_\mu}{v^3} = 0,$$

а поскольку

$$\frac{v_\mu}{v^3} \frac{\partial}{\partial v_\mu} [v^2 (\dots)] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [v^2 (\dots)],$$

в итоге получаем

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(\frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) \right]. \quad (22)$$

Последнее слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[-\frac{1}{2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \frac{dg_a}{dv} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right]$$

в (21) почти идентично выражению, стоящему в правой части уравнения (18), отличаясь от него только наличием дополнительного множителя $-\frac{1}{2} \partial g_a / \partial v$. Поэтому результат преобразований также отличается на этот множитель:

$$-\frac{1}{2v^3} \frac{dg_a}{dv} \nabla_\perp^2 f_b. \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в (21), получаем кинетическое уравнение

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_b^2 v^2} \left[\frac{\partial}{\partial v} v^2 \left(\frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} f_b - \frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) - \frac{1}{2v} \frac{dg_a}{dv} \nabla_\perp^2 f_b \right] \quad (24)$$

для пробных частиц в плазме с изотропным распределением полевых частиц.

Если функцию распределения полевых частиц считать максвелловской, потенциалы Розенблюта удаётся выразить через функцию ошибок erf (задача 11.10). Но и без долгих вычислений можно доказать, что

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 g_a}{dv^2} = -\frac{T_a}{m_a v} \frac{dh_a}{dv}. \quad (25)$$

Действительно, последнее слагаемое в правой части (24), содержащее ∇_\perp^2 , обращается в нуль, как только f_b становится изотропной. Оставшееся выражение должно обращаться в нуль, как только функция f_b становится максвелловской с температурой, равной температуре T_a полевых частиц, поскольку обмен энергией между пробными и полевыми температурами должен прекращаться при равенстве температур. Подставляя в (24) соотношение

$$\frac{\partial f_b}{\partial v} = -\frac{m_b v}{T_a} f_b,$$

имеющее место в таком случае, и приравнивая нулю выражение в круглых скобках, получим равенство (25). Разумеется, оно верно и в

том случае, когда функция распределения пробных частиц не будет максвелловской, так как потенциалы h_a и g_a в приближении пробных частиц вообще не зависят от f_b . В итоге получается, что в интеграле столкновений остаются только первые производные h_a и g_a :

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_b^2 v^2} \left[\frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} \left(f_b + \frac{T_a}{m_b v} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) - \frac{1}{2v} \frac{dg_a}{dv} \nabla_{\perp}^2 f_b \right]. \quad (26)$$

Имеется, по крайней мере, два практически значимых применения модели пробных частиц.

Во-первых, пробными часто можно считать быстрые ионы, которые возникают при инжекции пучков быстрых нейтральных атомов с большой энергией в плазму с целью её нагрева. В результате перезарядки атомы превращаются в быстрые ионы и далее удерживаются в плазме магнитным полем, тогда как нейтральные атомы — быстрые инжектированные и медленные продукты перезарядки — свободно входят и выходят из неё. Быстрые ионы тормозятся в плазме, передавая энергию полевым частицам, одновременно испытывая рассеяние по углу.

Во-вторых, заряженные продукты ядерной реакции синтеза также можно считать пробными частицами, поскольку их плотность всё-таки существенно меньше плотности плазмы. При использовании ряда дополнительных, но вполне естественных упрощений функцию распределения быстрых ионов и продуктов термоядерной реакции удаётся найти в аналитическом виде, причём выясняется, что те и другие передают свою энергию преимущественно электронам плазмы (задача 11.11).

11.4. Н-теорема

Исходные динамические уравнения, использованные при выводе интеграла столкновений, обратимы по времени, однако кинетическое уравнение с интегралом столкновений не инвариантно относительно изменения направления t . Это утверждение известно как Н-теорема Людвига Больцмана (Ludwig Boltzmann, 1872 [118]). Он доказал, что существует функционал S от функции распределения f , такой, что $dS/dt \geq 0$ для любой функции f , удовлетворяющей кинетическому уравнению. Функционал S называют энтропией, а современная формулировка Н-теоремы гласит, что энтропия замкнутой системы не убывает со временем.

Приведём доказательство Н-теоремы для лоренцевой плазмы. В этом случае замкнутой системой можно считать электронный газ, поскольку функция распределения «бесконечно» тяжёлых ионов вообще не меняется. Энтропия идеального электронного газа вычисляется по формуле

$$S_e = \iint [1 - \ln f_e] f_e d^3x d^3p. \quad (27)$$

Подстановка в выражение

$$\frac{dS_e}{dt} = - \iint \frac{\partial f_e}{\partial t} \ln(f_e) d^3x d^3p$$

производной $\partial f_e / \partial t$ из кинетического уравнения даёт

$$\frac{dS_e}{dt} = \iint d^3x d^3p \ln(f_e) \left\{ \mathbf{v} \cdot \nabla f_e + \frac{e_e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} - C_{ei} \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках в результате интегрирования даёт ноль, так как с помощью теоремы Остроградского—Гаусса оно преобразуется к интегралу по поверхности, целиком охватывающей объём плазмы, а вне плазмы $f_e = 0$:

$$\begin{aligned} \int d^3x \ln(f_e) \mathbf{v} \cdot \nabla f_e &= \int d^3x \ln(f_e) \operatorname{div}(\mathbf{v} f_e) \\ &= - \int d^3x \mathbf{v} f_e \cdot \nabla \ln(f_e) = - \int d^3x \mathbf{v} \cdot \nabla f_e \\ &= - \int d^3x \operatorname{div}(\mathbf{v} f_e) = 0. \end{aligned}$$

Такая же процедура по отношению ко второму слагаемому даёт ноль при интегрировании по пространству импульсов:

$$\int d^3p \ln(f_e) \frac{e_e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

В итоге останется только последнее слагаемое с интегралом столкновений:

$$\frac{dS_e}{dt} = - \iint d^3x d^3p \ln(f_e) C_{ei}.$$

Дальнейшие вычисления проведём, используя формулу (18) для интеграла столкновений в лоренцевой плазме:

$$C_{ei} = \mathbb{A} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{1}{v} \left(\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\perp}.$$

Явный вид константы \mathbb{A} , не зависящей от v , нам не понадобится, важно только, что $\mathbb{A} > 0$. Используя уже отработанную технологию преобразования интегралов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dS_e}{dt} &= -\mathbb{A} \iint d^3x d^3p \ln(f_e) \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{1}{v} \left(\frac{\partial f_e}{\partial v} \right)_\perp \\ &= \mathbb{A} \iint d^3x d^3p \frac{1}{v f_e} \left(\frac{\partial f_e}{\partial v} \right)_\perp \cdot \frac{\partial f_e}{\partial v} \\ &= \mathbb{A} \iint d^3x d^3p \frac{1}{v f_e} \left(\frac{\partial f_e}{\partial v} \right)_\perp^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как $dS_e/dt \geq 0$, энтропия лоренцевой плазмы действительно не убывает, что и требовалось доказать.

Доказательство Н-теоремы в общем случае немногим более сложно (задача 11.8). Существенно, что утверждение о возрастании (точнее: неубывании) энтропии справедливо для столкновений внутри одного сорта частиц (электронов с электронами или ионов с ионами). Перекрёстные столкновения могут приводить к уменьшению энтропии одной из компонент за счёт увеличения энтропии другой. Однако суммарная энтропия тем не менее не может убывать,

$$\sum_b \frac{dS_b}{dt} = - \sum_{a,b} \iint d^3x d^3p \ln(f_b) C_{ba} \geq 0,$$

причём равенство нулю её производной достигается тогда, когда функции распределения частиц всех сортов максвелловские с одинаковой температурой, вследствие чего интеграл столкновений обращается в нуль (задача 11.6).

Значение Н-теоремы состоит в том, что она указывает направление релаксации произвольного начального состояния плазмы к состоянию термодинамического равновесия с максвелловским распределением частиц.¹⁾

Кроме того, Н-теорема наполняет содержанием утверждение, что уравнение Власова описывает бесстолкновительную плазму. Фактически она указывает количественный критерий, какие траектории частиц в дальнедействующем кулоновском поле нужно считать столкновения, а какие — регулярным движением в самосогласованном

¹⁾Во избежание недоразумений следует пояснить, что приведённое выше доказательство для лоренцевой плазмы даёт основание утверждать лишь то, что в конечном состоянии функция распределения изотропна, т. е. $(\partial f_e / \partial v)_\perp \equiv 0$, так как мы пренебрегли обменом энергией.

поле. Так как уравнение Власова не содержит интеграла столкновений, самосогласованное поле, в том виде как оно определено в п. 10.3, не приводит к возрастанию энтропии и не связано со столкновениями. Всё остальное заключено в интеграле столкновений.

Литература

Вывод интеграла столкновений Ландау, близкий к оригиналу [117], приведён в «Физической кинетике» [45] Е. М. Лифшица и Л. П. Питаевского. Содержанию лекции соответствуют §§41–44; в §45 дан вывод сходящегося интеграла столкновений.

Более детально с теорией кулоновских столкновений можно ознакомиться по статье Ф. Хинтона в 1-м томе «Основ физики плазмы» [112]. Можно также рекомендовать статьи Б. А. Трубникова [72, §§8–11] и Д. В. Сивухина на [73, §§14–17] в сборнике «Вопросы теории плазмы».

Задачи

Задача 11.1. Доказать, что единичный тензор $\delta_{\mu\nu}$ и абсолютно антисимметричный тензор $\varepsilon_{\mu\nu\gamma}$ являются с точностью до постоянных множителей единственными инвариантными тензорами 2-го и 3-го ранга соответственно.

Задача 11.2. Проверить эквивалентность интеграла столкновений Розенблюта (13) и интеграла столкновений Ландау (14). ►► Решение

Задача 11.3. Выразить силу торможения пробной частицы в плазме через потенциалы Розенблюта. ►► Решение

Задача 11.4. Доказать, что интеграл столкновений Ландау удовлетворяет закону сохранения импульса. ►► Решение

Задача 11.5. Доказать, что интеграл столкновений Ландау удовлетворяет закону сохранения энергии. ►► Решение

Задача 11.6. Доказать, что интеграл столкновений Ландау равен нулю, если частицы всех сортов имеют максвелловское распределение с одинаковыми температурой и направленной скоростью. ►► Решение

Задача 11.7. Доказать, что функция распределения, подчиняющаяся кинетическому уравнению с интегралом столкновений Ландау, неотрицательна.

Задача 11.8. Доказать Н-теорему, не упрощая интеграл столкновений Ландау.

Задача 11.9. Плоскопараллельный пучок моноэнергичных электронов инжектируется в плазму с многозарядными ионами. Определить функцию распределения электронов на небольшом расстоянии от границы плазмы. ►► Решение

Задача 11.10. Вычислить потенциалы Розенблюта для максвелловского распределения полевых частиц. ►► Решение

Задача 11.11. Упростить кинетическое уравнение применительно к анализу торможения быстрых ионов, возникающих при инъекции в плазму пучков нейтральных атомов. Считать, что плотность быстрых ионов мала по сравнению с плотностью плазмы, а их скорость значительно больше тепловой скорости ионов, но меньше тепловой скорости электронов. ►► Решение

Задача 11.12. Найти функцию распределения быстрых ионов — продуктов термоядерной реакции. ►► Решение

Задача 11.13. Найти функцию распределения плещущихся ионов, образующихся при стационарной инъекции быстрых нейтральных атомов в плазму. Считать, что угловой и энергетический разброс инжектированных атомов пренебрежимо малы. ►► Решение

Задача 11.14. Найти время жизни плазмы в пробкотроне с большим пробочным отношением. ►► Решение

Двухжидкостная магнитная гидродинамика

Динамика установления теплового равновесия.

Моменты кинетического уравнения.

Уравнения двухжидкостной гидродинамики.

Уравнение Фоккера—Планка с интегралом столкновений Ландау даёт наиболее строгое — кинетическое — описание плазмы. Однако во многих случаях достаточно ограничиться более простым *гидродинамическим приближением*, когда плазма рассматривается как сплошная проводящая жидкость. В зависимости от требуемой точности гидродинамическое описание может быть одножидкостным, двухжидкостным или многожидкостным.

Шведский физик Ханс Альфвен (Hannes Alfvén) первым обратил внимание на то, что при движении проводящей жидкости в магнитном поле в ней индуцируется электрический ток, который совместно с магнитным полем оказывает обратное воздействие на жидкость. Свои идеи, заложившие теоретические основы одножидкостной *магнитной гидродинамики*, Альфвен развивал в приложении к астрофизическим явлениям. Уравнения МГД — так для краткости называют магнитную гидродинамику — позднее были выведены из кинетического уравнения, что позволило установить границы их применимости. Однако зачастую магнитная гидродинамика даёт разумные предсказания даже в тех случаях, когда она формально не применима. Авторы новейших монографий по теории МГД зачастую предпочитают говорить об эффектах, которые магнитная гидродинамика описывает или, напротив, не описывает. Не вдаваясь в дискуссию по столь запутанному вопросу, мы получим уравнения *двухжидкостной магнитной гидродинамики*, вычислив *моменты кинетического уравнения*. И лишь затем покажем, как из этих уравнений получается система уравнений *идеальной магнитной гидродинамики*, с которой начиналась теория Альфвена.

В рамках двухжидкостной МГД плазма рассматривается как сплошная среда, состоящая из двух взаимопроникающих жидкостей — электронной и ионной. Такая модель подходит для описания *простой*

плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта. При наличии ионов нескольких сортов каждый сорт нужно считать отдельной жидкостью, что приводит к многожидкостной магнитной гидродинамике. В тех случаях, когда макроскопические параметры электронов и ионов — в том числе их температура и средняя скорость движения — близки к друг другу, плазму можно рассматривать как одну жидкость, что соответствует одножидкостной магнитной гидродинамике.

12.1. Динамика установления равновесия

Представим, что в начальный момент электроны и ионы имеют существенно неравновесное распределение. Пусть средняя начальная энергия одного электрона и одного иона соответственно равны W_e и W_i , а средняя направленная скорость — U_e и U_i , причём $U_e \ll \sqrt{2W_e/m_e}$ и $U_i \ll \sqrt{2W_i/m_i}$. Вследствие кулоновских столкновений начальная неравновесность будет релаксировать, а функция распределения приближаться к максвелловской. Темп релаксации характеризуется частотами $\nu_{ab}^{(p)}$ и $\nu_{ab}^{(\varepsilon)}$, которые определены соответственно в пп. 6.7 и 6.8 (см. также задачи 6.10 и 6.6.11).

В плазме с многозарядными ионами (у которых $Z > 1$) быстрее всего происходит выравнивание средней скорости электронов и ионов, u_e и u_i . Вследствие рассеяния электронов на ионах за время порядка

$$\tau_e \sim \frac{1}{\nu_{ei}^{(p)}} \quad (1)$$

средние скорости тех и других приблизятся к значению

$$(m_i n_i U_i + m_e n_e U_e) / (m_i n_i + m_e n_e) \approx U_i,$$

определяемому законом сохранения импульса. Затем завершается «максвеллизация» распределения электронов в результате электрон-электронных столкновений. За время порядка

$$\frac{1}{\nu_{ee}^{(p)}} \sim \frac{1}{\nu_{ee}^{(\varepsilon)}} \sim Z \tau_e \quad (2)$$

функция распределения электронов станет почти максвелловской с температурой $T_e = \frac{2}{3} W_e$, но полная кинетическая энергия электронного газа при этом почти не изменится. Аналогичный процесс в газе ионов займёт время порядка

$$\tau_i \sim \frac{1}{\nu_{ii}^{(p)}} \sim \frac{1}{\nu_{ii}^{(\varepsilon)}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} \frac{\tau_e}{Z^2}, \quad (3)$$

а температура ионов установится на уровне $T_i = \frac{2}{3} W_i$.

Самый медленный процесс — это выравнивание электронной и ионной температур. Он завершается за время порядка

$$\frac{1}{\nu_{ei}^{(\varepsilon)}} \sim \frac{m_i}{m_e} \tau_e. \quad (4)$$

В результате в плазме устанавливается *локальное термодинамическое равновесие*, характеризуемое приблизительно одинаковой температурой электронов и ионов.

Дальнейшая эволюция квазинейтральной плазмы продолжается в направлении выравнивания её параметров между различными частями пространства за счёт *процессов переноса*, которые приводят к перераспределению плотности, импульса и энергии между различными областями плазмы. Процессами переноса называют в совокупности *диффузию, теплопроводность и вязкость*. В замкнутой системе они ведут к установлению *полного термодинамического равновесия*. Процессы переноса будут рассмотрены позднее (лекция 13). Пока же достаточно пояснить, что они также обусловлены кулоновскими столкновениями, но идут ещё медленнее, нежели локальное выравнивание температуры ионов и электронов.

В незамкнутой системе состояние полного термодинамического равновесия вообще может быть недостижимо. Например, если на плазму действуют внешние силы, процессы переноса переводят плазму в стационарное состояние, в котором внешнее воздействие уравнивается силой Ампера

$$\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}].$$

В состоянии же полного термодинамического равновесия средние скорости электронов \mathbf{u}_e и ионов \mathbf{u}_i должны быть равны друг другу, но тогда в квазинейтральной плазме (где $e_i n_i + e_e n_e = 0$) обращается в нуль плотность тока

$$\mathbf{j} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i = e_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i),$$

а вместе с ней и сила Ампера. Внешнее воздействие может также препятствовать выравниванию температуры электронов и ионов. Следовательно, в состоянии локального термодинамического равновесия и электроны, и ионы приближённо описываются максвелловской функцией распределения

$$f_{\text{ма}} = \frac{n_a}{(2\pi T_a/m_a)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m_a(v - \mathbf{u}_a)^2}{2T_a} \right], \quad (5)$$

но, вообще говоря, с разной температурой T_a и разной средней скоростью u_a ; здесь и далее индекс a заменяет либо e , либо i , а функция распределения выражена через скорость v вместо импульса $p = m_a v$. Существенно, что параметры $n_a = n_a(r, t)$, $T_a = T_a(r, t)$ и $u_a = u_a(r, t)$, характеризующие это распределение, меняются в пространстве и во времени.

Состояние полного термодинамического равновесия зачастую отождествляют с полностью однородной плазмой, где плотность n_a , температура T_a и скорость u_a всюду одинаковы, а поэтому дальнейшая эволюция прекращается, так что любые макроскопические параметры не зависят ни от координат, ни от времени. Такое представление о состоянии полного равновесия безусловно верно, если ограничиться рассмотрением квазинейтральной плазмы (как и сделано далее). Однако в заряженной плазме, состоящей, например, только из электронов (в общем случае — из частиц с одинаковым отношением e_a/m_a), может существовать локализованное в пространстве состояние глобального термодинамического равновесия, которое характеризуется неоднородной плотностью [119]. Поэтому электронную плазму удаётся удерживать в лабораторных условиях в течение значительно более длительного времени, чем могут себе представить физики, занимающиеся исследованием квазинейтральной плазмы [120].

12.2. Моменты функции распределения

Использование кинетического уравнения для описания плазмы в состоянии локального термодинамического равновесия избыточно. В этом случае достаточно установить, как будут меняться во времени и в пространстве плотность n_a , температура T_a и средняя скорость u_a частиц плазмы каждого сорта, поскольку эти три параметра однозначно определяют функцию распределения частиц, если априори известно, что она является максвелловской. Гидродинамическая теория плазмы строится в предположении, что функция распределения частиц близка к максвелловской, так что

$$f_a = f_{ma} + \delta f_a, \quad \delta f_a \ll f_{ma}. \quad (6)$$

Разделение функции распределения f_a на максвелловский «остов» f_{ma} и «возмущение» δf_a неоднозначно, но эта неоднозначность пока несущественна, поэтому её обсуждение лучше отложить до следующей лекции, так как способ её устранения определяется исключительно соображениями удобства при решении конкретной задачи. Сейчас

достаточно принять соглашение, что n_a , u_a и T_a вычисляются по формулам

$$n_a = \int f_a d^3v, \quad (7a)$$

$$n_a u_a = \int v f_a d^3v, \quad (7б)$$

$$n_a T_a = \frac{1}{3} m_a \int (v - u_a)^2 f_a d^3v, \quad (7в)$$

которые обращаются в тождества, если функция распределения в точности является максвелловской. Если ввести обозначения

$$\langle \dots \rangle_a \equiv \frac{1}{n_a} \int (\dots) f_a d^3v$$

для *моментов функции распределения*, то определения скорости и температуры отдельной *компоненты* плазмы можно записать в компактном виде

$$u_a = \langle v \rangle_a, \quad T_a = \frac{1}{3} m_a \langle w^2 \rangle_a, \quad (8)$$

где $w = v - u_a$ обозначает хаотическую составляющую скорости; по определению $\langle w \rangle_a = 0$. Моменты функции распределения суть среднее (или макроскопическое) значение той или иной величины.

Для максвелловской функции распределения другие моменты либо выражаются через n_a , u_a и T_a , либо равны нулю. Однако в общем случае усреднение тензора более высокого ранга порождает новый момент, который не выражается только через моменты более низкого ранга. Например, тензор потока импульса¹⁾

$$\overset{\leftrightarrow}{\Pi}_a = n_a m_a \langle v v \rangle_a = n_a m_a \langle u u \rangle_a + n_a m_a \langle w w \rangle_a \quad (9)$$

с компонентами

$$\Pi_{a,\mu\nu} = n_a m_a \langle v_\mu v_\nu \rangle_a = n_a m_a \langle u_\mu u_\nu \rangle_a + n_a m_a \langle w_\mu w_\nu \rangle_a,$$

как и тензор давления

$$\overset{\leftrightarrow}{P}_a = n_a m_a \langle w w \rangle_a \quad (10)$$

¹⁾ Следует отличать прямое произведение ab векторов a и b от скалярного произведения $a \cdot b$. Первое является тензором с компонентами $a_\mu b_\mu$, а второе — скаляром $a_\mu b_\mu$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, так что $a_\mu b_\mu = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

с компонентами

$$P_{a,\mu\nu} = m_a n_a \langle w_\mu w_\nu \rangle_a,$$

вообще говоря, не выражаются через ранее введённые величины, поэтому приходится вводить новое обозначение для так называемого тензора вязких напряжений

$$\overleftrightarrow{\pi}_a = m_a n_a \langle w w - \frac{1}{3} w^2 \overleftrightarrow{I} \rangle_a, \quad (11)$$

где \overleftrightarrow{I} — это единичный тензор с компонентами $I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$; $\delta_{\mu\nu} = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$.

Все элементы тензора вязких напряжений равны нулю, $\overleftrightarrow{\pi}_a = 0$, если функция распределения изотропна (например, максвелловская). Тогда тензор давления диагонален, причём $\overleftrightarrow{P}_a = n_a T_a \overleftrightarrow{I}$ (задача 12.2), а тензор $\overleftrightarrow{\Pi}_a$ выражается через \overleftrightarrow{P}_a и вектор u_a , т. е. через тензор меньшей размерности, но в общем случае это не так.

Аналогичная картина возникла бы при вычислении тензора ещё более высокого ранга $\langle v_\mu v_\nu v_\gamma \rangle_a$. Тем не менее можно предположить, что вновь возникающие немаксвелловские поправки малы и на каком-то шаге перехода от кинетического описания плазмы к гидродинамическому их можно отбросить. Если эта гипотеза верна, можно получить замкнутую систему уравнений для величин n_a , u_a и T_a . Для этого нужно последовательно выполнить почленное интегрирование кинетического уравнения по всему пространству импульсов с весом 1, v и v^2 . При этом, помимо ранее определённого тензора вязких напряжений $\overleftrightarrow{\pi}_a$, возникает ещё вектор потока энергии

$$q_a = \frac{1}{2} m_a n_a \langle w^2 w \rangle_a. \quad (12)$$

Как и $\overleftrightarrow{\pi}_a$, он обращается в нуль, если функция распределения в точности является максвелловской.

Наконец, отметим, что тензоры $\overleftrightarrow{\Pi}_a$, \overleftrightarrow{P}_a и $\overleftrightarrow{\pi}_a$ симметричны относительно перестановки индексов, например $\pi_{a,\mu\nu} = \pi_{a,\nu\mu}$. Симметрия следует непосредственно из определения этих тензоров.

12.3. Моменты кинетического уравнения

Для вывода уравнений магнитной гидродинамики, запишем кинетическое уравнение в дивергентной форме:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot v f_a + \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left(E + \frac{1}{c} [v \times B] \right) f_a = C_{aa} + C_{ab}. \quad (13)$$

Здесь индексы a и b могут принимать значения e либо i , причём, если $a = i$, то $b = e$ и наоборот. В плазме с несколькими сортами ионов вместо C_{ab} следует писать сумму $\sum'_b C_{ab}$ по всем сортам частиц, не идентичным a (штрих у знака суммы здесь обозначает, что $b \neq a$), но мы не будем этого делать, ограничившись случаем простой плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта.

Интегрируя кинетическое уравнение по пространству скоростей с весом 1, $m_a v$, $\frac{1}{2} m_a v^2$, вычислим последовательно первый, второй и третий моменты кинетического уравнения. Они выражают соответственно законы сохранения числа частиц, импульса и энергии.

Уравнение непрерывности

Найдём первый момент кинетического уравнения, умножив уравнение (13) на d^3v и вычислив трёхмерный интеграл по всему пространству скоростей. Интегралы столкновений C_{aa} и C_{ab} в правой части уравнения выпадут согласно (11.15а), так как число частиц при кулоновских столкновениях сохраняется. Интеграл от третьего слагаемого в левой части (13) также равен нулю. В этом легко убедиться, преобразовав это слагаемое к интегралу по бесконечно удалённой поверхности в пространстве скоростей при помощи теоремы Остроградского—Гаусса:

$$\int d^3v \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) f_a = \oint dS_v \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) f_a.$$

На этой поверхности функция распределения f_a равна нулю, а вместе с ней и весь интеграл. В оставшихся двух слагаемых можно поменять порядок интегрирования по импульсу и дифференцирования по времени или координатам, после чего интегралы выражаются через моменты функции распределения. Например:

$$\int d^3v \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3v f_a = \frac{\partial n_a}{\partial t}.$$

Получившуюся в итоге формулу

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot n_a \mathbf{u}_a = 0$$

называют уравнением непрерывности и чаще всего записывают в виде

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \operatorname{div} (n_a \mathbf{u}_a) = 0.$$

Ещё одна форма уравнения непрерывности

$$\frac{d_a n_a}{dt} + n_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a = 0 \quad (14)$$

более похожая на другие уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики (см. ниже), использует обозначение

$$\frac{d_a}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_a \cdot \nabla)$$

для конвективной (полной) производной по времени.

Уравнение движения

Теперь вычислим второй момент кинетического уравнения, предварительно расписав его покомпонентно:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} v_\nu f_a + \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_\nu f_a = C_{aa} + C_{ab}, \quad (15)$$

где $F_\nu = e_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right)_\nu$. Умножим это уравнение на вектор $m_a \mathbf{v}$ с компонентами $m_a v_\mu$ и проинтегрируем по d^3v . В интеграле от первого слагаемого в левой части легко распознать один из моментов функции распределения:

$$\int d^3v m_a v_\mu \frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3v m_a v_\mu f_a = \frac{\partial}{\partial t} m_a n_a \langle v_\mu \rangle_a.$$

Примерно то же происходит со вторым слагаемым:

$$\int d^3v m_a v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} v_\nu f_a = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int d^3v m_a v_\mu v_\nu f_a = \frac{\partial}{\partial x_\nu} m_a n_a \langle v_\mu v_\nu \rangle_a.$$

В последнем слагаемом в левой части перед интегрированием нужно выполнить преобразование

$$v_\mu \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_\nu f_a = \frac{\partial}{\partial v_\nu} v_\mu F_\nu f_a - F_\nu f_a \frac{\partial v_\mu}{\partial v_\nu} = \frac{\partial}{\partial v_\nu} v_\mu F_\nu f_a - F_\mu f_a.$$

Первый член в преобразованном выражении имеет вид дивергенции тензора $v_\mu F_\nu f_a$. При помощи теоремы Остроградского—Гаусса он преобразуется к интегралу по бесконечно удалённой поверхности, где $f_a = 0$. Следовательно,

$$\int d^3v v_\mu \frac{\partial}{\partial v_\nu} F_\nu f_a = - \int d^3v F_\mu f_a = -n_a \langle F_\mu \rangle_a.$$

В итоге получаем уравнение

$$m_a \frac{\partial}{\partial t} n_a u_{a,\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Pi_{a,\nu\mu} - e_a n_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] \right)_\mu = R_{ab,\mu},$$

где $\Pi_{a,\nu\mu} = \Pi_{a,\mu\nu} = n_a m_a \langle v_\mu v_\nu \rangle$ — тензор потока импульса частиц сорта a , а $R_{ab,\mu}$ — μ -проекция силы Брагинского

$$R_{ab} = m_a \int v C_{ab} d^3v = m_a \int \mathbf{w} C_{ab} d^3v, \quad (16)$$

действующей на компоненту a со стороны компоненты b . Вследствие закона сохранения импульса (11.156)

$$R_{ab} = -R_{ba}. \quad (17)$$

Слагаемое с C_{aa} в интеграле столкновений при интегрировании выпадает (даёт ноль) так же в силу закона сохранения импульса в столкновениях частиц одного сорта.

В тензоре потока импульса

$$\Pi_{a,\mu\nu} = n_a m_a \langle v_\mu v_\nu \rangle_a = m_a n_a u_{a,\mu} u_{a,\nu} + n_a m_a \langle w_\mu w_\nu \rangle_a$$

выделяют часть $m_a n_a u_{a,\mu} u_{a,\nu}$, связанную с макроскопическим движением, и тензор давления $P_{a,\mu\nu} = n_a m_a \langle w_\mu w_\nu \rangle$. После этого с помощью преобразования

$$\frac{\partial}{\partial t} n_a u_{a,\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} n_a u_{a,\mu} u_{a,\nu} = n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_{a,\mu} + u_{a,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} u_{a,\mu} \right) + u_{a,\mu} \left(\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} n_a u_{a,\nu} \right)$$

выделяют конвективную производную скорости $d_a \mathbf{u}_a / dt$ с учётом того, что второе выражение в круглых скобках в преобразованном выражении обращается в ноль в силу уравнения непрерывности. В результате получается *уравнение движения*

$$m_a n_a \frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = -\nabla \cdot \vec{P}_a + e_a n_a \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] \right) + \mathbf{R}_{ab}, \quad (18)$$

где дивергенция $\nabla \cdot \vec{P}_a$ тензора \vec{P}_a является вектором с компонентами

$$(\nabla \cdot \vec{P}_a)_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} P_{a,\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} P_{a,\mu\nu}.$$

Ещё одна форма уравнения движения

$$m_a n_a \frac{d_a \mathbf{u}_a}{dt} = -\nabla p_a + e_a n_a \mathbf{E} + \frac{e_a}{c} n_a [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \vec{\pi}_a + \mathbf{R}_{ab} \quad (19)$$

получается путём выделения в тензоре давления

$$\vec{P}_a = p_a \vec{I} + \vec{\pi}_a$$

парциального давления

$$p_a = \frac{1}{3} n_a m_a \langle w^2 \rangle_a = n_a T_a \quad (20)$$

и тензора вязких напряжений

$$\vec{\pi}_a = m_a n_a \langle \mathbf{w} \mathbf{w} - \frac{1}{3} w^2 \vec{I} \rangle_a.$$

В правой части уравнения (19) стоят силы, действующие на компоненту («жидкость») сорта a в единице объёма плазмы. Первое слагаемое — это сила давления, второе и третье — сила Лоренца. Четвёртое

слагаемое содержит тензор вязких напряжений $\vec{\pi}_a$ и представляет собой вязкие силы. Позднее мы узнаем, что вязкие силы возникают только в неоднородной плазме. Сила Брагинского R_{ab} включает силу трения, пропорциональную разности $u_b - u_a$ средних скоростей компонент плазмы, и так называемую термосилу, которая возникает в плазме с градиентом температуры. Силу трения нетрудно вычислить, полагая, что обе компоненты имеют максвелловское распределение (задача 12.4), однако, как показывает точное решение кинетического уравнения (лекция 13), результат подобных вычислений оказывается верным только по порядку величины.

Уравнение переноса тепла

Третье уравнение — *уравнение переноса тепла* — получится, если умножить кинетическое уравнение на $\frac{1}{2}m_a v^2$ и проинтегрировать по d^3v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} m_a n_a \langle v^2 \rangle_a + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{1}{2} m_a n_a \langle v^2 v_\nu \rangle_a - e_a n_a \langle v_\nu \rangle_a E_\nu = \\ = \frac{1}{2} m_a \int v^2 C_{aa} d^3v + \frac{1}{2} m_a \int v^2 C_{ab} d^3v. \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее слагаемое в левой части вновь получено путём интегрирования по частям слагаемого с силой Лоренца в кинетическом уравнении, причём магнитная часть силы выпала, поскольку $\mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$.

Вследствие закона сохранения энергии (11.15в), применённого к кулоновским столкновениям частиц одного сорта, в правой части останется только второе слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_a \int v^2 C_{ab} d^3v = \frac{1}{2} m_a \int (\mathbf{u}_a + \mathbf{w})^2 C_{ab} d^3v = \\ = m_a \int (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{w}) C_{ab} d^3v + \frac{1}{2} m_a \int w^2 C_{ab} d^3v, \end{aligned} \quad (22)$$

которое описывает обмен энергией между разными компонентами плазмы; здесь учтено, что $\frac{1}{2} m_a \int u_a^2 C_{ab} d^3v = \frac{1}{2} m_a u_a^2 \int C_{ab} d^3v = 0$. Часть переданной энергии

$$m_a \int (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{w}) C_{ab} d^3v = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}$$

соответствует работе силы \mathbf{R}_{ab} , а

$$Q_{ab} \equiv \int \frac{1}{2} m_a w^2 C_{ab} d^3v \quad (23)$$

есть количество теплоты, напрямую получаемой частицами сорта a в столкновениях с частицами сорта b за единицу времени в единице объёма. Последнее слагаемое в левой стороне уравнения (21) перенесём на правую сторону, после чего на будет равна

$$Q_{ab} + e_a n_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}.$$

В оставшихся слева слагаемых выделим среднюю скорость \mathbf{u}_a , аналогично тому, как это было сделано при выводе уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_a n_a \langle v^2 \rangle_a \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} m_a n_a \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_a \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 + \frac{3}{2} n_a T_a \right) + \\ &+ \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 \mathbf{u}_a + \frac{3}{2} n_a T_a \mathbf{u}_a + \vec{P}_a \cdot \mathbf{u}_a + \mathbf{q}_a \right). \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\vec{P}_a \cdot \mathbf{u}_a = P_{a,\mu\nu} u_{a,\nu}$ для скалярного произведения тензора давления \vec{P}_a с вектором скорости \mathbf{u}_a , а также выделен вектор потока тепла $\mathbf{q}_a = \frac{1}{2} m_a n_a \langle w^2 \mathbf{w} \rangle_a$. Подчёркнутые слагаемые преобразуем, используя сначала уравнение непрерывности,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} n_a m_a u_a^2 \mathbf{u}_a \right) &= \\ &= \frac{1}{2} m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_a^2 + \mathbf{u}_a \cdot \nabla u_a^2 \right) + \frac{1}{2} m_a u_a^2 \left(\frac{\partial n_a}{\partial t} + \operatorname{div} n_a \mathbf{u}_a \right) = \\ &= \frac{1}{2} m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_a^2 + \mathbf{u}_a \cdot \nabla u_a^2 \right), \end{aligned}$$

а затем соотношение

$$\frac{1}{2} m_a n_a \left(\frac{\partial}{\partial t} u_a^2 + \mathbf{u}_a \cdot \nabla u_a^2 \right) = -\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \vec{P}_a) + n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab},$$

следующее из уравнения движения (18) после умножения скалярно на \mathbf{u}_a . В итоге с левой стороны уравнения остаётся выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} n_a T_a + \operatorname{div} \left(\frac{3}{2} n_a T_a \mathbf{u}_a + \vec{P}_a \cdot \mathbf{u}_a + \mathbf{q}_a \right) - \mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \vec{P}_a) + n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}.$$

Оно поддаётся дальнейшему упрощению с учётом равенства

$$\operatorname{div}(\vec{P}_a \cdot \mathbf{u}_a) - \mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \vec{P}_a) = (\vec{P}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a,$$

которое будет очевидным, если записать его в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} P_{a,\mu\nu} u_{a,\nu} - u_{a,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} P_{a,\mu\nu} = P_{a,\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} u_{a,\nu}.$$

Далее полезно выделить в тензоре давления $P_{a,\mu\nu} = p_a \delta_{\mu\nu} + \pi_{a,\mu\nu}$ его изотропную часть $p_a \delta_{\mu\nu}$ и тензор вязких напряжений $\pi_{a,\mu\nu}$. Тогда

$$(\vec{P}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a = p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a + (\vec{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a.$$

Наконец, нужно заметить, что $n_a T_a = p_a$, а

$$\frac{\partial p_a}{\partial t} + \operatorname{div} (p_a \mathbf{u}_a) = \frac{d_a p_a}{dt} + p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a.$$

В итоге левая сторона исходного уравнения (21) преобразуется в

$$\frac{3}{2} \frac{d_a p_a}{dt} + \frac{5}{2} p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a + \operatorname{div} \mathbf{q}_a + (\vec{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a + n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}.$$

Сравнивая её с правой стороной, замечаем, что слагаемые $n_a e_a \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{E}$ и $\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_{ab}$ есть и слева, и справа. Сокращая их, приходим к *уравнению баланса энергии*

$$\frac{3}{2} \frac{d_a p_a}{dt} + \frac{5}{2} p_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a = Q_{ab} - \operatorname{div} \mathbf{q}_a - (\vec{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a. \quad (24)$$

Первое слагаемое в его правой стороне описывает локальную передачу тепла от одной компоненты плазмы к другой. Второе слагаемое описывает нагрев вследствие переноса тепла. Наконец, третье слагаемое отвечает за нагрев вязким трением.

В уравнении баланса энергии удобно выделить энтропию единицы объёма

$$s_a = n_a \ln(p_a^{3/2}/n_a^{5/2}) \quad (25)$$

(задача 12.3). Для этого нужно исключить $\operatorname{div} \mathbf{u}_a$ при помощи уравнения непрерывности (14). Так как $d(s_a/n_a) = \frac{3}{2} dp_a/p_a - \frac{5}{2} dn_a/n_a$, в результате получим *уравнение переноса тепла*

$$n_a T_a \frac{d_a}{dt} \frac{s_a}{n_a} = Q_{ab} - (\vec{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a - \operatorname{div} \mathbf{q}_a. \quad (26)$$

Электрическое и магнитное поля в явном виде не входят в это уравнение в полном соответствии с утверждением, что самосогласованное поле не изменяет энтропию плазмы (п. 10.3). Возможно только косвенное влияние самосогласованного поля на рост энтропии через поддержание электрического тока. Вследствие кулоновских столкновений плазма приобретает электрическое сопротивление, поэтому электрический ток нагревает плазму, как и любой другой проводник.

Омический нагрев входит в уравнение переноса тепла в виде доли величины Q_{ab} , которая имеет размерность мощности на единицу объёма. Другая часть Q_{ab} зависит от разности температур T_a и T_b (задача 12.6). Априори нельзя утверждать, что Q_{ab} меняет знак при перестановке индексов, как это происходит с силой \mathbf{R}_{ab} . Из закона сохранения энергии в кулоновских столкновениях (11.15в) следует равенство

$$Q_{ab} + Q_{ba} = -\mathbf{R}_{ab} \cdot \mathbf{u}_a - \mathbf{R}_{ba} \cdot \mathbf{u}_b = -\mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b). \quad (27)$$

Равенство $Q_{ab} = -Q_{ba}$ имеет место только в отсутствие электрического тока, когда $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_b$. Если же $\mathbf{u}_a \neq \mathbf{u}_b$, то $\mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$ определяет мощность омического нагрева.

12.4. Двухжидкостная гидродинамика

Запишем систему уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики, собрав вместе все уравнения:

$$\frac{dn_a}{dt} + n_a \operatorname{div} \mathbf{u}_a = 0, \quad (28a)$$

$$m_a n_a \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -\nabla p_a + e_a n_a \mathbf{E} + \frac{e_a}{c} n_a [\mathbf{u}_a \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \vec{\pi}_a + \mathbf{R}_{ab}, \quad (28б)$$

$$n_a T_a \frac{ds_a}{dt} = Q_{ab} - (\vec{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_a - \operatorname{div} \mathbf{q}_a. \quad (28в)$$

Их следует дополнить уравнениями Максвелла (10.14), (10.15), где

$$\mathbf{j} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i, \quad \rho_\varepsilon = e_e n_e + e_i n_i, \quad (29)$$

причём $\partial \rho_\varepsilon / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, как легко проверить с помощью уравнений (28a).

Считая все происходящие в плазме движения медленными, со скоростями значительно меньше скорости света, в первом уравнении (10.15) для магнитного поля обычно (но не всегда) пренебрегают током смещения $(1/c)\partial \mathbf{E}/\partial t$. Одновременно с этим необходимо заменить второе уравнение (10.15) на условие квазинейтральности $\rho_\varepsilon = 0$, иначе система уравнений не будет согласована:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (30)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \rho_\varepsilon = 0. \quad (31)$$

Действительно, вычисляя дивергенцию первого уравнения (10.15), ввиду тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ и уравнения непрерывности $\partial \rho_\varepsilon / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, получаем скалярное равенство $\partial(\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi \rho_\varepsilon) / \partial t = 0$, для которого второе уравнение (10.15) выступает в роли начального условия. Если отбросить ток смещения и повторить вычисления, очевидно, получим уравнение $\partial \rho_\varepsilon / \partial t = 0$. Начальным условием для него является равенство $\rho_\varepsilon = 0$, которое подразумевает $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Нужно понимать, что равенство $\rho_\varepsilon = 0$ (как и $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$) является приближённым. Если необходимо вычислить ρ_ε , следует использовать уравнение $\rho_\varepsilon = (1/4\pi) \operatorname{div} \mathbf{E}$.

Сформулированная система уравнений формальна, пока нет способа вычислить моменты высших порядков, входящие в правые части

уравнения движения и уравнения переноса тепла. Вычислению R_{ab} , π_a , q_a , Q_{ab} посвящена следующая лекция.

Литература

Систематическое изложение предмета дано в 1-м томе «Вопросов теории плазмы» в классической статье [121] С. И. Брагинского. Материалу лекции соответствуют §§1 и 2.

Полезным дополнением могут служить статьи Р. Калсруда [122] и Ф. Хинтона [112] в «Основах физики плазмы». В книге Дж. Фрейдберга «Plasma Physics and Fusion Energy» [16] материалу лекции соответствует глава 10.

Задачи

Задача 12.1. В лоренцевой плазме максвеллизация ионов может происходить быстрее, чем максвеллизация электронов. Оценить минимально необходимый для этого заряд ионов Z , считая, что температуры ионов и электронов примерно одинаковы. ►► Решение

Задача 12.2. Доказать, что при усреднении по изотропному распределению частиц $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a = \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle_a \delta_{\mu\nu}$. ►► Решение

Задача 12.3. Вычислить энтропию на единицу объёма плазмы с максвелловской функцией распределения. ►► Решение

Задача 12.4. Вычислить силу трения (16), предполагая, что распределение электронов описывается «сдвинутой» функцией Максвелла (5), причём средняя направленная скорость электронов мала по сравнению с их тепловой скоростью. ►► Решение

Задача 12.5. Используя решение предыдущей задачи, вычислить проводимость плазмы. ►► Решение

Задача 12.6. Вычислить удельную мощность Q_{ei} нагрева электронов ионами в простой плазме. ►► Решение

Задача 12.7. (Гирорелаксационный нагрев.) Плазма помещена в переменное магнитное поле, частота изменения которого сопоставима с частотой столкновений. Вычислить темп нарастания температуры плазмы. ►► Решение

Уравнения переноса

Кинетические коэффициенты. Метод Чепмена—Энскога. Теплопроводность и проводимость плазмы. Термосила. Тензор вязких напряжений.

Процессы переноса, приближающие плазму к состоянию полного термодинамического равновесия, удаётся описать в рамках двух-жидкостной магнитной гидродинамики, выразив высшие моменты функции распределения, такие как поток тепла q_a и тензор вязких напряжений $\overset{\leftrightarrow}{\pi}_a$, через пространственные производные низших моментов n_a , u_a и T_a для каждой «жидкости», помеченной здесь индексом a . Коэффициенты пропорциональности между высшими моментами функции распределения и пространственными производным n_a , u_a и T_a называют *транспортными* или *кинетическими коэффициентами*, так как для их вычисления приходится в той или иной степени использовать представления, развитые в кинетической теории.

Гидродинамические уравнения, дополненные кинетическими коэффициентами, называют *уравнениями переноса*. В применении к газам они были выведены в 1916—1917 гг. независимо С. Чепменом (Sydney Chapman) и Д. Энскогом (David Enskog), причём разными способами. Формулировка теории Чепмена [124] была основана скорее на интуиции, тогда как в трактовке Энскога [125] большее внимание уделялось математической форме и изяществу. С. Чепмен и Т. Каулинг (Thomas Cowling) в своей книге [126] в 1939 г. вычислили некоторые коэффициенты переноса для плазмы в магнитном поле. Позднее Каулинг применил разложение функции распределения по ортогональным полиномам для вычисления кинетических коэффициентов [128]. Завершил построение системы уравнений *классического* переноса в простой плазме С. И. Брагинский, придумав оригинальный способ «препарирования» интеграла столкновений, основанный на малости отношений масс электрона и иона [129, 130]. Позднее теория Брагинского была уточнена Е. М. Эпперлейном (E. M. Epperlein) и М. Г. Хайнсом (M. G. Haines) [131, 132].

13.1. Кинетические коэффициенты

Каждый момент кинетического уравнения «зацепляет» моменты функции распределения более высокого порядка, поэтому надо где-то оборвать цепочку уравнений для моментов. Радикальный способ — просто отбросить моменты высших порядков. Однако если это сделать прямо в уравнениях движения и переноса тепла (12.28), то будут выброшены процессы переноса. В кинетическом описании они обусловлены анизотропной немаксвелловской поправкой к функции распределения частиц плазмы. При вычислении моментов функции распределения эта поправка даёт поток частиц, импульса и энергии, связанный с неоднородностью макроскопических параметров плазмы.

Идея Чепмена и Энскога, в полной мере реализованная Брагинским, состоит в том, что моменты высших порядков выражаются через пространственные производные моментов более низких порядков, которые считаются малыми. Для этого в кинетическом уравнении производная по времени от немаксвелловской поправки к функции распределения отбрасывается, так как процессы переноса идут медленнее, чем установление локального термодинамического равновесия. Решение соответствующей стационарной задачи позволяет выразить моменты функции распределения высших порядков через пространственные производные моментов низших порядков. Найденные таким способом высшие моменты подставляют в гидродинамические уравнения, замыкая систему уравнений; из неё уже можно определить, как изменяются макроскопические параметры плазмы с течением времени.

Помимо неоднородности макроскопических параметров, вносящих анизотропию в функцию распределения частиц плазмы, имеется и другой источник неравновесности, не имеющий прямого аналога в теории Чепмена и Энскога. Даже если в некоторой области плазма однородна, но средние скорости (или температуры) электронов и ионов различны, возникает обмен импульсом (энергией) между компонентами плазмы. Темп выравнивания импульса (энергии) в этом случае зависит только от локальной разности скоростей (температур) электронов и ионов. Соответственно, в моментах интеграла столкновений R_{ab} и Q_{ab} , входящих в уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики (12.28), появляются слагаемые, пропорциональные разности локальных скоростей и разности локальных температур.

Малые неоднородности различного вида, такие как неоднородность плотности, средней скорости или температуры, а также слабые

неравновесности иного рода, такие как относительное движение электронов и ионов или различие их температур, создают малый переток частиц, импульса и тепла, так что различные процессы переноса можно рассматривать независимо один от другого. Это упрощает расчёт кинетических коэффициентов, позволяя разделить одну большую проблему на несколько частных задач. Например, чтобы вычислить поток тепла, вызванный градиентом температуры, градиентами других макроскопических параметров можно пренебречь.

Не имея возможности в полной мере изложить теорию Брагинского, мы рассмотрим только некоторые из процессов переноса, обусловленные кулоновскими столкновениями частиц в полностью ионизованной плазме.

13.2. Теплопроводность плазмы

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в плазме с однородной плотностью $n_e = Zn_i$ имеется градиент электронной температуры, направленный вдоль оси z , т. е. $\nabla T_e = (\partial T_e / \partial z) \hat{z}$, где \hat{z} обозначает единичный вектор вдоль оси z . Будем считать, что магнитное поле отсутствует, а ионы неподвижны. Предположим, что через плазму не протекает электрический ток, так как она изолирована от внешних проводников; тогда электронная компонента также находится в покое и её средняя скорость равна нулю, т. е. $u_e = 0$. Для этого необходимо чем-то уравновесить градиент электронного давления $\nabla p_e = n_e \nabla T_e$. Это можно сделать, наложив на плазму электрическое поле $E = E \hat{z}$, которое должно удерживать электроны. Если плазма изолирована, электрическое поле создаётся зарядами, скапливающимися на её поверхности. Величина этого поля будет найдена ниже, а пока только зафиксируем тот факт, что в проводнике (каковым является плазма), электрическое поле возникает даже при отсутствии тока, если имеется градиент температуры. Это явление было открыто Томасом Зеебеком (Thomas Seebeck, 1821).

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения электронов, отбросив в нём производную $\partial f / \partial t$:

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (1)$$

Здесь $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / m^2$, причём $2A/v^3$ имеет смысл частоты столкновений $\nu_{ei}^{(p)}$, которая характеризует торможение электронов на ионах (п. 6.7). Для простоты мы воспользовались интегралом столкновений в приближении лоренцевой плазмы (п. 11.3) и учли, что в силу

симметрии задачи искомая функция f не зависит от азимутального угла ψ вокруг оси z . Напомним, что в лоренцевой плазме $Z \gg 1$ и столкновения электронов с электронами происходят в Z раз реже, нежели с ионами, так что ими можно пренебречь. Для краткости в промежуточных вычислениях опускаем индекс e у параметров, характеризующих электроны и их функцию распределения, в частности, вместо e_e просто пишем $-e$, подразумевая, что $e > 0$ обозначает элементарный заряд. В конечном результате индексы будут восстановлены без дополнительных пояснений. Отметим также, что в данной лекции мы используем функцию распределения $f = f(v, z)$ в пространстве скоростей, а не импульсов.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$f = f_M + \delta f. \quad (2)$$

Здесь

$$f_M = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{mv^2}{2T} \right), \quad (3)$$

а $\delta f \ll f_M$. При подстановке $f = f_M + \delta f$ в правой части уравнения останется только δf , так как f_M не зависит от θ . В левой части оставим только слагаемые, содержащие f_M . В упрощённом таким способом кинетическом уравнении

$$v_z \frac{\partial f_M}{\partial z} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_M}{\partial v_z} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} \quad (4)$$

скорость v_z вдоль направления градиента температуры связана с углом θ , который отсчитывается от этого же направления, соотношением $v_z = v \cos \theta$. Раскрывая производные с помощью легко проверяемых формул,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_M}{\partial v_z} &= - \frac{mv_z}{T} f_M = - \frac{mv \cos \theta}{T} f_M, \\ \frac{\partial f_M}{\partial z} &= - \frac{3}{2T} \frac{\partial T}{\partial z} f_M + \frac{mv^2}{2T^2} \frac{\partial T}{\partial z} f_M = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{3}{2} \right) f_M, \end{aligned}$$

перепишем последнее уравнение в виде

$$\left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{3}{2} \right) + \frac{eE}{T} \right] f_M v \cos \theta = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \delta f}{\partial \theta}.$$

Оно решается методом разделения переменных. При подстановке

$$\delta f = \Phi(v) \cos \theta$$

правая часть уравнения превратится в $-2(A/v^3) \Phi(v) \cos \theta$, множитель $\cos \theta$ сократится, подтверждая нашу догадку относительно зависимости δf от θ . В итоге получаем уравнение на функцию $\Phi(v)$:

$$\Phi(v) = - \frac{v^4}{2A} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{3}{2} \right) + \frac{eE}{T} \right] f_M. \quad (5)$$

В его правую сторону входит неизвестная величина электрического поля. Чтобы найти её, нужно вспомнить, что разделение функции распределения $f = f_m + \delta f$ на максвелловскую часть f_m и поправку δf , вообще говоря, неоднозначно. Неоднозначность устраняется конкретным выбором параметров n_a , u_a и T_a в формуле (12.5) для максвелловской части функции распределения. Если условиться, что эти параметры тождественны определению (12.7) плотности, средней скорости и температуры, то следует признать, что следующие интегралы от поправки δf равны нулю:

$$\int \delta f d^3v = 0, \quad (6a)$$

$$\int v \delta f d^3v = 0, \quad (6б)$$

$$\int (v - u)^2 \delta f d^3v = 0. \quad (6в)$$

Здесь $d^3v = v^2 dv \sin \theta d\theta d\psi$. Сравнение формул (12.5) и (3) показывает, что в рассматриваемой задаче $u = 0$.

Условия (6а) и (6в) выполняются очевидным образом, так как соответствующие интегралы обращаются в ноль при интегрировании по углу θ . В уравнении (6б) интегралы от $v_x = v \sin \theta \cos \psi$ и $v_y = v \sin \theta \sin \psi$ также обращаются в ноль вследствие азимутальной симметрии задачи, поэтому достаточно рассмотреть только z -проекцию:

$$\int v_z \delta f d^3v = \int \Phi(v) v \cos^2 \theta d^3v = \langle \cos^2 \theta \rangle \int \Phi(v) v d^3v = 0.$$

Усреднение $\cos^2 \theta$ по телесному углу даёт ненулевой множитель,

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta 2\pi \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{3},$$

поэтому последнее условие приводит к уравнению

$$\int \Phi(v) v d^3v = 0.$$

Подставляя сюда функцию $\Phi(v)$ из (5), можно вычислить величину возникающего в плазме электрического поля. Учитывая, что

$$\int f_m v^{2k-1} d^3v = \frac{2k!}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m} \right)^{k-1/2} n \quad (7)$$

при любом целом k , находим

$$eE = -\frac{5}{2} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (8)$$

Таким образом,

$$\delta f = \frac{v^4}{2A} \left(4 - \frac{mv^2}{2T} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \cos \theta f_m. \quad (9)$$

Оценивая δf при тепловой скорости электронов, нетрудно видеть, что $\delta f \ll f_m$, если длина пробега электронов $\lambda = 1/n_i \sigma_{ei}$ мала по сравнению с характерной длиной неоднородности температуры $\ell = T/|\partial T/\partial z|$. Соответственно, только при условии

$$\lambda \ll \ell \quad (10)$$

выполняется исходное предположение о близости функции распределения к максвелловской. Если оно нарушено, уравнения магнитной гидродинамики формально не применимы. Это общее правило, хотя оно и получено на одном конкретном примере.

При известной функции распределения f нетрудно найти электронный поток тепла

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} m \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f \, d^3 v. \quad (11)$$

В рассматриваемом случае он направлен вдоль оси z и обусловлен только поправкой δf . Так как $\mathbf{u} = 0$, имеем

$$q_z = \frac{1}{2} m \int v^3 \cos \theta \delta f \, d^3 v.$$

При вычислении q_z после подстановки δf нужно использовать интеграл (7) с $k = 4$ и $k = 5$:

$$q_z = -32 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{A} \left(\frac{T}{m}\right)^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z} = -32 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e m_e^2}{2\pi n_i Z^2 e^4 \Lambda_{ei}} \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

В векторной записи полученная формула называется законом Фурье (Jean Fourier, 1822):

$$\mathbf{q}_{Te} = -\kappa_e \nabla T_e. \quad (12)$$

Здесь индекс e указывает на электроны, а индекс T подчёркивает, что вычисленный поток тепла связан с градиентом температуры. Коэффициент пропорциональности κ_e между потоком тепла \mathbf{q}_{Te} и градиентом электронной температуры $\partial T_e/\partial z$ (взятый без знака «минус») называется *коэффициентом теплопроводности*. Для электронов

$$\kappa_e = \frac{128}{3\pi} \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, \quad (13)$$

где время

$$\tau_e = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \frac{m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{n_i Z^2 e^4 \Lambda_{ei}} \quad (14)$$

характеризует время рассеяния тепловых электронов на ионах плазмы. Параметр τ_e возникает во многих задачах, связанных с вычислением кинетических коэффициентов. Числовой множитель в его определении выбран так, чтобы максимально упростить формулу для

силы трения электронов об ионы в пределе $Z \rightarrow \infty$ (задача 12.4), а также выражение для так называемой спитцеровской проводимости плазмы (задача 12.5). При других значениях Z числовой множитель в формуле (13) может отличаться от $128/3\pi = 13,58\dots$ в несколько раз; в частности, при $Z = 1$ он равен 3,16 [121].

Вычисление ионного потока тепла оказывается существенно сложнее, но числовой коэффициент не зависит от Z . Ионный поток тепла

$$q_{Ti} = -\kappa_i \nabla T_i \quad (15)$$

направлен против градиента ионной температуры, а коэффициент ионной теплопроводности равен

$$\kappa_i = 3,91 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i}, \quad (16)$$

где

$$\tau_i = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \frac{m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{n_i Z^4 e^4 \Lambda_{ii}}. \quad (17)$$

В общем случае расчёт кинетических коэффициентов — весьма сложная задача, но оценку порядка величины любого коэффициента можно получить при помощи простых и наглядных рассуждений, как показано в следующем параграфе.

Полезно обратить внимание, что время τ_e примерно равно обратной частоте $1/\nu_{ei}^{(p)}$, которая характеризует потерю направленного импульса электронами в столкновениях с ионами (задача 6.10), хотя на первый взгляд могло бы показаться, что перенос тепла электронами связан с обменом энергией между ними же, а такой обмен характеризуется частотой $\nu_{ee}^{(e)}$ (задача 6.11). Так как $\nu_{ei}^{(p)} \approx Z\nu_{ee}^{(e)}$, при $Z = 1$ различие между $\nu_{ei}^{(p)}$ и $\nu_{ee}^{(e)}$ не существенно, и необходимо учитывать столкновения электронов как с ионами, так и с электронами. Однако при $Z > 1$ оказывается, что $\nu_{ei}^{(p)} > \nu_{ee}^{(e)}$ и перенос тепла электронами происходит преимущественно за счёт их столкновений с ионами, тогда как частота $\nu_{ee}^{(e)}$ характеризует темп «максвеллизации» функции распределения электронов. Что касается переноса тепла ионами, то характерное время этого процесса τ_i примерно равно $1/\nu_{ii}^{(e)}$.

13.3. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим процесс выравнивания температуры в плазме с однородным распределением плотности на элементарном уровне, не прибегая к решению кинетического уравнения. Для определённости будем говорить о температуре электронов, хотя всё сказанное в равной степени будет применимо также и к ионам.

Пусть температура электронов $T(z)$ медленно увеличивается в положительном направлении оси координат z , как показано на рис. 13.1, но электроны в среднем покоятся, поэтому через произвольное сечение z слева направо и справа налево за единицу времени проходит в точности одинаковое число электронов $\Gamma \approx nv_T$, где v_T — их тепловая скорость.

Поток тепла q возникает от того, что каждый электрон, приходящий слева, приносит в среднем меньшую энергию $K = \frac{3}{2}T$, чем электрон, приходящий из правой, более горячей, области. Так как в промежуток времени τ между двумя столкновениями электрон пролетает расстояние порядка длины свободного пробега λ , электроны, приходящие в плоскость z справа, имеют энергию $K_+ \approx \frac{3}{2}T(z + \lambda)$, тогда как электроны слева приходят с энергией $K_- \approx \frac{3}{2}T(z - \lambda)$. Следовательно, поток тепла, идущий слева направо, равен

$$q_+ = K_- \Gamma \approx \frac{3}{2} \left[T - \frac{\partial T}{\partial z} \lambda \right] nv_T.$$

Встречный поток тепла

$$q_- = K_+ \Gamma \approx \frac{3}{2} \left[T + \frac{\partial T}{\partial z} \lambda \right] nv_T$$

отличается знаком перед вторым слагаемым. Суммарный поток тепла $q = q_+ - q_-$ возникает из-за отсутствия баланса левого и правого потоков. Он равен

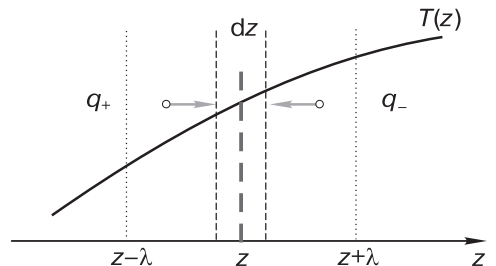
$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z},$$

где коэффициент теплопроводности

$$\kappa \approx nv_T \lambda$$

с точностью до числового коэффициента совпадает с расчётной формулой (13), если время $\tau = \lambda/v_T$ отождествить с τ_e , n с n_e и v_T с v_{Te} . Если электроны заменить ионами, с точностью до числа порядка единицы он будет равен коэффициенту ионной теплопроводности (16).

Рис. 13.1. К выводу уравнения теплопроводности; если потоки частиц слева и справа одинаковы, $\Gamma_+ = \Gamma_-$, то потоки тепла слева и справа, q_+ и q_- , различаются на величину, пропорциональную градиенту температуры T ; разность потоков $q(z - dz/2)$ и $q(z + dz/2)$, втекающих в тонкий слой и вытекающих из него, идёт на нагрев слоя



Подобным способом, не прибегая к трудоёмким вычислениям, удаётся оценить по порядку величины почти любые кинетические коэффициенты.¹⁾

Продолжая логику рассуждений, использованную выше для отыскания связи между потоком тепла и градиентом температуры, нетрудно получить уравнение, описывающее изменение локальной температуры плазмы. Выделим плоский тонкий слой плазмы между плоскостью $z - dz/2$ и плоскостью $z + dz/2$. Внутри него заключены электроны с внутренней энергией $\frac{3}{2}nT dz$ (в расчёте на единицу площади слоя). Через левую границу слоя за время dt втекает энергия $q(z - dz/2) dt$ (в расчёте на единицу площади). Через правую границу за то же время вытекает энергия $q(z + dz/2) dt$. Разность

$$q(z - dz/2) - q(z + dz/2) \approx -\frac{\partial q}{\partial z} dz = -\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z} dz,$$

идёт на увеличение внутренней энергии электронов $\frac{3}{2}nT dz$ за счёт приращения температуры $dT = (\partial T / \partial t) dt$. Приравнявая $\frac{3}{2}n dT dz$ и $\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z} dz dt$, получаем *уравнение теплопроводности*

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z}.$$

В общем случае трёх пространственных измерений оно имеет вид

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \nabla T). \quad (18)$$

Перенос тепла приводит к увеличению энтропии, что учтено слагаемым $\operatorname{div} q_a$ в уравнении переноса тепла (12.26). Неудивительно поэтому, что уравнение теплопроводности можно вывести из уравнения переноса тепла путём отсечения «всего лишнего» (задача 13.5).

В частном случае, когда плотность плазмы однородна и постоянна, обе стороны уравнения теплопроводности можно поделить на плотность n , внося её под операторы дифференцирования. Результат деления

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \nabla T) \quad (19)$$

известен под названием *уравнение Фурье*. Величина $\chi = \frac{2}{3}\kappa/n$ называется *коэффициентом температуропроводности*²⁾ в отличие

¹⁾Исключения составляет коэффициент α_\perp , который определяет «косую» силу трения, см. п. 14.2.

²⁾Коэффициент температуропроводности численно равен отношению коэффициента теплопроводности вещества к произведению его удельной теплоёмкости (при постоянном давлении) на плотность.

от коэффициента теплопроводности κ . Точно такое же уравнение описывает изменение концентрации мельчайших частиц твёрдого вещества в жидкости в процессе броуновского движения. В задаче о диффузии броуновских частиц вместо χ пишут коэффициент диффузии D , а уравнение (19) называют *уравнением диффузии*.

Из полученной выше оценки $\kappa \sim n v_T \lambda$ и соотношения $\chi \sim \kappa/n$ следует, что по порядку величины

$$\chi \sim \lambda v_T \sim \lambda^2 / \tau \sim v_T^2 \tau, \quad (20)$$

где $\lambda = 1/n\sigma$ — длина свободного пробега, σ — сечение процесса, n — плотность частиц, $\tau = \lambda/v_T$ — время свободного пробега, а v_T — тепловая скорость. Сравнение коэффициентов электронной и ионной температуропроводности показывает, что

$$\chi_e/\chi_i \sim v_{Te}^2 \tau_e / v_{Ti}^2 \tau_i \sim (m_i/m_e)^{1/2} (T_e/T_i)^{5/2} Z^2. \quad (21)$$

В типичных условиях $\chi_e/\chi_i \gg 1$ из-за огромной разницы в массе электронов и ионов. Следовательно, в плазме без магнитного поля тепло переносится преимущественно электронами.

Уравнение теплопроводности (19) с постоянным коэффициентом χ хорошо изучено. Из него следует, что зона прогрева от точечного источника расширяется пропорционально \sqrt{t} . Действительно, оценивая производную $\partial T/\partial t$ в левой части уравнения как T/t , а левую часть уравнения как $\chi T/r^2$, получаем, что за время t нагретая область расширится на расстояние

$$r \sim \sqrt{\chi t}. \quad (22)$$

Жан Фурье (Jean Fourier) специально для этого уравнения разработал метод решения разложением в ряды, которые в наше время называют его именем. Решение Фурье описывает диффузное расплывание начального распределения температуры (задача 13.6), когда тепло от точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в нуль лишь асимптотически на бесконечности, а размер прогретой области изменяется по закону (22). Однако к плазме метод Фурье, вообще говоря, неприменим, так как коэффициент температуропроводности сам зависит от температуры степенным образом: $\chi \propto T^{5/2}$. Решение уравнения теплопроводности со степенной зависимостью χ от T качественно отличается от случая $\chi = \text{const}$, предсказывая температурные волны с крутым фронтом (задача 13.7).

13.4. Термосила

В п. 13.2 мы установили, что при наличии градиента температуры в неподвижной плазме неизбежно возникает электрическое поле. Подставив найденное поле $\mathbf{E} = \frac{5}{2} \nabla T_e / e_e$ в уравнение движения электронной компоненты плазмы

$$m_e n_e \frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} = -\nabla p_e + e_e n_e \mathbf{E} + \mathbf{R}_{ei}, \quad (23)$$

легко понять, что на электроны должна ещё действовать ненулевая сила Брагинского

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_{ei},$$

чтобы они на самом деле были неподвижны. Действительно, пренебрегая инерцией электронов, т. е. заменяя нулём левую часть уравнения (23) и подставляя $\nabla p_e = \nabla(n_e T_e) = n_e \nabla T_e$ в правую часть, находим силу

$$\mathbf{R}_T = -\frac{3}{2} n_e \nabla T_e, \quad (24)$$

направленную против градиента температуры. Её называют *термосилой*. Индекс T в её обозначении подчёркивает, что термосила составляет только часть полной силы

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u \quad (25)$$

взаимодействия электронов с ионами. Последняя включает ещё и силу трения \mathbf{R}_u , которая возникает при протекании электрического тока и будет вычислена в следующем параграфе. Пока же будем считать, что $\mathbf{R}_u = 0$. В силу закона сохранения импульса противоположная по направлению сила действует на ионы со стороны электронов:

$$\mathbf{R}_{ie} = -\mathbf{R}.$$

Подставляя $\mathbf{R}_{ie} = \frac{3}{2} n_e \nabla T_e$ и $\mathbf{E} = \frac{5}{2} \nabla T_e / e_e$ в уравнение движения ионов

$$m_i n_i \frac{d_i \mathbf{u}_i}{dt} = -\nabla p_i + e_i n_i \mathbf{E} + \mathbf{R}_{ie}, \quad (26)$$

с учётом условия квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i = 0$ и равенства нулю градиента плотности в рассматриваемой задаче, получаем уравнение

$$m_i n_i \frac{d_i \mathbf{u}_i}{dt} = -\nabla (p_i + p_e). \quad (27)$$

Как будет ясно из дальнейшего, оно описывает движение плазмы в приближении одножидкостной гидродинамики при отсутствии магнитного поля. Справа в этом уравнении стоит градиент полного давления плазмы $p = p_i + p_e$, а слева — масса единицы объёма плазмы (с огромной точностью равная массе ионов в единице объёма), умноженная на её ускорение. Электрическое поле \mathbf{E} и сила \mathbf{R}

выпадают из уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики, так как они отвечают за «внутреннее» взаимодействие электронной и ионной компонент плазмы.

Происхождение термосилы связано с нетривиальной зависимостью частоты столкновений электронов с ионами от энергии сталкивающихся частиц. Из-за уменьшения частоты столкновений с ростом температуры электроны, приходящие в некоторую точку плазмы из более нагретой области, испытывают меньшее трение об ионы, нежели электроны, приходящие из области с меньшей электронной температурой. В результате возникает сила трения, направленная против градиента температуры. Удивительно то, что термосила, будучи силой трения по своему происхождению, не зависит от частоты столкновений. Однако этот парадоксальный результат легко объяснить, следуя методу анализа процессов переноса, который был использован в начале п. 13.3 (задача 13.1). Заметим также, что формулу (24) нетрудно получить при помощи прямых вычислений, если подставить функцию распределения электронов (9) в определение (12.16) силы Брагинского (задача 13.2).

13.5. Проводимость плазмы

Вычислим теперь силу трения электронов об ионы R_{ei} в однородной плазме при заданной средней скорости электронов относительно ионов. Эта задача эквивалентна вычислению проводимости плазмы.

Вновь ограничим себя случаем лоренцевой плазмы и заметим, что теперь нужно искать решение уравнения (4) с подстановкой $\partial f_M / \partial z = 0$, а электрическое поле E считать заданным параметром. Нужное решение получаем из (5), отбрасывая слагаемые с $\partial T / \partial z$:

$$\delta f = -\frac{v^4}{2A} \frac{eE}{T} f_M \cos \theta. \quad (28)$$

Так как $\int v f_M d^3v = 0$ для максвелловской функции распределения вида (3), определение средней скорости $u = (1/n) \int v f d^3v$ сводится к вычислению интеграла

$$u = \frac{1}{n} \int v \delta f d^3v \quad (29)$$

с найденной поправкой (28) к функции распределения. Отличным от нуля оказывается только результат интегрирования проекции $v_z = v \cos \theta$ вектора скорости v на направление электрического поля $E = E \hat{z}$. Так как $v_z \delta f \propto v^5 f_M \cos^2 \theta$, интегрирование, как и в п. 13.2,

сводится к усреднению $\cos^2 \theta$ по полному телесному углу с учётом равенства $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{3}$ с последующим использованием формулы (7):

$$\mathbf{u} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}A} \left(\frac{2T}{m} \right)^{5/2} \frac{e\mathbf{E}}{T}.$$

Раскрывая обозначение $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / m^2$ и восстанавливая индекс e у величин, относящихся к электронам, окончательный результат вычислений удобно представить в компактном виде

$$\mathbf{u} = \frac{32}{3\pi} \frac{e_e \mathbf{E} \tau_e}{m_e}, \quad (30)$$

выделив характерное время (14) электрон-ионных столкновений τ_e . Так как вычисления выполнены в системе отсчёта, где ионы в среднем неподвижны, при переходе в иную систему отсчёта \mathbf{u} в полученной формуле нужно заменить на $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$. Поэтому всюду далее \mathbf{u} (без индекса) будет обозначать среднюю направленную скорость электронов относительно ионов:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i. \quad (31)$$

Через эту скорость выражается плотность электрического тока:

$$\mathbf{j} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i = e_e n_e \mathbf{u}. \quad (32)$$

С другой стороны, согласно закону Ома в дифференциальной форме,

$$\mathbf{j} = \Sigma \mathbf{E}, \quad (33)$$

проводимость Σ служит коэффициентом пропорциональности между плотностью электрического тока \mathbf{j} и напряжённостью электрического поля \mathbf{E} . Отсюда находим проводимость простой плазмы

$$\Sigma = \frac{32}{3\pi} \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}. \quad (34)$$

Чтобы найти силу трения \mathbf{R}_u электронов об ионы, следуя её определению (12.16), нужно было бы вычислить интеграл

$$\mathbf{R}_u = m_e \int \mathbf{v} C_{ei} d^3v,$$

взяв в качестве C_{ei} правую часть уравнения (4). Однако будет проще обратиться к гидродинамическому уравнению движения электронов. В однородной плазме градиент давления равен нулю, а ускорение электронов электрическим полем уравновешивается силой трения, поэтому

$$e_e n_e \mathbf{E} + \mathbf{R}_u = 0. \quad (35)$$

Исключая \mathbf{E} с помощью (30), получим

$$\mathbf{R}_u = -\frac{3\pi}{32} \frac{m_e n_e}{\tau_e} \mathbf{u}. \quad (36)$$

Если же исключить E из уравнения (35) с помощью (33), получим другое выражение, связывающее силу трения с плотностью электрического тока:

$$R_{ii} = -\frac{e n_e}{\Sigma} j. \quad (37)$$

Формула (36) имеет простой смысл. При столкновениях электронов с ионами скорости электронов, почти не меняясь по величине, хаотически изменяют своё направление. Таким образом, за время порядка τ_e электроны теряют свою упорядоченную скорость $u = u_e - u_i$ относительно ионов; следовательно, они теряют (а ионы приобретают) импульс $n_e m_e u$ в расчёте на единицу объёма. Это значит, что на электроны действует сила трения порядка $-n_e m_e u / \tau_e$; равная ей, но противоположно направленная сила действует на ионы. Напомним, что величина τ_e , определяемая формулой (14), выбрана именно так, чтобы выражение для силы трения R_{ii} , возникающей от взаимодействия электронов с максвелловским распределением, сдвинутым как целое относительно ионов на величину u , имело простой вид: $R_{ii} = -m_e n_e u / \tau_e$ без числовых коэффициентов (задача 12.4).

В действительности же функция распределения электронов вовсе не будет максвелловским распределением, сдвинутым без деформации относительно ионов, если «сдвиг» возникает под действием электрического поля (или какой-нибудь иной силы). Это объясняется тем, что частота кулоновских столкновений уменьшается с ростом энергии электронов ($\nu_{ei}^{(p)} \propto v^{-3}$), поэтому более быстрые электроны разгоняются сильнее, чем медленные. В результате функция распределения искажается так, что в создании средней скорости u (и переносе электрического тока) относительно большую роль играют быстрые электроны, для которых сила торможения меньше, поэтому и общий коэффициент трения будет меньше, чем для сдвинутого максвелловского распределения.

Если бы столкновения электронов между собой происходили гораздо чаще, чем столкновения электронов с ионами, этот эффект отсутствовал бы, так как именно столкновения частиц одного сорта устанавливают максвелловскую форму функции распределения. Тогда было бы $R_{ii} = -m_e n_e u / \tau_e$. Однако на самом деле имеет место как раз обратная ситуация. Так как $\nu_{ei}^{(p)} \sim \nu_{ee}^{(p)} Z$, электроны сталкиваются с ионами так же часто (при $Z = 1$) или даже чаще (при $Z > 1$), чем между собой. При $Z = 1$ получается «эффект порядка единицы», и сила трения уменьшается примерно вдвое: $R_{ii} = -0,51 m_e n_e u / \tau_e$. При больших Z относительная роль электрон-ионных столкновений воз-

растает по сравнению с электрон-электронными столкновениями, и коэффициент трения уменьшается ещё сильнее. При $Z \rightarrow \infty$, согласно формуле (36), численный коэффициент уменьшается примерно в три раза: $R_u = -0,29 m_e n_e u / \tau_e$.

13.6. Перенос тепла током

Протекание тока сопровождается переносом тепла. Это явление описывается дополнительным слагаемым

$$q_u = \frac{3}{2} n_e T_e u, \quad (38)$$

в полном электронном потоке тепла

$$q_e = q_{Te} + q_u. \quad (39)$$

Для вычисления части потока тепла q_u , пропорциональной относительной скорости, нужно взять функцию распределения электронов, использованную в п. 13.5 для определения проводимости плазмы (задача 13.3). Как и термосила, эта часть потока связана со столкновениями, хотя формула (38) не содержит явно время τ_e . Ионный поток тепла

$$q_i = q_{Ti} \quad (40)$$

не содержит слагаемого, подобного q_u , так как протекание тока почти не влияет на функцию распределения ионов.

13.7. Вязкость плазмы

Если средняя направленная скорость u_y меняется по z , то при отсутствии потока вещества возникает поток π_{yz} импульса mu_y вдоль оси z из-за дисбаланса односторонних потоков импульса $mu_y \Gamma$. Повторим рассуждения из п. 13.3, заменяя температуру T на импульс mu_y , а поток тепла q на поток импульса π_{yz} .

Пусть средний импульс электронов $mu_y(z)$ в направлении оси y медленно увеличивается по оси z , как показано на рис. 13.2, но поток вдоль z отсутствует, так что через произвольное сечение z слева направо и справа налево за единицу времени проходит в точности одинаковое число электронов $\Gamma \sim n v_T$.

Электроны, приходящие в плоскость z справа, в среднем имеют импульс $mu_y(z + \lambda)$, тогда как электроны слева приходят с импульсом $mu_y(z - \lambda)$. Следовательно, поток импульса, идущий слева направо, равен

$$mu_y(z - \lambda) \Gamma.$$

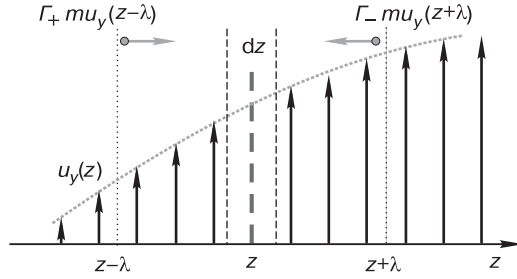


Рис. 13.2. К выводу тензора вязких напряжений; если потоки частиц слева и справа одинаковы, $\Gamma_+ = \Gamma_- = \Gamma$, так что ток отсутствует, потоки импульса mu_y слева и справа различаются на величину порядка $\pi_{yz} \sim \Gamma \lambda \partial u_y / \partial z$; разность потоков $\pi_{yz}(z - dz/2)$ и $\pi_{yz}(z + dz/2)$, втекающих в слой плазмы толщиной dz и вытекающих из него, равна силе, действующей на слой

Навстречу ему идёт поток

$$mu_y(z + \lambda)\Gamma.$$

Суммарный поток импульса $\pi_{yz} = mu_y(z - \lambda)\Gamma - mu_y(z + \lambda)\Gamma$ равен

$$\pi_{yz} = -\eta \frac{\partial u_y}{\partial z},$$

где величина

$$\eta \sim m n v_T \lambda \sim m n v_T^2 \tau$$

называется *коэффициентом вязкости*.

Как следует из определения (12.11) тензора вязких напряжений $\overleftrightarrow{\pi}$, он симметричен, а его след равен нулю, т. е. $\pi_{\mu\nu} = \pi_{\nu\mu}$ и $\pi_{\mu\mu} = 0$. Теперь же мы видим, что его элементы пропорциональны пространственным производным вектора направленной скорости. Компоненты тензора \overleftrightarrow{W} , составленного из этих производных и обладающего указанными свойствами, имеют вид

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\mu\nu}. \quad (41)$$

Он называется *тензором скорости сдвигов* и обращается в нуль, если плазма вращается как целое, $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}]$, или испытывает равномерное всестороннее сжатие, $\mathbf{u} = \text{const } \mathbf{x}$. Таким образом,

$$\overleftrightarrow{\pi}_a = -\eta_a \overleftrightarrow{W}_a. \quad (42)$$

Как видно из уравнения движения плазмы (12.19), вязкая сила, действующая на частицы сорта a в единице объёма, равна

$$\mathbf{F}_a = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi}_a.$$

Это вектор с компонентами $F_{a,\mu} = -\partial\pi_{a,\nu\mu}/\partial x_\nu = -\partial\pi_{a,\mu\nu}/\partial x_\nu$. Если предположить, что $\eta_a = \text{const}$, вязкую силу можно представить в виде

$$\mathbf{F}_a = -\eta_a \left[\nabla^2 \mathbf{u}_a + \frac{1}{3} \nabla \text{div} \mathbf{u}_a \right],$$

но обычно коэффициент вязкости η_a изменяется на тех же расстояниях, что и скорость \mathbf{u}_a .

В отличие от теплопроводности, которая в плазме без магнитного поля больше у электронов, в водородной плазме вязкие силы имеют преимущественно ионное происхождение, так как

$$\eta_i/\eta_e \sim m_i n_i v_{Ti}^2 \tau_i / m_e n_e v_{Te}^2 \tau_e \sim \sqrt{m_i/m_e} (T_i/T_e)^{5/2} / Z^3. \quad (43)$$

Однако в плазме с многозарядными ионами ситуация может перемениться на прямо противоположную при сравнительно небольшой величине $Z \approx 4 \div 5$.

13.8. Выделение тепла

Предположим сначала, что масса ионов бесконечна. Тогда в системе отсчёта, где ионы в среднем покоятся, т. е. $\mathbf{u}_i = 0$, столкновения электронов с ионами будут происходить без обмена энергией. Электроны при столкновениях с ионами увеличивают скорости хаотического движения, поэтому энергия их упорядоченного движения со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ переходит в тепло. Ионы же своей энергии не меняют. Выделение тепла в электронном газе в этом случае равно работе полной силы трения электронов об ионы:

$$Q_{ei} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}. \quad (44)$$

Так как сила $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_{ei}$, согласно (25), состоит из двух частей, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u$, имеем $Q_{ei} = Q_u + Q_T$. Первое слагаемое, $Q_u = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_u$, описывает джоулев нагрев, который с учётом (32) и (37) можно переписать в более привычном виде:

$$Q_u = \frac{j^2}{\Sigma}.$$

Второе слагаемое, $Q_T = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_T$, изменяет знак при перемене направления тока или градиента температуры; оно описывает обратимое выделение тепла. Аналогичное явление в металлах называется эффектом Томсона (William Thomson, 1851 [133]).

Учтём теперь, что отношение m_i/m_e , хотя и велико, но конечно, и пусть сначала $\mathbf{u} = 0$. Если $T_e = T_i$, то между ионами и электронами существует тепловое равновесие, и передачи тепла нет. Если же,

например, $T_e > T_i$, то электроны передают тепло ионам. При столкновении лёгкого электрона с покоящимся тяжёлым ионом может быть передана доля энергии порядка $2m_e/m_i$. Таким образом, обмен энергией в единицу времени между электронами и ионами Q_Δ можно оценить так:

$$Q_\Delta = \frac{n_e}{\tau_e} \frac{2m_e}{m_i} \frac{3}{2} (T_e - T_i). \quad (45)$$

Как показал Л. Д. Ландау [116], при выборе τ_e в виде (14) формула (45) верна количественно, а не только по порядку величины (задача 12.6).

Если одновременно $u \neq 0$ и $T_e \neq T_i$, можно просто сложить оба указанных эффекта. Тогда

$$Q_{ei} = -u \cdot R - Q_\Delta, \quad Q_{ie} = Q_\Delta. \quad (46)$$

Литература

Кинетические коэффициенты вычислены в статье [121] С. И. Брагинского в 1-м томе «Вопросов теории плазмы». Материалу лекции соответствуют §§3 и 4. Особую ценность представляет качественное рассмотрение процессов переноса в §3.

Задачи

Задача 13.1. Показать, что в плазме с градиентом электронной температуры на электроны действует сила трения, даже если поток электронов в среднем равен нулю, и оценить её величину. ►► Решение

Задача 13.2. Найти термосилу в лоренцевой плазме, вычислив интеграл в определении силы Брагинского. ►► Решение

Задача 13.3. Вычислить поток тепла, связанный с протеканием тока в лоренцевой плазме. ►► Решение

Задача 13.4. Пьяный пешеход каждые τ секунд делает шаг длиной λ , с равной вероятностью вперёд или назад. Какое расстояние в среднем он проходит за время $t \gg \tau$? ►► Решение

Задача 13.5. Получить уравнение теплопроводности из уравнения переноса тепла. ►► Решение

Задача 13.6. Найти решение уравнения Фурье в безграничной среде, где в начальный момент имелось заданное распределение температуры $T = T_0(x)$. ►► Решение

Задача 13.7. Для степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры $\chi = \beta T^n$ найти закон, по которому обращается в нуль температура вблизи границы области, до которой в данный момент распространилось тепло от некоторого произвольного источника. ►► Решение

Процессы переноса в магнитном поле

**Анизотропия плазмы в магнитном поле.
Амбиполярная и Бомовская диффузия.
Закон Ома. Эффект Холла.**

Магнитное поле вносит анизотропию в свойства плазмы. Процессы переноса, будь то диффузия, теплопроводность или вязкость, идут с разной скоростью вдоль и поперёк направления магнитного поля. Чем больше напряжённость магнитного поля, тем медленнее происходит перенос плазмы в поперечном направлении. Однако на скорость переноса вдоль силовых линий магнитное поле не влияет.

Говорят, что плазма *замагничена*, если ларморовский радиус частиц ρ меньше длины свободного пробега λ или, что то же самое, частота столкновений ν меньше циклотронной частоты Ω . В высокотемпературной плазме условие замагниченности

$$\rho < \lambda, \quad \nu < \Omega \quad (1)$$

выполняется уже в очень умеренном магнитном поле. В *замагниченной плазме* анизотропия процессов переноса становится очень заметной. Ионы замагничиваются при существенно большей величине магнитного поля, чем электроны. Теоретически возможна ситуация, когда электроны замагничены, а ионы — нет, но в термоядерных установках с магнитным удержанием плазмы замагничены частицы всех сортов.

Современная теория объясняет наблюдаемые времена удержания плазмы в лабораторных установках разных типов, изучая *неоклассические* и *турбулентные* процессы переноса, но их анализ выходит за рамки вводного курса физики плазмы. За одним исключением мы ограничимся анализом *классических процессов переноса* в замагниченной плазме, не выходя за рамки теории Брагинского, изложение которой было начато в предыдущей лекции. Отметим только, что неоклассические эффекты возникают, если существенную роль играет

неоднородность магнитного поля, а турбулентный перенос связан с возбуждением в плазме неустойчивых колебаний.

14.1. Амбиполярная диффузия

Рассмотрим диффузию плазмы поперёк магнитного поля. Пусть магнитное поле

$$\mathbf{B} = B\hat{z}$$

однородно и всюду направлено по оси z , но при этом существует градиент плотности n_e вдоль оси x . Относительно температуры каждого сорта частиц будем считать, что она однородна, т. е. имеет одинаковую величину в любой точке плазмы, не исключая, что температура электронов T_e не равна температуре ионов T_i . Условимся, что e обозначает элементарный (положительный) заряд, а $e_e = -e$ и $e_i = Ze$ — соответственно заряды электронов и ионов. Тогда условие квазинейтральности

$$e_e n_e + e_i n_i = 0$$

может быть представлено в виде

$$n_e(x) = Z n_i(x).$$

Запишем уравнения движения электронов и ионов в гидродинамическом приближении, причём отбросим в них инерционные и вязкие члены, пропорциональные соответственно du/dt и $\vec{\pi}$, поскольку скорость движения, вызываемого диффузией, обычно мала, а вместе с ней малы и силы инерции и вязкости:

$$\begin{aligned} 0 &= -T_e \nabla n_e + e_e n_e \mathbf{E} + \frac{e_e n_e}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] + \mathbf{R}, \\ 0 &= -T_i \nabla n_i + e_i n_i \mathbf{E} + \frac{e_i n_i}{c} [\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}] - \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сила трения \mathbf{R}_u при отсутствии градиента температуры была ранее вычислена без магнитного поля (п. 13.5). В замагниченной плазме сила трения вдоль магнитного поля имеет ту же величину, что и в плазме без магнитного поля, а сила трения поперёк магнитного поля, как следует из качественной картины трения, обрисованной в конце п. 13.5, может отличаться только числовым множителем:¹⁾

$$\mathbf{R}_u = -\frac{3\pi}{32} \frac{m_e n_e}{\tau_e} \mathbf{u}_{\parallel} - \frac{m_e n_e}{\tau_e} \mathbf{u}_{\perp}. \quad (3)$$

¹⁾Здесь опущено третье слагаемое $\mathbf{R}_{u\perp} \propto [\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$, которое даёт «косую» силу трения, перпендикулярную как магнитному полю, так и скорости. Косая сила трения мала по сравнению с удержанными двумя слагаемыми, кроме того, её учёт вообще не влияет на итоговое уравнение диффузии (6).

Коэффициент $\frac{3\pi}{32}$ в первом слагаемом в этой формуле соответствует случаю лоренцевой плазмы, характеризваемой большим зарядовым числом ионов, $Z \gg 1$; при $Z = 1$ он был бы равен 0,51. Второе слагаемое описывает силу, действующую поперёк магнитного поля. Оно не зависит от Z и совпадает с результатом вычисления силы трения в приближении, когда функция распределения электронов представляет собой максвелловскую, сдвинутую без деформации как целое на величину средней скорости; этот факт имеет простое объяснение (задача 14.1).

Рассмотрим движение плазмы поперёк магнитного поля со скоростью $\mathbf{u}_\perp = (u_x, u_y, 0)$, оставив в формуле (3) только второе слагаемое. Проецируя уравнения (2) на ось x , учтём, что $R_x = 0$, поскольку, как мы увидим, скорости $u_{ex} = u_{ix} = u_x$ электронов и ионов в направлении x одинаковы:

$$\begin{aligned} -T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + e_e n_e E_x + \frac{e_e n_e}{c} u_{ey} B &= 0, \\ -T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + e_i n_i E_x + \frac{e_i n_i}{c} u_{iy} B &= 0. \end{aligned}$$

Складывая эти две проекции и учитывая условие квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i = 0$, находим:

$$e_e n_e (u_{ey} - u_{iy}) = \frac{c}{B} \left(T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} \right) = \frac{c}{B} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где $p = n_e T_e + n_i T_i$ — давление плазмы. Следовательно,

$$R_y = -\frac{m_e n_e}{\tau_e} (u_{ey} - u_{iy}) = -\frac{1}{\Omega_e \tau_e} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где $\Omega_e = e_e B / (m_e c)$ — циклотронная частота электронов. Подставляя R_y в y -проекцию первого из уравнений движения (2)

$$e_e n_e E_y - \frac{e_e n_e}{c} u_{ex} B + R_y = 0,$$

находим скорость расширения плазмы в направлении градиента плотности:

$$u_{ex} = c \frac{E_y}{B} - \frac{1}{m_e n_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Такой же результат получился бы из второго уравнения, подтверждая сделанное предположение, что $u_{ex} = u_{ix}$. Здесь первое слагаемое описывает электрический дрейф. Оно обычно равно нулю, так как наличие электрического поля E_y вдоль оси y означало бы, что к плазме

приложено напряжение. Полагая $E_y = 0$ и умножая u_{ex} на n_e , находим поток электронов:

$$n_e u_{ex} = -\frac{1}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{T_e + T_i/Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}.$$

Поток ионов

$$n_i u_{ix} = -\frac{T_e + T_i/Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} \frac{\partial n_i}{\partial x}$$

в Z раз меньше (если $Z \neq 1$), но суммарный электрический ток электронов и ионов в направлении градиента плотности $j_x = e_e n_e u_{ex} + e_i n_i u_{ix}$ равен нулю, обеспечивая сохранение квазинейтральности плазмы. Это свойство является отличительной чертой *амбиполярной диффузии*. Диффузионный поток

$$n_e \mathbf{u}_e = -D \nabla n_e, \quad n_i \mathbf{u}_i = -D \nabla n_i \quad (4)$$

направлен против градиента плотности. Коэффициент пропорциональности

$$D = \frac{T_e + T_i/Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e} \quad (5)$$

называют *коэффициентом диффузии*. При подстановке $n_e \mathbf{u}_e = -D \nabla n_e$ в уравнение непрерывности $\partial n_e / \partial t + \text{div}(n_e \mathbf{u}_e) = 0$ получается уравнение диффузии для электронов

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \text{div}(D \nabla n_e). \quad (6)$$

Такое же уравнение с тем же коэффициентом диффузии получается и для ионов.

Как ясно из приведённого вывода, диффузия возникает в результате трения между электронной и ионной компонентами плазмы при их скольжении одна относительно другой в направлении, перпендикулярном как градиенту плотности, так и магнитному полю.

На уровне анализа движения отдельных частиц диффузия является результатом кулоновских столкновений электронов с ионами, тогда как столкновения между частицами одного сорта не приводят к диффузии.¹⁾ Рисунок 14.1, *a* поясняет, что при столкновении тождественных

¹⁾Точнее будет сказать, что поправка к диффузионному потоку из-за столкновений тождественных частиц существенно меньше вычисленной. В заряженной плазме, состоящей только из электронов или только из одинаковых ионов, изменение плотности частиц описывается уравнением, которое разительно отличается от уравнения диффузии. Оно имеет стационарные решения, соответствующие локализованному в пространстве состоянию полного термодинамического равновесия [134].

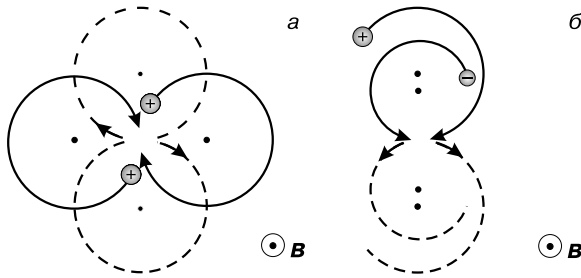


Рис. 14.1. При столкновении тождественных частиц в магнитном поле их ведущие центры смещаются так, что суммарный сдвиг отсутствует (а); при столкновении противоположно заряженных частиц их ведущие центры смещаются в одном и том же направлении (б)

частиц их центр инерции не смещается, а поэтому диффузия не возникает. Напротив, при столкновении разноимённо заряженных частиц, как на рис. 14.1, б, обе частицы в среднем смещаются в одну сторону, тем самым создавая диффузионный поток без нарушения квазинейтральности плазмы.

По порядку величины коэффициент диффузии примерно равен квадрату ларморовского радиуса электрона $\rho_e \sim v_{Te}/\Omega_e$, делённому на средний интервал времени $\tau_{ei} \sim \tau_e$ между двумя последовательными столкновениями электрона с ионами. Оценка

$$D_e \sim \frac{\rho_e^2}{\tau_e} \sim \frac{T_e}{m_e \Omega_e^2 \tau_e}$$

соответствует простой физической картине. При каждом столкновении с ионом, сопровождающемся рассеянием на угол порядка 90° , электрон смещается случайным образом на расстояние порядка ларморовского радиуса ρ_e .

Однако простота бывает обманлива. Если согласиться с утверждением, что $D \approx D_e$, то придётся объяснить, почему диффузионный поток определяется именно электронами, а не ионами, притом что диффузионные потоки электронов и ионов одинаковы. Оценивая D_i тем же способом, учтём, что $\rho_i \sim v_{Ti}/\Omega_i \sim (m_i T_i / (m_e T_e))^{1/2} \rho_e / Z$, а $\tau_{ie} \sim (m_i / m_e) \tau_e / Z$. Следовательно,

$$D_i \sim \frac{\rho_i^2}{\tau_{ie}} \sim \frac{T_i / Z}{m_e \Omega_e^2 \tau_e}.$$

Сравнивая D , D_e и D_i , нетрудно видеть, что

$$D = D_e + D_i,$$

но нельзя утверждать, что подобное правило сложения верно во всех случаях.

В качестве контрпримера рассмотрим слабоионизованную плазму, где доминируют столкновения заряженных частиц с нейтральными атомами. Если магнитное поле отсутствует, парциальные коэффициенты диффузии оцениваются как произведение длины пробега λ (одинаковой для электронов и ионов) на тепловую скорость:

$$D_e \sim \lambda v_{Te}, \quad D_i \sim \lambda v_{Ti}.$$

Из-за большей подвижности электронов формально $D_e \gg D_i$, однако амбиполярное электрическое поле, которое возникает в результате пространственного разделения электронной и ионной компонент плазмы, выравнивает диффузионные потоки электронов и ионов, так что результирующий коэффициент диффузии вычисляется по формуле

$$D = \frac{2D_e D_i}{D_e + D_i} \approx 2D_i$$

(задача 14.3) и в итоге определяется ионами, как наименее подвижной компонентой плазмы.

Заметим, что сам термин «амбиполярная диффузия» можно расшифровать как «двуполярная», т. е. совместная диффузия противоположно заряженных частиц.

14.2. Кинетические коэффициенты в магнитном поле

Как показано в 13.2, в плазме без магнитного поля поток тепла, вызванный неоднородным нагревом, направлен против градиента температуры:

$$q_{Te} = -\kappa_e \nabla T_e, \quad q_{Ti} = -\kappa_i \nabla T_i, \quad (7)$$

причём $\kappa_e \sim n_e T_e \tau_e / m_e$, $\kappa_i \sim n_i T_i \tau_i / m_i$. В замагниченной плазме приведённые оценки коэффициентов теплопроводности верны для переноса тепла вдоль силовых линий магнитного поля. Вводя обозначения $\lambda_e = v_{Te} / \tau_e$ и $\lambda_i = v_{Ti} / \tau_i$, имеем:

$$\kappa_{\parallel e} \sim n_e v_{Te}^2 \tau_e \sim n_e \lambda_e^2 / \tau_e, \quad \kappa_{\parallel i} \sim n_i v_{Ti}^2 \tau_i \sim n_i \lambda_i^2 / \tau_i.$$

Оценка $\kappa_{\parallel e} \sim n_e \lambda_e^2 / \tau_e$ соответствует наглядной физической картине явления, когда за время τ_e между двумя последовательными столкновениями электрон переносит энергию порядка $T_e = \frac{1}{2} m_e v_{Te}^2$ на расстояние порядка длины свободного пробега λ_e ; аналогичные

рассуждения применимы к ионам. Теплопроводность обеспечивается столкновениями тождественных частиц наравне со столкновениями частиц разных сортов, тогда как диффузия возникает вследствие трения электронов об ионы (см. п. 14.1).¹⁾

В направлении поперёк магнитного поля за то же время τ_e электрон смещается на меньшее расстояние порядка среднего ларморовского радиуса $\rho_e \sim v_{Te}/\Omega_e$. Исходя из этого наблюдения, нетрудно оценить температуропроводность замагниченной плазмы поперёк магнитного поля:

$$\kappa_{\perp e} \sim n_e \rho_e^2 / \tau_e, \quad \kappa_{\perp i} \sim n_i \rho_i^2 / \tau_i.$$

Так как теплопроводность вдоль и поперёк магнитного поля существенно различна, ясно, что коэффициент теплопроводности замагниченной плазмы становится тензором, а вместо (7) следует писать

$$\mathbf{q}_{Te} = -\overleftrightarrow{\kappa}_e \cdot \nabla T_e, \quad \mathbf{q}_{Ti} = -\overleftrightarrow{\kappa}_i \cdot \nabla T_i. \quad (8)$$

В изотропной плазме тензор теплопроводности выражается через инвариантные тензоры и компоненты единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ вдоль направления \mathbf{B} . Например, для электронов тензор теплопроводности

$$\kappa_{e,\mu\nu} = \kappa_{\perp e} [\delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu] + \kappa_{\parallel e} [h_\mu h_\nu] + \kappa_{\wedge e} \epsilon_{\mu\gamma\nu} h_\gamma \quad (9)$$

в самом общем случае зависит от трёх коэффициентов: $\kappa_{\perp e}$, $\kappa_{\parallel e}$ и $\kappa_{\wedge e}$, которые называются коэффициентами поперечной, продольной и косой теплопроводности соответственно. Первые два мы уже оценивали, а другие коэффициенты найдены в задаче 14.8:

$$\kappa_{\wedge e} \sim n_e v_{Te}^2 / \Omega_e, \quad \kappa_{\wedge i} \sim n_i v_{Ti}^2 / \Omega_i.$$

Здесь, как и прежде, $\Omega_e = e_e B / (m_e c)$ и $\Omega_i = e_i B / (m_i c)$ обозначают циклотронные частоты электронов и ионов с учётом знака зарядов (так что $\kappa_{\wedge e} < 0$, $\kappa_{\wedge i} > 0$, поскольку $e_e < 0$, $e_i > 0$). Интересно, что «косая» теплопроводность электронов в замагниченной плазме не зависит от частоты столкновений, но это верно только при условии $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$ (и аналогичном для ионов), которое как раз означает замагниченность плазмы (1). В противоположном пределе $|\Omega_e \tau_e| \ll 1$ коэффициент $\kappa_{\wedge e}$ пропорционален $\Omega_e \tau_e$. Он мал по сравнению с $\kappa_{\parallel e}$ как в пределе $|\Omega_e \tau_e| \rightarrow 0$, так и при $|\Omega_e \tau_e| \rightarrow \infty$, но в замагниченной плазме он больше, чем $\kappa_{\perp e}$.

¹⁾ Однако численный коэффициент в силе трения зависит от частоты столкновений электронов с электронами, см. обсуждение в конце п. 13.5.

Объединяя формулы (8) и (9), получаем¹⁾

$$q_{Te} = -\kappa_{\parallel e} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp e} \nabla_{\perp} T_e - \kappa_{\wedge e} [\mathbf{h} \times \nabla_{\perp} T_e], \quad (10)$$

$$q_{Ti} = -\kappa_{\parallel i} \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp i} \nabla_{\perp} T_i - \kappa_{\wedge i} [\mathbf{h} \times \nabla_{\perp} T_i]. \quad (11)$$

«Косые» слагаемые, вообще говоря, есть также в термосиле

$$\mathbf{R}_T = -\beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \beta_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \beta_{\wedge} [\mathbf{h} \times \nabla T_e], \quad (12)$$

силе трения

$$\mathbf{R}_u = -\alpha_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} - \alpha_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} - \alpha_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{u}] \quad (13)$$

и потоке тепла

$$\mathbf{q}_u = \beta_{\parallel} T_e \mathbf{u}_{\parallel} + \beta_{\perp} T_e \mathbf{u}_{\perp} + \beta_{\wedge} T_e [\mathbf{h} \times \mathbf{u}], \quad (14)$$

связанном с электрическим током. Другое дело, что иногда они малы, как в силе трения, зависящей от $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$, и поэтому не показаны в формуле (3).

Как видно из сравнения формул (12) и (14), термосила и электронный поток тепла выражаются через один и тот же набор коэффициентов $\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}, \beta_{\wedge}$, не имеющих специального названия.²⁾ Этот факт следует из принципа симметрии кинетических коэффициентов, открытого Ларсом Онзагером (Lars Onsager, 1931 [135, 136]).

Как показано в п. 13.7, в плазме без магнитного поля тензор вязких напряжений $\overset{\leftrightarrow}{\pi}$ пропорционален тензору скорости сдвигов $\overset{\leftrightarrow}{W}$, а поэтому для определения $\overset{\leftrightarrow}{\pi}$ достаточно вычислить всего лишь один коэффициент вязкости η_a для каждой компоненты плазмы. При наличии магнитного поля необходимо вычислить уже 5 коэффициентов вязкости — ровно столько, сколько независимых компонентов имеет тензор $\overset{\leftrightarrow}{W}$, как и любой симметричный тензор с нулевым следом.

В пределе лоренцевой плазмы кинетические коэффициенты для электронов вычислены в задаче 14.9. Известные способы оценки кинетических коэффициентов из наглядных соображений собраны в решениях задач 14.5–14.8.

¹⁾В теории С. И. Брагинского принято писать разные знаки перед «косыми» слагаемыми в уравнениях для ионов и электронов, чтобы обеспечить положительность коэффициентов $\kappa_{\wedge e}$ и $\kappa_{\wedge i}$. Для единообразия мы пишем одинаковые знаки для частиц всех сортов, однако при этом некоторые коэффициенты неизбежно будут отрицательными.

²⁾В иностранной литературе β_{\parallel} , β_{\perp} и β_{\wedge} иногда называют коэффициентами термоэлектрической проводимости (thermoelectric conductivity), α_{\parallel} , α_{\perp} , α_{\wedge} — коэффициентами электрической резистивности (electrical resistivity). Коэффициенты κ_{\parallel} , κ_{\perp} , κ_{\wedge} имеют общепринятое название — коэффициенты теплопроводности (thermal conductivity).

14.3. Бомовская диффузия

Коэффициенты поперечного переноса обратно пропорциональны квадрату магнитного поля, например $\chi_{\perp e} = \kappa_{\perp e} / \frac{3}{2} n_e \propto B^{-2}$. Однако до начала 1960-х гг. в экспериментах не удавалось создать условия, при которых бы реализовывалась эта зависимость. Обобщив результаты экспериментов с газовыми разрядами, выполненных в конце 1940-х гг. в рамках атомного проекта для разделения изотопов урана, Дэвид Бом (David Bohm) предложил полуэмпирическую формулу, которая предсказывает следующую зависимость коэффициента диффузии от параметров плазмы [137]:

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{cT}{eB}. \quad (15)$$

Позднее стало ясно, что в плазме, где коэффициенты переноса порядка бомовских, имеются интенсивные колебания (турбулентность), которые значительно увеличивают эффективную частоту рассеяния частиц, а формула Бом даёт верхний предел на величину коэффициентов переноса поперёк магнитного поля.

К этому выводу можно прийти с помощью следующих рассуждений. При увеличении частоты рассеяния коэффициенты поперечного переноса в замагниченной плазме увеличиваются пропорционально частоте столкновений, например для электронов $\chi_{\perp e} \sim \rho_e^2 \nu_e$. Так происходит до тех пор, пока эффективная частота столкновений ν_e не превысит циклотронную частоту $|\Omega_e|$. При дальнейшем увеличении частоты рассеяния длина пробега λ_e станет меньше ларморовского радиуса ρ_e , возвращая нас к случаю незамагниченной плазмы, когда $\chi_{\perp e} \sim v_{Te}^2 / \nu_e$. Поскольку в незамагниченной плазме коэффициенты переноса только уменьшаются с ростом частоты столкновений, ясно, что они максимальны при $\nu_e \sim |\Omega_e|$. Полагая $\nu_e \sim |\Omega_e|$, находим, что $\chi_{\perp e} \sim v_{Te}^2 / |\Omega_e| \sim \rho_e^2 |\Omega_e| \sim cT / (eB)$. Примечательно, что масса электрона выпала из итогового результата, поэтому полученная оценка применима также и к ионам. С точностью до коэффициента 1/16 она совпадает с формулой Бом.

Теоретики предложили несколько правдоподобных вариантов вывода формулы Бом, аналогичных изложенному в задаче 14.12 (см., например, [138]).

14.4. Обобщённый закон Ома

Вновь обратимся к уравнениям (2), на этот раз для того, чтобы найти проводимость плазмы в магнитном поле. Из двух уравнений (2) оставим только уравнение для электронов, в котором восстановим отброшенную ранее термосилу R_T :

$$0 = -\nabla p_e + e_e n_e E + \frac{e_e n_e}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] + \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T. \quad (16)$$

Вводя обозначение для плотности тока

$$\mathbf{j} = e_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (17)$$

уравнение (13) перепишем в виде

$$\mathbf{R}_u = -\frac{\alpha_{\parallel}}{e_e n_e} \mathbf{j}_{\parallel} - \frac{\alpha_{\perp}}{e_e n_e} \mathbf{j}_{\perp} - \frac{\alpha_{\wedge}}{e_e n_e} [\mathbf{h} \times \mathbf{j}_{\perp}], \quad (18)$$

где в частном случае лоренцевой плазмы

$$\alpha_{\parallel} = \frac{3\pi}{32} \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad \alpha_{\perp} = \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad \alpha_{\wedge} = -\frac{\pi^{4/3}/6^{1/3}}{|\Omega_e \tau_e|^{2/3}} \frac{m_e n_e}{\tau_e}. \quad (19)$$

Затем выделим массовую скорость плазмы, отождествив её со средней скоростью ионов $\mathbf{V} = \mathbf{u}_i$, и исключим скорость электронов при помощи подстановки

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{j}}{e_e n_e}.$$

Тогда после деления на $e_e n_e$ уравнение (16) принимает форму *обобщённого закона Ома*

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = \frac{\alpha_{\parallel}}{e_e^2 n_e^2} \mathbf{j}_{\parallel} + \frac{\alpha_{\perp}}{e_e^2 n_e^2} \mathbf{j}_{\perp} + \frac{\alpha'_{\wedge}}{e_e^2 n_e^2} [\mathbf{h} \times \mathbf{j}_{\perp}] + \frac{1}{e_e n_e} \nabla p_e - \frac{1}{e_e n_e} \mathbf{R}_T, \quad (20)$$

который в самом общем виде устанавливает связь между электрическим полем и током в плазме. Здесь

$$\alpha'_{\wedge} = \alpha_{\wedge} + m_e n_e \Omega_e,$$

причём в замагниченной плазме (при $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$) приближённо $\alpha'_{\wedge} \approx m_e n_e \Omega_e$.

Если плазма неподвижна, $\mathbf{V} = 0$, а ток в ней отсутствует, $\mathbf{j} = 0$, обобщённый закон Ома редуцируется до уравнения $\mathbf{E} = (\nabla p_e - \mathbf{R}_T)/(e_e n_e)$. Оно обращается в тождество, если температура однородна ($\mathbf{R}_T = 0$), плотность плазмы удовлетворяет закону Больцмана $n_e = n_{e0} e^{-e_e \varphi/T_e}$, а электрическое поле потенциально ($\mathbf{E} = -\nabla \varphi$).

14.5. Эффект Холла

Третье слагаемое в правой части обобщённого закона Ома (20) описывает *эффект Холла* (Edwin Hall, 1879 [139]), который в переменном электрическом поле вызывает ток, перпендикулярный E . В стационарном поле результат чувствителен к геометрии задачи и к условиям протекания тока на границе плазмы.

Рассмотрим несколько конкретных задач, пренебрегая термосилой и градиентом давления электронов в уравнении (20), что, безусловно, можно сделать, если плазма однородна.

Переменный ток в плазме

Для начала будем считать, что электрическое поле осциллирует столь быстро, что ионы почти неподвижны, не успевая приобрести заметную скорость за период изменения поля, которое в среднем за период равно нулю. Иными словами, $V = u_i = 0$. Тогда обобщённый закон Ома принимает максимально простой вид:

$$E = \frac{\alpha_{\parallel}}{e_e^2 n_e^2} j_{\parallel} + \frac{\alpha_{\perp}}{e_e^2 n_e^2} j_{\perp} + \frac{\alpha'_{\wedge}}{e_e^2 n_e^2} [h \times j_{\perp}]. \quad (21)$$

Его нетрудно обратить, выразив плотность тока j через E . Искомую зависимость будем искать в виде:

$$j = \Sigma_{\parallel} E_{\parallel} + \Sigma_{\perp} E_{\perp} + \Sigma_{\wedge} [h \times E_{\perp}]. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и приравнявая коэффициенты при E_{\parallel} , E_{\perp} и $[h \times E_{\perp}]$ справа и слева, находим проводимость плазмы:

$$\Sigma_{\perp} = \frac{e_e^2 n_e^2 \alpha_{\perp}}{\alpha_{\perp}^2 + \alpha'_{\wedge}{}^2}, \quad \Sigma_{\wedge} = -\frac{e_e^2 n_e^2 \alpha'_{\wedge}}{\alpha_{\perp}^2 + \alpha'_{\wedge}{}^2}, \quad \Sigma_{\parallel} = \frac{e_e^2 n_e^2}{\alpha_{\parallel}}.$$

В пределе замагниченной лоренцевой плазмы имеем:

$$\Sigma_{\perp} = \frac{\omega_p^2 \tau_e / 4\pi}{1 + \Omega_e^2 \tau_e^2}, \quad \Sigma_{\wedge} = -\frac{\omega_p^2 \tau_e / 4\pi}{1 + \Omega_e^2 \tau_e^2} \Omega_e \tau_e, \quad \Sigma_{\parallel} = \frac{32}{3\pi} \frac{\omega_p^2 \tau_e}{4\pi}. \quad (23)$$

Отсюда видно, что электрическое поле E_{\perp} , перпендикулярное магнитному полю, вызывает не только ток в направлении E_{\perp} , но и «косой» ток вдоль $[h \times E_{\perp}]$, что составляет суть эффекта Холла.

В сильном магнитном поле, при $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$, проводимость плазмы Σ_{\perp} поперёк магнитного поля быстро убывает с ростом B . Проводимость же вдоль магнитного поля Σ_{\parallel} не зависит от B .

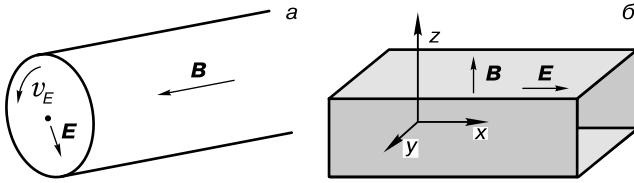


Рис. 14.2. Эффект Холла в стационарном поле

Стационарное поле

В случае стационарного электрического поля ионы уже нельзя считать неподвижными, а результат зависит от формы границы плазмы.

Пусть плазма имеет форму цилиндра, как показано на рис. 14.2, а, а электрическое поле направлено по радиусу: $E = E\hat{r}$. Обратившись к уравнению (2), нетрудно видеть, что при отсутствии градиента плотности электронная и ионная компоненты плазмы будут вращаться вокруг оси цилиндра с одинаковой скоростью, равной скорости электрического дрейфа

$$u_e = u_i = \frac{c}{B^2} [E \times B],$$

а электрическая сила будет уравновешена силой Лоренца. Из равенства $u_e = u_i$ следует, что сила Брагинского будет равна нулю, т. е. $R = 0$, как и электрический ток, $j = 0$. А раз ток не возникает, то плазма ведёт себя как диэлектрик. Удивительное рядом!

Вычислим диэлектрическую проницаемость плазмы ε , приравняв два выражения для плотности энергии w электрического поля в диэлектрике. С одной стороны,

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi},$$

с другой стороны, w складывается из собственной энергии электрического поля и кинетической энергии частиц плазмы:

$$w = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{m_i u_i^2}{2} n_i = \left(1 + \frac{4\pi m_i n_i c^2}{B^2}\right) \frac{E^2}{8\pi}.$$

Вводя обозначение $v_C = B / \sqrt{4\pi m_i n_i}$ альфвеновской скорости, находим искомую диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = 1 + c^2/v_C^2.$$

Совершенно иная ситуация складывается, если движение плазмы запрещено граничными условиями. Пусть имеется ограниченная

область плазмы в виде плоского плазменного канала, как показано на рис. 14.2,б. Ток в такой системе не может существовать, если стенки канала непроводящие или оторваны от плазмы вакуумным зазором. Подставляя $j_y = 0$ в x -проекцию уравнения (21), немедленно находим

$$j_x = \frac{e_e^2 n_e^2}{\alpha_\perp} E_x = \frac{\omega_{pe}^2 \tau_e}{4\pi} E_x.$$

Теперь выясняется, что косой ток не возникает, а магнитное поле вообще никак не влияет на электрический ток, в то время как поперечная проводимость плазмы Σ_\perp , согласно формуле (23), должна быстро уменьшаться при увеличении B . Этот факт в своё время заинтересовал Эдвина Холла и привёл к открытию эффекта, названного в его честь [139]. Читатель может повторить опыт Холла, измерив сопротивление металлического провода, помещённого в магнитное поле.

Литература

Кинетические коэффициенты вычислены в статье [121] С. И. Брагинского в 1-м томе сборника «Вопросы теории плазмы». В §2 приведена сводка результатов для замагниченной плазмы, а в §4 изложен способ расчёта и приведены результаты для произвольной напряжённости магнитного поля.

Современное изложение двухжидкостной гидродинамики имеется в статьях Р. Калсруда [122] и Ф. Хинтона [112] в «Основах физики плазмы». В книге Дж. Фрейдберга «Ideal Magnetohydrodynamics» [15] материалу лекции соответствует глава 2.

Выявленные к настоящему времени неточности в теории С. И. Брагинского собраны в статье Е. М. Эпперлейна и М. Г. Хайнса [132].

Задачи

Задача 14.1. Вычислить силу трения в замагниченной плазме, перпендикулярную направлению магнитного поля. ►► Решение

Задача 14.2. Почему в замагниченной плазме при одинаковой скорости электронов относительно ионов сила трения, перпендикулярная магнитному полю, больше, чем сила трения вдоль магнитного поля? ►► Решение

Задача 14.3. Найти диффузионный поток в слабоионизованном газе. ►► Решение

Задача 14.4. Сравнить вклад электронов и ионов в теплопроводность плазмы. ►► Решение

Задача 14.5. Оценить «косую» силу трения, перпендикулярную как магнитному полю, так и скорости движения электронов относительно ионов. Почему её нет в формуле (3)? ►► Решение

Задача 14.6. Оценить термосилу в магнитном поле. ►► Решение

Задача 14.7. Оценить электронный поток тепла q_u в магнитном поле. ►► Решение

Задача 14.8. Показать, что при наличии градиента температуры, перпендикулярного магнитному полю, возникает «косой» поток тепла в направлении, перпендикулярном как магнитному полю, так и градиенту температуры, и оценить его величину. ►► Решение

Задача 14.9. Вычислить кинетические коэффициенты для электронов в лоренцевой плазме. ►► Решение

Задача 14.10. Установить правило преобразования между кинетическими коэффициентами Брагинского и Балеску. ►► Решение

Задача 14.11. Вычислить кинетические коэффициенты Балеску для лоренцевой плазмы. ►► Решение

Задача 14.12. Оценить коэффициент бомовской диффузии, рассматривая рассеяние заряженных частиц на турбулентных флуктуациях электрического поля. Может ли коэффициент диффузии быть больше бомовского? ►► Решение

Одножидкостная магнитная гидродинамика

Идеальная магнитная гидродинамика. Вмороженность магнитного поля. Гидродинамика анизотропной плазмы. Адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу.

Как было сказано в лекции 12, система уравнений магнитной гидродинамики, предложенная Х. Альфвеном (Hannes Alfvén), может быть получена путём редуцирования уравнений двухжидкостной МГД. Однако Альфвен «просто» дописал в уравнении обычной гидродинамики силу Ампера и догадался, что при движении проводящей жидкости в магнитном поле возникают исключительно интересные и неожиданные явления. Настолько неожиданные, что идеи Альфвена с недоверием воспринимались современниками. Сама мысль, что в проводящей жидкости могут существовать электромагнитные колебания казалась крамольной, пока однажды Альфвена не поддержал Энрико Ферми (Enrico Fermi). Выслушав в 1948 г. доклад Альфвена, он произнёс фразу, которую назавтра повторяли уже все: «Конечно, такие волны могли бы существовать».

Уникальные свойства проводящей жидкости связаны с тем, что при перемещении проводящего вещества в магнитном поле возбуждаются токи индукции, которые оказывают обратное воздействие как на жидкость, так и на поле. Свои идеи Альфвен развивал применительно к космической плазме, но обнаруженные им явления возникают в любой проводящей жидкости. Теория Альфвена исходит из одножидкостной модели плазмы, поэтому её следовало бы называть *одножидкостной магнитной гидродинамикой*, если важно подчеркнуть её отличие от двухжидкостной магнитной гидродинамики. Однако, по сложившейся традиции, слово «одножидкостная» опускают там, где это не должно вызывать недоразумений. Наконец, *идеальной магнитной гидродинамикой* называют предел одножидкостной модели МГД, когда электрическую проводимость плазмы можно считать бесконечной.

Следуя Альфвену, мы дадим феноменологический вывод уравнений идеальной магнитной гидродинамики, а формальный вывод из двухжидкостной теории МГД оставим читателю в виде задачи.

15.1. Плазма как сплошная среда

В приближении одножидкостной МГД предполагается, что поведение плазмы сходно с поведением идеального газа с уравнением состояния

$$p = n_i T_i + n_e T_e = 2nT, \quad (1)$$

где p — давление, T — температура, а n — плотность n_i однозарядных ионов и равная ей плотность n_e электронов. Возможным различием температур электронов и ионов в рамках одножидкостной МГД обычно пренебрегают, предполагая, что $T_e = T_i = T$.

Так как масса электронов m_e значительно меньше массы ионов m_i , массовая плотность плазмы

$$\rho = m_e n_e + m_i n_i \simeq m_i n$$

с огромной точностью определяется ионами, а массовая скорость

$$\mathbf{V} = \frac{m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i}{\rho} \simeq \mathbf{u}_i$$

практически равна средней скорости ионов \mathbf{u}_i в физически малом элементе объёма плазмы (ср. п. 14.4). Соответственно, $d\mathbf{V}/dt$ есть ускорение этого элемента плазмы, который можно представить себе в виде капельки подкрашенного вещества. С добавлением силы Ампера гидродинамическое уравнение Эйлера принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}], \quad (2)$$

где \mathbf{B} — магнитное поле, \mathbf{j} — плотность электрического тока, а

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

называется полной (лагранжевой) производной векторной функции $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. К уравнению Эйлера (2) следует добавить уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (3)$$

а также уравнения Максвелла. Считая, что все происходящие в плазме движения медленные и протекают со скоростями значительно меньшими скорости света, в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (5)$$

В таком виде уравнения Максвелла входят в систему двухжидкостной магнитной гидродинамики (п. 12.4), но в одножидкостной

магнитной гидродинамике они служат лишь отправной точкой для получения финальных уравнений. Во-первых, заметим, что с помощью уравнения (5) можно исключить плотность тока из силы Ампера в уравнении движения (2), переписав его в виде

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } B \times B]. \quad (6)$$

Во-вторых, можно исключить электрическое поле, скомбинировав первое уравнение (4) с законом Ома. В одножидкостной магнитной гидродинамике вместо обобщённого закона Ома (п. 14.4) используют более грубое приближение

$$j = \Sigma E', \quad (7)$$

связывающее плотность тока j с электрическим полем E' в системе отсчёта, движущейся вместе с жидким элементом. При $V \ll c$ преобразование Лоренца для полей в этой системе отсчёта даёт

$$E' = E + \frac{1}{c} [V \times B].$$

С другой стороны,

$$E' = \frac{j}{\Sigma} = \frac{c}{4\pi\Sigma} \text{rot } B.$$

Приравнявая два выражения для E' , получаем

$$E = -\frac{1}{c} [V \times B] + \frac{c}{4\pi\Sigma} \text{rot } B. \quad (8)$$

Подставляя затем E в уравнение (5), при дополнительном предположении, что коэффициент проводимости является константой, с помощью векторного тождества

$$\text{rot rot } B = \nabla \text{div } B - \nabla^2 B = -\nabla^2 B$$

приведём его к виду

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}[V \times B] + \frac{c^2}{4\pi\Sigma} \nabla^2 B. \quad (9)$$

Уравнения (1), (3), (6) и (9) составляют основную систему уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики. Они игнорируют все диссипативные процессы, за исключением электрического сопротивления. Чтобы замкнуть эту систему уравнений, её нужно дополнить уравнением для температуры T . Единого рецепта, каким должно быть это дополнительное уравнение, нет. Если теплообмен между различными областями плазмы почему-либо мал, можно воспользоваться уравнением политропы

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \quad (10)$$

с показателем $\gamma = \frac{5}{3}$. Если же характерные размеры неоднородности в плазме невелики, то из-за высокой электронной теплопроводности более адекватным может быть приближение изотермической плазмы

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad (11)$$

которое формально соответствует политропе с показателем $\gamma = 1$.

Уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики достаточно хорошо описывают крупномасштабные и сравнительно медленные движения в плазме, для которых несущественно различие в движении отдельных групп частиц. В частности, эти уравнения хорошо описывают равновесие плазмы в магнитном поле в условиях, когда несущественна её анизотропия, т. е. функция распределения частиц по скоростям близка к максвелловской.

15.2. Идеальная магнитная гидродинамика

Очевидный недостаток (одножидкостной) магнитной гидродинамики состоит в том, что проводимость считается скалярной константой. В применении к плазме такое приближение далеко от действительности, так как в магнитном поле проводимость является тензором. Однако во многих задачах можно перейти к ещё более упрощённому способу описания, устремив проводимость Σ к бесконечности. При $\Sigma \rightarrow \infty$ сколь угодно малое электрическое поле вызвало бы бесконечный ток, что невозможно. Следовательно, в сопутствующей системе отсчёта, связанной с плазмой, электрическое поле \mathbf{E}' равно нулю, а поэтому

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (12)$$

Векторное произведение $[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ зависит только от составляющей скорости \mathbf{V}_\perp , перпендикулярной к магнитному полю, поэтому условие (12) накладывает определённое ограничение на \mathbf{V}_\perp ; скорость же вдоль магнитного поля \mathbf{V}_\parallel может иметь любое значение. Прямой подстановкой несложно проверить, что скорость электрического дрейфа (4.11)

$$\mathbf{v}_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \quad (13)$$

обращает равенство (12) в тождество. Иными словами, в приближении идеальной МГД плазма движется со скоростью электрического дрейфа. Уравнения (12) и (13) по сути эквивалентны, но их смысл различен: если уравнение (12) трактуется так, что движение плазмы порождает электрическое поле, то уравнение (13) говорит, что это

электрическое поле приводит плазму в движение. Как мы увидим в следующем параграфе, такое движение «вмораживает» магнитное поле в плазму.

При $\Sigma = \infty$ в уравнении (9) второе слагаемое справа исчезает, поэтому система уравнений принимает следующий вид (Н. Alfvén, 1942 [40]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (14a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}], \quad (14б)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (14в)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \quad (14г)$$

Как указано в п. 15.1, показатель политропы может иметь значение $\frac{5}{3}$ или 1.

15.3. Вмороженность магнитного поля

Рассмотрим подробнее уравнение (9) и постараемся выяснить его физический смысл. Последнее слагаемое в правой части этого уравнения описывает диффузионное расплывание неоднородностей магнитного поля в проводящей среде вследствие конечной проводимости. Действительно, при $\mathbf{V} = 0$ уравнение (9) приобретает вид уравнения диффузии

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (15)$$

с коэффициентом

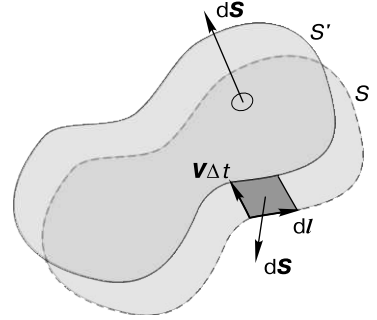
$$D_m = c^2 / (4\pi\Sigma), \quad (16)$$

который имеет размерность коэффициента диффузии. Можно сказать, что из-за конечной проводимости магнитное поле просачивается сквозь плазму по диффузионному закону. Глубина проникновения поля в течение заданного времени t приблизительно равна $\sqrt{2D_m t}$. Для периодического процесса время t порядка обратной частоты $1/\omega$, а глубина проникновения близка к толщине скин-слоя

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\Sigma\omega}}, \quad (17)$$

который в электротехнике характеризует глубину проникновения высокочастотного тока в проводник.

Рис. 15.1. Поток магнитного поля через любой жидкий контур, движущийся вместе с плазмой, сохраняется; это означает, что силовые линии магнитного поля не пересекают контур и как бы «приклеены» к идеально проводящей жидкости; указанное свойство идеально проводящей жидкости называют вмороженностью магнитного поля



Если толщина скин-слоя мала по сравнению с характерным размером неоднородности магнитного поля, конечной проводимостью плазмы можно пренебречь. Именно в этом случае мы приходим к идеальной магнитной гидродинамике, в которой отсутствуют все виды диссипации, а уравнение (9) упрощается:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (18)$$

Покажем, что в такой форме оно описывает эффект «вмороженности» магнитного поля в проводящую среду. Чтобы понять, о чём идёт речь, рассмотрим произвольный замкнутый контур l , движущийся вместе с плазмой (рис. 15.1), и подсчитаем магнитный поток

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$$

через поверхность, ограниченную контуром l . Поскольку $\text{div } \mathbf{B} = 0$, величина Φ определяется лишь контуром l и не зависит от формы поверхности, натянутой на l . Изменение потока

$$\Delta\Phi = \int_{S'} (\mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S}) - \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) \quad (19)$$

за время Δt — суть разность потоков через контур S в момент времени t и тот же контур, перемещённый вместе с плазмой в новое положение S' в момент времени $t + \Delta t$; здесь $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{B}' = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$, а $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности, рассматриваемый как вектор, направленный по нормали к поверхности и составляющий правый винт с направлением обхода контура. На рисунке 15.1 вектор $d\mathbf{S}$ поверхностей S и S' направлен вверх, и поверхность S можно выбрать так, что она будет составлена из поверхности S' и узкой ленты ΔS шириной $V \Delta t$,

соединяющей два контура:

$$\int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \int_{S'} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) + \int_{\Delta S} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}).$$

Первый из этих интегралов можно объединить с первым интегралом в (19); с точностью до малых величин второго порядка их разность равна

$$\int_{S'} (\mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S}) - \int_{S'} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \Delta t \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right).$$

Что касается второго интеграла, то он может быть записан в виде интеграла по контуру l , так как элемент поверхности ленты ΔS равен $d\mathbf{S} = [d\mathbf{l} \times \mathbf{V} \Delta t]$:

$$\int_{\Delta S} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \Delta t \oint_l \mathbf{B} \cdot [d\mathbf{l} \times \mathbf{V}] = \Delta t \oint_l [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l}.$$

Кроме того, в соответствии с известной формулой векторного анализа интеграл по замкнутому контуру можно преобразовать к интегралу по натянутой на него поверхности, поэтому

$$\int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Delta t \int_S \text{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S}.$$

Собирая слагаемые, получаем соотношение

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \text{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S}.$$

Устремляя теперь $\Delta t \rightarrow 0$, убеждаемся, что с учётом уравнения (18)

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Сохранение магнитного потока означает, что силовые линии магнитного поля не пересекают линию контура. Поскольку это утверждение верно для любого контура l , движущегося вместе с веществом, получается, что силовые линии как бы заморожены в проводящую жидкость, иными словами, приклеены к её частичкам. Представление о замороженности магнитного поля упрощает анализ картины движения идеально проводящей плазмы.

Вернёмся к уравнению (18); ему может быть дано и другое наглядное истолкование (Н. Alfvén, 1942). Раскроем rot в правой стороне уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{V} \text{ div } \mathbf{B}.$$

Подставляя сюда

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{V}}{\rho} \cdot \nabla \rho$$

из уравнения непрерывности (3) и учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, после простой перегруппировки членов получим формулу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{V},$$

в левой части которой легко распознать полную производную по времени вектора \mathbf{B}/ρ . Таким образом, уравнение вмороженности магнитного поля имеет альтернативную форму, эквивалентную исходной записи (18):

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}. \quad (20)$$

С другой стороны, рассмотрим какую-либо «жидкую линию», т. е. линию, перемещающуюся вместе с составляющими её частицами жидкости. Пусть δl есть элемент длины этой линии; определим, как он меняется с течением времени. Если \mathbf{V} есть скорость жидкости в точке на одном конце элемента δl , то её скорость на другом конце есть $\mathbf{V} + (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{V}$. Поэтому в течение времени dt элемент δl изменится на $dt (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{V}$, т. е.

$$\frac{d\delta l}{dt} = (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

Мы видим, что изменение векторов δl и \mathbf{B}/ρ со временем определяется одним и тем же уравнением. Отсюда следует, что если в начальный момент эти векторы совпадают по направлению, то они останутся параллельными и в дальнейшем, а их длины будут меняться пропорционально друг другу. Другими словами, если две бесконечно близкие частицы жидкости находятся на одной и той же силовой линии, то и в дальнейшем они будут находиться на одной и той же силовой линии, а величина \mathbf{B}/ρ будет меняться пропорционально расстоянию между ними.

Переходя от бесконечно близких точек к точкам, находящимся на любом конечном расстоянии друг от друга, приходим к выводу, что каждая силовая линия перемещается вместе с находящимися на ней жидкими частицами. Можно сказать, что при $\Sigma \rightarrow \infty$ магнитные силовые линии как бы вморожены в вещество жидкости, перемещаясь вместе с ним. Величина же \mathbf{B}/ρ меняется в каждой точке пропорционально растяжению соответствующей «жидкой линии».

15.4. Тензор напряжений магнитного поля

Обратимся к уравнению движения плазмы (146) и запишем его проекцию на ось x_μ декартовой системы координат:

$$\rho \frac{dV_\mu}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_\mu} + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]_\mu. \quad (21)$$

Не предполагая далее, что плазма изотропна, первое слагаемое справа, $\partial p / \partial x_\mu$, представляющее проекцию градиента давления ∇p , заменим на $\partial P_{\mu\nu} / \partial x_\nu$, припомним, что при выводе уравнений двухжидкостной гидродинамики в п. 12.3 была проделана обратная замена $\nabla \cdot \vec{P}$ на ∇p . Второе слагаемое преобразуем с помощью векторного тождества

$$\frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] = -\frac{1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Его проекция на ось x_μ записывается как

$$\frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]_\mu = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} B^2 + \frac{1}{4\pi} B_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} B_\mu.$$

Вводя обозначение $p_m = \frac{1}{8\pi} B^2$, первое слагаемое справа преобразуем с помощью цепочки равенств

$$-\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} B^2 = -\frac{\partial p_m}{\partial x_\mu} = -\frac{\partial}{\partial x_\nu} p_m \delta_{\mu\nu}.$$

Во втором слагаемом B_ν можно внести под знак дифференцирования:

$$\frac{1}{4\pi} B_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} B_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{B_\nu B_\mu}{4\pi} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} 2p_m h_\nu h_\mu,$$

так как $\partial B_\nu / \partial x_\nu = \text{div } \mathbf{B} = 0$; здесь $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ обозначает единичный вектор в направлении магнитного поля. Таким образом,

$$\frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\nu} p_m \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} 2p_m h_\nu h_\mu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (22)$$

где

$$T_{\mu\nu} = p_m (\delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu) - p_m h_\mu h_\nu. \quad (23)$$

Подставляя (22) в уравнение (21), получаем

$$\rho \frac{dV_\mu}{dt} = -\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \quad (24)$$

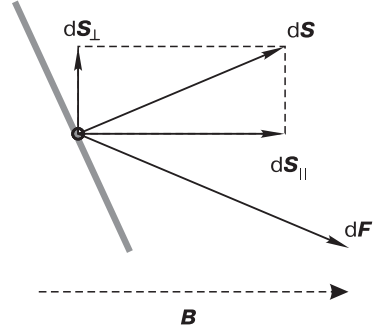
В других обозначениях то же уравнение имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \cdot \vec{P} - \nabla \cdot \vec{T}. \quad (25)$$

Тензор \vec{T} называется *тензором напряжений магнитного поля*.¹⁾ Чтобы выявить его смысл, заметим прежде всего, что его компоненты $T_{\mu\nu}$ имеют размерность давления, как и $p_m = \frac{1}{8\pi} B^2$. Так как слева

¹⁾ Тензор натяжений магнитного поля $\vec{\sigma}$ введён Максвеллом (J. Maxwell, 1861) и имеет знак, противоположный \vec{T} .

Рис. 15.2. Магнитное поле действует на элемент площадки dS с силой $d\vec{F}_m = -\vec{T} \cdot d\vec{S}$; оно тянет площадку вдоль своего направления с силой $dF_{m\parallel} = \frac{1}{8\pi} B^2 dS_{\parallel}$ и давит поперёк с силой $dF_{m\perp} = -\frac{1}{8\pi} B^2 dS_{\perp}$; если магнитное поле непрерывно на поверхности, суммарная сила с двух сторон поверхности будет равна нулю



в уравнении (24) стоит масса единицы объёма, умноженная на ускорение, его правая часть

$$\vec{f} = -\nabla \cdot \vec{P} - \nabla \cdot \vec{T} \quad (26)$$

есть сила в расчёте на единицу объёма. Интеграл этой силы по произвольному объёму, занятому плазмой, с помощью теоремы Остроградского—Гаусса можно преобразовать к поверхностному интегралу по границе выделенного объёма:

$$\int \vec{f} d^3x = - \oint (\vec{P} + \vec{T}) \cdot d\vec{S}.$$

Отсюда следует, что

$$d\vec{F} = -\vec{P} \cdot d\vec{S} - \vec{T} \cdot d\vec{S}$$

есть сила, действующая на элемент поверхности dS . Очевидно, что первое слагаемое в $d\vec{F}$ представляет газокINETическую часть этой силы, а второе слагаемое суть сила, создаваемая магнитным полем.

Чтобы вычислить эту силу, составим свёртку $(-\vec{T} \cdot d\vec{S})_{\mu} = -T_{\mu\nu} dS_{\nu}$ с тензором (23):

$$-T_{\mu\nu} dS_{\nu} = -p_m (\delta_{\mu\nu} - h_{\mu} h_{\nu}) dS_{\nu} + p_m h_{\mu} h_{\nu} dS_{\nu}.$$

Заметим, что $h_{\mu} h_{\nu} dS_{\nu}$ есть проекция $dS_{\parallel} = h(h \cdot d\vec{S})$ вектора $d\vec{S}$ на направление магнитного поля, заданное единичным вектором h . Соответственно $(\delta_{\mu\nu} - h_{\mu} h_{\nu}) dS_{\nu} = dS_{\mu} - h_{\mu} (h_{\nu} dS_{\nu})$ будет проекцией $dS_{\perp} = d\vec{S} - dS_{\parallel}$ на плоскость, перпендикулярную h . Следовательно,

$$-\vec{T} \cdot d\vec{S} = -p_m dS_{\perp} + p_m dS_{\parallel}.$$

Здесь первое слагаемое описывает силу, которая действует на площадку с сечением dS_{\perp} , нормаль к которой перпендикулярна магнитному полю (рис. 15.2). Эта сила направлена против вектора dS_{\perp} и поэтому представляет собой давление магнитного поля. Второе слагаемое описывает силу, приложенную к площадке с сечением dS_{\parallel} , нормаль

к которой параллельна магнитному полю. Эта сила направлена вдоль вектора $d\mathbf{S}_{\parallel}$ и поэтому отвечает натяжению магнитных силовых линий.

Следует обратить внимание, что

$$\nabla \cdot \vec{T} = 0 \quad (27)$$

в магнитном поле в вакууме, где $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Проще всего в этом убедиться обратившись к уравнению движения в исходной форме (21), где второе слагаемое очевидным образом обращается в ноль, если $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Следовательно, в вакуумном поле равен нулю также интеграл $\oint (\vec{T} \cdot d\mathbf{S})$ по любой замкнутой поверхности. Этот факт означает, что магнитная сила возникает только за счёт искажения магнитного поля плазмой.

15.5. Гидродинамика анизотропной плазмы

До сих пор мы обсуждали плазму, в которой самым коротким было время между последовательными соударениями частиц, за исключением, быть может, периода ларморовского вращения. Начиная с лекции 12, мы предполагали, что любой малый элемент плазмы релаксирует к максвелловскому распределению быстрее, чем изменяются его макроскопические свойства, что допускает локальное описание через параметры, характеризующие это максвелловское распределение. Такая упорядоченность времён оправдывает гидродинамическое приближение. С другой стороны, во многих важных случаях время межчастичных столкновений настолько велико, что их можно не учитывать. Например, в термоядерном реакторе с магнитным удержанием плазму заведомо следует считать бесстолкновительной, так как длина свободного пробега многократно превышает размеры системы. К такой бесстолкновительной плазме гидродинамическое описание, как кажется, неприменимо. Однако даже для слабых магнитных полей ларморовский период остаётся короче всех макроскопических времён, и у плазмы есть двумерная упорядоченность в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Это обстоятельство открывает в ограниченных пределах возможность гидродинамического описания даже бесстолкновительной плазмы.

Рассмотрим замагнитненную плазму. Если столкновений нет или они достаточно редки, давления плазмы вдоль и поперёк магнитного поля не обязательно равны друг другу, $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$. В специальной

системе координат, где магнитное поле направлено вдоль оси z , тензор давления записывается диагональной матрицей

$$P_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Недиагональные элементы тензора давления малы, если рассматриваются времена, большие по сравнению с периодом циклотронного вращения ионов, т. е. $t \gg \Omega_i^{-1}$, поскольку тогда число частиц, имеющих заданную фазу вращения, не зависит от этой фазы. Примером является плазма, где распределение частиц описывается бимаксвелловской функцией

$$f = \frac{n}{(2\pi/m)^{3/2} T_{\perp} T_{\parallel}^{1/2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T_{\perp}} - \frac{mv_y^2}{2T_{\perp}} - \frac{mv_z^2}{2T_{\parallel}}\right).$$

В произвольно ориентированной системе координат по аналогии с $T_{\mu\nu}$ имеем

$$P_{\mu\nu} = p_{\perp}[\delta_{\mu\nu} - h_{\mu}h_{\nu}] + p_{\parallel}[h_{\mu}h_{\nu}], \quad (29)$$

где $p_{\perp} = nT_{\perp}$, $p_{\parallel} = nT_{\parallel}$. Уравнение движения такой плазмы получается при подстановке (23) и (29) в (24):

$$\rho \frac{dV_{\mu}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} [(p_{\perp} + p_m)(\delta_{\mu\nu} - h_{\mu}h_{\nu}) + (p_{\parallel} - p_m)(h_{\mu}h_{\nu})]. \quad (30)$$

В векторных обозначениях сила в его правой части выражается через градиенты вдоль ($\nabla_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \nabla)$) и поперёк ($\nabla_{\perp} = \nabla - \nabla_{\parallel}$) магнитного поля, а также вектор кривизны магнитных силовых линий $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h}$. Действительно, если дифференцировать первые множители (содержащие давление), получим

$$-(\delta_{\mu\nu} - h_{\mu}h_{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (p_{\perp} + p_m) - (h_{\mu}h_{\nu}) \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (p_{\parallel} - p_m),$$

что составляет проекцию вектора

$$-\nabla_{\perp}(p_{\perp} + p_m) - \nabla_{\parallel}(p_{\parallel} - p_m)$$

на ось x_{μ} . Дифференцирование вторых множителей даёт

$$(2p_m + p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (h_{\mu}h_{\nu}),$$

так как $\partial\delta_{\mu\nu}/\partial x_{\nu} = 0$. Производную в последнем выражении преобразуем с помощью уравнения $\partial B_{\nu}/\partial x_{\nu} = \text{div } \mathbf{B} = 0$, вынеся множитель $B_{\nu} = Bh_{\nu}$ из-под знака дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (h_{\mu}h_{\nu}) = Bh_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{h_{\mu}}{B} = B(\mathbf{h} \cdot \nabla) \frac{h_{\mu}}{B}.$$

Здесь уже нетрудно распознать проекцию вектора

$$B(\mathbf{h} \cdot \nabla) \frac{h}{B} = (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h} + B\mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \nabla) \frac{1}{B} = \boldsymbol{\kappa} - \frac{\nabla_{\parallel} B}{B}.$$

Собирая слагаемые, замечаем, что $\nabla_{\parallel} p_m$ сокращается с $-2p_m \nabla_{\parallel} B/B$. В итоговом уравнении

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla_{\perp} \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \left(p_{\perp} - p_{\parallel} + \frac{B^2}{4\pi} \right) \mathbf{z} - \nabla_{\parallel} p_{\parallel} - (p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{\nabla_{\parallel} B}{B} \quad (31)$$

первые два слагаемых справа описывают силы, действующие поперёк, а последние два — вдоль магнитного поля. Эквивалентная форма того же уравнения

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla_{\perp} p_{\perp} + (p_{\perp} - p_{\parallel}) \mathbf{z} - \nabla_{\parallel} p_{\parallel} - (p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{\nabla_{\parallel} B}{B} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \quad (32)$$

получается, если слагаемые, содержащие только магнитное поле, вернуть к исходному виду силы Ампера, как в уравнении (2).

15.6. Адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу

Как отмечено в п. 15.5, бесстолкновительная плазма поддаётся описанию гидродинамическими уравнениями, но прежде необходимо найти замену уравнению (14г), которое подразумевает изотропность плазмы. Покажем, что величины p_{\perp} и p_{\parallel} можно выразить через два уравнения состояния

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}}{\rho B} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} = 0, \quad (34)$$

которые применимы, если сохраняются адиабатические инварианты μ и J_{\parallel} (лекция 6).

Поперечное давление p_{\perp} пропорционально квадрату поперечной скорости v_{\perp}^2 , усреднённого по всем частицам, и плотности плазмы ρ . Вследствие инвариантности $\mu = mv_{\perp}^2/(2B)$ величина v_{\perp}^2 пропорциональна B , поэтому

$$p_{\perp} \propto \rho v_{\perp}^2 \propto \rho B,$$

что подтверждает уравнение (33).

Инвариантность J_{\parallel} означает, что сохраняется величина $v_{\parallel} l$, где l — протяжённость трубки плазмы вдоль магнитной силовой линии. В рассматриваемом случае $l \propto B/\rho$. Действительно, масса плазмы в магнитной трубке $M = \rho l S$ сохраняется, как и поток магнитного поля $\Phi = BS$ через сечение трубки S , поэтому $\rho l/B = M/\Phi$ также будет сохраняющейся величиной. Следовательно, $v_{\parallel} \propto 1/l \propto \rho/B$ и

$$p_{\parallel} \propto \rho v_{\parallel}^2 \propto \rho^3/B^2.$$

Уравнения (33) и (34) называют адиабатами Чу—Голдбергера—Лоу [140].

Литература

В книге «Plasma Physics and Fusion Energy» [16] Дж. Фрейдберга материалу лекции соответствует гл. 11.

Применение магнитной гидродинамики к описанию некоторых явлений в бесстолкновительной плазме обосновано в статье Т. Ф. Волкова [123] в 4-м томе «Вопросов теории плазмы».

Задачи

Задача 15.1. Вывести уравнения идеальной магнитной гидродинамики из уравнений двухжидкостной гидродинамики. ►► Решение

Задача 15.2. Вывести уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \mathbf{V} + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]] \right) = 0$$

и объяснить смысл каждого его члена. Можно ли считать, что оно эквивалентно уравнению политропы (14г)? ►► Решение

Задача 15.3. Система уравнений (14) не содержит параметров, характеризующих столкновения между частицами. Означает ли это, что её можно использовать для описания бесстолкновительной плазмы?

Задача 15.4. Спиральностью плазмы называют интеграл

$$K = \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) d^3x,$$

где \mathbf{A} — векторный интеграл и $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Вычислить производную dK/dt и показать, что в пределе идеальной магнитной гидродинамики спиральность сохраняется при подходящем выборе граничных условий. ►► Решение

Задача 15.5. Вычислить тензор давления в плазме с бимаксвелловским распределением частиц.

Равновесие плазмы

Равновесие изотропной плазмы. Пинчи. Бессилловые конфигурации. Токамаки. Равновесие анизотропной плазмы. Плазма как диамагнетик.

В реальных условиях плазма редко бывает спокойной. В ней легко возникают колебания разного рода. Но прежде, чем начать их изучение, естественно рассмотреть более простую ситуацию, когда плазма находится в покое. Разумеется, можно представить себе неограниченную однородную плазму, заполняющую всё пространство и находящуюся в тепловом равновесии. Такая предельная идеализация часто используется при теоретическом анализе колебаний плазмы. Если же отойти от умозрительных построений, следует признать, что реальная плазма всегда неоднородна и ограничена в пространстве. Она может находиться в покое, только если на неё действуют некие силы, препятствующие её разлёту. В лаборатории ими могут быть силы со стороны магнитного поля, а в космосе — силы гравитации.

16.1. Равновесие изотропной плазмы

Говоря о равновесии, обычно подразумевают состояние, в котором плазма неподвижна и $V = 0$. Согласно (15.2), такое равновесие возможно только в том случае, если градиент давления уравновешен силой Ампера:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [j \times B]. \quad (1)$$

Наличие тока в равновесии, строго говоря, делает представление о неподвижной плазме условным, так как электроны должны двигаться, чтобы создавать ток, даже если ионы неподвижны.

Магнитное поле B и плотность тока j связаны уравнением

$$\text{rot } B = \frac{4\pi}{c} j \quad (2)$$

и, кроме того,

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (1) вытекают два соотношения

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0, \quad (\mathbf{j} \cdot \nabla p) = 0, \quad (5)$$

которые можно рассматривать как условия постоянства давления вдоль силовых линий магнитного поля и линий тока: по этим направлениям сила Ампера не действует, и плазма может свободно расширяться вдоль направлений \mathbf{B} и \mathbf{j} . Вместе с тем условия (5) означают, что силовые линии и линии тока должны лежать на поверхностях $p = \text{const}$.

Если попытаться изолировать плазму от стенок магнитным полем — а такая проблема возникла в связи с поисками путей достижения управляемого термоядерного синтеза, — то поверхности $p = \text{const}$ должны быть замкнуты и вложены друг в друга так, чтобы на границе плазмы давление обращалось в нуль, достигая максимального значения внутри неё. Уложить на эти поверхности силовые линии и линии тока так, чтобы нигде не возникало особых точек (таких как «протыкание» поверхности $p = \text{const}$ проводником с током), можно только в том случае, если они представляют собой систему вложенных друг в друга тороидальных поверхностей. Таким образом, поиск равновесных конфигураций изотропной плазмы приводится к задаче о равновесии в торе, которая будет рассмотрена несколько позднее.

Выражая \mathbf{j} через \mathbf{B} с помощью (2) и пользуясь известными соотношениями векторного анализа, уравнение равновесия (1) можно записать в виде

$$\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \boldsymbol{\kappa}, \quad (6)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ — единичный вектор вдоль магнитного поля, $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \nabla)$ — поперечный градиент, а $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h}$ — вектор кривизны. Уравнение (6) можно также получить из уравнения движения анизотропной плазмы (15.31), приравняв $\mathbf{V} = 0$ и $p_{\perp} = p_{\parallel} = p$. Вводя единичный вектор нормали силовой линии магнитного поля \mathbf{n} согласно формуле

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{n} \quad (7)$$

и вектор бинормали

$$\mathbf{b} = [\mathbf{h} \times \mathbf{n}], \quad (8)$$

уравнения равновесия изотропной плазмы можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} \kappa, \quad \frac{\partial}{\partial b} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad (9)$$

где

$$\partial/\partial n = (\mathbf{n} \cdot \nabla), \quad \partial/\partial b = (\mathbf{b} \cdot \nabla), \quad \partial/\partial s = (\mathbf{h} \cdot \nabla)$$

обозначают производные по направлению нормали \mathbf{n} , бинормали \mathbf{b} и касательной \mathbf{h} к силовой линии соответственно. Отсюда видно, что магнитное поле оказывает давление $B^2/(8\pi)$ в поперечном направлении и создаёт дополнительную силу в направлении вогнутости силовых линий вследствие их натяжения.

16.2. Равновесие в пинчах

Изучение конкретных равновесных конфигураций начнём с плазмы в цилиндре. На практике такое равновесие достигается в ограниченных по длине системах, но теоретически плазменный шнур (цилиндр) удобно рассматривать как бесконечный по длине, пренебрегая явлениями на его торцах. При наличии цилиндрической симметрии в системе координат (r, θ, z) с осью z , совпадающей с осью симметрии, параметры плазмы зависят только от r . Выражая компоненты плотности тока

$$j_\theta = -\frac{c}{4\pi} \frac{d}{dr} B_z, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{d}{dr} r B_\theta$$

из уравнения (2), радиальную проекцию

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{c} [j_\theta B_z - j_z B_\theta]$$

уравнения равновесия (1) приводим к виду

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} \frac{B_z^2}{8\pi} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2 B_\theta^2}{8\pi}. \quad (10)$$

Одно только уравнение (10) на три функции p , B_θ и B_z оставляет большой произвол в выборе параметров системы, поэтому существует большое разнообразие равновесных систем. Два полюса этого разнообразия составляют θ -пинчи и z -пинчи. Так называют системы с цилиндрической симметрией, в которых ток имеет только θ - или только z -компоненту. θ -пинч создают, пропуская разрядный ток через цилиндрический проводник с продольным разрезом, окружающий столб газа, как показано на рис. 16.1. Разряд ионизует газ, а продольное магнитное поле сжимает образовавшуюся плазму. Z -пинч возникает при пропускании разрядного тока непосредственно через столб газа, как показано на рис. 16.2. Образовавшаяся плазма сжимается азимутальным магнитным полем этого тока.

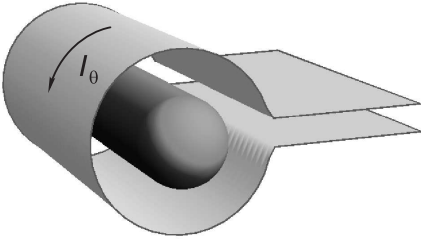


Рис. 16.1. θ -пинч; импульсный ток в стенках проводящей камеры создаёт азимутальное электрическое поле, которое ионизует газ, и продольное магнитное поле, которое сжимает столб плазмы

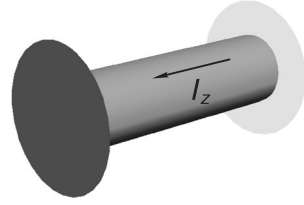


Рис. 16.2. Z -пинч; импульс напряжения на торцевых электродах инициирует разряд в газе; разрядный ток в плазме создаёт азимутальное магнитное поле, которое сжимает столб плазмы

θ -пинч

Пусть продольный ток j_z отсутствует и соответственно $B_\theta = 0$. В этом случае удержание плазмы достигается благодаря азимутальному току j_θ , поэтому соответствующую конфигурацию называют θ -пинчем. При $B_\theta = 0$ из (10) получаем

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B_{\text{vac}}^2}{8\pi} = \text{const}, \quad (11)$$

где B_{vac} — поле вне плазмы. Тот же результат получается из уравнения (6), если учесть, что $\kappa = 0$. Он означает, что давление плазмы уравнивается магнитным давлением, а плазма обладает свойствами диамагнетика. Действительно, в области, занятой плазмой, поле ослабевает. Например, если $p = B_{\text{vac}}^2/(8\pi)$, то внутри плазмы магнитное поле вообще отсутствует; при этом удержание достигается за счёт тока, протекающего по поверхности плазмы. При $p > B_{\text{vac}}^2/(8\pi)$ равенство (11) невозможно. На практике это означает, что равновесие плазмы со свободной границей неустойчиво, если давление плазмы p превышает давление внешнего магнитного поля $B_{\text{vac}}^2/(8\pi)$.

В случае плазмы низкого давления, $p \ll B^2/(8\pi)$, магнитное поле внутри плазмы ослабляется на малую величину

$$\delta B = -\frac{\beta}{2} B, \quad (12)$$

где $\beta = 8\pi p/B^2$. Если при этом давление плазмы внутри шнура постоянно, а затем резко падает до нуля на его границе, то, интегрируя уравнение равновесия $dp/dr = -(1/c)j_\theta B_z$ поперёк шнура и считая

$B \approx \text{const}$, получим условие равновесия в виде

$$p = -\frac{1}{c} i_{\theta} B, \quad (13)$$

где $i_{\theta} = \int j_{\theta} dr$ — поверхностная плотность тока. Уравнение (13) имеет смысл баланса сил на границе: давление плазмы внутри шнура уравнивается силой Ампера, действующей на его границу.

Z-пинч

В другом предельном случае, $B_z = 0$, имеет место обычный пинч-эффект, когда плазменный шнур стягивается магнитным полем протекающего по нему тока j_z . Умножим уравнение (10) на $-r^2 dr$ и проинтегрируем его по r от 0 до ∞ (реально интегрирование проводится от нуля до радиуса, на котором давление плазмы очень мало):

$$-\int_0^{\infty} \frac{dp}{dr} r^2 dr = \int_0^{\infty} \frac{d}{dr} \frac{r^2 B_{\theta}^2}{8\pi} dr. \quad (14)$$

Тот же результат получается из уравнения (6), так как вектор кривизны направлен к оси системы и равен $\kappa = -1/r$.

Слева в уравнении (14) после интегрирования по частям получим

$$\int_0^{\infty} p 2r dr = \frac{2W}{3\pi},$$

где W имеет смысл энергии плазменного шнура на единицу длины. Интеграл справа выражается через полный ток I , протекающий по плазме. Так как $rB_{\theta} \rightarrow 2I/c$ при $r \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dr} \frac{r^2 B_{\theta}^2}{8\pi} = \left. \frac{r^2 B_{\theta}^2}{8\pi} \right|_0^{\infty} = \frac{I^2}{2\pi c^2}.$$

Отсюда получаем интегральное равенство, которое называют условием Беннета (Willard Bennett, 1934):

$$W = \frac{3I^2}{4c^2}. \quad (15)$$

При наличии продольного магнитного поля соотношение (15) должно быть дополнено членом, учитывающим разность давлений продольного поля снаружи и внутри шнура. В частности, если давление плазмы мало, то стягивание шнура собственным магнитным полем может компенсироваться за счёт увеличения продольного магнитного поля внутри шнура. При этом возникает своеобразный парамагнетизм плазмы.

16.3. Бессилловые конфигурации

В плазме могут формироваться равновесные конфигурации, в которых давление плазмы пренебрежимо мало по сравнению с давлением магнитного поля. Как следует из уравнения равновесия (1), при $\nabla p = 0$ ток должен течь вдоль магнитного поля. Такое равновесие называют *бессилловым*. Бессилловые конфигурации нередко возникают на Солнце, когда магнитные поля, генерируемые внутри Солнца, «всплывают» на его поверхность. В лабораторных условиях они осуществляются, если велики потери энергии и плазма не нагревается.

Самые простые бессилловые конфигурации возникают в случае цилиндрической симметрии. При этом имеется одно уравнение (10) с $dp/dr = 0$ на две функции $B_\theta(r)$ и $B_z(r)$, что допускает большой произвол в выборе конфигураций. Но один частный случай представляет интерес в связи с экспериментами по сильноточным разрядам, стабилизированным умеренным продольным полем. В таких разрядах давление плазмы невелико из-за различного рода аномальных потерь (усиленной диффузии и теплопроводности), а экспериментально наблюдаемое распределение полей близко к бессилловому, у которого плотность тока пропорциональна магнитному полю, так что

$$\text{rot } \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}, \quad (16)$$

причём $\lambda = \text{const}$. Решение уравнения (16) выражается через функции Бесселя J_0 и J_1 :

$$B_z = B_0 J_0(\lambda r), \quad B_\theta = B_0 J_1(\lambda r). \quad (17)$$

Параметр λ связан с отношением полного тока I , протекающего через плазму, к магнитному потоку Φ . В цилиндре радиуса a

$$I = \int_0^a 2\pi r j_z dr = \frac{c\lambda}{4\pi} \int_0^a 2\pi r B_z dr = \frac{c\lambda}{4\pi} \Phi.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{4\pi I}{c\Phi}.$$

Обычно разряд заключён в кожух с достаточно высокой проводимостью, поэтому магнитный поток через сечение кожуха сохраняется и равен $\Phi = \pi a^2 B_{\text{vac}}$, где B_{vac} — начальное значение продольного магнитного поля перед разрядом. По мере увеличения разрядного тока (и параметра λ) продольное магнитное поле стягивается к оси, что можно интерпретировать как парамагнетизм плазмы. При $\lambda a = 2,4$ поле B_z обращается в нуль на границе шнура, а при $\lambda a > 2,4$ даже меняет свой знак.

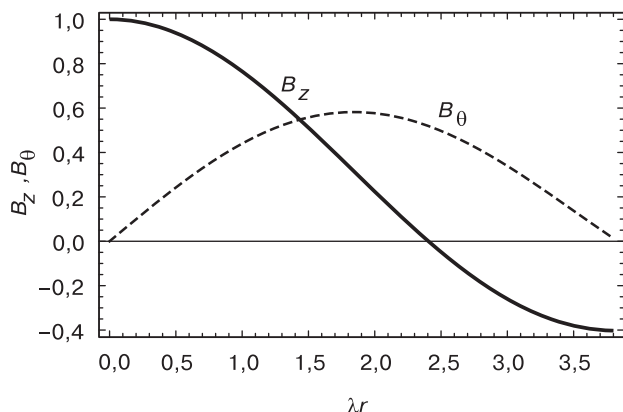


Рис. 16.3. Распределение полей в диффузном пинче: сплошная линия — B_z , пунктирная — B_θ

Изменение направления B_z на периферии разряда при увеличении разрядного тока наблюдается экспериментально (рис. 16.3), причём хорошо совпадают и числовые значения параметра λa , соответствующие изменению знака поля: эксперимент даёт $\lambda a = 2,8$, а теория — $\lambda a = 2,4$.

Почему из множества возможных бессиловых конфигураций в эксперименте наблюдается именно та, для которой параметр λ не зависит от координат, объяснил Дж. Тейлор (J. V. Taylor, [141]). Он предположил, что в диффузном пинче развивается магнитогидродинамическая турбулентность, в результате которой энергия магнитного поля и плазмы переходит в тепловую энергию, а затем уносится из шнура за счёт потерь на стенку. Однако теряется не вся энергия, а только некоторая её часть, так как вследствие высокой проводимости плазмы приближённо сохраняется интеграл

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x,$$

взятый по всему объёму плазмы (задача 15.4). Для магнитного поля с плоскими силовыми линиями $K = 0$, поэтому интеграл K характеризует свойство магнитного поля, называемое *спиральностью*.

Наличие дополнительного интеграла движения K означает, что далеко не всякая перестройка магнитного поля возможна даже при возникновении турбулентного движения. Если искать минимум энергии магнитного поля при $K = \text{const}$, то соответствующая вариационная задача приводит к бессиловому полю, подчиняющемуся уравнению (16) с $\lambda = \text{const}$ (задача 16.3). Таким образом, наблюдаемое экспериментально бессиловое поле в диффузных пинчах связано с развитием мелкомасштабной магнитогидродинамической турбулент-

ности, в которой энергия магнитного поля релаксирует к минимуму при заданной спиральности.

16.4. Равновесие в токамаке

Рассмотренные выше равновесия с цилиндрической симметрией следует считать теоретической идеализацией, так как практически реализовать системы, бесконечно протяжённые в одном направлении, разумеется, невозможно. Если просто взять отрезок такой системы конечной длины, магнитные силовые линии неизбежно упрутся в стенки камеры, что нарушит термоизоляцию плазмы. Тем не менее такие равновесия можно осуществить приближённо, не нарушив термоизоляцию, если плазменный шнур замкнуть в тор с очень большим радиусом кривизны R .

Кривизна, сколь бы малой она ни была, приводит к возникновению *шинного эффекта*, в результате которого плазма стремится расшириться в направлении увеличения радиуса тора. Примерно так же раздувается автомобильная шина по мере увеличения давления в ней. Неограниченному расширению шины препятствуют упругие силы, возникающие в резиновой камере шины. Чтобы воспрепятствовать расширению плазмы, в ней возбуждают тороидальный ток вдоль направления обхода тора. Однако сначала мы выясним, что произойдёт, если тороидальный ток в плазме отсутствует.

При сворачивании цилиндра в тор магнитное поле искривляется. В результате искривления поле перестаёт быть однородным: в круглом торе оно убывает обратно пропорционально расстоянию R от большой оси (оси симметрии) тора. Это следует из того, что при осевой симметрии *тороидальное поле* равно $B_t = 2I_p/(cR)$, где I_p — полный *полоидальный ток*, протекающий через круг радиуса R . В простейшей модели ток I_p течёт вдоль большой оси тора, но в реальном токамаке он распределён по виткам катушек тороидального магнитного поля (рис. 16.4). В любом случае в области плазменного шнура этот ток нужно считать постоянным, пока плазма не пересекает витки катушек.

Будучи диамагнетиком, плазма должна выталкиваться в радиальном направлении, так как магнитное поле ослабевает к наружному обводу тора. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим небольшой сегмент плазменного шнура, опирающийся на небольшой угол α (рис. 16.5). Для простоты будем считать, что малый радиус плазменного шнура a

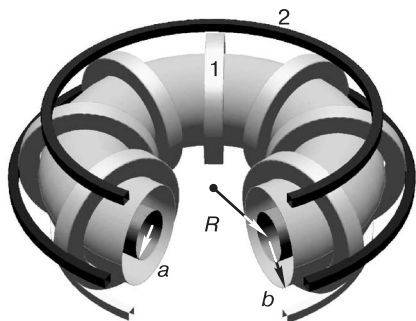


Рис. 16.4. Принципиальная схема токамака: 1 — катушки тороидального магнитного поля, 2 — катушки полоидального магнитного поля, R и b — большой и малый радиусы тороидальной камеры, a — малый радиус плазменного шнура

мал по сравнению с радиусом кривизны R , который примерно равен большому радиусу тора. Малость аспектного отношения

$$\epsilon = a/R \ll 1 \quad (18)$$

позволяет пренебречь изменением магнитного давления $p_m = B_t^2/(8\pi)$ по сечению плазмы. Тогда можно считать, что на торцы выделенного сегмента навстречу друг к другу под небольшим углом α действуют силы

$$\pi a^2 (p_{\parallel} - p'_m),$$

где

$$p'_m \approx p_m - p_{\perp}$$

обозначает давление магнитного поля внутри плазмы, ослабленное вследствие диамагнетизма. Суммарная сила со стороны торцов, таким образом, равна

$$\pi a^2 (p_{\parallel} - p'_m) \alpha = \pi a^2 (p_{\parallel} + p_{\perp} - p_m) \alpha.$$

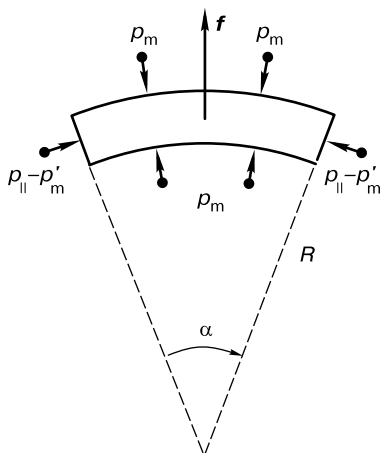


Рис. 16.5. Шинный эффект в токамаке; будучи диамагнетиком, плазма выталкивается в область более слабого магнитного поля; сумма сил, действующих на выделенный тороидальный сегмент плазмы в тороидальном магнитном поле, направлена в сторону от большой оси тора; чтобы уравновесить выталкивающую силу шинного эффекта в плазме, создают тороидальный ток вдоль оси плазменного шнура

Она частично компенсируется силой давления магнитного поля p_m на боковую поверхность сегмента. Как было отмечено в конце п. 15.4, при отсутствии плазмы суммарная сила давления магнитного поля на боковые и торцевые участки поверхности сегмента в точности равна нулю, т. е.

$$\oint p_m dS = 0.$$

Это означает, что слагаемое $-\pi a^2 p_m \alpha$ в силе, действующей на торцы, сокращается. Поскольку длина выделенного сегмента равна αR , заключаем, что в расчёте на единицу длины на плазменный шнур в направлении большого радиуса тора действует сила

$$f = \frac{\pi a^2}{R} (p_{\parallel} + p_{\perp}). \quad (19)$$

Если она не уравнивается другой силой, плазма расширяется с ускорением

$$\ddot{R} = \frac{f}{\pi a^2 \rho} = \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{\rho R} \sim \frac{c_s^2}{R},$$

где ρ — массовая плотность плазмы, а $c_s \sim \sqrt{(p_{\parallel} + p_{\perp})/\rho}$ — скорость звука. Отсюда следует, что за время

$$t \sim \frac{\sqrt{bR}}{c_s} = \frac{b}{c_s} \sqrt{\frac{R}{b}}$$

плазма вылетит на стенки тороидальной камеры, причём $a \lesssim b \ll R$. Вычисленное время разлёта очень мало, лишь незначительно превышая время свободного разлёта плазмы b/c_s , как будто магнитного поля вообще нет.

Чтобы скомпенсировать силу выталкивания, в плазме можно возбудить *тороидальный ток* I_t вдоль направления обхода тора. При смещении плазмы (и тока) на малое расстояние ξ от оси в проводящей камере возникает ток-изображение $-I_t$ на расстоянии $r = b^2/\xi$ от большой оси тора. С силой

$$f_t = -\frac{I_t}{c} \frac{2I_t}{rc} = -\frac{2I_t^2}{b^2 c^2} \xi$$

он возвращает тороидальный ток к оси тора. Эта сила в точности уравнивает силу шинного эффекта при

$$\xi = \frac{\pi a^2 b^2 c^2}{2I_t^2 R} (p_{\parallel} + p_{\perp}). \quad (20)$$

В импульсных экспериментах тороидальный ток в плазме возбуждают при помощи импульсного трансформатора, а для поддержания постоянного тока используют более сложные методы. Так как

ток-изображение в конечном счёте затухает, в стационарных экспериментах при помощи полоидальных катушек создают вертикальное магнитное поле, перпендикулярное плоскости тора. Оно оказывает на тороидальный ток такое же действие, что и ток-изображение, компенсируя силу шинного эффекта.

Тороидальный ток в плазме создаёт *полоидальное поле*, направленное вдоль малого обхода тора. В сумме с тороидальным магнитным полем оно качественно меняет топологию магнитных силовых линий. В чисто тороидальном магнитном поле силовые линии замкнуты, образуя кольца вокруг главной оси тора. Полоидальное поле разматывает кольца в бесконечные спирали, навитые на центральную кольцевую линию плазменного шнура — магнитную ось. Считанное число силовых линий может замыкаться на себя после одного или нескольких обходов вокруг тора. Другие же линии бесконечны и, занимая ограниченное пространство, плотно устилают тороидальную поверхность. Так как в изотропной плазме давление постоянно вдоль магнитной силовой линии, оно оказывается постоянным и на всей поверхности, образованной силовой линией. Замкнутые, вложенные друг в друга тороидальные поверхности $p = \text{const}$ называют магнитными.

16.5. Равновесие анизотропной плазмы

Если в токамаке приближение изотропной плазмы вполне оправдано, то в системах магнитного удержания плазмы типа пробкотрон (п. 5.4) из-за наличия конуса потерь обычно $p_{\perp} > p_{\parallel}$. Приравнявая $V = 0$ в уравнении (15.31), получим уравнение равновесия анизотропной плазмы:

$$-\nabla_{\perp} \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \left(p_{\perp} - p_{\parallel} + \frac{B^2}{4\pi} \right) \kappa - \nabla_{\parallel} p_{\parallel} - (p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{\nabla_{\parallel} B}{B} = 0. \quad (21)$$

Из него находим проекции на направления нормали n , бинормали b и касательной h :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \left(p_{\perp} - p_{\parallel} + \frac{B^2}{4\pi} \right) \kappa, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial s} = - \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (24)$$

Из последнего уравнения следует, что вдоль магнитной силовой линии p_{\parallel} уменьшается при увеличении магнитного поля по мере приближения к магнитной пробке.

Другая форма уравнения равновесия получается из уравнения (15.32):

$$-\nabla_{\perp} p_{\perp} + (p_{\perp} - p_{\parallel}) \boldsymbol{\kappa} - \nabla_{\parallel} p_{\parallel} - (p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{\nabla_{\parallel} B}{B} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (25)$$

Отсюда можно выразить перпендикулярную магнитному полю компоненту плотности тока:

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}] - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}]. \quad (26)$$

Этот результат можно получить прямым суммированием дрейфового и диамагнитного токов (задача 16.6).

16.6. Плазма как диамагнетик

Суммируя магнитные моменты

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B^2} \mathbf{B}$$

всех частиц в единице объёма плазмы, находим вектор намагничивания, который в обычных магнетиках отождествляют с магнитным моментом единицы объёма вещества:

$$\mathbf{M} = -\frac{p_{\perp}}{B^2} \mathbf{B}. \quad (27)$$

Здесь $p_{\perp} = \sum_s n_s \langle mv_{\perp}^2/2 \rangle_s$, как и прежде, обозначает давление плазмы поперёк магнитного поля. Ток намагничивания

$$\mathbf{j}_{\mu} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} = -c \operatorname{rot} \left(\frac{p_{\perp}}{B^2} \mathbf{B} \right) \quad (28)$$

в физике плазмы принято называть *диамагнитным током*.

В электродинамике сплошных сред поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$$

называют напряжённостью магнитного поля в отличие от индукции магнитного поля \mathbf{B} . Однако в плазме определённое таким способом поле \mathbf{H} не имеет ясного смысла. Дело в том, что, помимо тока намагничивания, в плазме имеется ток, вызванный дрейфом заряженных частиц; в обычных же магнетиках дрейф отсутствует.

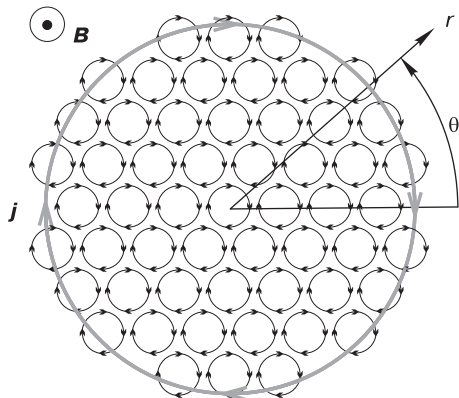


Рис. 16.6. Происхождение диамагнитного тока в плазме; ларморовские токи в цилиндрическом столбе плазмы формируют кольцевой диамагнитный ток на её границе; он уменьшает магнитное поле в плазме; градиент магнитного поля ∇B на краю плазмы создаёт дрейфовый ток, который направлен против диамагнитного и частично компенсирует вызванное им уменьшение магнитного поля

Если ограничиться случаем стационарного магнитного поля, когда имеются только градиентный и центробежный дрейфы, дрейфовый ток равен

$$j_{\text{др}} = \frac{cp_{\perp}}{B^2} [\mathbf{h} \times \nabla B] + \frac{cp_{\parallel}}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \quad (29)$$

(задача 16.5). Он не может быть отождествлен ни с током проводимости, ни с поляризационным током, так как градиентный и центробежный дрейфы существуют в плазме даже без электрического поля, создавая новый вид тока, отсутствующий в обычных проводниках, диэлектриках и магнетиках. Как следствие, электродинамика плазмы строится на иных принципах, нежели электродинамика других сред. В сумме диамагнитный и дрейфовый токи дают ток (26), обеспечивающий равновесие анизотропной плазмы (задача 16.6).

Что касается диамагнитного тока, то механизм его происхождения можно проиллюстрировать на простом примере. На рис. 16.6 схематически изображены ларморовские токи в прямом цилиндрическом плазменном столбе, внутри которого давление постоянно. Внутри плазмы ларморовские токи взаимно компенсируются и поэтому $j_{\perp} = 0$. Однако вблизи границы формируется кольцевой ток j_{\perp} . Сила взаимодействия этого тока с магнитным полем уравнивает разность давлений на границе плазменного столба, как описано в 16.2. Одновременно тот же ток уменьшает магнитное поле внутри плазмы, создавая ∇B на её границе и, как следствие, дрейфовый

ток j_{dr} , который частично компенсирует диамагнитный ток. Для цилиндрического столба плазмы $j_{dr}/j_{\perp} = -4\pi p_{\perp}/B^2$ (задача 16.7).

Литература

Хорошим введением в теорию равновесия плазмы является первая глава книги Б. Б. Кадомцева «Коллективные явления в плазме» [10]. Материалу лекции соответствуют §2 и §3.

Книга «Ideal Magnetohydrodynamics» [15] Дж. Фрейдберга содержит современное и ясное изложение теории равновесия и МГД устойчивости плазмы в различных устройствах.

Задачи

Задача 16.1. Доказать, что изолированная и ограниченная в пространстве плазма не может находиться в равновесии. (Теорема вириала) ►► Решение

Задача 16.2. Плазма удерживается в магнитном поле между отражающими торцами, которые имеют такую форму, что в каждой точке перпендикулярны направлению магнитного поля. Доказать, что давление плазмы постоянно на поверхности

$$U = \int \frac{ds}{B} = \text{const},$$

где интегрирование осуществляется вдоль магнитной силовой линии между точками её пересечения с торцами. ►► Решение

Задача 16.3. Найти магнитное поле, которое имеет минимальную энергию при заданной спиральности. ►► Решение

Задача 16.4. Найти диамагнитный ток в релятивистской плазме. ►► Решение

Задача 16.5. Вычислить дрейфовый ток в плазме. ►► Решение

Задача 16.6. Получить формулу (26), вычислив сумму диамагнитного и дрейфового токов. ►► Решение

Задача 16.7. Для прямого цилиндрического столба плазмы вычислить отношение плотности дрейфового тока к полной плотности тока. ►► Решение

Задача 16.8. Получить условие замыкания токов в анизотропной плазме, доказав, что

$$\int \frac{ds}{B^2} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla (p_{\perp} + p_{\parallel}) = 0,$$

где интегрирование осуществляется вдоль магнитной силовой линии между точками, в которых давление плазмы обращается в ноль. ►► Решение

Задача 16.9. Найти магнитные поверхности в винтовом поле. ►► Решение

Ответы и решения к задачам

Лекция 1

Задача 1.3. Электроны осциллируют с частотой $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$ и со скоростью

$$v_x = v_0 \cos(kx_0) \cos(\omega_p t)$$

около точки старта x_0 так, что

$$x = x_0 + (v_0 / \omega_p) \cos(kx_0) \sin(\omega_p t).$$

При $v_0 > \omega_p / k$ существует момент времени, когда плотность электронов

$$n = n_0 / \frac{\partial x}{\partial x_0}$$

формально становится бесконечной. В этот момент происходит «опрокидывание волны», а указанное решение теряет смысл.

Задача 1.5. Термины «ленгмюровские колебания», «потенциальные электронные колебания» и «плазменные колебания» иногда используются как синонимы. Однако в широком смысле плазменными колебаниями называют вообще все типы волн, которые могут распространяться в плазме. Если плазма помещена в магнитном поле, то в ней могут существовать потенциальные колебания на частоте, отличающейся от ленгмюровской.

Задача 1.6. $\omega_p / \sqrt{2}$.

Задача 1.7. Эта задача решена в статье [21], где Ленгмюр впервые назвал плазмой квазинейтральный ионизованный газ.

Любой произвольно выбранный элемент объёма плазмы можно рассматривать как трёхмерный гармонический осциллятор, состоящий из трёх линейных осцилляторов. Так как электроны с тепловым распределением скоростей, соответствующим температуре T , непрерывно входят в этот элемент объёма и выходят из него, линейный осциллятор приобретает в среднем энергию T на каждую степень свободы, причём $\frac{1}{2}T$ приходится на кинетическую и столько же на потенциальную энергию (электрического поля). Половина средней энергии T приходится на кинетическую энергию электрона, а потенциальная энергия $\frac{1}{2}T$ представляет собой новый вклад, отличающий плазму от нейтрального газа.

Если имеется N независимых осцилляторов на единицу объёма, энергия электрического поля этих осцилляторов равна $\frac{3}{2}NT$, причём дополнительный множитель 3 отвечает трём степеням свободы осциллятора. Приравнявая энергию этих осцилляторов к плотности энергии электрического поля $E^2 / (8\pi)$, получаем

$$\frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{3}{2} NT.$$

Если бы не было нижнего предела на длину волны осциллятора, нужно было бы считать, что число осцилляторов N равно концентрации электронов, $N = n$, как в теории теплоёмкости твёрдых тел Дебая [28].

Чтобы найти число N в плазме, следует разложить пространственное распределение потенциала $\varphi(x, y, z)$ в ряд Фурье, оборвав ряд на минимальном размере ячейки λ_D , в котором возможно существование незатухающих ленгмюровских колебаний. Можно также сказать, что число независимых осцилляторов в единице объёма равно n , но те из них, размер которых меньше λ_D , сильно затухают. Соответственно, число действующих осцилляторов в единице объёма можно оценить как $N \sim 1/\lambda_D^3$. Таким образом,

$$\frac{1}{8\pi} E^2 \sim \frac{3}{2} n T / (n \lambda_D^3).$$

Точный расчёт выполнен в п. 2.4. Плотность энергии ленгмюровских колебаний $E^2/(8\pi)$ составляет малую долю внутренней энергии плазмы $\frac{3}{2} n T$ при условии, что $n \lambda_D^3 \gg 1$.

Задача 1.8. Предположим, что цилиндрическое облако действительно вращается вокруг своей оси. Пренебрегая тепловым разбросом скоростей, рассмотрим отдельный электрон, движущийся по окружности радиуса r со скоростью v . На электрон действует сила Лоренца $e_e(v/c)B$, направленная по радиусу, и сила $e_e E$ со стороны собственного электрического поля облака; здесь $e_e = -e$ обозначает заряд электрона с учётом его знака. Электрическое поле равно $E = 2\pi e_e n_e r$, где n_e — плотность электронов, и также направлено по радиусу. Обе эти силы уравниваются центростремительной силой $-m_e v^2/r$, т. е.

$$\frac{m_e v^2}{r} + e_e E + \frac{e_e}{c} v B = 0.$$

После подстановки $v = \omega r$ общий множитель r сокращается и получается квадратное алгебраическое уравнение для частоты вращения ω :

$$\omega^2 + \frac{1}{2} \omega_p^2 + \omega \Omega_e = 0,$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}$, а $\Omega_e = e_e B / (m_e c)$. Уравнение имеет два вещественных корня

$$\omega_{\pm} = -\frac{1}{2} \left[\Omega_e \pm \sqrt{\Omega_e^2 - 2\omega_p^2} \right].$$

Они исчезают, становясь комплексными при $\omega_p^2 > \Omega_e^2/2$. Соответствующее значение плотности электронов $n_e = B^2 / (8\pi m_e c^2)$ определяет предел Бриллюэна [142], выше которого магнитное поле не способно удерживать электроны от разлёта.

В пределе низкой плотности, $n_e \ll B^2 / (8\pi m_e c^2)$, большая (по абсолютной величине) частота стремится к циклотронной, $\omega_+ \approx -\Omega_e$, а меньшая пропорциональна плотности электронов, $\omega_- \approx -\omega_p^2 / (2\Omega_e)$. Это второе решение можно получить, отбросив центробежную силу $m_e v^2/r$ в уравнении $m_e v^2/r + e_e E + e_e (c/v) B = 0$. В таком приближении электрическое поле исчезает

в сопутствующей системе отсчёта, где $E' = E + (v/c)B = 0$. Иными словами, вращение играет роль нейтрализующего фона положительно заряженных ионов в квазинейтральной плазме, поэтому облако электронов в режиме медленного вращения обладает многими свойствами плазмы. В этой связи говорят о *заряженной плазме*.

Лекция 2

Задача 2.1. Возьмём в качестве пробной частицы одну из частиц плазмы, приняв, что $q = e$. Тогда разложение (2.1) в ряд Тейлора применимо при $r \gg r_* = e^2/T$. Нетрудно проверить, что r_* меньше, чем среднее расстояние $n^{-1/3}$ между частицами плазмы, если $N_D \gg 1$. Это означает, что разложение, использованное при выводе уравнения (2.2), теряет смысл в столь малой окрестности пробного заряда, где нет частиц плазмы. В этой окрестности потенциал пробного заряда описывается законом Кулона, $\varphi = q/r$, который был использован в качестве граничного условия при $r = 0$ для решения упомянутого уравнения.

Задача 2.2. При небольшом потенциале сетки, $eU \ll T$, электрический потенциал в дебаевском слое, образующемся вокруг сетки, убывает в обе стороны по экспоненциальному закону:

$$\varphi = U \exp(-|x|/\lambda_D).$$

Если же $eU \gg T$, вблизи сетки образуется слой зарядов исключительно одного знака (противоположного знаку приложенного потенциала). Ширину слоя d можно оценить, взяв плотность тока в законе «трёх вторых»,

$$j = \frac{2}{9\pi} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \frac{U}{d^2},$$

в виде $j \approx en \sqrt{2eU/m}$. Отсюда имеем:

$$d \sim \sqrt{\frac{9\pi eU}{ne^2}}.$$

По порядку величины она совпадает с дебаевской длиной, вычисленной по «эффективной температуре» eU вместо T .

Задача 2.3. $\varphi = (T/e)(n_1/(2n_0)) \exp(x/\lambda_D)$ при $x < 0$, $\varphi = (T/e)(n_1/(2n_0)) \times [2 - \exp(-x/\lambda_D)]$ при $x > 0$; $\lambda_D = \sqrt{T/(4\pi e^2 n_0)}$; $n_e = n_0[1 + e\varphi/T]$.

Задача 2.4. Воспользовавшись формулами (2.8) и (2.3), находим энергию электростатического взаимодействия на единицу объёма

$$w \approx -\sqrt{\pi} Z^3 e^3 n_i^{3/2} / T^{1/2} = -\sqrt{\pi} Z^{3/2} e^3 n_e^{3/2} / T^{1/2}.$$

Кинетическая энергия плазмы в единице объёма близка к $\frac{3}{2} n_e T$, так как $n_e = Z n_i \gg n_i$. В идеальной плазме она должна быть больше энергии

электростатического взаимодействия w , т. е. $T \gg Ze^2 n_e^{1/3}$. Это условие может быть записано в виде $N_D \gg 1$, где $N_D \sim n_e \lambda_D^3$ — число частиц в дебаевской сфере (примерно равное числу электронов), а $\lambda_D \approx \sqrt{T/(4\pi Ze^2 n_e)}$ — полный дебаевский радиус.

Задача 2.5. По принципу Паули (Volfgang Pauli, 1925), в любом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Однако величина энергии квантового состояния не зависит от квантового числа, известного как *спин* электрона. Спин электрона может иметь два значения: одно условно называют «спином вверх» (или $s = +\frac{1}{2}$), другое — «спином «вниз» (или $s = -\frac{1}{2}$). *Вырождение* означает, что энергия электрона «со спином вверх» и «со спином «вниз» одинакова, то есть на одном энергетическом уровне находятся два электрона. Вырождение в макроскопическом смысле наступает, когда большинство электронов парами занимают квантовые состояния с одинаковой энергией.

Энергию квантовых состояний нетрудно найти, пренебрегая взаимодействием электронов между собой, то есть считая квантовый газ электронов идеальным, а каждый электрон — свободным. Отдельному электрону с энергией $\varepsilon = p^2/(2m_e)$ в этом случае отвечает волновая функция $\psi \propto \exp(ip \cdot \mathbf{r}/\hbar)$ с импульсом p , который квантуется, принимая дискретные значения, так чтобы на длине системы укладывалось целое число волн де Бройля $\lambda_e = \hbar/p$. Например, проекция импульса p_x на ось x может быть равна $\hbar \ell_x/L_x$, где L_x — длина системы в направлении оси x , а $\ell_x = 1, 2, 3, \dots$ — целое число. Каждому набору квантовых чисел s , ℓ_x , ℓ_y и ℓ_z , однозначно характеризующих квантовое состояние, отвечает значение энергии частицы $\varepsilon = (\hbar^2/(2m_e))(\ell_x^2/L_x^2 + \ell_y^2/L_y^2 + \ell_z^2/L_z^2)$. Тот факт, что оно не зависит от s , как раз и означает, что квантовые состояния вырождены по энергии. Одно значение энергии имеют два квантовых состояния, поэтому на одном энергетическом уровне с заданным набором чисел ℓ_x , ℓ_y , ℓ_z могут находиться 1, 2 электрона или вообще ни одного.

Чем меньше температура, тем с большей вероятностью электроны оккупируют наиболее низкоэнергетические состояния. В системе с $N = n_e L_x L_y L_z$ электронами при абсолютном нуле температуры будут заняты $N/2$ самых нижних энергетических уровней. Иными словами, наступает макроскопическое *вырождение*, поэтому квантовую плазму называют *вырожденной*.

Состоянию с импульсом $p = \hbar/L_x$ отвечает длина волны электрона $\lambda_e = L_x$, равная размеру всей плазмы. Это состояние имеет минимальную энергию $\varepsilon = \hbar^2/(2m_e L_x^2)$ (если L_x больше других линейных размеров L_y и L_z), которая для макроскопических объектов столь мала, что её всегда можно считать равной нулю. Но в этом состоянии могут находиться максимум 2 электрона, поэтому другие электроны вынуждены оккупировать квантовые состояния с большей энергией. Нетрудно сообразить, что если усаживать на самые низкоэнергетические уровни по 2 электрона, то самому верхнему уровню будет отвечать длина волны порядка среднего расстояния между

электронами, $\lambda_e \sim n_e^{-1/3}$, а такой длине волны соответствует энергия порядка энергии Ферми $\varepsilon \approx \varepsilon_F$.

При ненулевой температуре часть электронов переходит в более коротковолновые состояния с энергией большей, чем ε_F , но при $T \ll \varepsilon_F$, таких электронов мало, так что почти все электроны занимают низшие квантовые состояния с энергиями от 0 до ε_F , как показано на рис. 2.2 штриховой линией. Отсюда следует, что средняя кинетическая энергия примерно равна энергии Ферми ε_F , но численно несколько меньше ε_F в согласии с формулой (2.21), которая является точной в модели идеального вырожденного газа электронов (задача 2.6).

Задача 2.6. Число электронов с заданным импульсом в интервале от p до $p + dp$ в единице объёма задано распределением Ферми—Дирака

$$dn_e = \frac{g_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p^2 dp}{\exp[p^2/(2m_e T) - p_F^2/(2m_e T)] + 1},$$

где $g_e = 2$ — статистический вес. В пределе $T = 0$ имеем $dn_e = 8\pi p^2 dp / ((2\pi\hbar)^3)$ при $p < p_F$ и $dn_e = 0$ при $p > p_F$. Выполнив интегрирование по импульсам, получаем $n_e = 8\pi p_F^3 / (3(2\pi\hbar)^3)$. Отсюда находим сначала импульс Ферми $p_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \hbar$, а затем энергию Ферми

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = (3\pi^2 n_e)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e}.$$

Она обратно пропорциональна массе частицы, поэтому возможна ситуация, когда электроны вырождены, а ионы нет, т. е. $\varepsilon_{Fi} \ll T \ll \varepsilon_F$.

Задача 2.7. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, добавим к кинетической энергии $p^2/(2m_e)$ в распределении Ферми—Дирака потенциальную энергию $e\varphi$:

$$dn_e = \frac{g_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p^2 dp}{\exp[p^2/(2m_e T) - p_F^2/(2m_e T) + e\varphi/T] + 1}.$$

В пределе $T = 0$ имеем $dn_e = 8\pi p^2 dp / (2\pi\hbar)^3$ при $p^2 < p_F^2 - 2m_e e\varphi$ и $dn_e = 0$ при $p^2 > p_F^2 - 2m_e e\varphi$. Выполнив интегрирование по импульсам, находим плотность электронов

$$n_e = n_{e0} [1 - e\varphi/\varepsilon_F]^{3/2} \approx n_{e0} [1 - (3/2)e\varphi/\varepsilon_F],$$

где $n_{e0} = 8\pi p_F^3 / (3(2\pi\hbar)^3)$. Повторяя далее вычисления, приведшие к уравнению (2.2), находим дебаевскую длину вырожденного электронного газа:

$$\lambda_F = \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{6\pi e^2 n_{e0}}}.$$

Поскольку при вычислении «полной» длины Дебая производится суммирование обратных квадратов дебаевских длин отдельных сортов частиц, вклад ионов при $T \ll \varepsilon_F$ доминирует. Однако в металлах ионы закреплены в узлах кристаллической решётки и не участвуют в электростатическом экранировании, поэтому там дебаевская длина равна λ_F .

Задача 2.8. Из термодинамических равенств $dU = T dS - p dV$ и $F = U - TS$ выражаем дифференциал свободной энергии

$$dF = -S dT - p dV,$$

где V — объём плазмы. Отсюда имеем $p = -(\partial F/\partial V)_T$ и $S = -(\partial F/\partial T)_V$. Исключая энтропию из свободной энергии $F = U + T(\partial F/\partial T)_V$, выражаем затем внутреннюю энергию через свободную:

$$U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)_V.$$

Учитывая, что корреляционная поправка к внутренней энергии $\Delta U = Vw$, вычисленная с помощью уравнения (2.8), исчезает при $T \rightarrow \infty$, соответствующую поправку к свободной энергии вычисляем по формуле

$$\Delta F = -T \int_{\infty}^T \frac{\Delta U}{T^2} dT.$$

Так как $\Delta U \propto T^{-1/2}$, интегрирование даёт

$$\Delta F = \frac{2}{3} Vw.$$

Далее, поскольку $\Delta F \propto V^{-1/2}$ (при заданном числе частиц $N = nV$), выполнив дифференцирование $p = -(\partial F/\partial V)_T$, находим

$$\Delta p = \frac{1}{3} w.$$

Так как $w < 0$, давление в плазме немного меньше, чем в нейтральном газе при той же плотности и температуре.

Задача 2.9. Формулу (2.22) можно получить, если предположить, что два электрона не могут сближаться на расстояние меньше длины волны электрона λ_e (это следует из принципа Паули). Внутри сферы радиуса λ_e находится примерно $n_i \lambda_e^3$ ионов. Оценивая создаваемый ими потенциал как потенциал $\varphi = Q/R$ проводящего шара с зарядом $Q \approx e_i n_i \lambda_e^3 = e n_e \lambda_e^3$ и радиусом $R \approx \lambda_e$ и умножая φ на заряд электрона $e_e = -e$, получим $W'' \approx -e^2 \lambda_e^2 n$.

Задача 2.12. Приравнявая $p_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3} \hbar$ к $m_e c$, находим $n_e = (m_e c / \hbar)^3 / (3\pi^2)$. Если переписать этот результат в виде $n_e a_B^3 = 1/(3\pi^2 \alpha^3)$, где $\alpha = e^2 / (\hbar c) \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, легко видеть, что вырожденная электронная плазма становится релятивистской при плотности примерно в 100 000 раз больше плотности твёрдого тела.

Задача 2.13. Процесс нейтронизации начинается, когда при сжатии вещества плотность электронов приближается к величине $n_e = (Q/\hbar c)^3 / (3\pi^2)$. При дальнейшем сжатии всё большее число протонов будет захватывать по электрону, так что общее число электронов будет уменьшаться, но их плотность будет неизменна. Поскольку численно Q всего лишь в 1,5 раза больше, чем $m_e c^2$, нейтронизация начинается при плотности в 7–8 раз больше той, при которой электроны становятся релятивистскими.

Лекция 3

Задача 3.3. Сила притяжения единственного электрона к ядру увеличивается в Z раз по сравнению с атомом водорода. Следовательно, достаточно заменить e^2 на Ze^2 во всех формулах предыдущей задачи. Таким образом, радиус орбиты первого (основного) уровня

$$a_Z = \frac{\hbar^2}{m_e Z e^2}$$

уменьшается в Z раз, а энергия ионизации

$$I_Z = \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2}$$

увеличивается Z^2 раз.

Задача 3.4. Внутренними степенями свободы атомов, ионов и электронов являются пространственная ориентация спина и орбитального момента. Измеренный в единицах \hbar спин обозначают через S , а орбитальный момент — через L . Если пренебречь слабым спин-орбитальным взаимодействием, то окажется, что энергия квантового состояния не зависит от этих степеней свободы. Иными словами, энергетические уровни вырождены (с точностью до несущественных, по условию задачи, малых поправок, обусловленных спин-орбитальным взаимодействием).

Полное число различных квантовых состояний с заданными значениями L и S равно $(2L + 1)(2S + 1)$. Спин электрона S равен $\frac{1}{2}$, а его орбитальный момент на k -м энергетическом уровне может иметь целочисленные значения от 0 до $k - 1$. Вычисляя сумму $g_k = \sum_{L=0}^{k-1} (2L + 1)(2S + 1)$, находим $g_k = 2k^2$. При заданном состоянии электронной оболочки атома ядро (протон) может находиться в двух состояниях, так как его спин также равен $\frac{1}{2}$. Поэтому, строго говоря, величину g_k следовало бы умножить на $g_p = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2$ (как сделано в лекции). Однако при определении статвеса атома степени свободы ядра учитываются не всегда, поскольку такой же статвес имеет свободное ядро и при вычислении степени ионизации статвес ядра сокращается.

Задача 3.5. Если температура низка в сравнении с энергией ионизации, то члены ряда быстро уменьшаются по величине и после немногих первых членов становятся пренебрежимо малыми. Таким образом, возникает впечатление, что ряд сходится. Однако полная сумма ряда тем не менее расходится. Такой ряд называют асимптотическим. На практике от асимптотического ряда оставляют сумму первых нескольких членов, почти не зависящую от числа взятых членов. Физическое обоснование такого способа обращения с формально расходящимся рядом в данном случае состоит в том, что расходимость возникает только для изолированного атома в бесконечном объёме. При $k \rightarrow \infty$ его радиус электронной орбиты $r_k = a_{\text{В}} k^2$ формально становится бесконечным. Однако при учёте взаимодействия с соседними атомами число «связанных уровней» оказывается конечным.

Задача 3.7. При $n = 1 \text{ см}^{-3}$ переход водорода в ионизованное состояние происходит в узком диапазоне температур $\Delta T_* \approx \pm 0,02 \text{ эВ}$ вблизи $T_* = 0,28 \text{ эВ}$. При $T = 1 \text{ эВ}$ водород полностью ионизован: $\alpha = 1 - 2,2 \times 10^{-16}$.

Задача 3.8. Степень ионизации водорода и гелия, вычисленная по уравнению Саха, примерно одинакова и составляет 74%. Реально весь водород ионизован, поскольку при плотности $n_H = 6,6 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$ расстояние между ядрами меньше размера атома водорода $a_B = 0,5 \times 10^{-8} \text{ см}$, т. е. уравнение Саха в столь плотном веществе неприменимо.

Задача 3.9. Учтём, что $g_H^+ g_e / g_H = g_K^+ g_e / g_K = 1$. Из уравнения Саха

$$\frac{\alpha_H^2}{1 - \alpha_H} = \frac{1}{\lambda_{T_e}^3 n} e^{-I_H/T}$$

находим степень ионизации чистого водорода $\alpha_H = 1 \times 10^{-8}$. По условию задачи, после добавления калия $n_e = 2\alpha_H n$. Следовательно, для степени ионизации водорода α'_H и калия α'_K в образовавшейся смеси имеем уравнения

$$\frac{2\alpha_H \alpha'_H}{1 - \alpha'_H} = \frac{1}{\lambda_{T_e}^3 n} e^{-I_H/T}$$

и

$$\frac{2\alpha_H \alpha'_K}{1 - \alpha'_K} = \frac{1}{\lambda_{T_e}^3 n} e^{-I_K/T}.$$

Суммарная доля ионов и атомов калия $\beta = (n_K + n_K^+)/n$ (по отношению к числу ионов и атомов водорода) определяется из уравнения

$$\alpha'_H + \alpha'_K \beta = 2\alpha_H$$

и оказывается очень малой: $\beta = 1,5 \times 10^{-8}$. Степень ионизации водорода снижается до $\alpha'_H = 5 \times 10^{-9}$, но это снижение перекрывается практически полной ионизацией примеси: $\alpha'_K = 0,999992$.

Задача 3.10. Пока степень ионизации мала, $\alpha \ll 1$, сжатие газа происходит адиабатически, т. е. температура и плотность газа связаны адиабатой Гюгонио $T n^{-3/2} = \text{const}$. При этом параметр $n \lambda_{T_e}^3$ остаётся равным начальному значению. Подставляя именно это начальное значение в константу равновесия $K = (g_e g_i / g_a) \exp(-I/T) / (n \lambda_{T_e}^3)$ и приравнивая её к значению $\frac{1}{2}$, соответствующему величине $\alpha^2 / (1 - \alpha)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$, находим

$$T_* = I / \ln[2g_e g_i / (g_a n \lambda_{T_e}^3)].$$

Задача 3.11. Обозначим через $n = n_a + n_i$ плотность ядер, т. е. суммарную плотность ионов и атомов, а через α долю ионизованных ядер. Тогда $n_e = n_i = \alpha n$, $n_a = (1 - \alpha)n$, а давление и внутренняя энергия газа соответственно равны $p = n_e T_e + n_i T_i + n_a T_a = (1 + \alpha)nT$ и $U = 3(1 + \alpha)nT/2$. При изменении объёма газа V сохраняется полное число ядер:

$$d(nV) = 0. \quad (1)$$

При увеличении доли ионизованных ядер часть внутренней энергии расходуется на ионизацию:

$$d(UV) = -p dV - I d(\alpha nV). \quad (2)$$

Поделив обе части последнего уравнения на pV и исключив объём V при помощи (1), после простых преобразований получаем

$$\frac{3}{2} \frac{dT}{T} - \frac{dn}{n} + \left(\frac{3}{2} + \frac{I}{T} \right) \frac{d\alpha}{1+\alpha} = 0. \quad (3)$$

Пусть сжатие газа происходит обратимым образом, т. е. настолько медленно, что в каждый момент времени ионизационное равновесие описывается уравнением Саха

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = xy, \quad (4)$$

где $x = g_e g_i / g_a n \lambda_{T_e}^3$ и $y = \exp(-I/T)$. Перепишем в тех же обозначениях уравнение (3),

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{3}{2} - \ln y \right) \frac{d\alpha}{1+\alpha} = 0,$$

а затем исключим из него переменную y , используя уравнение (4):

$$\frac{d \ln x}{d \ln(1+\alpha)} + \ln x + \frac{3}{2} - \ln \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = 0.$$

Полученное уравнение интегрируется в элементарных функциях, приводя к искомому результату:

$$(1+\alpha) \ln x + \frac{5}{2} \alpha - (1-\alpha) \ln(1-\alpha) - 2\alpha \ln \alpha = \text{const}. \quad (5)$$

Выразив α и x через T и n , можно получить уравнение, связывающее температуру с плотностью. Оно весьма громоздко, но в практически важных случаях поддаётся существенному упрощению. В частности, сумма слагаемых $\frac{5}{2} \alpha - (1-\alpha) \ln(1-\alpha) - 2\alpha \ln \alpha$ изменяется в ограниченных пределах от 0 при $\alpha = 0$ до $\frac{5}{2}$ при $\alpha = 1$, достигая максимального значения 2,68 при $\alpha = 0,84$. Эти слагаемые можно отбросить, если $\ln x \gg 1$. Сравнительно просто также связать параметры газа в полностью ионизованном состоянии ($\alpha = 1$) с начальными параметрами нейтрального газа ($\alpha = 0$):

$$2 \ln x_1 + \frac{5}{2} = \ln x_0.$$

В размерных единицах отсюда получаем:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{2\sqrt{\pi}}{e^{5/6}} \left(\frac{g_e g_i}{g_a} \right)^{-1/3} \frac{(n_1 a_B^3)^{2/3}}{(n_0 a_B^3)^{1/3}} \sqrt{\frac{T_0}{T}}.$$

Лекция 4

Задача 4.1. Приравнявая радиус плазмы a к толщине скин-слоя $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ для проводника с проводимостью σ в переменном поле, изменяющемся по гармоническому закону с круговой частотой ω , находим время скинирования $\tau = 2\pi/\omega = (2\pi a/c)^2\sigma$. Для медного проводника $\sigma = 5 \times 10^{17} \text{ с}^{-1}$ и $\tau \approx 200 \text{ с}$. Чтобы обеспечить проникновение магнитного поля в плазму в импульсных экспериментах, её создают, ионизуя нейтральный газ, предварительно помещённый в магнитное поле.

Задача 4.2. Запишем уравнения движения в четырёхмерном виде:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{e}{mc} F^{ik} \frac{dx_k}{d\tau},$$

где τ — собственное время частицы, $x^i = (ct, x, y, z)$ — контравариантные, $x_k = (ct, -x, -y, -z)$ — ковариантные компоненты радиуса-вектора частицы, а

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

обозначает тензор электромагнитного поля. Направим электрическое поле по оси y , а магнитное — по оси z , приняв, что $\mathbf{E} = (0, E, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Общее решение 4 обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка зависит от 8 констант. Из них 6 констант — это начальные значения координат и скоростей. Ещё одну константу можно определить, выбрав значение t при $\tau = 0$. Восьмая константа определяется из условия, что длина четырёхмерного вектора скорости частицы равна скорости света, т. е. $(dx^i/d\tau)(dx_i/d\tau) = c^2$. В случае $B > E$ результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \Gamma \left\{ [\gamma' \tau] + \frac{E}{cB} [X' - \rho' \cos(\Omega' \tau + \psi)] \right\}, \\ x(\tau) &= \Gamma \left\{ [X' - \rho' \cos(\Omega' \tau + \psi)] + \frac{cE}{B} [\gamma' \tau] \right\}, \\ y(\tau) &= Y' + \rho' \sin(\Omega' \tau + \psi), \\ z(\tau) &= Z' + \frac{p'_z}{m\gamma'} \gamma' \tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega' &= e \sqrt{B^2 - E^2} / (mc), \\ \Gamma &= 1 / \sqrt{1 - E^2/B^2}, \\ \gamma' &= \sqrt{1 + p_z'^2 / (m^2 c^2) + \rho'^2 \Omega'^2 / c^2}, \end{aligned}$$

а константы X' , Y' , Z' , ρ' , ψ' и p'_z являются свободными параметрами.

Другим способом эти же формулы можно получить, выполнив преобразование Лоренца в систему отсчёта (t', x', y', z') ведущего центра, движущуюся

относительно исходной системы со скоростью cE/B в направлении x . В движущейся системе $E' = 0$, $B' = \sqrt{B^2 - E^2}$, а частица вращается вокруг направления магнитного поля (оси z') с частотой Ω'/γ' , где $\gamma' = \sqrt{1 + (p_z'^2 + p_\perp'^2)/(m^2 c^2)}$ — релятивистский фактор частицы в этой системе отсчёта. Обозначив ларморовский радиус в этой системе отсчёта через $\rho' = p_\perp'/(m\Omega')$, координаты ведущего центра через X' , Y' , $Z' + (p_z'/\gamma')t'$, начальную фазу ларморовского вращения через ψ , собственное время частицы через $\tau = t'/\gamma'$ и выполнив преобразование Лоренца обратно в исходную систему отсчёта, получим приведённые выше формулы. При этом выясняется физический смысл свободных параметров. В частности, $p_z' = p_z$ обозначает постоянную проекцию импульса частицы на направление B , ρ' можно отождествить с шириной ларморовской спирали в направлении оси y , а $\Gamma\rho'$ — в направлении оси x . Сечение спирали является эллипсом, а скорость движения вдоль оси z периодически меняется (это будет очевидно, если суметь выразить собственное время τ через t).

В случае $E > B$ решение можно получить, перейдя в систему отсчёта, движущуюся вдоль оси x со скоростью cB/E . В ней исчезает магнитное поле, поэтому частица неограниченно ускоряется.

Задача 4.3. Скорость w движущейся системы отсчёта выберем так, чтобы она была перпендикулярна векторам E и B . Тогда напряжённости полей E' и B' в новой системе отсчёта определяются по формулам

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E + w \times B/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \\ B' &= \frac{B - w \times E/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Скорость w может быть найдена из условия коллинеарности векторов E' и B' , т. е.

$$E + w \times B/c = \alpha (B - w \times E/c),$$

где α — скаляр. Умножая последнее уравнение векторно на B и принимая во внимание, что $(w \cdot B) = (w \cdot E) = 0$, получим

$$[E \times B] - \frac{w}{c} B^2 = \alpha \frac{w}{c} (E \cdot B),$$

а скалярным умножением на E найдём

$$E^2 - \left([E \times B] \cdot \frac{w}{c} \right) = \alpha (E \cdot B).$$

Исключение $\alpha (E \cdot B)$ из последних двух уравнений даёт квадратное уравнение

$$\frac{w}{c} = \frac{1 + w^2/c^2}{B^2 + E^2} [E \times B]$$

для искомой скорости w . Корни этого уравнения вещественны, причём один корень всегда больше, а другой всегда меньше c . Разумеется, следует взять меньший корень. Вводя обозначение $\xi = |[E \times B]/(B^2 + E^2)| < 1/2$, находим

$$\frac{w}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\xi^2}}{2\xi^2} \frac{[E \times B]}{B^2 + E^2}.$$

Переход в третью систему отсчёта, движущуюся вдоль общего направления векторов E' и B' , не изменяет их величину и направление. Отсюда следует, что система отсчёта с требуемыми свойствами существует и притом такая система единственная (с точностью до ничего не меняющего перемещения вдоль общего направления E' и B'). В пределе $E \ll B$ найденная скорость w совпадает со скоростью электрического дрейфа $v_E = c[E \times B]/B^2$ в нерелятивистском пределе.

Если в исходной системе отсчёта электрическое поле перпендикулярно магнитному, то в найденной системе отсчёта оно обратится в ноль, поскольку скалярное произведение $(E \cdot B)$ наряду с разностью $B^2 - E^2$ является релятивистским инвариантом. В этом случае $w = cE/B$, если $B > E$, причём в движущейся системе отсчёта исчезает электрическое поле, или $w = cB/E$, если $E > B$, а исчезает магнитное поле.

Задача 4.4. Полагая $E \sim T/(ea)$, получаем, что $v_E \ll \sqrt{2T/m_i}$, если ларморовский радиус ионов $\rho_i = \sqrt{2T/m_i}/\Omega_i$ мал по сравнению с радиусом плазмы a , т. е. $\rho_i \ll a$. При этом условие $v_E \ll \sqrt{2T/m_e}$ для электронов будет также выполнено.

Задача 4.7. Если $B = B\hat{z}$, а электрическое поле изменяется по закону $E = E \cos(ky)\hat{y}$, то $v_E = (cE/B)J_0(k\rho) \cos(kY)\hat{x}$, где J_0 — функция Бесселя первого рода, ρ — ларморовский радиус частицы, Y — координата ведущего центра, а $k = 2\pi/\lambda$. При $k\rho \ll 1$ справедливо разложение $J_0(k\rho) \simeq 1 - (k\rho)^2/4$, приводящее к тому же результату, что и формула (4.42).

Задача 4.8. Пусть магнитное поле $B = B\hat{z}$ направлено по оси z , а электрическое поле $E = E(t)\hat{y}$ направлено вдоль оси y .

Переменное электрическое поле неизбежно создаёт переменное магнитное поле, но в уравнениях движения частицы переменной частью магнитного поля можно пренебречь, так как при нерелятивистских скоростях движения соответствующая добавка к силе Лоренца заведомо мала по сравнению с электрической частью силы:

$$\dot{v}_x = v_y \Omega, \quad \dot{v}_y = \frac{e}{m} E - v_x \Omega.$$

Сложим эти два уравнения, предварительно домножив первое на $\exp(i\Omega t)$, а второе на $i \exp(i\Omega t)$. Получившееся уравнение,

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) e^{i\Omega t} = \frac{e}{m} i E e^{i\Omega t},$$

легко интегрируется при произвольной зависимости $E(t)$:

$$v_x + iv_y = (v_x + iv_y)_0 e^{-i\Omega t} + \frac{e}{m} \int_0^t dt' i E(t') e^{i\Omega(t-t')}.$$

Если $E(t)$ изменяется незначительно за период вращения частицы $2\pi/\Omega$, интеграл в правой части можно приближённо выразить через текущее

значение $E(t)$, несколько раз выполнив интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' i E(t') e^{i\Omega(t'-t)} &= \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{i\Omega} i E(t') \Big|_0^t - \int_0^t \frac{dt'}{i\Omega} i \frac{dE(t')}{dt'} e^{i\Omega(t'-t)} = \\ &= \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{i\Omega} i E(t') \Big|_0^t - \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{(i\Omega)^2} i \frac{dE(t')}{dt'} \Big|_0^t + \dots = \\ &= i \frac{E(t)}{i\Omega} - \frac{1}{(i\Omega)^2} i \frac{dE(t)}{dt} + \dots \end{aligned}$$

Слагаемые, возникающие от нижнего предела интегрирования $t' = 0$, содержат множитель $\exp(-i\Omega t)$, т. е. имеют такую же структуру, как $(v_x + iv_y)_0 e^{-i\Omega t}$. Они уточняют определение радиуса ларморовской спирали в переменном электрическом поле и в данном случае нас не интересуют, поэтому на последнем шаге вычислений в получившейся формуле оставлен только вклад верхнего предела $t' = t$. Каждый новый член возникающего при этом ряда содержит дополнительный малый множитель $\frac{1}{\Omega}$ по сравнению с предыдущим. Удерживая два первых члена ряда и отделяя вещественную часть уравнения от мнимой, находим:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} \cos(\Omega t) + v_{y0} \sin(\Omega t) + c \frac{E}{B}, \\ v_y &= v_{y0} \cos(\Omega t) - v_{x0} \sin(\Omega t) + \frac{c}{B\Omega} \frac{dE}{dt}. \end{aligned}$$

Осциллирующие слагаемые здесь описывают ларморовское вращение. В последнем слагаемом в правой части первого уравнения нетрудно распознать скорость электрического дрейфа (4.11), а последнее слагаемое в правой части второго уравнения есть скорость поляризационного дрейфа (4.40).

Задача 4.10. 45 часов.

Задача 4.11. Пусть вектор $\mathbf{R}(t)$ задаёт положение ведущего центра в произвольный момент времени t . Следует различать сопутствующую систему отсчёта S' , движущуюся со скоростью ведущего центра $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{R}}$ (где точка сверху обозначает производную по времени) относительно некоторой инерциальной (лабораторной) системы отсчёта S , от системы отсчёта S'' , вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно системы S' .

Пусть положение частицы в системах S , S' , S'' задано соответственно векторами $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$, причём

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}''. \quad (1)$$

Для скорости частицы в этих системах имеем соотношения

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}', \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'']. \quad (2)$$

Сравнение результата почленного дифференцирования уравнений (1) с уравнениями (2) даёт формальное правило вычисления производных в разных системах:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}', \quad \dot{\mathbf{r}}'' = \mathbf{v}'' + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'']. \quad (3)$$

Поэтому для производных скорости в разных системах имеем

$$\dot{v} = a, \quad \dot{v}' = a', \quad \dot{v}'' = a'' + [\omega \times v''], \quad (4)$$

где a , a' , a'' — ускорение частицы в системах S , S' и S'' соответственно. Дифференцируя теперь уравнения (2), получаем

$$a = \dot{u} + a', \quad a' = a'' + [\omega \times [\omega \times r'']] + 2[\omega \times v''] + [\dot{\omega} \times r'']. \quad (5)$$

По второму закону Ньютона, сила, действующая на частицу в инерциальной системе отсчёта S , равна $F = ma$. В неинерциальной системе отсчёта S' , как следует из уравнения $ma' = ma - m\dot{u}$, на частицу дополнительно действует поступательная сила инерции

$$F_{\text{in}} = -m\dot{u}.$$

Во вращающейся системе S'' к ней прибавляются центробежная сила

$$F_{\text{cf}} = -m[\omega \times [\omega \times r'']],$$

сила Кориолиса (Gaspard-Gustave de Coriolis, [143])

$$F_{\text{C}} = -2m[\omega \times v'']$$

и сила Эйлера (Leonhard Euler)

$$F_{\text{Eu}} = -m[\dot{\omega} \times r''],$$

обусловленная неравномерностью вращения.

В задаче о дрейфе заряженной частицы в магнитном поле удобно использовать либо сопутствующую систему отсчёта S' , движущуюся поступательно относительно инерциальной системы отсчёта S , либо систему S'' , вращающуюся относительно S' так, чтобы направление магнитного поля в этой системе было неизменным.

В первом случае на заряженную частицу помимо силы Лоренца действует только поступательная сила инерции.

Во втором случае удобно привязать систему координат к трёхграннику, составленному из единичных векторов касательной h , главной нормали n и бинормали b к траектории ведущего центра. Вычисленная для такой системы отсчёта величина ω в рамках дрейфового приближения мала по сравнению с циклотронной частотой, $\omega \ll \Omega$, поэтому три силы: F_{cf} , F_{C} , F_{Eu} — малы по сравнению с силой Лоренца $F_{\text{L}} = m[v'' \times \Omega]$. В отличие от них сила инерции F_{in} не меняет направление при движении частицы вдоль ларморовской окружности, поэтому её эффект, накапливаясь, приводит к дрейфу частицы.

Задача 4.12. Вектор Дарбу $\omega = \kappa b + \tau h$ выражается через единичные векторы касательной $h = \dot{R}/|\dot{R}|$, нормали $n = \dot{h}/|\dot{h}|$ и бинормали $b = [h \times n]$ к траектории движения, её кривизну κ и кручение τ , которые вычисляются по формулам Френе—Серра: $\kappa = |\dot{R} \times \ddot{R}|/|\dot{R}|^3$, $\tau = |\dot{R} \cdot [\ddot{R} \times \ddot{\ddot{R}}]|/|\dot{R} \times \ddot{R}|^2$. Формулы можно упростить, если переменную времени t заменить координатой s , отмеряющей длину траектории, положив $ds = |\dot{R}| dt$. Обозначая дифференцирование по s штрихом, имеем $h = R'$, $n = R''/\kappa$, $\kappa = |R''|$, $\tau = |R' \cdot [R'' \times R''']|/\kappa^2$.

Задача 4.13. Радиус кривизны и радиус кручения ларморовской спирали соответственно равны $\mathcal{R}_\kappa \equiv 1/\kappa = v^2/(v_\perp \Omega)$, $\mathcal{R}_\tau \equiv 1/\tau = -v^2/(v_\parallel \Omega)$.

Задача 4.14. Магнитное поле потенциально там, где нет токов, поэтому вблизи оси системы катушек можно ввести скалярный магнитный потенциал χ так, что $\mathbf{B} = \nabla \chi$. Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует, что χ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \chi = 0$. Запишем его в цилиндрической системе координат (r, ψ, z) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0.$$

Вследствие аксиальной симметрии задачи, $\chi = \chi(r, z)$ не зависит от азимутального угла ψ . Ищем решение в виде ряда

$$\chi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) r^n$$

по степеням r . Подставив ряд в уравнение и приравняв нулю сумму коэффициентов отдельно при каждой степени r^n , получим рекуррентное соотношение

$$\chi_n = -\frac{\chi_{n-2}''}{n^2}.$$

На оси $r = 0$ имеем $B_z(0, z) = \chi_0'(z) = B_0(z)$, $B_r(0, z) = \chi_1(z) = 0$. Функции $\chi_n(z)$ с нечётными индексами n обращаются в нуль, так как все они выражаются через $\chi_1(z)$. Остальные члены ряда выражаются через $\chi_0(z) = \int^z B_0(z) dz$:

$$\chi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \chi_0^{(2n)}(z) r^{2n}.$$

Этой формуле можно придать элегантную форму

$$\chi(r, z) = J_0\left(\frac{r}{2} \frac{d}{dz}\right) \chi_0(z),$$

воспользовавшись разложением функции Бесселя $J_0(x)$ в ряд Тэйлора. Вблизи оси системы для практических целей можно ограничиться несколькими первыми членами ряда:

$$\chi(r, z) = \int^z B_0(z) dz - \frac{1}{4} B_0'(z) r^2.$$

Это так называемое параксиальное (приосевое) приближение. В параксиальном приближении магнитное поле описывается формулами

$$B_r = -\frac{1}{2} B_0'(z) r, \quad B_\psi = 0, \quad B_z = B_0(z) - \frac{1}{4} B_0''(z) r^2.$$

Задача 4.15. Обобщая решение предыдущей задачи, скалярный потенциал можно разложить в ряд Фурье:

$$\chi(r, \psi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_m(r, z) e^{im\psi}.$$

Для каждой функции $\chi_m(r, z)$ имеем ряд Тейлора по степеням r :

$$\chi_m(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |m|!}{2^n n! (|m| + n)!} \chi_{m,0}^{(2n)}(z) r^{|m|+2n},$$

где $\chi_{m,0}(z)$ считается известной функцией, причём $\chi_{-m,0}(z) = \chi_{m,0}(z)^*$ вследствие вещественности $\chi(r, \psi, z)$.

В практически важном случае квадрупольного магнитного поля с плоскостью симметрии, проходящей через ось системы, в ряду Фурье оставляют слагаемые с $m = 0$ и $m = 2$. Тогда приближённо

$$\chi(r, z) = \int^z B_0(z) dz - \frac{1}{4} B_0'(z) r^2 + h(z) r^2 \cos(2\psi),$$

где функция $h(z)$ отвечает за квадрупольную добавку, и

$$B_r = \frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{1}{2} B_0' r + 2h r \cos(2\psi),$$

$$B_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} = -2h r \sin(2\psi),$$

$$B_z = \frac{\partial \chi}{\partial z} = B_0 - \frac{1}{4} B_0'' r^2 + h' r^2 \cos(2\psi).$$

Задача 4.16. В декартовой системе координат

$$B_x = \left(-\frac{1}{2} B_0' + 2h\right) x,$$

$$B_y = \left(-\frac{1}{2} B_0' - 2h\right) y,$$

$$B_z = B_0.$$

Интегрируя уравнения

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_z}$$

для силовой линии, проходящей через точку $(x_0, y_0, 0)$, находим, что $x = x_0 X(z)$, $y = y_0 Y(z)$, где

$$X(z) = \sqrt{B_0(0)/B_0(z)} \exp\left(+2 \int_0^z [h(z)/B_0(z)] dz\right),$$

$$Y(z) = \sqrt{B_0(0)/B_0(z)} \exp\left(-2 \int_0^z [h(z)/B_0(z)] dz\right).$$

Кривизну и кручение силовой линии находим, используя решение задачи 4.12:

$$\kappa = \sqrt{x_0^2 X''^2 + y_0^2 Y''^2}, \quad \tau = x_0 y_0 \frac{X'' Y''' - X''' Y''}{x_0^2 X''^2 + y_0^2 Y''^2}.$$

Задача 4.17. Поскольку $\operatorname{div}(f(\alpha, \beta)[\nabla \alpha \times \nabla \beta]) = 0$ для произвольных функций координат $\alpha = \alpha(r)$, $\beta = \beta(r)$, любое магнитное поле можно представить в виде

$$\mathbf{B} = f(\alpha, \beta) [\nabla \alpha \times \nabla \beta],$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Криволинейные координаты с контравариантными компонентами $x^1 = \alpha$, $x^2 = \beta$ называют потоковыми. Они удобны тем, что силовые линии магнитного поля в этих координатах являются «прямыми», которые соответствуют пересечению поверхностей $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, поскольку $(\nabla \alpha \cdot \mathbf{B}) = (\nabla \beta \cdot \mathbf{B}) = 0$. Выбор потоковых координат неоднозначен. Если известно, что α и β — какая-то пара потоковых координат для поля \mathbf{B} , то $\alpha' = \alpha'(\alpha, \beta)$ и $\beta' = \beta'(\alpha, \beta)$ также будут потоковыми координатами для того же поля.

Для потенциального магнитного поля с потенциалом χ верно также другое представление магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \nabla \chi.$$

Выбрав $x^3 = \chi$ в качестве третьей контравариантной координаты, находим ковариантные компоненты вектора магнитного поля в координатах $x^i = (\alpha, \beta, \chi)$:

$$B_i = (0, 0, 1).$$

Контравариантные компоненты B^i находим с помощью формулы для векторного произведения $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^i = \epsilon^{ijk} a_j b_k / \sqrt{g}$, где g — определитель метрического тензора $g_{ik} = (\partial \mathbf{r} / \partial x^i) \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial x^k)$, а $\epsilon^{ijk} / \sqrt{g}$ — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга (его элементы равны нулю, если хотя бы два индекса одинаковы, а ненулевые элементы получаются из $\epsilon^{123} = 1$ перестановкой соседних индексов, причём при каждой перестановке происходит изменение знака). Так как $\nabla_j \alpha = \partial \alpha / \partial x^j = (1, 0, 0)$ и $\nabla_k \beta = \partial \beta / \partial x^k = (0, 1, 0)$, получаем:

$$B^i = (0, 0, f / \sqrt{g}).$$

Вычисляя свёртку $B^i B_i = f / \sqrt{g}$, нетрудно найти определитель метрического тензора, не вычисляя сам тензор, так как $B^i B_i = |\mathbf{B}|^2$.

Обратившись к решению задачи 4.16, заметим, что силовые линии квадрупольного магнитного поля лежат на пересечении поверхностей $x_0 = x/X(z) = \text{const}$ и $y_0 = y/Y(z) = \text{const}$. Поэтому в качестве потоковых координат можно выбрать $\alpha = x_0$ и $\beta = y_0$. При этом с нужной точностью $f = B_0(0)$.

Задача 4.18. Введём обозначения для формальных параметров разложения

$$\epsilon_\ell = \frac{\rho}{\ell} \ll 1, \quad \epsilon_\tau = \frac{1}{\Omega \tau} \ll 1,$$

которые, согласно условиям (4.1) и (4.2), в рамках теории дрейфов считаются малыми. Для простоты рассмотрим дрейф в стационарных полях, что соответствует пределу $\tau = \infty$ и $\epsilon_\tau = 0$.

Выберем в качестве формального определения радиуса-вектора ведущего центра ларморовской орбиты уравнение (4.21):

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}].$$

В этом определении \mathbf{R} величины Ω и \mathbf{h} следует брать в точке с радиусом-вектором \mathbf{r} , где находится частица в данный момент времени. Преобразуя производную по времени

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\Omega} [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{h}] + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{h}}] - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}]$$

с помощью уравнений движения (4.10), получим

$$\dot{\mathbf{R}} = \underbrace{v_{\parallel} \mathbf{h}}_I + \underbrace{\frac{e}{m\Omega} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]}_{II} + \underbrace{\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{h}}]}_{III} - \underbrace{\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}]}_{IV}, \quad (1)$$

где $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \times \mathbf{h} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp}$.

Уравнение (1) является точным, так как при его выводе не сделано каких-либо приближений. Величина $\dot{\mathbf{R}}$ содержит в себе как осциллирующие (с частотой Ω) члены, которые при усреднении по времени обращаются в нуль, так и плавную составляющую, не обращающуюся в нуль при усреднении. Чтобы выделить скорость дрейфа, нужно усреднить это уравнение по быстрым осцилляциям.

Начнём с первого члена $I = v_{\parallel} \mathbf{h}$. Он не содержит малого параметра ϵ_{ℓ} , т. е. $v_{\parallel} \mathbf{h} = \mathcal{O}(1)$. Будем стремиться к тому, чтобы все поля вычислялись в точке \mathbf{R} , где в данный момент времени расположен ведущий центр, и разложим вектор \mathbf{h} в ряд Тейлора вблизи этой точки:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) \simeq \mathbf{h}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{h}(\mathbf{R}).$$

Последний член здесь имеет порядок ϵ_{ℓ} . Такой же порядок малости имеет скорость дрейфа. Однако при усреднении по быстрым осцилляциям последний член исчезает, так как $\langle \boldsymbol{\rho} \rangle = 0$.

$$\langle I \rangle = v_{\parallel} \mathbf{h}(\mathbf{R}).$$

Второй член $II = \frac{e}{m\Omega} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}]$ уже мал, так как электрическое поле в хорошо проводящей плазме обычно не может быть очень большим. Поэтому в аргументах \mathbf{E} , \mathbf{h} , Ω для усреднения достаточно заменить \mathbf{r} на \mathbf{R} :

$$\langle II \rangle = \frac{c}{B^2(\mathbf{R})} [\mathbf{E}(\mathbf{R}) \times \mathbf{B}(\mathbf{R})].$$

Перейдём к третьему члену $III = \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{h}}]$. В нём

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{h}.$$

Будем считать, что магнитное поле не зависит от времени. Тогда частная производная по времени равна нулю, и мы получаем

$$III = \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Чтобы выполнить усреднение в последнем уравнении, перейдём к индексным обозначениям, выразив векторное произведение через абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга $e_{\alpha\beta\gamma}$:

$$III_{\alpha} = \frac{1}{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta} v_{\gamma} \frac{\partial h_{\gamma}}{\partial x_{\beta}}.$$

Это выражение содержит малую производную $\partial h_\gamma / \partial x_\nu$, поэтому с необходимой точностью порядка ϵ_ℓ можно считать, что Ω и h_ν вычисляются в точке \mathbf{R} ; при этом усреднять следует только $v_\beta v_\nu$:

$$\langle III_\alpha \rangle = \frac{1}{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\nu} \langle v_\beta v_\nu \rangle.$$

Результат усреднения $\langle v_\beta v_\nu \rangle$ не должен изменяться при любом повороте вокруг направления \mathbf{h} . Поэтому тензор $\langle v_\beta v_\nu \rangle$ выражается через инвариантные тензоры $\delta_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta\gamma}$, которые не меняются при любом повороте (все другие инвариантные тензоры выражаются через эти два), и компоненты вектора \mathbf{h} . Наиболее общее выражение для $\langle v_\beta v_\nu \rangle$, которое можно составить из данных тензоров, имеет вид

$$\langle v_\beta v_\nu \rangle = \mathbb{A} \delta_{\beta\nu} + \mathbb{B} h_\beta h_\nu + \mathbb{C} e_{\beta\nu\mu} h_\mu.$$

Так как $v_\beta v_\nu$ не изменяется при изменении знака \mathbf{h} , коэффициент \mathbb{C} равен нулю. Коэффициенты \mathbb{A} и \mathbb{B} найдём, составив свёртки $\langle v_\beta v_\nu \rangle$ с $\delta_{\beta\nu}$ и $h_\beta h_\nu$. Решив полученные при этом уравнения

$$v^2 = 3\mathbb{A} + \mathbb{B}, \quad v_{\parallel}^2 = \mathbb{A} + \mathbb{B},$$

находим

$$\langle v_\beta v_\nu \rangle = \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \{ \delta_{\beta\nu} - h_\beta h_\nu \} + v_{\parallel}^2 h_\beta h_\nu$$

и далее

$$\langle III_\alpha \rangle = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\beta} - h_\beta h_\nu \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\nu} \right\} + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} h_\beta h_\nu \frac{\partial h_\gamma}{\partial x_\nu}.$$

В векторных обозначениях

$$\langle III \rangle = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \{ \text{rot } \mathbf{h} - [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] \} + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

с помощью векторного тождества

$$[\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}] = \nabla \frac{h^2}{2} - (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = -(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \quad (2)$$

выражение в фигурных скобках приводится к виду

$$\text{rot } \mathbf{h} - [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] = \text{rot } \mathbf{h} + [\mathbf{h} \times [\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}]] = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}).$$

Таким образом,

$$\langle III \rangle = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}) + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Переходя к последнему члену $IV = -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}]$, имеем

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Omega.$$

Дальнейшие вычисления проводим аналогично изложенному выше:

$$\begin{aligned}\langle IV_\alpha \rangle &= -\left\langle \frac{1}{\Omega^2} v_\gamma \frac{\partial \Omega}{\partial x_\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} v_\beta h_\gamma \right\rangle = -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma \langle v_\gamma v_\beta \rangle = \\ &= -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma \left\{ \frac{1}{2} v_\perp^2 \delta_{\beta\gamma} + \left(v_\parallel^2 - \frac{1}{2} v_\perp^2 \right) h_\beta h_\gamma \right\}.\end{aligned}$$

Так как $e_{\alpha\beta\gamma} h_\beta h_\gamma = [\mathbf{h} \times \mathbf{h}]_\alpha = 0$, в итоге получаем:

$$IV = -\frac{v_\perp^2}{2\Omega^2} [\nabla \Omega \times \mathbf{h}].$$

Собирая все члены вместе, находим

$$\dot{\mathbf{R}} = \left(v_\parallel + \frac{v_\perp^2}{2\Omega} \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h} \right) \mathbf{h} + \frac{c}{B} [\mathbf{E} \times \mathbf{h}] + \frac{v_\parallel^2}{\Omega} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] + \frac{v_\perp^2}{2\Omega B} [\mathbf{h} \times \nabla B]. \quad (3)$$

В первом слагаемом поправка к v_\parallel мала по параметру ϵ_ℓ , ею обычно пренебрегают. Последние три члена описывают соответственно электрический, центробежный и градиентный дрейфы.

Лекция 5

Задача 5.1. В релятивистском случае частота циклотронного вращения уменьшается в γ раз. Повторя вычисления в п. 5.1, получаем:

$$I = \frac{e\Omega}{2\pi\gamma},$$

где $\gamma > 1$ — релятивистский фактор, а $\Omega = eB/(mc)$ циклотронная частота в нерелятивистском приближении. Величина ларморовского радиуса при заданной скорости v_\perp увеличивается в γ раз:

$$\rho = \gamma v_\perp / \Omega.$$

Собирая множители в формуле $\mu_\gamma = SI/(2c) = \pi \rho^2 I/(2c)$, которая не изменилась по сравнению с нерелятивистским пределом, находим:

$$\mu_\gamma = \frac{m\gamma v_\perp^2}{2B}.$$

Вводя релятивистский импульс $p_\perp = \gamma m v_\perp$, можно также записать

$$\mu_\gamma = \frac{p_\perp^2}{2\gamma m B}.$$

Сравнение этого выражения с магнитным потоком через ларморовскую окружность

$$\Phi = \pi \rho^2 B = \frac{\pi m c^2}{e^2} \frac{p_\perp^2}{2mB}$$

показывает, что оно имеет иную зависимость от энергии частицы, поскольку в знаменателе содержит релятивистский фактор γ , которого нет в Φ .

Задача 5.2. При ускорении заряженной частицы вдоль магнитного поля её ларморовский радиус $\rho = p_{\perp}/(m\Omega)$ не меняется, поэтому магнитный поток $\Phi = \pi\rho^2 B$ через орбиту частицы остаётся постоянным. Напротив, магнитный момент $\mu_{\gamma} = p_{\perp}^2/(2\gamma mB)$ уменьшается обратно пропорционально релятивистскому фактору $\gamma = \sqrt{m^2 c^2 + p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2}/(mc)$ вследствие релятивистского замедления циклотронного вращения при увеличении продольного импульса p_{\parallel} .

Задача 5.4. Пусть магнитное поле медленно изменяется во времени. Поскольку сила Лоренца $\mathbf{F} = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$ перпендикулярна \mathbf{B} , её работа $\int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) dt$ тождественно равна нулю. Следовательно, магнитное поле напрямую не может передать энергию заряженной частице. Однако при изменении \mathbf{B} , в соответствии с законом электромагнитной индукции,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

возникает вихревое электрическое поле \mathbf{E} , которое уже может ускорять частицу. Умножив скалярно уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

на $\mathbf{p}_{\perp} = \gamma m \mathbf{v}_{\perp}$, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}^2}{2} = e (\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{E}).$$

Интегрируя по периоду циклотронного вращения $2\pi\gamma/|\Omega|$, находим среднее значение

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}^2}{2} = \frac{e|\Omega|}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma/|\Omega|} (\mathbf{E} \cdot \gamma m \mathbf{v}_{\perp}) dt.$$

Интеграл по времени заменим интегрированием вдоль замкнутой орбиты в системе отсчёта, сопутствующей ведущему центру частицы:

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}^2}{2} = \frac{em|\Omega|}{2\pi} \oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}).$$

Здесь $d\mathbf{l} = \mathbf{v}_{\perp} dt$ — элемент дуги вдоль траектории частицы ($v_{\parallel} = 0$ в сопутствующей системе отсчёта). С помощью теоремы Стокса интеграл по замкнутому контуру преобразуем в интеграл по ориентированной поверхности, которая натянута на ларморовскую орбиту:

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}^2}{2} = \frac{em|\Omega|}{2\pi} \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = -\frac{em|\Omega|}{2\pi c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right).$$

Направление нормали к поверхности S определяется направлением обхода контура интегрирования по правилу правого винта, поэтому $d\mathbf{S} = -(\Omega/|\Omega|) dS$,

а интегрирование сводится к умножению подынтегрального выражения на площадь ларморовского кружка $S = \pi\rho^2 = \pi(p_{\perp}c/(eB))^2$:

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}^2}{2} = \frac{em|\Omega|}{2\pi c} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{\Omega}{|\Omega|} \right) \pi\rho^2 = \frac{p_{\perp}^2}{2B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \cdot B \right) = \frac{p_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Так как в сопутствующей системе отсчёта $\dot{R} = 0$ и, следовательно, $\partial B/\partial t = dB/dt$, в итоге получаем искомый результат

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}^2}{2B} = 0.$$

Задача 5.5. Последовательный вывод уравнения (5.10) методом усреднения имеется в [59].

Задача 5.6. При переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую электрический и магнитный дипольные моменты преобразуются по формулам [144, задача 613]

$$\begin{aligned} d_{\perp} &= d'_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \boldsymbol{\mu}'], & d_{\parallel} &= d'_{\parallel} / \Gamma, \\ \mu_{\perp} &= \mu'_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{d}'], & \mu_{\parallel} &= \mu'_{\parallel} / \Gamma, \end{aligned}$$

где $\Gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, а значки \perp и \parallel указывают ориентацию относительно взаимной скорости \mathbf{V} движения систем отсчёта. Адиабатическим инвариантом можно назвать абсолютное значение магнитного момента в системе отсчёта ведущего центра частицы (и то только если пренебречь отличием от единицы релятивистского фактора $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, вычисленного по полной энергии частицы в этой системе отсчёта). Инварианты не подлежат пересчёту в другую систему координат. Нужно пересчитывать параметры частицы, через которые выражается адиабатический инвариант.

Задача 5.7. Пренебрегая слагаемым $\frac{1}{2}mv_E^2$ в (5.12), имеем

$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_{\parallel 0}^2 + \mu B_{\min} + e\varphi_0$ в минимуме магнитного поля, где $B = B_{\min}$, и $\varepsilon = \mu B_{\max}$ в максимуме магнитного поля, где $B = B_{\max}$. Так как $\mu = mv_{\perp 0}^2/(2B_{\min})$, приравняв два выражения для энергии ε , находим границу конуса потерь: $mv_{\parallel 0}^2/2 = (B_{\max}/B_{\min} - 1)mv_{\perp 0}^2/2 - e\varphi_0$, где $e > 0$ для ионов и $e < 0$ для электронов. При заданной поперечной скорости $v_{\perp 0}$ в конус потерь попадают частицы с продольной скоростью, превышающей $v_{\parallel 0}$.

Задача 5.8. Абсолютным называется удержание заряженной частицы внешним электромагнитным полем в ограниченной изолированной области пространства, выход из которой невозможен без нарушения точных интегралов движения, таких как энергия и азимутальный момент.

В рамках адиабатического приближения заряженная частица удерживается в пробкотроне, если её питч-угол находится вне конуса потерь, т. е.

$$\theta_0 > \arcsin \sqrt{B_{\min}/B_{\max}}, \quad (1)$$

где B_{\min} и B_{\max} — это минимальное и максимальные значения магнитного поля на магнитной линии, по которой движется частица. Этот критерий по существу требует, чтобы магнитный момент частицы имел достаточно большую

величину. Однако магнитный момент не является точным инвариантом. Точными интегралами движения в ловушке с аксиально-симметричным магнитным полем являются энергия

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi$$

и обобщённый азимутальный момент

$$P_\psi = mrv_\psi + \frac{e}{c} r A_\psi,$$

причём предполагается, что в цилиндрической системе координат векторный потенциал калиброван так, что имеет только азимутальную компоненту $A_\psi(r, z)$. В параксиальном приближении

$$A_\psi(r, z) \approx \frac{1}{2}B_0(z)r,$$

где $B_0(z)$ — магнитное поле на оси пробкотрона. Гамильтониан заряженной частицы в таком поле равен

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} \left(P_\psi - \frac{e}{c} r A_\psi \right)^2,$$

где $p_r = mv_r$ и $p_z = mv_z$ обозначают радиальную и аксиальную компоненты импульса частицы. Он описывает движение в двумерном потенциале

$$U(r, z) = \frac{1}{2mr^2} \left(P_\psi - \frac{e}{2c} r^2 B_0(z) \right)^2.$$

Изолинии $U = \text{const}$ на плоскости rz ограничивают область пространства, доступную частице с заданной энергией. Если изолинии не замкнуты, частица может уйти из ловушки. Абсолютному удержанию соответствуют замкнутые изолинии вокруг локальных минимумов $U = U_{\min}$, где обращаются в ноль первые производные

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

а вторые производные удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \right)^2. \quad (3)$$

Они отделены от незамкнутых изолиний сепаратрисой, которая проходит через седловую точку, где первые производные также обращаются в ноль, но одно из условий (3) не выполнено.

В результате несложных вычислений находим, что при $eP_\psi > 0$ уравнения (2) имеют решение $r = \sqrt{2cP_\psi/(eB_0(z))}$ при любом z . Однако оно соответствует «ущелью» $U = 0$, которое тянется до бесконечных значений z .

При $eP_\psi < 0$ уравнения (2) имеют решение $r = \sqrt{-2cP_\psi/(eB_0(z))}$ при z таком, что $\partial B_0/\partial z = 0$. В минимуме $B_0 = B_{\min}$ находится локальный минимум эффективного потенциала $U_{\min} = -eP_\psi B_{\min}/(mc)$. Через максимум

$B_0 = B_{\max}$ проходит сепаратриса, которой соответствует значение эффективного потенциала $U_{\text{sep}} = -eP_{\psi}B_{\max}/(mc)$. Внутри области, включающей минимум U и ограниченной сепаратрисой, удерживаются частицы с энергией $m(v_r^2 + v_z^2)/2 + U < U_{\text{sep}}$. Так как по сути $U = mv_{\psi}^2/2$, достаточное условие удержания частицы в ловушке можно записать в виде

$$\varepsilon < -eP_{\psi}B_{\max}/(mc),$$

где энергия $\varepsilon = m(v_r^2 + v_{\psi}^2 + v_z^2)/2$ и обобщённый азимутальный импульс $P_{\psi} = mrv_{\psi} - (e/2c)r^2B_0(z)$, будучи точными интегралами движения, однозначно определяются по начальной скорости частицы и её начальным координатам.

Задача 5.9. Плазма в адиабатической ловушке имеет амбиполярный потенциал $\varphi \sim T_e/e$. В зависимости от величины амбиполярного электрического поля $E \sim \varphi/a$, где a обозначает характерный радиус плазменного столба, время обхода τ_{dr} дрейфовой траектории частицы вокруг оси плазмы можно оценить либо как частное от деления a на скорость градиентного и центробежного дрейфа, $v_{\text{dr}} \sim (\rho a/L^2)v$, где L — длина ловушки, если электрическое поле достаточно мало, либо как частное от деления a на скорость электрического дрейфа, $v_E \sim cT_e/(eBa)$, если электрическое поле велико. В первом случае условие $\tau_{\text{dr}} \gg L/v$ сохранения продольного адиабатического инварианта J_{\parallel} эквивалентно неравенству $\rho \ll L$, которое в реальных ловушках всегда выполняется. Во втором случае необходимое условие $\rho \ll a^2/L$ существенно более жёсткое при обычном соотношении размеров $a \ll L$. Поскольку при одинаковой энергии ларморовский радиус ионов ρ_i в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз больше, чем ларморовский радиус электронов ρ_e , проверять условие сохранения J_{\parallel} нужно прежде всего для ионов.

Задача 5.10. В катушке Гельмгольца магнитных пробок нет. Её используют для создания протяжённой области однородного магнитного поля. В центре катушки, т. е. в точке на оси симметрии z на равном удалении от витков, равны нулю первые три производные $B_0(z)$ по z .

В катушке из двух витков, расстояние между которыми равно их диаметру (а не радиусу, как в катушке Гельмгольца), пробочное отношение на оси равно 1,54358.

Задача 5.11. $n = (B/B_{\min})(B_* - B_{\min})^{1/2}(B_* - B)^{-1/2}n_0$. (Подсказка: учесть, что наряду с сохранением потока магнитного поля BS через переменную площадь сечения пучка S сохраняется также полный поток частиц $nv_{\parallel}S$.) Формально плотность обращается в бесконечность при $B \rightarrow B_*$. Бесконечность сглаживается при учёте конечной ширины углового распределения частиц пучка.

Задача 5.12. Энергия частицы уменьшится в 4 раза. Этот результат легко получить, если траектория частицы лежит в экваториальной плоскости магнитного поля диполя, где магнитное поле минимально вдоль каждой силовой линии. Но он правилен и в общем случае. Чтобы доказать это, учтём, что сохраняются магнитный момент μ , продольный адиабатический инвариант

$$J_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int \sqrt{2m(\varepsilon - \mu B)} ds$$

и магнитный поток через дрейфовую оболочку

$$\Phi = \int_{r_0}^{\infty} B_{\theta} 2\pi r dr = \frac{2\pi m}{r_0},$$

где m — магнитный момент диполя, r_0 — радиус дрейфовой оболочки в экваториальной плоскости диполя. В сферической системе координат (r, θ, ψ) , в которой широтный угол θ отсчитывается от направления магнитного диполя, его поле имеет компоненты

$$\mathbf{B} = (2 \cos \theta, \sin \theta, 0) m/r^3.$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{B_r}{B_{\theta}},$$

находим уравнение силовой линии:

$$r = r_0 \sin^2 \theta.$$

Переходя в формуле для J_{\parallel} от интегрирования по элементу длины силовой линии $ds = \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2}$ к интегрированию по безразмерной переменной $\xi = r/r_0$, приведём её к следующему виду

$$J_{\parallel} = \frac{2\sqrt{2}m}{\pi} \int \sqrt{\varepsilon r_0^2 - (\mu m/r_0)} \sqrt{4 - 3\xi/\xi^3} \sqrt{(4 - 3\xi)/(1 - \xi)} d\xi,$$

где интегрирование производится от нуля выражения под знаком первого корня до $\xi = 1$. Так как J_{\parallel} зависит от двух комбинаций параметров: $\mu m/r_0$ и εr_0^2 , а μ , m/r_0 и J_{\parallel} сохраняются в адиабатическом процессе, ясно, что сохраняется также произведение εr_0^2 . При увеличении m в 2 раза радиус дрейфовой оболочки r_0 увеличивается в 2 раза (поскольку m/r_0 сохраняется). Следовательно, энергия частицы ε уменьшается в 4 раза.

Задача 5.14. $\varepsilon/\varepsilon_0 = \sqrt{n} \cos^2 \theta_0 + n \sin^2 \theta_0$.

Задача 5.15. 2,5 кэВ.

Задача 5.16. Если предположить, что магнитное поле можно аппроксимировать гладкой функцией, с характерным масштабом изменения порядка длины установки для удержания плазмы, изменение магнитного момента $\Delta\mu$ за один пролёт между магнитными пробками будет пропорционально амплитуде резонанса $\langle\Omega\rangle = N\omega_{\parallel}$ между ларморовским вращением со средней частотой $\langle\Omega\rangle$ и продольными колебаниями частицы между пробками с частотой ω_{\parallel} . Тогда

$$\Delta\mu/\mu \sim A^N/N!, \quad (1)$$

где N — номер резонанса. Численный множитель $A \sim 1$ близок к единице, причём его точное значение зависит от конкретного выбора аппроксимирующей функции. По порядку величины $N \simeq L/\rho_{\parallel 0}$, где $\rho_{\parallel 0} = v_{\parallel 0}/\Omega_0$ — продольный ларморовский радиус частицы в минимуме магнитного поля. Таким образом, из (1) следует оценка [64]:

$$\Delta\mu/\mu \sim \exp(-L/\rho_{\parallel 0}). \quad (2)$$

Она не накладывает существенных ограничений на выбор конфигурации магнитного поля, обеспечивающей адиабатический (устойчивый) режим удержания частиц в пробкотроне. Действительно, движение становится стохастическим (неустойчивым), если $\Delta\mu/\mu$ превышает относительное расстояние между резонансами:

$$\Delta\mu/\mu \geq 1/N. \quad (3)$$

Однако неравенство $\exp(-L/\rho_{||0}) > \rho_{||0}/L$, эквивалентное (3), формально не может быть выполнено.

Между тем магнитная система крупных установок для удержания плазмы состоит из большого числа катушек, поэтому аппроксимация магнитного поля «гладкой» функцией означает пренебрежение резонансами между ларморовским вращением и модуляцией продольного движения мелкомасштабной составляющей магнитного поля, неизбежно усиленной вследствие дискретной структуры элементов магнитной системы. Амплитуда таких резонансов мала, поскольку мала относительная амплитуда δ мелкомасштабной составляющей магнитного поля. Например, если расстояние между катушками равно l , а их радиус b , то $A_\delta \sim \delta \simeq \exp(-2\pi b/l) \ll 1$. Однако номер резонанса $N_\delta = l/(2\pi\rho_{||0})$ также значительно меньше, чем N , если $l \ll L$. Поэтому из (1) следует оценка [65]

$$\Delta\mu/\mu \sim \exp(-b/\rho_{||0}), \quad (4)$$

значительно превышающая (2).

Лекция 6

Задача 6.1. Интегрируя в формуле (6.13) от $\theta = \pi/2$ до $\theta = \pi$, получаем:

$$4\pi b_*^2 \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{d \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = 4\pi b_*^2 \ln \sqrt{2}. \quad (1)$$

Это примерно в 3Λ раз меньше, чем полная величина транспортного сечения.

Задача 6.2. $\sigma_t = 4\pi\Lambda e_a^2 e_b^2 / (p^2 v^2)$.

Задача 6.3. $\frac{1}{2} m_e v^2 / [1 + (m_e v^2 b / (4e^2))^2]$.

Задача 6.4. Для оценки возьмём $\frac{1}{2} m v^2 = T$, $e_a = e_b = e$, $n_a = n_b = n$ и $\lambda_D = \sqrt{T/(8\pi n e^2)}$. Тогда

$$\frac{\lambda_D}{b_*} = \frac{\lambda_D}{e^2/(m v^2)} = \frac{2\lambda_D T}{e^2} = 16\pi n \lambda_D^3 = 6N_D.$$

При $T = 100$ эВ, $n = 10^{14}$ см⁻³ получаем $N_D = 1,2 \times 10^5$, $\Lambda = 13,5$. При изменении плотности плазмы на 2 порядка кулоновский логарифм меняется всего лишь на 17%.

Задача 6.5. Магнитное поле слабо влияет на кулоновское рассеяние до тех пор, пока ларморовский радиус больше дебаевской длины, $\rho > \lambda_D$, т. е.

$$\frac{B^2}{8\pi} < nmc^2.$$

Это типичная ситуация для экспериментов по управляемому термоядерному синтезу. Однако указанное условие нарушается в заряженной плазме. Как следует из решения задачи 1.8, магнитное поле способно предотвратить разлёт заряженной плазмы только при $B^2/(8\pi) > nmc^2$. При $\rho < \lambda_D$ необходимо принять во внимание ларморовское искривление траектории налетающей частицы вблизи рассеивающего центра, но учёт этого эффекта сказывается только на величине кулоновского логарифма, при вычислении которого нужно принять, что $b_{\max} \approx \rho$. Дело в том, что на большем расстоянии от рассеивающего центра движение пролетающей частицы становится адиабатическим, поэтому энергия и импульс, полученные частицей от рассеивающего центра при подлёте к центру, будут ему возвращены при удалении от него.

Задача 6.6. Помимо теплового движения со скоростью порядка тепловой, $v \approx v_T$, в поле волны рассеиваемая частица участвует в осцилляторном движении. Если частота волны существенно больше плазменной, $\omega \gg \omega_p$, на участке траектории порядка длины Дебая λ_D укладывается много периодов осцилляций $2\pi v/\omega$. Это означает, что вынужденные осцилляции пролетающей частицы в поле рассеивающего центра являются адиабатическими, а поэтому их энергия не рассеивается и возвращается волне после пролёта мимо рассеивающего центра. Движение не будем адиабатическим при пролёте на расстоянии порядка или меньше v/ω . Отсюда следует, что при вычислении затухания высокочастотной волны в плазме обычное определение кулоновского логарифма $\Lambda \approx \ln(\lambda_D/b_*)$, где $b_* = e^2/(mv^2)$ обозначает кулоновский радиус, нужно заменить на $\Lambda \approx \ln(v/(b_*\omega)) = \ln(mv^3/(e^2\omega))$. Количественное рассмотрение процесса дано в статье [145].

Задача 6.8. Для максвелловской функции

$$f_a(v') = \frac{n_a}{\pi^{3/2}v_{Ta}^3} \exp\left(-\frac{v'^2}{v_{Ta}^2}\right),$$

описывающей распределение частиц сорта a с тепловой скоростью $v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}$, из (6.28) находим

$$F_{ba}(v) = -\frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2n_a}{m_{ab}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{v}{v_{Ta}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{v}{v_{Ta}} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{Ta}^2}\right) \right] \frac{v}{v^3},$$

где $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x dx \exp(-x^2)$ — функция ошибок. В пределе $v/v_{Ta} \rightarrow \infty$ выражение в квадратных скобках стремится к единице, соответственно

$$F_{ba} = -\frac{4\pi\Lambda_{ab}e_a^2e_b^2n_a}{m_{ab}} \frac{v}{v^3}.$$

В другом предельном случае, $v/v_{Ta} \rightarrow 0$, оно равно $4v^3/3 \sqrt{\pi} v_{Ta}^3$, а сила пропорциональна скорости частиц пучка:

$$F_{ba} = - \frac{16 \sqrt{\pi} \Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2 n_a}{3 m_{ab}} \frac{v}{v_{Ta}^3}.$$

И наконец, нужно взять сумму сил $\sum_a F_{ba}$, по всем сортам частиц плазмы.

Задача 6.9.

$$A_{ba} = \frac{4\pi \Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2 n_a}{m_b v} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{v}{v_{Ta}} \left(1 + \frac{m_b}{m_a} \right) \exp\left(-\frac{v^2}{v_{Ta}^2}\right) - \frac{m_b}{m_a} \operatorname{erf}\left(\frac{v}{v_{Ta}}\right) \right].$$

Медленная пробная частица получает энергию от плазмы, так как в пределе $v \ll v_{Ta}$ величина

$$A_{ba} = \frac{8 \sqrt{\pi} \Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2 n_a}{m_b v_{Ta}}$$

положительна. Быстрая пробная частица, $v \gg v_{Ta}$, напротив, теряет энергию:

$$A_{ba} = - \frac{4\pi \Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2 n_a}{m_a v}.$$

Задача 6.10. Тепловой разброс несуществен, если скорость частиц пучка $v \equiv v_b$ значительно больше скорости частиц плазмы, $v \gg v_a \approx v_{Ta}$. Тогда

$$v_{ba}^{(p)} = \frac{4\pi \Lambda_{ab} e_a^2 e_b^2 n_a}{m_{ab} m_b v^3}. \quad (1)$$

Если выделить в этой формуле транспортное сечение $\sigma_t = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} / (m_{ab}^2 v^4)$ и поток частиц $n_a v$, то

$$v_{ba}^{(p)} = \frac{m_a}{m_a + m_b} \sigma_t n_a v.$$

Эту формулу можно интерпретировать как произведение частоты рассеяния приведённой частицы на кулоновском центре $v_{ba} = \sigma_t n_a v$ на долю импульса $m_a / (m_a + m_b)$, которую в среднем частица с массой m_b передаёт при столкновениях частице массы m_a . Отсюда видно, что при рассеянии лёгкой частицы на тяжёлой ($m_b \ll m_a$) она передаёт ей почти весь свой импульс за время порядка v_{ba}^{-1} , тогда как торможение тяжёлой частицы на лёгких ($m_b \gg m_a$) происходит в m_b/m_a раз медленнее.

Для столкновений электронов с электронами $m_{ee} = \frac{1}{2} m_e$, ионов с ионами $m_{ii} = \frac{1}{2} m_i$, а для электронов с ионами $m_{ei} = m_{ie} \approx m_e$. Вводя обозначения $e_e = -e$, $e_i = Ze$, имеем

$$v_{ee}^{(p)} = \frac{8\pi \Lambda e^4}{m_e^2 v^4} n_e v,$$

$$v_{ei}^{(p)} = \frac{4\pi \Lambda e^4 Z^2}{m_e^2 v^4} n_i v,$$

$$v_{ii}^{(p)} = \frac{8\pi \Lambda e^4 Z^2}{m_i^2 v^4} n_i v,$$

$$v_{ie}^{(p)} = \frac{m_e}{m_i} \frac{4\pi \Lambda e^4 Z^2}{m_e^2 v^4} n_e v,$$

где для простоты принято одно и то же значение кулоновского логарифма Λ во всех столкновениях.

При одинаковой скорости v величина $v_{ee}^{(p)}$ в 2 раза больше, чем $v_{ei}^{(p)}$. Малый множитель m_e/m_i в $v_{ie}^{(p)}$, отсутствующий в $v_{ei}^{(p)}$, имеет простое объяснение: электрон, как более лёгкая частица, в одном столкновении с ионом может передать иону весь свой импульс, а ион электрону — только малую долю порядка m_e/m_i .

Если тепловая скорость частиц плазмы вовсе не мала по сравнению со скоростью частиц пучка v , то приведённые формулы можно использовать для грубых оценок по порядку величины, заменив в них v на тепловую скорость v_T соответствующего сорта частиц. В ион-ионных столкновениях это тепловая скорость ионов $v_{Ti} = \sqrt{2T_i/m_i}$, в остальных случаях — тепловая скорость электронов $v_e = \sqrt{2T_e/m_e}$, так как при $T_e \approx T_i$ она больше, чем v_{Ti} . Принимая во внимание, что $n_e = Zn_i$, и игнорируя численные множители порядка 2, можно составить следующие пропорции между частотами столкновений различных сортов частиц:

$$v_{ee}^{(p)} : v_{ei}^{(p)} : v_{ii}^{(p)} : v_{ie}^{(p)} = 1 : Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2. \quad (2)$$

Они характеризуют динамику установления равновесия в плазме. Например, в случае $Z \gg 1$ самым быстрым процессом является торможение электронов об ионы, тогда как при $Z \approx 1$ потеря импульса электроном в столкновениях с другими электронами происходит столь же быстро.

Задача 6.11. Опуская индекс в обозначении скорости v_b пробной частицы из формулы (6.31) в пределе $v \equiv v_b \gg v_a$, получаем

$$A_{ba} = - \frac{4\pi\Lambda e_a^2 e_b^2 n_a}{m_a v}.$$

Выделив в этом выражении множитель в виде энергии налетающей частицы $\frac{1}{2}m_b v^2$ в соответствии с определением (6.33), найдём частоту столкновений

$$v_{ba}^{(\varepsilon)} = \frac{8\pi\Lambda e_a^2 e_b^2}{m_a m_b v^4} n_a v, \quad (1)$$

которая характеризует скорость потери энергии пучком частиц. Выделяя транспортное сечение $\sigma_t = 4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda / (m_{ab}^2 v^4)$ и поток частиц $n_a v$ в формуле (1), получаем:

$$v_{ba}^{(\varepsilon)} = \frac{2m_a m_b}{(m_a + m_b)^2} \sigma_t n_a v.$$

Это выражение можно интерпретировать так, что $v_{ab} = \sigma_t n_a v$ суть частота актов рассеяния на угол порядка единицы (в системе центра масс), в каждом из которых передаётся доля энергии порядка $2m_a m_b / (m_a + m_b)^2$ (в лабораторной системе). Таким образом, при электрон-электронных или ион-ионных столкновениях передаётся в среднем половина энергии налетающей частицы, а при электрон-ионных столкновениях — лишь её малая доля порядка $2m_e/m_i$. Как и аналогичную формулу для частоты $v_{ba}^{(p)}$ торможения быстрых частиц (задача 6.10), полученную формулу для $v_{ba}^{(\varepsilon)}$ можно использовать для

оценок по порядку величины даже при $v \approx v_T$. В результате получаются следующие пропорции между частотами столкновений частиц разных сортов:

$$v_{ee}^{(\varepsilon)} : v_{ei}^{(\varepsilon)} : v_{ii}^{(\varepsilon)} : v_{ie}^{(\varepsilon)} = 1 : \frac{m_e}{m_i} Z : \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} Z^3 : \frac{m_e}{m_i} Z^2. \quad (2)$$

Принципиальное отличие электрон-электронных столкновений от упругого рассеяния электронов на ионах состоит в том, что электроны пучка теряют энергию, передавая её электронам плазмы так же быстро, как теряют импульс в направлении первоначального движения.

Задача 6.12. При указанном превышении энергии α -частиц W над температурой плазмы T тепловая скорость электронов плазмы превышает скорость α -частиц. Следовательно, частоту $v_{ie}^{(p)}$, соответствующую торможению α -частиц на электронах, нужно оценивать по тепловой скорости электронов, а частоту $v_{ii}^{(p)}$, соответствующую торможению на ионах плазмы, — по скорости α -частиц. Используя решение задачи 6.10, легко установить, что при указанных параметрах отношение $v_{ie}^{(p)}/v_{ii}^{(p)} \sim (W/T)^{3/2}(m_e/m_i)^{1/2}$ будет больше единицы. Таким образом, продукты термоядерных реакций замедляются преимущественно на электронах плазмы. Так как $v_{ie}^{(\varepsilon)} \sim v_{ie}^{(p)}$, а $v_{ii}^{(\varepsilon)} \sim v_{ii}^{(p)}$, электроны же получают большую часть энергии α -частиц.

Задача 6.14. Сила торможения пробного электрона F_{ei} , пропорциональная его скорости v при $v \ll v_T$, при $v \gg v_T$ убывает пропорционально v^{-2} , достигая максимума F_{\max} при $v \approx v_T$, как показано на рис. 6.7. Если электрическое поле, создающее электрический ток, превышает предельное значение $E_{Dr} = F_{\max}/e$, сила кулоновского торможения не может компенсировать ускорение электронов электрическим полем ни при какой скорости электронов. В результате электроны будут безостановочно ускоряться. Этот эффект называют «убеганием» электронов. Минимальное электрическое поле, которое приводит к «убеганию», называется *полем Драйсера*:

$$E_{Dr} \approx \frac{\Lambda n e^3}{T_e} \approx \Lambda \frac{e}{\lambda_D^2}.$$

Важно понимать, что поле Драйсера есть критическое поле для ухода в «просвист» основной группы электронов, имеющих скорость порядка тепловой. Однако даже при $E < E_{Dr}$ в плазме имеются надтепловые электроны, скорость которых значительно превышает тепловую скорость $v \gg v_e$. Сила торможения, действующая на эти электроны со стороны ионов, уменьшается при случайном возрастании скорости, поэтому, однажды ускорившись, эти электроны продолжают ускорение даже при $E < E_{Dr}$.

Задача 6.15. Ток является откликом плазмы на внешнее электрическое поле E . Под его действием прежде всего начинают ускоряться электроны, как самые лёгкие частицы. В результате возникнет сила трения F_{ei} со стороны ионов, которая в конечном итоге должна компенсировать электрическую силу,

$$e_e E + F_{ei} = 0. \quad (1)$$

Предположим, в соответствии с условием задачи, что функция распределения электронов изотропна и является максвелловской в системе отсчёта, где все ионы движутся с одинаковой скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{j}/(e_e n_e)$. При достаточно малой величине электрического поля \mathbf{E} токовая скорость значительно меньше тепловой скорости электронов, т. е. $u \ll v_e$. Тогда, согласно решению задачи 6.8 и с учётом того, что $m_{ei} = m_e m_i / (m_e + m_i) \approx m_e$ из-за большой разницы массы ионов m_i и электронов m_e , сила трения электронов об ионы равна

$$\mathbf{F}_{ei} = -m_e \mathbf{u} / \tau_e. \quad (2)$$

Здесь

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{16 \sqrt{\pi} e_e^2 e_i^2 \Lambda n_i}{3 m_e^2 v_{Te}^3}. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (1), выражая \mathbf{E} через \mathbf{u} и посредством равенств $\mathbf{j} = \Sigma \mathbf{E} = e_e n_e \mathbf{u}$, находим проводимость плазмы

$$\Sigma = \frac{\omega_p^2 \tau_e}{4\pi}. \quad (4)$$

В реальных условиях функция распределения заметно отличается от максвелловской, поэтому точный результат вычисления электрической проводимости водородной плазмы (п. 13.5) больше в два-три раза, чем (4).

Задача 6.16. Изменение среднего квадрата угла направления движения частиц пучка относительно оси пучка подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dt} \langle \theta^2 \rangle_b = \sum_a \left(2\nu_{ba}^{(p)} - \nu_{ba}^{(e)} \right).$$

Оно применимо, пока $\langle \theta^2 \rangle_b \ll 1$. Чтобы найти угловой разброс пучка после прохождения слоя плазмы толщиной ℓ , правую сторону уравнения нужно умножить на ℓ/v , где v — начальная скорость частиц пучка.

Задача 6.17. Будем считать, что угловым рассеянием образовавшегося иона можно пренебречь, так как ион быстрее тормозится на электронах плазмы, чем рассеивается на ионах плазмы. Это предположение верно, пока ион не затормозится до энергии порядка $(m_i/m_e)^{1/3} T_e$. Обозначая через ν_{ie} и Ω_i соответственно частоту столкновений иона с электронами и циклотронную частоту, запишем уравнения движения иона:

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_i] - \nu_{ie}(\mathbf{r}) \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}.$$

При условиях, типичных для замагниченной плазмы, $\nu_{ie} \ll \Omega_i$, поэтому движение иона можно рассматривать как дрейф в магнитном поле под действием малой внешней силы $\mathbf{F} = -m_i \nu_{ie} \mathbf{v}$. Тогда, в соответствии с общей формулой (4.24), заключаем, что скорость движения ведущего центра ларморовской орбиты есть

$$\dot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{\Omega_i} [\langle \nu_{ie} \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{h}],$$

где угловые скобки обозначают усреднение по периоду циклотронного движения. В однородной плазме усреднение $\langle \nu_{ie} \mathbf{v} \rangle$ дало бы ноль, однако

часть ларморовской орбиты находится за границей плазмы, где $v_{ie} = 0$. Обозначая через 2α угол, на который опирается сегмент ларморовской окружности, лежащий внутри плазмы, находим, что вектор $\langle v_{ie} v \rangle$ параллелен границе плазмы, а по величине равен $(v_0/\pi) v \sin \alpha$, где v_0 есть величина v_{ie} внутри плазмы. Следовательно, изменение координаты X ведущего центра, отсчитываемой по нормали к границе плазмы, подчиняется уравнению

$$\dot{X} = -\frac{v_0}{\pi} \rho \sin \alpha, \quad (1)$$

где $\rho = v/\Omega_i$ — текущее значение ларморовского радиуса. Так как, по условию задачи, нейтральный атом, влетевший в плазму по нормали к её границе, ионизовался непосредственно на границе, первоначально ведущий центр образовавшегося иона будет находиться на границе плазмы при $X = 0$, а внутри плазмы будет проходить ровно половина ларморовской окружности, так что $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. Далее как X , так и α будут увеличиваться до тех пор, пока ларморовская окружность полностью не погрузится в плазму. Этому моменту соответствует $\alpha = \pi$. Дальнейшее торможение иона уже не будет сопровождаться дрейфом его ведущего центра, поэтому, двигаясь по медленно скручивающейся спирали, ион в итоге попадёт в точку, где остановился ведущий центр.

Уменьшение ларморовского радиуса иона вследствие его торможения описывается уравнением

$$\dot{\rho} = -\langle v_{ei} \rangle \rho,$$

которое получается путём скалярного умножения на v уравнения для \dot{v} . Замечая, что $\langle v_{ei} \rangle = v_0 \alpha / \pi$, имеем

$$\dot{\rho} = -\frac{v_0}{\pi} \alpha \rho. \quad (2)$$

Постоянный множитель v_0/π не входит в ответ задачи; от него зависит время торможения иона, но не его конечная координата. Опуская далее этот множитель (можно считать, что он включён в безразмерное время $\tau = (v_0/\pi)t$), исключим из полученных уравнений ρ с помощью геометрического соотношения

$$X = -\rho \cos \alpha. \quad (3)$$

В результате получим пару уравнений

$$\dot{X}/X = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \dot{\alpha} = -(\alpha - \operatorname{tg} \alpha) / \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассматривая X как функцию α и замечая, что $\dot{X} = (dX/d\alpha) \dot{\alpha}$, в первом из этих уравнений исключим время τ с помощью второго уравнения. Полученное в результате уравнение

$$\frac{d}{d\alpha} \ln(X) = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

интегрируется в элементарных функциях:

$$X = \frac{\rho_0 \cos \alpha}{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}. \quad (4)$$

Сравнивая (4) и (3), находим, что

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha},$$

откуда следует, что константу интегрирования ρ_0 нужно отождествить с начальным значением ларморовского радиуса (при $\alpha = \frac{1}{2}\pi$). В конечном состоянии (которому соответствует $\alpha = \pi$) имеем $X = \rho_0/\pi$.

Задача 6.18. Когда ион или электрон приближается к нейтральному атому, он поляризует его своим полем, а сам испытывает действие наведённого в атоме дипольного момента. Сила поляризационного взаимодействия убывает с расстоянием гораздо медленнее, чем сила, действующая между нейтральными атомами.

О поляризации атома имеет смысл говорить, если скорость налетающей частицы значительно меньше, чем характерная скорость электронов в атоме, $v \ll v_{\text{ат}}$. В обратном предельном случае, $v \gg v_{\text{ат}}$, взаимодействие заряженной частицы с атомом можно рассматривать как кулоновское рассеяние на ядре и электронах атома по отдельности, как на свободных частицах.

Условие $v \ll v_{\text{ат}}$ легче выполнить для ионов, поэтому для определённости рассмотрим столкновение однозарядного иона с атомом. Находясь на расстоянии r от атома, ион своим электрическим полем e^2/r индуцирует в атоме дипольный момент $d = \alpha e/r^2$, где α — поляризуемость атома. По порядку величины поляризуемость равна кубу радиуса атома. Вектор d направлен вдоль линии, соединяющей центры иона и атома. Положительный ион подтягивает атомарные электроны ближе к себе, отрицательный — отодвигает от себя. Дальше от иона всегда оказывается заряд того же знака, поэтому $\alpha > 0$, а поляризационное взаимодействие притягивает ион к атому. Напряжённость электрического поля наведённого диполя в точке, где находится ион, равна $2d/r^3 = 2\alpha e/r^5$. На ион действует сила $F = 2\alpha e^2/r^5$. Энергия взаимодействия $U(r) = -\alpha e^2/(2r^4)$ отрицательна, независимо от знака заряда иона.

Задача 6.19. Существует два типа орбит в поле рассеивающего центра с поляризационным потенциалом $U(r) = -\alpha e^2/(2r^4)$. Если прицельный параметр b больше некоторого критического значения, $b > b_L$, орбита, начинающаяся на бесконечности, уходит на бесконечность. При $b \ll b_L$, налетающая частица «захватывается», а орбита спиралью сворачивается к центру.

Критический прицельный параметр b_L можно определить из законов сохранения энергии и углового момента. Для налетающей частицы с массой m и скоростью v в полярной системе координат (в плоскости движения частицы) с началом в точке расположения рассеивающего центра (который пока будем считать неподвижным) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r), \\ mrvb &= mr^2\dot{\phi}. \end{aligned}$$

В точке наибольшего сближения $r = r_{\min}$, где радиальная скорость обращается в нуль, $\dot{r} = 0$, комбинирование законов сохранения приводит к квадратному уравнению для r_{\min}^2 :

$$v^2 r_{\min}^2 - v^2 b^2 + \frac{\alpha e^2}{m r_{\min}^2} = 0.$$

Оно не имеет вещественного решения, если

$$b^2 \leq 2 \sqrt{\frac{\alpha e^2}{m v^2}}.$$

Максимально возможное b в этом неравенстве даёт искомое критическое значение b_L . Ему соответствует сечение захвата

$$\sigma_L = \pi b_L^2 = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha e^2}{m v^2}},$$

известное также как сечение Ланжевена (Paul Langevin).

Чтобы найти сечение захвата при столкновении реальных частиц, под массой налетающей частицы надо понимать массу приведённой частицы, $m = m_a m_b / (m_a + m_b)$, а скорость v заменить на относительную скорость движения частиц $u = |v_a - v_b|$ до столкновения.

Так как $\sigma_L \sim 1/u$, частота захвата $\nu_L = n_a \sigma_L u$ не зависит от u .

В реальных условиях «захваченная» частица не падает на центр, так как вид потенциала взаимодействия изменяется, как только частица приблизится к атому на расстояние порядка его размера. После рассеяния на ядре или электронах атома спираль орбиты разворачивается в обратную сторону, так что захват может закончиться рассеянием на угол порядка единицы. Рассеяние упругое, если начальная энергия налетающей частицы недостаточна для ионизации или возбуждения атома, что как раз имеет место при $v < v_{\text{ат}}$.

Задача 6.20. Сечение рассеяния с точностью до численного коэффициента равно сечению захвата.

Задача 6.21. В борновском приближении

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2,$$

где

$$f = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$$

называют амплитудой рассеяния на рассеивающем центре с потенциалом

$$U(\mathbf{r}) = \frac{e_a e_b}{r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Здесь m — приведённая масса, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ — разность волновых векторов частицы после и до рассеяния, причём $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = mu/\hbar$ и

$$|\mathbf{q}| = (m/\hbar)|\Delta\mathbf{u}| = (2mu/\hbar)\sin(\theta/2).$$

Амплитуда рассеяния пропорциональна фурье-компоненте потенциала

$$U_{\mathbf{q}} = \int U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \frac{4\pi e_a e_b}{q^2 + 1/\lambda_D^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{mU\mathbf{q}}{2\pi\hbar^2} \right|^2 = \frac{(b_*/2)^2}{(\sin^2(\theta/2) + (\lambda_B/(2\lambda_D))^2)^2},$$

где $b_* = e_a e_b / (mu^2)$, $\lambda_B = \hbar / (mu)$. Для транспортного сечения в этом случае получаем

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \int (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \\ &= 2\pi b_*^2 \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(1 - \cos \theta + \lambda_B^2 / (2\lambda_D^2))^2} = 2\pi b_*^2 \int_0^2 \frac{x dx}{(x + \lambda_B^2 / (2\lambda_D^2))^2} = 4\pi b_*^2 \Lambda', \end{aligned}$$

где

$$\Lambda' = \frac{1}{2} \ln(4\lambda_D^2 / \lambda_B^2 + 1) - \frac{2\lambda_D^2}{4\lambda_D^2 + \lambda_B^2}.$$

При $\lambda_D \gg \lambda_B$ приближённо $\Lambda' = \ln(\lambda_D / \lambda_B)$, т. е. в кулоновском логарифме вместо b_* фигурирует длина волны де Бройля $\lambda_B = \hbar / (mu)$. Условием применимости борновского приближения является неравенство $e_a e_b / (\hbar u) \ll 1$, которое эквивалентно $\lambda_B \gg b_*$.

Лекция 7

Задача 7.1. Дипольный момент двух частиц с зарядами e_a , e_b и массами m_a , m_b в системе их центра инерции равен $\mathbf{d} = (e_b/m_b - e_a/m_a)m_{ab}\mathbf{r}$, где $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$. При $e_b/m_b = e_a/m_a$ он обращается в нуль, а в месте с ним и мощность дипольного излучения.

Задача 7.2. Обозначим через r_* расстояние между электроном и ионом в момент наибольшего сближения, когда скорость электрона достигает максимума v_* (рис. 7.3). Полную излучённую энергию найдём, умножив мощность излучения в момент максимального сближения

$$I = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 r_*^4}$$

на его длительность $\tau \approx r_*/v_*$:

$$\mathcal{E} \approx \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v_* r_*^3}. \quad (1)$$

Параметры v_* и r_* выразим через скорость электрона «на бесконечности» v и прицельное расстояние b , воспользовавшись законами сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e v_*^2}{2} - \frac{Ze^2}{r_*}, \quad m_e v b = m_e v_* r_*.$$

При $v_* \gg v$ (иначе верно приближение далёких пролётов) из первого уравнения выразим $v_* \approx \sqrt{2Ze^2/(m_e r_*)}$ через r_* . Подставив v_* во второе уравнение, найдём расстояние максимального сближения,

$$r_* = \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right)^{-1} b,$$

а затем максимальную скорость

$$v_* = \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right) v.$$

Следовательно, характерная частота излучения $\omega \approx v_*/r_*$ будет равна

$$\omega \approx \frac{v}{b} \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right)^2.$$

Параметр $Ze^2/(m_e v^2 b)$ здесь следует считать большим:

$$Ze^2/(m_e v^2 b) \gg 1.$$

Выделив орбитальное квантовое число $l = m_e v b / \hbar$, последнее условие можно представить в виде

$$l \ll \frac{Ze^2}{\hbar v}.$$

Отсюда видно, что расчёт излучения в рамках квазиклассического приближения, характеризуемого условием $l \gg 1$, совместим с приближением близких пролётов, если интервал $1 \ll l \ll Ze^2/(\hbar v)$ существует, т. е.

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1.$$

Подставив r_* и v_* в (1), выразим \mathcal{E} через b и v :

$$\mathcal{E} \approx \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v b^3} \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 b} \right)^2.$$

Учитывая, что при очень больших значениях орбитального момента действует приближение далёких пролётов, при $l \gg Ze^2/(\hbar v)$ для оценки по порядку величины можно использовать формулы (7.10) и (7.11):

$$\hbar\omega \approx \frac{\mathcal{E}}{l}, \quad \mathcal{E} \approx \frac{\alpha^3 Z^2}{\beta^3} \mathcal{E}, \quad (2)$$

тогда как при $1 \ll l \ll Ze^2/(\hbar v)$ имеем

$$\hbar\omega \approx \frac{\mathcal{E}}{l} \left(\frac{Ze^2}{\hbar v l} \right)^2, \quad \mathcal{E} \approx \frac{\alpha^3 Z^2}{\beta^3} \left(\frac{Ze^2}{\hbar v l} \right)^2 \mathcal{E}. \quad (3)$$

По сравнению со случаем близких пролётов величина \mathcal{E} возрастает в $(Ze^2/(\hbar l))^2$ раз, но во столько же раз увеличивается частота излучения, поэтому вероятность излучения $w \approx \mathcal{E}/(\hbar\omega)$ по-прежнему определяется формулой (7.12), полученной в приближении близких пролётов:

$$w(l) \approx \frac{\alpha^3 Z^2}{\beta^2}. \quad (4)$$

При вычислении мощности излучения вкладом области далёких пролётов можно вообще пренебречь, так как интеграл

$$P = \int n_i n_e v \mathcal{E} 2\pi b db = \int n_i n_e v \mathcal{E} \lambda_e^2 2\pi l dl \quad (5)$$

«набирается» на нижнем пределе.

Чтобы оценить мощность тормозного излучения интегрирование нужно обрезать на значении $l \approx (Ze^2/(\hbar v))^{2/3}$, которое соответствует излучению фотона с энергией $\hbar\omega \approx \varepsilon$. В результате получается выражение,

$$P_{\text{т.и}} \approx \alpha^3 Z^2 n_e n_i v \varepsilon \lambda_e^2 \approx \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{m_e^2 c^3 \lambda_e},$$

которое приблизительно совпадает с оценкой (7.8), полученной в приближении далёких пролётов.

Если же обрезать интегрирование на значении $l = 1$, которое соответствует $\hbar\omega \sim I_Z$, получим

$$P_{\text{р.и}} \approx \alpha^3 Z^2 n_e n_i v \varepsilon \lambda_e^2 \left(\frac{Ze^2}{\hbar v} \right)^2 \approx \frac{Z^4 e^{10} n_e n_i \lambda_e}{\hbar^3 c^3 m_e v}.$$

При $v \approx v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ эта оценка совпадает с формулой для мощности рекомбинационного излучения (7.22).

Задача 7.3. Чтобы найти зависимость сечения тормозного излучения от частоты в формуле (7.14), достаточно выразить dl через $d\omega$. Поскольку $db/b \sim dl/l$, $db/b \approx d\omega/\omega$ как в приближении дальних пролётов, так и в приближении близких пролётов,

$$d\sigma = 2\pi\alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega}. \quad (1)$$

Хотя сечение излучения $d\sigma$ имеет особенность в пределе $\omega \rightarrow 0$, спектральная мощность излучения $dP = \hbar\omega d\sigma$ в том же пределе стремится к постоянной величине.

Интересно, что точный расчёт, сделанный Х. Крамерсом (Hendrik Kramers, 1923 [146]) в рамках классической физики при $\hbar\omega \gg \frac{1}{2}m_e v^2$ ($\hbar v/(Ze^2)$) даёт результат

$$d\sigma = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (2)$$

который отличается от простой оценки по порядку величины (1) лишь множителем $8/(3\sqrt{3}) \approx 1.5$. Вывод формулы Крамерса в рамках классической физики можно найти в «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [81, §70, формула (70.22)]. Замечательно, что квантовая теория подтверждает формулу Крамерса [51, §92, (92.23)]. В пределе низких частот, $\hbar\omega \ll \frac{1}{2}m_e v^2$ ($\hbar v/(Ze^2)$), точный расчёт даёт выражение

$$d\sigma = \frac{16}{3} \alpha^3 Z^2 \ln \left(\frac{m_e v^3}{0.89\omega Ze^2} \right) \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (3)$$

с большим логарифмическим множителем [81, (70.21)]. Его появление объясняется вкладом далёких пролётов с прицельным параметром $b > v/\omega$ и означает, что спектральная мощность излучения $\hbar\omega d\sigma$ логарифмически растёт при $\omega \rightarrow 0$. Эта расходимость устраняется при учёте дебаевской экранировки.

Задача 7.4. Мощность излучения из единицы объёма плазмы в интервале частот $d\omega$ выразим как произведение энергии кванта $\hbar\omega$ с заданной частотой ω на частоту соответствующего процесса и на плотность ионов n_i . Частота процесса равна произведению плотности потока электронов $n_e v$ на сечение процесса $d\sigma = (d\sigma/d\omega) d\omega$. Собирая все множители вместе, получаем

$$dP = \hbar\omega \cdot n_e v \cdot n_i \cdot d\sigma.$$

Для сечения тормозного излучения используем формулу Крамерса в пределе высоких частот (формула (2) из задачи 7.3):

$$d\sigma = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{d\omega}{\omega} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{m_e^2 v^2 c^3} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Разбросом скоростей ионов можно пренебречь, но нужно учесть, что электроны имеют разные скорости v и заменить n_e на

$$dn_e = \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right) 4\pi v^2 dv$$

с последующим интегрированием по v . При интегрировании нужно учесть, что энергия кванта $\hbar\omega$ в спектре тормозного излучения не может быть больше энергии электрона $\frac{1}{2}m_e v^2$, выбрав соответствующим образом пределы интегрирования получим:

$$\frac{dP}{d\omega} = \hbar\omega \frac{d\sigma}{d\omega} n_i \int_{\sqrt{2\hbar\omega/m_e}}^{\infty} \frac{dn_e}{dv} v dv = \frac{16\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2 n_e n_i}{m_e^{3/2} c^3 \sqrt{T_e}} e^{-\hbar\omega/T_e}.$$

В плазме без магнитного поля невозможно распространение электромагнитных волн с частотами ниже электронной плазменной, поэтому полученная формула неприменима в диапазоне $\omega < \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e}$, где $dP/d\omega = 0$. Если отвлечься от этого уточнения, то $dP/d\omega$ монотонно убывает с увеличением частоты.

В оптике спектр излучения чаще характеризуют относительно длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, а не круговой частоты ω . Пересчёт из шкалы частот в шкалу длин волн производится по формуле $dP/d\lambda = |d\omega/d\lambda| dP/d\omega$, где $|d\omega/d\lambda| = 2\pi c/\lambda^2$. Мощность излучения на единичный интервал длин волн $dP/d\lambda$ пропорциональна $\exp(-2\pi\hbar c/(\lambda T_e))/\lambda^2$, обращаясь в нуль как при $\lambda \rightarrow 0$, так и при $\lambda \rightarrow \infty$. Максимум в спектре приходится на длину волны $\lambda = \pi\hbar c/T_e$, что соответствует фотону с энергией $\hbar\omega = 2T_e$. Спектр тормозного излучения показан на рис. 7.4.

Задача 7.5. Используя результат предыдущей задачи и вычислив интеграл $\int_0^\infty (dP/d\omega) d\omega$, получим

$$P_{\text{т.и}} = \frac{16\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2 n_e n_i}{m_e^{3/2} c^3 \hbar} \sqrt{T_e}.$$

Числовой коэффициент в этой формуле равен 7,72. Отсюда можно записать практическую формулу

$$P_{\text{т.и}} = 1,54 \times 10^{-32} Z^2 n_e n_i \sqrt{T_e} \left[\text{Вт/см}^3 \right],$$

где n_e, n_i выражены в см^{-3} , а T_e — в эВ. Различные справочники воспроизводят эту формулу с коэффициентами от 1,5 до 1,69 вместо 1,54.

Задача 7.6. Чтобы вычислить мощность рекомбинационного излучения при $T_e \ll I_Z$, нужно подставить сечение фоторекомбинации (7.20), вычисленное для $\varepsilon \ll I_Z$, в формулу (7.21) и выполнить усреднение по функции распределения электронов f_m , которую будем считать максвелловской, сделав замену $n_e \rightarrow f_m d^3v$. Вычислив интеграл, получим

$$P_{\text{ф.р}} = \frac{2^{15/2} \pi^{3/2}}{3 e^4} \frac{e^{10} Z^4 n_e n_i}{m_e^{3/2} c^3 \hbar^3 \sqrt{T_e}}.$$

Для практических вычислений отсюда получаем формулу

$$P_{\text{ф.р}} = 3,3 \times 10^{-31} \frac{Z^4 n_e n_i}{\sqrt{T_e}} \left[\text{Вт/см}^3 \right],$$

где n_e, n_i выражены в см^{-3} , а T_e — в эВ.

Если $T_e \gg I_Z$, для сечения фоторекомбинации следует взять формулу (7.23). Повторив дальнейшие вычисления с учётом того, что $\hbar\omega = \frac{1}{2} m_e v^2 + I_Z$, получим

$$P_{\text{ф.р}} = \frac{64\pi}{3} \frac{e^{12} Z^5 n_e n_i}{c^3 \hbar^4 T_e} = 1,9 \times 10^{-29} \frac{Z^5 n_e n_i}{T_e} \left[\text{Вт/см}^3 \right].$$

Задача 7.7. Абсолютно чёрное тело — физическая идеализация, применяемая в термодинамике, — тело, поглощающее всё падающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах и ничего не отражающее. Несмотря на название, абсолютно чёрное тело само может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально иметь цвет. Спектр излучения абсолютно чёрного тела определяется только его температурой.

Найдём среднее число фотонов в одном квантовом состоянии. Пусть энергия одного фотона в этом состоянии равна $\hbar\omega$. Так как фотоны являются бозе-частицами (поскольку имеют целочисленный спин), в данном состоянии может находиться любое число фотонов (а не один, как в случае ферми-частиц с полуцелым спином). Вероятность наличия n фотонов в данном состоянии пропорциональна $\exp(-n\hbar\omega/T)$. Следовательно, среднее число фотонов в состоянии с заданной энергией $\hbar\omega$ равно

$$n_\omega = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-n\hbar\omega/T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\hbar\omega/T)} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1};$$

данная зависимость числа заполнения n_ω от энергии фотона называется распределением М. Планка.

Спектральная плотность излучения U_ω есть энергия электромагнитного поля излучения, отнесённая к единице объёма и единичному интервалу частот. Энергия электромагнитного поля излучения, сосредоточенная в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ в единице объёма, равна $U_\omega d\omega$. С другой стороны, та же величина равна $2\hbar\omega n_\omega d^3k/(2\pi)^3$, где множитель 2 есть число независимых поляризаций электромагнитной волны, $d^3k/(2\pi)^3$ суть число

состояний в рассматриваемом интервале фазового пространства. Приравняв указанные величины и пользуясь дисперсионным соотношением $\omega = kc$ (где c — скорость света) между частотой ω и волновым вектором k электромагнитной волны в вакууме, получим формулу М. Планка

$$U_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} n_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 [\exp(\hbar\omega/T) - 1]}.$$

Задача 7.8. Плотность потока излучения с поверхности абсолютно чёрного тела — это энергия излучения, выходящего за единицу времени с единицы поверхности через небольшое отверстие в сосуде с непрозрачными стенками, который заполнен равновесным излучением.

В соответствии с теорией М. Планка, плотность энергии такого излучения равна $U_\omega = \hbar\omega^3 / (\pi^2 c^3 [\exp(\hbar\omega/T) - 1])$ (задача 7.7). Так как оно изотропно, с поверхности абсолютно чёрного тела в единицу времени во все стороны в единицу телесного угла излучается энергия $c U_\omega / (4\pi)$. Если направление излучения составляет угол θ с нормалью к излучающей поверхности, то только часть потока, равная $\cos\theta$, уходит наружу за пределы излучающего тела. Соответственно, спектр излучения определяется величиной $dS/d\omega = c U_\omega \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos\theta \sin\theta d\theta / (4\pi) = c U_\omega / 4$. Вычисляя интеграл $S = \int_0^\infty (dS/d\omega) d\omega$, получим

$$S = \sigma T^4,$$

где коэффициент $\sigma = \pi^2 / (60c^2 \hbar^3)$ называют постоянной Стефана—Больцмана, а всё выражение в целом — законом Стефана—Больцмана.

Пересчёт к шкале длин волн производится по формуле $dS/d\lambda = (2\pi c/\lambda^2)(dS/d\omega)$. Максимум в спектре приходится на длину волны $\lambda = 0,40\pi\hbar c/T$. Спектр излучения в шкале длин волн показан на рис. 7.4.

Задача 7.10. В рамках классической физики гармоник $\omega = s\Omega_e$ с номером $s > 1$ появляются в следующих за дипольным порядках мультипольного разложения. Действительно, удерживая три первых не исчезающих члена в мультипольном разложении электромагнитного поля, создаваемого электроном на большом расстоянии r от его ларморовской орбиты, имеем следующее выражение для электрического поля в волновой зоне (см. [81, §71])

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 r} \left\{ \left[\left[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \right] + \frac{1}{6c} \left[\left[\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \right] + \left[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}} \right] \right\},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор в направлении излучения, $\mathbf{d} = \sum e \boldsymbol{\rho}$ — электрический дипольный момент системы зарядов, $\mathbf{m} = (1/2c) \sum e [\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}]$ — магнитный момент, $\mathbf{D} = \sum e \{ 3\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}) - \rho^2 \mathbf{n} \}$ — свёртка тензора квадрупольного момента с вектором \mathbf{n} . Ларморовскому вращению электрона в магнитном поле отвечает вращение вектора $\boldsymbol{\rho}$ и перпендикулярного ему вектора \mathbf{v} с циклотронной частотой. Учитывая это, нетрудно видеть, что дипольная составляющая поля излучения содержит первую гармонику циклотронной частоты, а квадрупольная и магнитодипольная — вторую.

Задача 7.11. Плотность потока энергии определяется вектором Пойнтинга $S = (c/4\pi)E^2 n$, где n — единичный вектор в направлении излучения. Энергия dI , излучаемая в элемент телесного угла do , вычисляется по формуле $dI = \langle S \rangle r^2 do$, где r — расстояние до излучателя, а угловые скобки означают усреднение по времени. Используя формулу для поля излучения из предыдущей задачи, находим поток энергии в элемент телесного угла do на первой и второй гармониках:

$$\begin{aligned} dI_1/do &= (e^4 B^2 / 8\pi m^2 c^3) \beta^2 (1 + \sin^2 \theta), \\ dI_2/do &= (e^4 B^2 / 2\pi m^2 c^3) \beta^4 (1 + \sin^2 \theta) \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Здесь θ — угол между направлением излучения и направлением внешнего магнитного поля, а $\beta = v/c$, причём предполагается, что $\beta \ll 1$. Вычисления для произвольных значений β и s проделаны в [81, §74]. При $\beta \ll 1$ угловое распределение излучения на s -й гармонике определяется формулой

$$dI_s/do = (s^{2s+2} / 2^{2s} (s!)^2) (e^4 B^2 / 2\pi m^2 c^3) \beta^{2s} (1 + \sin^2 \theta) \cos^{2s-2} \theta.$$

Задача 7.12. Предполагая, что в пределе $T_e \rightarrow 0$ длина пробега циклотронного излучения ℓ не зависит от температуры электронов T_e , величину ℓ можно оценить из соображений размерности.

Ясно, что длина пробега обратно пропорциональна плотности электронов n_e . Поскольку плотность электронов пропорциональна квадрату ленгмюровской частоты ω_p^2 , а единственная иная частота, которая имеется в задаче — это электронная циклотронная частота Ω_e , также ясно, что из перечисленных величин и скорости света c можно составить единственную комбинацию $c \Omega_e / \omega_p^2$, имеющую размерность длины и обратно пропорциональную плотности электронов. Следовательно, $\ell \approx c \Omega_e / \omega_p^2$.

В неоднородном магнитном поле полученная оценка может оказаться сильно заниженной. Она верна, если изменение циклотронной частоты $\Delta \Omega_e \approx |\nabla \Omega_e| \ell$ на длине ℓ меньше естественной ширины $1/\tau$ линии излучения, которая определяется временем высвечивания (7.30).

Задача 7.14. В той области частот, где плазма непрозрачна, циклотронное излучение является равновесным, поэтому его спектр приближается к спектру излучения абсолютно чёрного тела. В пределе низких частот он подчиняется закону Рэлея—Джинса, согласно которому $dP/d\omega \propto \omega^3$.

Лекция 8

Задача 8.1. Воспользуемся формулой Резерфорда (6.6) для рассеяния частицы массы m на неподвижном рассеивающем центре. После замены m на приведённую массу пары электронов $m_{ee} = m_e m_e / (m_e + m_e) = m_e/2$ она связывает угол рассеяния θ в системе отсчёта центра масс с прицельным расстоянием b :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2e^2}{m_e v^2 b}.$$

Абсолютная величина скорости каждой из сталкивающихся частиц в системе центра масс до и после столкновения равна $\frac{1}{2}v$. С такой же скоростью система центра масс движется относительно исходной системы отсчёта. Следовательно, в исходной системе отсчёта налетающий электрон после рассеяния приобретает скорость $v_{\perp} = \frac{1}{2}v \sin \theta$ в направлении, перпендикулярном начальному направлению движения, а вдоль этого направления его скорость уменьшается до $v_{\parallel} = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v \cos \theta$. Разность $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_e v^2 \sin^2(\theta/2)$ начальной энергии налетавшего электрона $\varepsilon = \frac{1}{2}m_e v^2$ и его конечной энергии $\frac{1}{2}m_e v_{\perp}^2 + \frac{1}{2}m_e v_{\parallel}^2$ будет передана второму электрону. Замечая, что $\operatorname{tg}^2(\theta/2) = \mathcal{E}/(\varepsilon - \mathcal{E})$, из формулы Резерфорда получаем

$$b^2 = \frac{e^4}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon - \mathcal{E}}{\mathcal{E}}.$$

Так как $d\sigma = |2\pi b db|$, искомый результат получается дифференцированием πb^2 по \mathcal{E} при фиксированной энергии ε :

$$\frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} = \frac{\pi e^4}{\varepsilon \mathcal{E}^2}.$$

Эта формула является точной во всём диапазоне $0 < \mathcal{E} < \varepsilon$ разрешённых значений переданной энергии.

Задача 8.2. $\langle \sigma_{y.i} v \rangle = 8 \sqrt{2\pi T_e / m_e} a_B^2 \exp(-I/T_e)$.

Задача 8.3. При столкновении с атомом ион может передать связанному электрону только малую долю (порядка $2m_e/m_i$) своей кинетической энергии ε . В связи с этим можно было бы ожидать, что заметная ионизация ионным ударом имеет место только при $\varepsilon \geq (m_i/2m_e)I \sim 10^4 \div 10^5$ эВ. К тому же при меньшей энергии воздействие иона на связанный электрон носит адиабатический характер, так как скорость движения иона меньше скорости электрона в атоме. При адиабатическом взаимодействии энергия, переданная электрону при подлёте иона, полностью возвращается иону по мере его удаления от атома. Однако в экспериментах ионизация ионами иногда наблюдается уже при $\varepsilon \gtrsim 100$ эВ. Например, для ионов аргона в газе аргона $\sigma \approx 10^{-16}$ см² при $\varepsilon \approx 200$ эВ. Этот эффект объясняется образованием неустойчивых молекулярных ионов Ar_2^+ .

Задача 8.4. В соответствии с принципом детального равновесия, скорость тройной рекомбинации в основное состояние

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y.p}^{\text{np}} = -k_{y.p}^{\text{np}} n_e^2 n_i$$

в состоянии локального термодинамического равновесия равна скорости ионизации электронным ударом из основного состояния

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{y.i}^{\text{np}} = k_{y.i}^{\text{np}} n_e n_a,$$

притом что плотности частиц связаны уравнением Саха (3.6). Отсюда следует, что $k_{y,p}^{\text{пр}} = k_{y,i}^{\text{пр}}/K(T_e)$. Используя формулы (8.6) и (3.7), находим

$$k_{y,p}^{\text{пр}} = 64\pi^2 \alpha c a_B^5 \frac{g_a}{g_e g_i} \frac{I}{T_e}.$$

Сравнение $k_{y,p}^{\text{пр}}$ с константой ступенчатой тройной рекомбинации $k_{y,p}^{\text{ст}}$, вычисленной по формуле с (10), приводит к ожидаемому выводу, что при низкой температуре, $T_e \ll I$, рекомбинация на основной уровень в $(I/T_e)^{7/2}$ раза менее вероятна, чем захват электрона на возбуждённые атомарные уровни с последующим излучением избыточной энергии при переходе атома в основное состояние.

Задача 8.5. Если известно сечение фотоионизации $\sigma_{\text{ф.и}}$, то сечение фоторекомбинации $\sigma_{\text{ф.р}}$ можно найти с помощью принципа детального равновесия, согласно которому

$$\sigma_{\text{ф.р}} = 2 \frac{(\hbar\omega/c)^2}{(m_e v)^2} \sigma_{\text{ф.и}}. \quad (1)$$

Квантовая теория фотоионизации разработана М. Штоббе (М. Stobbe, 1930). Её изложение выходит за рамки данного курса. Приведём для справки некоторые результаты этой теории [51, § 56, формулы (56.13) и (56.14)].

Сечение фотоионизации основного уровня водородоподобного иона на пороге ионизации при $\hbar\omega = I_Z$ равно

$$\sigma_{\text{ф.и}} = \frac{2^9 \pi^2}{3 e^4} \frac{\alpha a_B^2}{Z^2}, \quad (2)$$

где $e = 2,71 \dots$ (не путать с элементарным зарядом e). Оно конечно потому, что граница между фоторекомбинационным излучением (с захватом на возбуждённый уровень) и тормозным излучением в сплошной спектр условна.

Сечение фотоионизации с основного уровня при $\hbar\omega \gg I_Z$:

$$\sigma_{\text{ф.и}} = \frac{2^8 \pi}{3} \frac{\alpha a_B^2}{Z^2} \left(\frac{I_Z}{\hbar\omega} \right)^{7/2}, \quad (3)$$

причём $\hbar\omega = \varepsilon + I_Z$, $I_Z = Z^2 I$. Сечение фотоионизации с возбуждённого уровня с главным квантовым числом k меньше в k^3 раз.

Комбинируя формулы (2) и (3) с соотношением (1), находим сечение фоторекомбинации:

$$\sigma_{\text{ф.р}} = \frac{2^8 \pi^2}{3 e^4} \alpha^3 Z^2 \frac{I}{\varepsilon} a_B^2 = \frac{2^8 \pi^2}{3 e^4} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \quad (4)$$

при $\varepsilon \ll I_Z$ и

$$\sigma_{\text{ф.р}} = \frac{2^7 \pi}{3} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \left(\frac{I_Z}{\hbar\omega} \right)^{3/2} \quad (5)$$

при $\varepsilon \gg I_Z$.

Разница между оценкой (7.18) в лекции 7 (которая верна также для рекомбинационного излучения, как отмечено в п. 7.2) и формулой (4)

поразительно мала; отношение числовых коэффициентов, $\frac{2^8 \pi^2}{3 e^4} / \frac{4 \pi^2}{3} = 1,17$ почти равно единице.

Заметим, что использование классических формул Х. Крамерса для «эвристического» вывода сечения фоторекомбинации, как в книге Ю. П. Райзера [8, п. 8.3.1], приводит к неверным результатам, а именно для сечения фотозахвата на возбуждённые уровни с главным квантовым числом k получается следующая формула:

$$\sigma_{\text{ф.р}} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^3 Z^2 \lambda_e^2 \frac{I_Z}{\hbar\omega} \frac{1}{k^3}.$$

В пределе $\hbar\omega \rightarrow I_Z$ (т. е. $\varepsilon \ll I_Z$) она с точностью 20% совпадает с формулой (4). Однако при $\varepsilon \gg I_Z$ вместо зависимости $\sigma_{\text{ф.р}} \propto (I_Z/(\hbar\omega))^{3/2}$, как в формуле (5), получается $\sigma_{\text{ф.р}} \propto (I_Z/(\hbar\omega))$.

Лекция 9

Задача 9.2. Нейтроны, образовавшиеся в реакции, забирают одинаковую долю выделившейся энергии от $\frac{1}{3}$ (когда они отлетают в одном направлении) до $\frac{1}{2}$ (когда они разлетаются в противоположные стороны в системе центра масс). Ядро гелия соответственно уносит от $\frac{1}{3}$ до 0. Полная энергия продуктов реакции складывается из кинетической энергии сливающихся ядер трития $\varepsilon = \frac{1}{4} m_T v^2$ (где v — их относительная скорость) и энергии \mathcal{E}_{fus} , выделившейся в реакции. В условиях термоядерного реактора, где температура плазмы не превышает десятков кэВ, величина ε в сотни раз меньше, чем \mathcal{E}_{fus} , поэтому её обычно не учитывают при определении энергии продуктов реакции. Таким образом, указанные доли нужно умножить на $\mathcal{E}_{\text{fus}} = 11,33$ МэВ.

Задача 9.3. При анализе цепочки реакций синтеза в дейтериевой плазме нужно учесть оба равновероятных канала $D(d, p)T$ и $D(d, n)^3\text{He}$. Затем надо понять, что происходит с продуктами этих реакций.

В реакции $D(d, p)T$ образуются только заряженные частицы, поэтому $\mathcal{E}_{\text{ch}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} = 4,03$ МэВ. Тритий полностью выгорает в реакции $T(d, n)^4\text{He}$ с дейтерием. Из $\mathcal{E}_{\text{fus}} = 17,57$ МэВ он добавляет в энергетический баланс цепочки реакций $\mathcal{E}_{\text{ch}} = 3,52$ МэВ, остальную энергию уносит нейтрон.

В реакции $D(d, n)^3\text{He}$ гелий-3 из $\mathcal{E}_{\text{fus}} = 3,27$ МэВ забирает $\mathcal{E}_{\text{ch}} = 0,82$ МэВ. Гелий-3 мог бы выгорать в реакции $^3\text{He}(d, p)^4\text{He}$. При температуре ниже 10 кэВ её скорость заметно меньше, чем скорость наработки гелия (см. рис. 9.5), поэтому дейтерий выгорает, не успевая провзаимодействовать с гелием-3. Однако при $T \gtrsim 20$ кэВ гелий-3 полностью выгорает, добавляя в энергетический баланс $\mathcal{E}_{\text{ch}} = \mathcal{E}_{\text{fus}} = 18,35$ МэВ.

В случае низких температур, $T \lesssim 10$ кэВ, в рассмотренной цепочке реакций будет «израсходовано» 5 ядер дейтерия. В пересчёте на одну пару ядер дейтерия, они произведут энергию $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx \frac{2}{5} (4,03 + 17,59 + 3,27) \approx 9,96$ МэВ. При этом энергия заряженных

продуктов реакции составит $\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle \approx \frac{2}{5} (4,03 + 3,52 + 0,82) \approx 3,35$ МэВ. Соответственно, $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} - \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx 0,66$.

В случае высоких температур, $T \gtrsim 20$ кэВ, будет израсходовано 6 ядер дейтерия. Полная энергия, выделенная парой ядер равна $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx \frac{2}{6} (4,03 + 17,59 + 3,27 + 18,35) \approx 14,41$ МэВ, а энергия заряженных продуктов реакции составит $\langle \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle \approx \frac{2}{6} (4,03 + 3,52 + 0,82 + 18,35) \approx 8,91$ МэВ. Соответственно, $\langle \mathcal{E}_{\text{fus}} - \mathcal{E}_{\text{ch}} \rangle / \langle \mathcal{E}_{\text{fus}} \rangle \approx 0,38$, как указано в табл. 9.1.

Задача 9.5. Бензин состоит из смеси лёгких углеводородов с плотностью $0,75$ г/см³. Теплотворная способность бензина примерно равна $10\,500$ ккал/кг или 46 МДж/кг. В пересчёте на литр получаем 35 МДж/л.

Поделив 1 кг на массу одной молекулы воды (состоящей из 8 нейтронов и 10 протонов), нетрудно подсчитать, что в одном литре содержится примерно $3,3 \times 10^{25}$ молекул H_2O . Столько же в ней пар атомов водорода. Пар ядер дейтерия в $6\,400$ раз меньше. С учётом всех цепочек реакций синтеза, протекающих в дейтериевой плазме, каждая такая пара в конечном итоге производит $8,9$ МэВ в виде кинетической энергии заряженных продуктов реакции (энергию нейтронов не учитываем). Умножая $3,3 \times 10^{25} / 6\,400$ на $8,9$ МэВ, находим, что теплотворная способность воды равна $7\,400$ МДж/л, что в 200 раз больше, чем у бензина.

С учётом энергии, уносимой нейтронами, пара ядер дейтерия производит $14,4$ МэВ. При этом получается, что теплотворная способность воды больше, чем у бензина, в 350 раз.

Задача 9.6. Поделив 1 ГВт·год на $3,52$ МэВ, найдём число прореагировавших за год пар ядер дейтерия и трития. Умножив это число на массу одного ядра $m_D = m_p + m_n$, найдём массу дейтерия, выгорающего за год. Она приблизительно составляет 200 кг.

Аналогичным образом нетрудно подсчитать потребление лития. Так как в реакциях (9.6) одно ядро лития производит одно ядро трития, число использованных ядер лития уже фактически найдено — оно равно числу прореагировавших ядер трития. Среднюю массу ядра лития, строго говоря, следует подсчитывать с учётом природного содержания изотопов ${}^6\text{Li}$ ($7,52\%$) и ${}^7\text{Li}$ ($92,48\%$), но для оценки можно принять, что все ядра лития состоят из трёх протонов и четырёх нейтронов, т. е. $m_{\text{Li}} = 3m_p + 4m_n$. В итоге получается, что за год реактор потребляет около 650 кг лития.

Столько нужно реактору с тепловой мощностью 1 ГВт. Чтобы найти расход топлива реактором, который выдаёт 1 ГВт электрической мощности, нужно поделить найденные количества на КПД преобразования тепловой энергии в электрическую. При КПД 50% расход термоядерного топлива удваивается.

Задача 9.7. Для производства 10 трлн кВт·ч электроэнергии в год необходимо иметь примерно $10\,000$ реакторов мощностью 1 ГВт каждый. Ресурсная база реакторов, работающих на смеси дейтерия и трития, ограничена запасами лития, используемого для производства трития. Разведанные рудные запасы лития составляют 24 млн тонн. При расходе 650 кг лития

на реактор в год этих запасов хватит на 3 тысячи лет, если считать, что КПД преобразования тепловой энергии в электрическую равно 100 %.

Кроме того, литий содержится в морской воде в концентрации $1,5 \times 10^{-5} \%$ и количестве, превышающем в тысячи раз разведанные рудные запасы. Однако литий нужен и другим отраслям промышленности.

Реактор, работающий на чистом дейтерии, потребляет 150 кг дейтерия в год в оптимистическом сценарии, когда пара ядер дейтерия эффективно производит 8,9 МэВ (задача 9.3). Масса воды в мировом океане оценивается в размере $1,35 \times 10^{18}$ метрических тонн. Масса полутяжёлой воды НДО меньше в 3 200 раз. Масса дейтерия составляет 2/19 этой массы. Поделив $1,35 \times 10^{18} \times \frac{1}{3200} \times \frac{2}{19}$ тонн на 150 кг/год получим 30 млрд лет.

В пессимистическом сценарии, когда пара ядер дейтерия эффективно производит 3,35 МэВ, реактор потребляет около 400 кг в год. Тогда дейтерия в мировом океане хватит на 10 млрд лет.

Так как концентрация дейтерия в мировом океане будет уменьшаться по мере его извлечения, реально можно извлечь только некоторую долю дейтерия. Даже если кроме этого учесть конечный КПД термоядерного реактора, всё равно дейтерия хватит на миллиарды или хотя бы сотни миллионов лет.

Разумеется, извлечь весь дейтерий из мирового океана невозможно, но и с таким оговорками ясно, что запасы дейтерия на Земле практически неисчерпаемы.

Задача 9.8. В квазиклассическом приближении вероятность туннельного перехода под кулоновским барьером пропорциональна $\exp(-2|\int p \, dr|/\hbar)$, где $p = \sqrt{2m_{ab}(\varepsilon - e_a e_b/r)}$, а интегрирование производится между радиусом действия ядерных сил r_n и точкой отражения $r_t = e_a e_b/\varepsilon$. Вычислив интеграл в пределе $e_a e_b/r_n \gg \varepsilon$, находим $2|\int p \, dr|/\hbar \approx \sqrt{G/\varepsilon}$, где величина $G = 2\pi^2 m_{ab} e_a^2 e_b^2 / \hbar^2$ называется энергией Гамова.

Задача 9.9. $\sigma \approx \alpha^3 \lambda_{\text{DD}}^2 \exp(-\sqrt{G/\varepsilon})$.

Задача 9.10. Пусть распределение ядер сорта a описывается функцией

$$f_a(v_a) = \left(\frac{m_a}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_a v_a^2}{2T}\right),$$

и такая же функция $f_b(v_b)$ описывает распределение ядер сорта b . Константа реакции, усреднённая по скоростям обоих сортов, в общем случае равна

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \iint \sigma_{ab}(u) u f_a(v_a) f_b(v_b) \, d^3 v_a \, d^3 v_b,$$

где $u = v_a - v_b$. Скорости сталкивающихся ядер

$$v_a = V + (m_{ab}/m_a) u, \quad v_b = V - (m_{ab}/m_b) u$$

выразим через скорость относительного движения u , скорость центра масс $V = (m_a v_a + m_b v_b)/(m_a + m_b)$ и приведённую массу $m_{ab} = m_a m_b/(m_a + m_b)$, а также заметим, что

$$d^3 v_a \, d^3 v_b = d^3 V \, d^3 u.$$

Интегрирование по d^3V удаётся выполнить в общем виде, поскольку сечение реакции $\sigma_{ab}(u)$ зависит только от u . Подстановка $\varepsilon = \frac{1}{2}m_{ab}u^2$ приводит результат интегрирования к искомому виду:

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \frac{4}{(2\pi m_{ab} T^3)^{1/2}} \int_0^\infty \sigma(\varepsilon) \varepsilon \exp(-\varepsilon/T) d\varepsilon.$$

Задача 9.11. Запишем сечение реакции ядерного синтеза (9.7) в виде

$$\sigma(\varepsilon) = (A/\varepsilon) \exp(-\sqrt{G/\varepsilon}),$$

где A и G — два параметра, характеризующие конкретную реакцию. Используя результат предыдущей задачи, получим формулу

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \frac{4A}{(2\pi m_{ab} T^3)^{1/2}} \int_0^\infty \exp(-\sqrt{G/\varepsilon} - \varepsilon/T) d\varepsilon.$$

Её можно использовать при $T \ll G$, так формула (9.7) верна при $\varepsilon \ll G$. Условие $T \ll G$ позволяет вычислить интеграл методом перевала. Разложив показатель экспоненты $S = -\sqrt{G/\varepsilon} - \varepsilon/T$ вблизи $\varepsilon = G^{1/3} T^{2/3} / 2^{2/3}$ в ряд Тэйлора до квадратичных слагаемых включительно, получим

$$S = -\frac{3G^{1/3}}{2^{2/3} T^{1/3}} - \frac{3}{2^{4/3} G^{1/3} T^{5/3}} (\varepsilon - G^{1/3} T^{2/3} / 2^{2/3})^2.$$

Последующее интегрирование даёт

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle = \frac{2^{13/6} A G^{1/6}}{(3m_{ab})^{1/2} T^{2/3}} \exp\left(-\frac{3G^{1/3}}{2^{2/3} T^{1/3}}\right).$$

Константы A и G можно определить по результатам измерения сечения при низкой энергии $\varepsilon \ll G$. В частности, для реакции $p(p, e^+ \bar{\nu}_e)D$ с помощью данных из табл. 9.2 находим $G = 494$ кэВ, $A = 4,06 \times 10^{-22}$ см²/кэВ. Учитывая далее, что приведённая масса m_{pp} равна половине массы протона, получаем

$$\langle \sigma_{pp} v \rangle = (1,30 \times 10^{-37} / T^{2/3}) \exp(-14,9/T^{1/3}) [\text{см}^3/\text{с}],$$

где T выражена в единицах кэВ.

Задача 9.12. Записав формулу Гамова (9.7) в виде

$$\sigma = (A/\varepsilon) \exp(-\sqrt{G/\varepsilon}),$$

замечаем, что для определения двух входящих в неё констант A и G , нужно составить два уравнения. Для этого достаточно использовать величину сечения при двух значениях энергии из табл. 9.2. Решить полученные уравнения можно только численно. В результате получаем

$$\sigma_{pp} = (4,06 \times 10^{-22} / \varepsilon) \exp(-22,2258 / \sqrt{\varepsilon}) \quad [\text{бн}].$$

Задача 9.13. Используя решения задач 9.11 и 9.12, получаем практическую формулу

$$\langle \sigma_{pp} v \rangle = 1,30 \times 10^{-37} T^{-2/3} \exp(-14,9396/T^{1/3}) \quad [\text{см}^3/\text{с}],$$

для скорости реакции $p(p, e^+ \nu_e)D$, причём температура T здесь выражена в единицах кэВ. Отсюда при $T = 1,5$ кэВ в центре Солнца имеем $\langle \sigma_{pp} v \rangle = 2 \times 10^{-43} \text{ см}^3/\text{с}$.

Последующие реакции в pp -цикле протекают быстрее, поэтому именно реакция $p(p, e^+ \nu_e)D$ определяет темп выгорания протонов. Однако следующие в цепочке реакции необходимо принять во внимание при расчёте энерговыделения. В реакции $p(p, e^+ \nu_e)D$ при слиянии двух протонов выделяется 1,44 МэВ. Ещё 5,49 МэВ добавляет реакция $p(d, \gamma)^3\text{He}$. В ней расходуется ещё один протон и ядро дейтерия, образованное в первой реакции. Два ядра ^3He в реакции $^3\text{He}(^3\text{He}, 2p)^4\text{He}$ производят 12,86 МэВ. Таким образом, 6 протонов в итоге дают одно ядро ^4He и два протона. Эти 6 протонов выделяют энергию $2(1,44 + 5,49) + 12,86 = 26,72$ МэВ, но в итоге будут израсходованы только 4 протона, т. е. пара протонов в среднем производит $(2/4) \times 26,72 = 13,36$ МэВ. Эту энергию нужно умножить на константу реакции и $\frac{1}{2} n_p^2$, где $n_p = 6,6 \times 10^{25} \text{ см}^{-3}$ — плотность водорода в центре Солнца, рассчитанная в предположении, что 90 % вещества составляет водород, а 10 % — гелий, притом что массовая плотность равна 160 г/см^3 . В итоге находим удельную мощность энерговыделения в центре Солнца на уровне 10^{-3} Вт/см^3 .

Интересно, что удельная мощность энерговыделения в теле человека немногим меньше этой величины. С другой стороны, плотность энерговыделения, усреднённая по всему объёму Солнца, во много раз меньше, составляет всего $2,7 \times 10^{-7} \text{ Вт/см}^3$. Её можно оценить, зная полную мощность излучения Солнца ($3,84 \times 10^{26} \text{ Вт}$) и его радиус ($6,96 \times 10^5 \text{ км}$).

Задача 9.16. Если температура всех сортов частиц в плазме, включая электроны, одинакова и равна T , то давление плазмы равно $p = (1 + Z_a) n_a T + (1 + Z_b) n_b T$. Минимизируя произведение $n_a n_b$ при заданном p , находим

$$n_a = \frac{p/2T}{1 + Z_a}, \quad n_b = \frac{p/2T}{1 + Z_b}.$$

Выразив давление через плотность ядер $n = n_a + n_b$, получим

$$n_a = \frac{1 + Z_b}{2 + Z_a + Z_b} n, \quad n_b = \frac{1 + Z_a}{2 + Z_a + Z_b} n.$$

Гипотетически плотность реагирующих ядер можно увеличить, если охладить электроны. Однако заряженные продукты термоядерной реакции передают свою энергию преимущественно электронам плазмы, поэтому в реакторе температура электронов может быть даже больше, чем температура ионов.

Задача 9.17. В плазме с ионами одного сорта мощность тормозного излучения из единицы объёма пропорциональна $Z^2 n_e n_i$. При наличии ионов двух сортов с плотностями n_a и n_b плотность электронов равна $n_e = Z_a n_a + Z_b n_b$, а множитель $Z^2 n_i$ превращается в $Z_a^2 n_a + Z_b^2 n_b$. Так как удельная мощность термоядерной реакции пропорциональна $n_a n_b$, отношение $P_{\text{т.и}}/P_{\text{fus}}$ пропорционально произведению параметра

$$\eta = (Z_a n_a + Z_b n_b) (Z_a^2 n_a + Z_b^2 n_b) / n_a n_b$$

на не существенную здесь функцию температуры. Параметр η принимает минимальное значение

$$\eta_{т.и} = \left(\sqrt{Z_a} + \sqrt{Z_b} \right)^2 Z_a Z_b$$

при $n_a/n_b = (Z_b/Z_a)^{3/2}$, тогда как в равнокомпонентной смеси, где $n_a/n_b = 1$, он равен

$$\eta_n = (Z_a + Z_b)(Z_a^2 + Z_b^2).$$

Если же соотношение плотностей ионов $n_a/n_b = (1 + Z_b)/(1 + Z_a)$ выбрано с целью максимизации мощности термоядерной реакции при заданном давлении плазмы (задача 9.16), то

$$\eta_p = \frac{(Z_a^2 + Z_b^2 + Z_a Z_b^2 + Z_b^2)(Z_a + 2Z_a Z_b + Z_b)}{(1 + Z_a)(1 + Z_b)}.$$

Для реакции $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha\alpha)^4\text{He}$ нужно взять $Z_H = 1$, $Z_B = 5$. При оптимальном отношении $n_B/n_H = 5^{-3/2} \approx 0,09$ плотности бора n_B к плотности водорода n_H величина $\eta_{т.и} = 5(1 + \sqrt{5})^2$ в 2,97 раза меньше, чем η_n при $n_B/n_H = 1$, и в 1,43 раза, чем η_p при $n_B/n_H = \frac{1}{5}$.

Для реакции $^3\text{He}(\text{d}, \text{p})^4\text{He}$ нужно взять $Z_D = 1$, $Z_{He} = 2$. При оптимальном отношении $n_{He}/n_D = 2^{-3/2} \approx 0,35$ плотности гелия-3 к плотности дейтерия величина $\eta_{т.и} = 2(1 + \sqrt{2})^2$ в 1,29 раза меньше, чем η_n при $n_{He}/n_D = 1$, и в 1,10 раза, чем η_p при $n_{He}/n_D = \frac{2}{3}$.

Задача 9.18. Поскольку приведённые параметры соответствуют критерию Лоусона, время удержания плазмы равно $\tau = 1$ с. Поток S на единицу поверхности находим из уравнения $2\pi RS = \pi R^2 3nT/\tau$. Отсюда

$$S = \frac{3}{2} nTR/\tau \approx 240 [\text{кВт/м}^3] \times R,$$

то есть $S = 240 \text{ кВт/м}^2$ при $R = 1$ м. Это число получено в предположении, что α -частицы достигают стенки. Если они тормозятся в плазме, то тепловой поток нужно умножить на $\frac{4}{5}$.

Задача 9.19. Нет. Сечение ионизации ионами с энергией порядка 100 кэВ больше сечения реакции синтеза в миллионы раз. Вся энергия ионов будет растрата на ионизацию мишени.

Лекция 10

Задача 10.1. Возьмём какой-нибудь набор координат X и канонически сопряжённых им импульсов P , таких что дифференциал d^3X составляет объём dV в пространстве координат. Тогда

$$n = \int f d^3P.$$

Выберем теперь какой-нибудь другой набор канонически сопряжённых переменных x и p . Преобразуя интеграл к новым импульсам, получаем

$$n = \int f \frac{\partial(P)}{\partial(p)} d^3p.$$

Так как

$$\frac{\partial(P, X)}{\partial(p, x)} = 1,$$

с одной стороны, и

$$\frac{\partial(P, X)}{\partial(p, x)} = \frac{\partial(P, X)}{\partial(p, X)} \bigg/ \frac{\partial(p, x)}{\partial(p, X)} = \frac{\partial(P)}{\partial(p)} \bigg/ \frac{\partial(x)}{\partial(X)},$$

с другой — заключаем, что

$$\frac{\partial(P)}{\partial(p)} = \frac{\partial(x)}{\partial(X)}.$$

Поэтому плотность частиц равна

$$n = \int f \frac{\partial(x)}{\partial(X)} d^3p, \quad (1)$$

где $\partial(x)/\partial(X)$ — якобиан преобразования от координат x к координатам X при постоянном импульсе p .

В качестве примера рассмотрим переход от декартовых координат $X = (x, y, z)$ к цилиндрическим координатам $x = (r, \phi, z)$. В этом случае $P = (p_x, p_y, p_z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z})$, $p = (p_r, p_\phi, p_z) = (m\dot{r}, mr^2\dot{\phi}, m\dot{z})$. Используя формулы преобразования координат $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, нетрудно вычислить якобиан

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial y / \partial r \\ \partial x / \partial \phi & \partial y / \partial \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r.$$

Так как $\partial x / \partial X = 1 / (\partial X / \partial x)$, из формулы (1) получаем:

$$n = \int f r^{-1} dp_r dp_\phi dp_z.$$

Задача 10.2. Равенство $\frac{\partial}{\partial p} \cdot [v \times B] = 0$ очевидно в нерелятивистском пределе, когда $p = mv$. Расписывая левую часть равенства (умноженную на m) в декартовой системе координат, имеем

$$\frac{\partial}{\partial v} \cdot [v \times B] = \frac{\partial}{\partial v_x} [v \times B]_x + \frac{\partial}{\partial v_y} [v \times B]_y + \frac{\partial}{\partial v_z} [v \times B]_z.$$

Поскольку $[v \times B]_x = v_y B_z - v_z B_y$ не зависит от v_x , первое слагаемое равно нулю. Аналогичным образом равны нулю и другие слагаемые, а с ними и вся сумма. Для проверки равенства в общем случае его правую часть удобно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\beta B_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma \frac{\partial v_\gamma}{\partial p_\alpha},$$

где $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — абсолютно антисимметричный тензор 3-го ранга, а по повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование от 1 до 3. Далее учтём, что $v_\beta = p_\beta / \sqrt{m^2 + p^2/c^2}$. Вычислив производную

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial p_\alpha} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(m^2 + p^2/c^2)^{1/2}} - \frac{p_\alpha p_\beta / c^2}{(m^2 + p^2/c^2)^{3/2}},$$

закключаем, что равенство верно, так как $\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$ и $p_\alpha p_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Задача 10.3. Для простоты будем считать, что ионы неподвижны, так что экранирование стороннего заряда обеспечивается исключительно электронами. Найдём функцию распределения электронов, решая стационарное уравнение Власова. Приравнявая нулю частную производную по времени $\partial f_e / \partial t$ в (10.11), имеем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_e - e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Установившееся после внесения заряда электрическое поле потенциально, т. е. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, причём электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -4\pi e \left(n_i - \int f_e d^3p \right) - 4\pi q \delta(\mathbf{r}).$$

Плотность холодных ионов в согласии со сделанным выше допущением считаем константой; от этого допущения легко отказаться, записав для функции распределения ионов такое же уравнение, как и для электронов. Полагая, что сторонний заряд слабо возмущает функцию распределения электронов плазмы, запишем её в виде суммы

$$f_e(\mathbf{p}) = f_0(p) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

изотропной функции $f_0(p)$, не зависящей от вектора координат \mathbf{r} и малой добавки $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, пропорциональной потенциалу φ , который также считаем малым возмущением. Функция $f_0(p)$ при этом описывает невозмущённое распределение электронов до внесения заряда, поэтому $\int f_0(p) d^3p = n_i$. Подставляя выбранное представление $f_e(\mathbf{p})$ в уравнение Власова, пренебрегая слагаемым $e\nabla\varphi \cdot \partial \delta f / \partial \mathbf{p}$, квадратичным по φ и тем самым линеаризуя это уравнение, получаем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \delta f + e\nabla\varphi \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Учитывая сферическую симметрию задачи, отсюда находим возмущение функции распределения

$$\delta f = -e\varphi \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial p}.$$

Подставляя δf в уравнение Пуассона

$$\nabla^2\varphi = 4\pi e \int \delta f d^3p - 4\pi q \delta(\mathbf{r}),$$

приводим его к виду

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varphi}{a^2} - 4\pi \delta(r),$$

где

$$\frac{1}{a^2} = -4\pi e^2 \int \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial p} d^3 p = \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{f_0}{v^2} d^3 p.$$

Его решением является экранированный потенциал

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/a}.$$

Длина экранирования может быть записана в виде

$$a = \left\langle \frac{\omega_p^2}{v^2} \right\rangle^{1/2},$$

где $\langle \dots \rangle = \int (\dots) f_0 d^3 p / n_e$ обозначает усреднение по функции распределения. Отсюда видно, что основной вклад в экранирование дают частицы с малой скоростью. Для максвелловской функции распределения вычисленная длина экранирования совпадает с длиной Дебая $\lambda_{De} = \sqrt{T/(4\pi e^2 n_e)}$.

Задача 10.4. Пусть координаты α и β постоянны на силовой линии магнитного поля, маркируя её, а третья координата s отмеряет длину силовой линии. Выбирая взамен импульсов кинетическую энергию $\varepsilon = mv^2/2$, магнитный момент $\mu = mv_\perp^2/(2B)$ и фазу ларморовского вращения частицы ϕ , запишем бесстолкновительное кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \dot{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \dot{\beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0.$$

В дрейфовом приближении производные $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ выражаются через скорость дрейфа \dot{R} , $\dot{s} = v_\parallel$, $\dot{\phi} = -eB/(mc)$, $\dot{\mu} = 0$, а $\dot{\varepsilon} = \mu \partial B / \partial t$.

В стационарном случае интегралами движения, не зависящими явно от времени, являются величины ε , μ , а также α , β , если пренебречь дрейфованием частиц с одной силовой линии на другую. Поэтому стационарная функция распределения в этом приближении есть

$$f = F(\varepsilon, \mu, \alpha, \beta),$$

где F — функция, вообще говоря, произвольного вида. Она не зависит от s и от азимутального угла ϕ в пространстве скоростей.

Если частицы совершают осциллирующее движение между пробками, то, как показано в п. 5.5, имеется ещё один интеграл усреднённого движения J_\parallel , зависящий от ε , μ , α , β . При этом

$$f = F(\varepsilon, \mu, J_\parallel(\varepsilon, \mu, \alpha, \beta)).$$

Если в плазме имеется электрическое поле, в этих формулах под ε нужно понимать полную энергией частицы (5.12).

Задача 10.5. Учитывая, что $d^3p = 2\pi p_\perp dp_\perp dp_\parallel = 2\pi(mB d\mu)(d\varepsilon/v_\parallel)$, получаем следующее выражение для плотности электронов и ионов:

$$n_{e,i} = 2\sqrt{2}\pi B m_{e,i}^{3/2} \int \frac{f_{e,i} d\varepsilon d\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}}.$$

Отсюда видно, что $n_{e,i} = n_{e,i}(B, \varphi)$. Из уравнения квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i = 0$ заключаем, что $\varphi = \varphi(B)$, а следовательно, $n_{e,i} = n_{e,i}(B)$. Очевидно, и продольное, и поперечное давление в плазме также зависят только от B :

$$p_\parallel = \sum_{e,i} \int d^3p m_{e,i} v_\parallel^2 f_{e,i} = \sum_{e,i} 4\sqrt{2}\pi B m_{e,i}^{3/2} \int \sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi} f_{e,i} d\varepsilon d\mu,$$

$$p_\perp = \sum_{e,i} \int d^3p \frac{m_{e,i} v_\perp^2}{2} f_{e,i} = \sum_{e,i} 2\sqrt{2}\pi B^2 m_{e,i}^{3/2} \int \frac{\mu f_{e,i} d\varepsilon d\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}}.$$

Задача 10.7. Запишем уравнение Фоккера—Планка в дивергентном виде,

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{x} f_b + \frac{\partial}{\partial p} \cdot \dot{p} f_b = - \frac{\partial}{\partial p} \cdot s_b,$$

умножим на $d^3x d^3p$ и проинтегрируем по шестимерному фазовому пространству. Дивергентные члены при интегрировании выпадают. Оставшееся слагаемое $\int d^3x d^3p \partial f_b / \partial t$ равно dN_b / dt . Таким образом, $dN_b / dt = 0$.

Задача 10.8. Подставляя $f_b = n_b / (2\pi m_b T)^{3/2} \exp(-p^2 / 2m_b T)$ в уравнение (10.23) и требуя, чтобы его правая часть обращалась в нуль, т. е.

$$A_\mu f_b - \frac{1}{2} D_{\mu\nu} \frac{\partial f_b}{\partial p_\nu} = 0,$$

находим, что $A_\mu = D_{\mu\nu} p_\nu / (2m_a T)$.

Задача 10.10. Рассмотрим плоский поток пробных частиц сорта b , первоначально имевших одинаковый импульс p_b . Иными словами, в начальный момент времени $t = 0$ их распределение

$$f_b = n_b \delta(p - p_b) \quad (1)$$

выражается через δ -функцию с коэффициентом, равным их плотности n_b . Функция f_b будет далее эволюционировать в соответствии с уравнением Фоккера—Планка, которое удобно записать в форме (10.22), детализировав полную производную в левой стороне:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} v_\mu f_b + \frac{\partial}{\partial p_\mu} e_b \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right)_\mu f_b = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left(F_\mu f_b - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\nu} D_{\mu\nu} f_b \right). \quad (2)$$

Применим это уравнение для определения производных

$$\frac{d}{dt} \overline{p_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \overline{p_\alpha p_\beta}$$

в момент времени, близкий к $t = 0$; черта сверху обозначает усреднение по функции распределения:

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{n_b} \int d^3p (\dots) f_b. \quad (3)$$

Для этого проинтегрируем кинетическое уравнение по всему пространству импульсов, один раз с весом 1, затем с весом p_α и $p_\alpha p_\beta$.

При первом интегрировании последнее слагаемое в левой стороне уравнения и вся правая сторона уравнения обратятся в нуль. Они имеют вид дивергенции в пространстве импульсов и с помощью теоремы Остроградского—Гаусса преобразуются к интегралу по бесконечно удалённой поверхности в этом пространстве, где функция распределения обращается в нуль, а вместе с ней и соответствующие интегралы. В оставшихся слагаемых производные по времени и координатам выносятся за знак интегрирования, после чего в соответствии с определением (3) $\int d^3p f_b$ заменяется на n_b , а $\int d^3p v_{b,\mu} f_b$ на $v_{b,\mu} n_b$, где $v_b = p_b/m_b$ обозначает скорость пробных частиц. В результате получится уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} n_b v_{b,\mu} = 0,$$

которое в векторных обозначениях записывается в виде

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \operatorname{div}(n_b v_b) = 0. \quad (4)$$

Повторяя интегрирование с весом p_α , преобразуем слагаемые, включающие производные по p_μ , с помощью цепочки тождеств:

$$p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\mu} Q_\mu = \frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\alpha Q_\mu - Q_\mu \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\mu} = \frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\alpha Q_\mu - Q_\alpha.$$

Интегрирование слагаемых вида $\partial(p_\alpha Q_\mu)/\partial p_\mu$ даст нуль после применения теоремы Остроградского—Гаусса, а интегрирование оставшихся слагаемых тривиально, так как f_b содержит δ -функцию. В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} n_b p_{b,\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} n_b p_{b,\alpha} v_{b,\mu} - e_b \left(E + \frac{1}{c} [v \times B] \right)_\alpha n_b = F_\alpha n_b.$$

Исключая из него производные от плотности при помощи уравнения (4), получаем

$$\frac{\partial p_b}{\partial t} + v_{b,\mu} \frac{\partial p_{b,\alpha}}{\partial x_\mu} = e_b \left(E + \frac{1}{c} [v \times B] \right)_\alpha + F_\alpha.$$

В векторных обозначениях то же уравнение имеет вид

$$\frac{dp_b}{dt} = e_b \left(E + \frac{1}{c} [v \times B] \right) + F_b, \quad (5)$$

где $dp_b/dt = \partial p_b/\partial t + (v_b \cdot \nabla) p_b$. Этот результат отличается от (10.28) добавлением силы Лоренца к силе торможения.

В результате интегрирования кинетического уравнения с весом $p_\alpha p_\beta$ аналогичным образом доказывается, что в уравнении (10.29) к силе торможения также нужно добавить силу Лоренца. В частности, для скорости потерь энергии получается вполне очевидный результат:

$$\frac{d\varepsilon_b}{dt} = v_b \cdot (e_b E + F_b) + \frac{D_{\alpha\alpha}}{2m_b}. \quad (6)$$

Магнитная часть силы Лоренца выпадала из этого уравнения, так как она перпендикулярна направлению скорости.

Лекция 11

Задача 11.2. Преобразуем интеграл

$$\int \left(\frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f'_a}{\partial v'_\nu} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} d^3 v',$$

который получается из (11.14), если функции распределения по импульсам заменить на функции распределения по скоростям $f_b = f_b(v)$ и $f'_a = f'_a(v')$. В первом слагаемом выполним интегрирование по частям и учтём, что

$$-\frac{\partial}{\partial v'_\nu} \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = \frac{\partial}{\partial u_\nu} \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = -\frac{2u_\mu}{u^2} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{2}{u}.$$

Ко второму слагаемому применим легко проверяемое равенство

$$\frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu}.$$

В результате получим выражение

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{f_b}{m_a} f'_a \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{2}{u} - \frac{f'_a}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial v_\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \right) d^3 v' = \\ = \frac{2}{m_b} \left[\frac{m_b}{m_a} \left(\frac{\partial}{\partial v_\nu} \int \frac{f'_a}{u} d^3 v' \right) f_b - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \int f'_a u d^3 v' \right) \frac{\partial f_b}{\partial v_\nu} \right], \end{aligned}$$

в котором уже нетрудно распознать потенциалы Розенблюта (11.11).

Задача 11.3. Как показано в п. 10.5, сила торможения F_{ba} пробной частицы равна среднему изменению импульса $\langle q \rangle$, которое вычислено в п. 11.1. Записывая (11.10) в векторном виде, получаем формулу

$$F_{ba} = \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab}}{m_{ab}} \frac{\partial h_a}{\partial v}.$$

Её нетрудно получить непосредственно из (6.26), переобозначив v_b на v и v_a на v' с последующим интегрированием по $d^3 v'$. Затем нужно применить тождество (11.8) и определение (11.11) потенциала h_a .

Задача 11.4. Используем интеграл столкновений в форме Ландау (11.14) и запишем отдельное слагаемое C_{ba} в виде

$$C_{ba} = -2\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int d^3 p' f_b f'_a \left(\frac{\partial}{\partial p'_\nu} \ln f'_a - \frac{\partial}{\partial p_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3},$$

где $f_b = f_b(p)$, $f'_a = f_a(p')$. Умножив обе стороны на $p_\alpha = m_b v_\alpha$ и выполнив интегрирование по частям по $d^3 p$, получим

$$\int m_b v_\alpha C_{ba} d^3 p = 2\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \int d^3 p d^3 p' f_b f'_a \left(\frac{\partial}{\partial p'_\nu} \ln f'_a - \frac{\partial}{\partial p_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\alpha\nu} - u_\alpha u_\nu}{u^3}.$$

При перестановке $a \leftrightarrow b$ и $p \leftrightarrow p'$ подынтегральное выражение в правой части просто меняет знак, поэтому сумма $\int m_a v C_{ab} d^3 p + \int m_b v C_{ba} d^3 p$ равна нулю, что и требовалось доказать.

Задача 11.5. Воспользуемся методом предыдущей задачи. Умножая C_{ba} на $\frac{1}{2}m_b v^2$ и интегрируя по d^3p по частям, получаем

$$\int \frac{1}{2}m_b v^2 C_{ba} d^3p = 2\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \int d^3p d^3p' v_\mu f_b f'_a \left(\frac{\partial}{\partial p'_\nu} \ln f'_a - \frac{\partial}{\partial p_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3}.$$

Заменяя $a \leftrightarrow b$, а справа также $p \leftrightarrow p'$, получаем

$$\int \frac{1}{2}m_a v^2 C_{ab} d^3p = -2\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda_{ab} \int d^3p d^3p' v'_\mu f_b f'_a \left(\frac{\partial}{\partial p'_\nu} \ln f'_a - \frac{\partial}{\partial p_\nu} \ln f_b \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3}.$$

Складывая два интеграла, заключаем, что ввиду тождества

$$(v_\mu - v'_\mu) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = u_\mu \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = 0$$

их сумма равна нулю.

Задача 11.6. При равенстве направленной средней скорости частиц всех сортов существует система отсчёта, где эта скорость равна нулю. В такой системе отсчёта

$$f_b = n_b \exp(-p^2/2m_b T) / (2\pi m_b T)^{3/2}, \\ f'_a = n_a \exp(-p'^2/2m_a T) / (2\pi m_a T)^{3/2}.$$

Подставляя f_b, f'_a в интеграл столкновений в форме Ландау (11.14), замечаем, что подынтегральное выражение обращается в нуль, так как

$$\left(f_b \frac{\partial f'_a}{\partial p'_\nu} - f'_a \frac{\partial f_b}{\partial p_\nu} \right) \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = f_b f'_a \frac{u_\nu}{T} \frac{u^2 \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu}{u^3} = 0.$$

Задача 11.9. С учётом малости угла рассеяния кинетическое уравнение (11.20) приводится к виду

$$\frac{\partial f_e}{\partial x} = \frac{v_{ei}^{(p)}}{2v} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial f_e}{\partial \theta},$$

где x — координата, отсчитываемая от границы плазмы в направлении движения пучка, θ — угол в пространстве скоростей, отсчитываемый от направления пучка, v — скорость, $v_{ei}^{(p)} = 4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / (m_e^2 v^3)$ — частота рассеяния электронов на ионах. Это стандартное уравнение диффузии. Его решение, удовлетворяющее граничному условию

$$f_e(0, v, \theta) = n_e \delta(v - v_0) \delta(\theta) / v^2 \sin \theta$$

при $x = 0$ имеет вид

$$f_e(x, v, \theta) = n_e \frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v^2} \frac{\exp(-\theta^2/4Dx)}{Dx},$$

где $D = v_{ei}^{(p)} / (2v)$. С учётом малости угла рассеяния плотность пучка вычисляется по формуле

$$n_e = 2\pi \int_0^\infty dv v^2 \int_0^\infty d\theta \theta f_e$$

и не зависит от x . Полезно сравнить предъявленное решение с вычислением среднего квадрата угла рассеяния в п. 6.9.

Задача 11.10. Заменяем $f_a(\mathbf{p}') d^3p'$ в определении (11.11) потенциалов Розенблюта на $f_a(v') d^3v'$. Выполним затем дифференцирование под знаком интеграла в формуле для h_a , получим выражение

$$-\frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = \int \frac{u_\mu}{u^3} f_a(v') d^3v' = \int \frac{v_\mu - v'_\mu}{|v - v'|^3} f_a(v') d^3v',$$

с точностью до обозначений совпадающее с полем сферически симметричного распределения электрических зарядов

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_\varepsilon(r') d^3r',$$

причём \mathbf{r} имеет смысл радиуса-вектора \mathbf{r} , а $f_a(v')$ — плотности заряда $\rho_\varepsilon(r')$. Как известно, поле сферически симметрично распределённого заряда на расстоянии r от центра симметрии зависит только от полного заряда внутри сферы того же радиуса, поэтому

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_\varepsilon(r') dr'.$$

Сфера, соответствующая скорости пробной частицы b , в пространстве скоростей полевых частиц a имеет радиус v , поэтому

$$\frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = -\frac{v_\mu}{v^3} \int_0^v 4\pi v'^2 f_a(v') dv'.$$

Составив свёртку

$$\frac{v_\mu}{v} \frac{\partial h_a}{\partial v_\mu} = \frac{dh_a}{dv},$$

получим

$$\frac{dh_a}{dv} = -\frac{1}{v^2} \int_0^v 4\pi v'^2 f_a(v') dv'. \quad (1)$$

Поскольку сила торможения пропорциональна $\partial h_a / \partial v$ (задача 11.3), отсюда видно, что пробная частица обменивается импульсом только с теми полевыми частицами, которые движутся медленнее неё ($v' < v$).

Дальнейшие вычисления проведём для максвелловской функции распределения

$$f_a = \frac{n_a}{\pi^{3/2} v_{Ta}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{Ta}^2}\right),$$

где $v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}$ обозначает тепловую скорость полевой частицы. Тогда

$$\frac{dh_a}{dv} = -\frac{4n_a}{\sqrt{\pi} v^2} \int_0^{v/v_a} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Интеграл можно выразить через функцию ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx,$$

но мы воздержимся от выписывания явных формул, ограничившись двумя предельными случаями. При $v \ll v_{Ta}$ имеем

$$\frac{dh_a}{dv} \approx -\frac{4n_a v}{3\sqrt{\pi}v_{Ta}^3}.$$

В противоположном предельном случае

$$\frac{dh_a}{dv} \approx -\frac{n_a}{v^2}.$$

Вычисление самой функции h_a не представляет интереса, так как в интеграл столкновений входит только производная dh_a/dv , но вычисление производных g_a удобнее начать с вычисления самой функции

$$g_a = \int u f'_a d^3v'.$$

Сделаем замену переменных $v' = v - u$, переходя от интегрирования по d^3v' к интегрированию по d^3u , и временно примем $n_a = 1$, $v_{Ta} = 1$; по завершении вычислений мы восстановим правильную размерность. Тогда

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{2\pi}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty du u^3 \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{-(u^2+v^2+2uv\cos\theta)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v} \int_0^\infty du u^2 \left[e^{-(v-u)^2} - e^{-(v+u)^2} \right]. \end{aligned}$$

Делая следующую замену $x = u - v$ и $x = v + u$ в первом и втором слагаемых, соответственно, получим

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v} \left[\int_{-v}^\infty dx (v+x)^2 e^{-x^2} - \int_v^\infty dx (v-x)^2 e^{-x^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}v} \left[\int_0^\infty dx 4xv e^{-x^2} + 2 \int_0^v dx (v-x)^2 e^{-x^2} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}v} \int_0^v dx (v-x)^2 e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Дифференцируя и восстанавливая размерность, найдём

$$\frac{dg_a}{dv} = \frac{2n_a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{v/v_{Ta}} dx \left(1 - \frac{x^2}{(v/v_{Ta})^2} \right) e^{-x^2}, \quad \frac{d^2g_a}{dv^2} = \frac{4n_a v_{Ta}^2}{\sqrt{\pi}v^3} \int_0^{v/v_{Ta}} dx x^2 e^{-x^2}.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{d^2g_a}{dv^2} = -v_{Ta}^2 \frac{1}{v} \frac{dh_a}{dv}.$$

При $v \ll v_{Ta}$

$$\frac{dg_a}{dv} \approx \frac{4n_a v}{3\sqrt{\pi}v_{Ta}^3}.$$

В другом предельном случае

$$\frac{dg_a}{dv} \approx n_a.$$

Задача 11.11. В качестве исходного возьмём кинетическое уравнение (11.26) для пробных частиц в плазме с максвелловским распределением полевых частиц:

$$\frac{df_b}{dt} = - \sum_{a=e,i} \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \Lambda}{m_b^2 v^2} \left[\frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{m_b}{m_a} \frac{dh_a}{dv} \left(f_b + \frac{T_a}{m_b v} \frac{\partial f_b}{\partial v} \right) - \frac{1}{2v} \frac{dg_a}{dv} \nabla_{\perp}^2 f_b \right].$$

Здесь суммирование проводится по электронам ($a = e$) и ионам ($a = i$) плазмы, а также принято, что величина кулоновского логарифма не зависит от сорта сталкивающихся частиц, т. е. $\Lambda_{ab} = \Lambda$. Оценивая $\partial f_b / \partial v$ по порядку величины как f_b / v , нетрудно видеть, что второе слагаемое $(T_a / m_b v) \partial f_b / \partial v$ в круглых скобках мало в сравнении с первым слагаемым f_b , постольку поскольку энергия быстрых ионов $\frac{1}{2} m_b v^2$ велика в сравнении с температурой T_a полевых частиц. Отбрасывая это второе слагаемое, мы тем самым пренебрегаем диффузией быстрых ионов по энергии по сравнению с их торможением. Торможение при заданных условиях идёт быстрее, чем нарастает разброс ионов по энергии. В оставшемся слагаемом можно взять приближённые формулы из решения предыдущей задачи для производной dh_a / dv в пределе $v \rightarrow 0$ для электронов и $v \rightarrow \infty$ для ионов:

$$\frac{dh_e}{dv} \approx - \frac{4n_e v}{3 \sqrt{\pi} v_{Te}^3}, \quad \frac{dh_i}{dv} \approx - \frac{n_i}{v^2}.$$

Последнее слагаемое в правой части кинетического уравнения, содержащее угловую часть лапласиана

$$\nabla_{\perp}^2 f_b = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f_b}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_b}{\partial \psi^2},$$

отвечает за диффузию по углу. Второе слагаемое в лапласиане, содержащее дифференцирование по азимутальному углу ψ в пространстве скоростей следует отбросить, так как функция распределения быстрых ионов не зависит от ψ , а в первом слагаемом достаточно оставить только вторую производную по θ , предположив, что угловая ширина распределения быстрых ионов достаточно мала. Тогда

$$\nabla_{\perp}^2 f_b \approx \frac{\partial^2 f_b}{\partial \theta^2}.$$

При вычислении коэффициента dg_a / dv вновь можно использовать приближённые результаты предыдущей задачи:

$$\frac{dg_e}{dv} \approx \frac{4n_e v}{3 \sqrt{\pi} v_{Te}}, \quad \frac{dg_i}{dv} \approx n_i.$$

При этом выясняется, что вкладом электронов dg_e / dv можно пренебречь по сравнению с dg_e / dv , так как $v \ll v_{Te}$. Суммируя всё сказанное, получаем

$$\frac{df_b}{dt} = \frac{16 \sqrt{\pi} e_b^2 e_i^2 n_e \Lambda}{3 m_b m_e v_{Te}^3 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(v^3 + \frac{n_i e_i^2 m_e}{n_e e_e^2 m_i} \frac{3 \sqrt{\pi}}{4} v_{Te}^3 \right) f_b \right] + \frac{2 \pi e_b^2 e_i^2 n_i \Lambda}{m_b^2 v^3} \frac{\partial^2 f_b}{\partial \theta^2}.$$

Быстрые ионы, помеченные здесь индексом b , вообще говоря, не тождественны ионам плазмы, которые помечены индексом i .

Задача 11.12. Для определённости будем говорить об α -частицах, которые возникают в реакции синтеза дейтерия с тритием. В термоядерном реакторе типа токамак α -частицы рождаются с изотропным распределением и затем тормозятся на электронах и ионах плазмы, сохраняя изотропию. Записывая кинетическое уравнение, воспользуемся решением задачи 11.11, добавив в правую часть уравнения изотропный источник частиц и отбросив слагаемое, отвечающее за угловое рассеяние. Помечая индексом α величины, относящиеся к α -частицам, имеем:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{1}{\tau_{ae}v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[(v^3 + v_c^3) f_\alpha \right] + \frac{\delta(v - v_\alpha)}{4\pi v^2} S_\alpha,$$

где

$$\frac{1}{\tau_{ae}} = \frac{16\sqrt{\pi} e_\alpha^2 e_e^2 n_e \Lambda}{3m_\alpha m_e v_{Te}^3}, \quad v_c = \sqrt[3]{\frac{n_i e_i^2 m_e}{n_e e_e^2 m_i} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} v_{Te}},$$

v_α — начальная скорость α -частиц, S_α — число α -частиц, возникающих в единице объёма в единицу времени. В стационарном состоянии $df_b/dt = 0$. Приравняв нулю первое слагаемое в правой части кинетического уравнения, находим, что

$$f_\alpha = \frac{\mathbb{A}}{v^3 + v_c^3}.$$

Константы интегрирования \mathbb{A} различны при $v > v_{Ta}$ и $v < v_{Ta}$. Так как α -частицы тормозятся в плазме, \mathbb{A} следует приравнять нулю при $v > v_{Ta}$. Учитывая это и интегрируя кинетическое уравнение по малому интервалу вблизи $v = v_{Ta}$, находим, что $\mathbb{A} = S_\alpha \tau_{ae} / (4\pi)$ при $v < v_{Ta}$.

Задача 11.13. Популяция плещущихся ионов формируется при наклонной инжекции моноэнергетических нейтральных атомов, с очень малым начальным угловым разбросом, последующей перезарядкой на ионах плазмы и торможением образовавшихся ионов на электронах плазмы, которое из-за большой энергии инжектированных частиц происходит значительно быстрее, чем торможение и рассеяние на ионах плазмы. Осциллируя между точками остановки вблизи магнитных пробок, где формируются пики плотности, быстрые ионы словно плещутся между берегами озера, откуда и происходит их название — плещущиеся (sloshing) ионы.

Предполагая, что область магнитных пробок мала по сравнению с длинной однородной центральной секцией пробкотрона (так что вкладом столкновений в области пробок можно пренебречь по сравнению с кулоновским рассеянием в центральной секции), помечая индексом b величины, относящиеся к плещущимся ионам, и используя решение задачи 11.11, запишем кинетическое уравнение для их функции распределения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{df_b}{dt} = & \frac{1}{\tau_{be}v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[(v^3 + v_c^3) f_b \right] + \frac{v_b^3}{\tau_{bi}v^3} \frac{\partial^2 f_b}{\partial \theta^2} - \frac{f_b}{\tau_{cx}} + \\ & + \frac{Q_b \delta(v - v_b)}{4\pi V W_b \sin \theta_b v^2} [\delta(\theta - \theta_b) + \delta(\theta + \theta_b - \pi)]. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь слагаемое $-f_b/\tau_{cx}$ в правой части описывает убыль плещущихся ионов вследствие перезарядки на примеси нейтральных атомов в плазме; v и θ обозначают скорость и питч-угол (отсчитываемый от оси системы) плещущихся ионов в однородной части центральной секции пробкотрона; θ_b , Q_b и W_b — соответственно угол, мощность и энергия инъекции; V — объём плазмы, $v_b = \sqrt{2W_b/M_b}$ — начальная скорость инжектированных атомов. Другие обозначения аналогичны использованным в задаче 11.12:

$$\frac{1}{\tau_{be}} = \frac{16\sqrt{\pi}e_b^2e_e^2n_e\Lambda}{3m_bm_e v_{Te}^3}, \quad \frac{1}{\tau_{bi}} = \frac{2\pi e_b^2e_i^2n_i\Lambda}{m_b^2v_b^3},$$

$$v_{Te} = \sqrt[3]{\frac{n_i e_i^2 m_e}{n_e e_e^2 m_i}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} v_{Te}, \quad v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}.$$

Последнее слагаемое в (1) имеет смысл источника быстрых ионов; эти ионы рождаются с заданным питч-углом θ_b , однако вследствие отражения от магнитных пробок можно считать, что половина ионов рождается под симметричным углом $\pi - \theta_b$, что описывается суммой дельта-функций $\delta(\theta - \theta_b) + \delta(\theta + \theta_b - \pi)$. Для краткости в уравнении (1) опущен индекс 0 у всех обозначений плотности сортов частиц, который должен был бы означать, что величину плотности следуют относить к длинной однородной части пробкотрона; если длина припробочных областей сравнима с длиной системы, строгое решение кинетического уравнения должно включать усреднение, учитывающее истинный профиль магнитного поля. Мы также предполагаем, что плотность быстрых ионов не слишком велика, $n_b \ll n_i$, вследствие чего взаимными столкновениями быстрых ионов можно пренебречь.

В частном случае $\tau_{cx} = \text{const}$ легко отыскать приближённое стационарное решение уравнения (1):

$$f_b(v, \theta) = \frac{Q_b \tau_{be} (v^3 + v_c^3)^{-1}}{4\pi^{3/2} V W_b \sin \theta_b \Delta \theta} \left(\frac{v^3 + v_c^3}{v_b^3 + v_c^3} \right)^{\tau_{bi}/3\tau_{cx}} \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\theta - \theta_b}{\Delta \theta} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{\theta + \theta_b - \pi}{\Delta \theta} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2)$$

где $v < v_b$,

$$\Delta \theta = \Delta \theta_0 \sqrt{\frac{v_b^3}{v_c^3} \ln \frac{1 + v_c^3/v_b^3}{1 + v_c^3/v_b^3}}, \quad \Delta \theta_0 = \sqrt{\frac{4\tau_{be}}{3\tau_{bi}}} = \sqrt{\frac{2m_i}{3m_b} \frac{v_c^3}{v_b^3}}.$$

Оно верно в области параметров, где $\Delta \theta \ll 1$. Найденное решение упрощается, если $\tau_{cx} \gg \tau_{be}$ и перезарядными потерями плещущихся ионов можно пренебречь. Учитывая также, что торможение на ионах плазмы не существенно для ионов со скоростью $v \gg v_c$, и формально устремив v_c к нулю, получаем:

$$f_b(v, \theta) = \frac{Q_b \tau_{be}}{4\pi^{3/2} V W_b v^3 \sin \theta_b \Delta \theta} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\theta - \theta_b}{\Delta \theta} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{\theta + \theta_b - \pi}{\Delta \theta} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{4\tau_{be}}{3\tau_{bi}} \left(\frac{v_b^3}{v^3} - 1 \right)}.$$

Задача 11.14. Как показано в п. 5.4, в пробкотроне с пробочным отношением K области удержания соответствует интервал питч-углов $\theta_{lc} < \theta < \pi - \theta_{lc}$, где $\theta_{lc} = \arcsin(1/\sqrt{K})$. Вследствие кулоновских столкновений, существует поток частиц из области удержания в конус потерь, что ограничивает время удержания (время жизни) частиц. Чтобы найти это время, рассмотрим модельную задачу. Будем считать, что потери частиц компенсирует изотропный источник $S(v)$ с такой зависимостью от скорости v , что потоки частиц в пространстве скоростей, соответствующие изменению энергии, отсутствуют. Иными словами, будем считать, что в интеграле столкновений остаются только производные по θ и запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nu}{2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + S, \quad (1)$$

где $\nu = \nu(v)$ имеет смысл частоты столкновений ионов с ионами; так как электроны удерживаются в пробкотроне амбиполярным электрическим полем, где скорость потерь определяется ионами. Очевидно, что функция распределения при указанных предположениях должна быть пропорциональна максвелловской с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от питч-угла:

$$f = \Theta(\theta) f_M(v).$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} q \nu f_M,$$

где $q = \text{const}$. Теперь задача сводится к отысканию функции $\Theta(\theta)$ в области $\theta_{lc} < \theta < \pi - \theta_{lc}$, на границе которой $f = 0$. Такое граничное условие предполагает, что частица, попавшая в конус потерь, мгновенно уходит из системы, а поэтому функция распределения равна нулю в конусе потерь и на его границе. Решая уравнение 1 для стационарного состояния, когда $\partial f / \partial t = 0$, находим

$$\Theta(\theta) = q \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_{lc}}.$$

Из условия нормировки

$$n = \int f d^3v = 4\pi \int_0^\infty v^2 f_M(v) dv \times \frac{1}{4\pi} \int_{\theta_{lc}}^{\pi-\theta_{lc}} 2\pi \sin \theta \Theta(\theta) d\theta$$

находим константу

$$q = \frac{1}{\ln \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \theta_{lc} \right) - \cos \theta_{lc}}.$$

Поток частиц в конус потерь из единицы объёма вычисляем, умножив первое слагаемое справа в кинетическом уравнении (1) на $d^3v = 2\pi \sin \theta d\theta v^2 dv$ и выполнив в явном виде интегрирование по θ :

$$I = -2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} \nu \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_{lc}}^{\pi-\theta_{lc}} v^2 dv.$$

Тот же поток равен интегралу от источников по всем скоростям:

$$I = \int S \, d^3v = \int_0^\infty \frac{1}{2} q v f_M v^2 \, dv \int_{\theta_{lc}}^{\pi - \theta_{lc}} 2\pi \sin \theta \, d\theta.$$

Вводя обозначение

$$\langle v \rangle = \int v f_M \, d^3v \Big/ \int f_M \, d^3v,$$

получаем

$$I = \frac{1}{2} q \langle v \rangle \cos \theta_{lc}.$$

Время жизни определяется как частное от деления n на I и равно

$$\tau = 2 \left[\ln \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \theta_{lc} \right) / \cos \theta_{lc} - 1 \right] / \langle v \rangle.$$

В пределе $K \gg 1$ τ пропорционально логарифму пробочного отношения:

$$\tau \approx (\ln K + 2 \ln 2 - 2) / \langle v \rangle. \quad (2)$$

Эта зависимость впервые была установлена Г. И. Будкером [62]. Она нарушается при очень больших значениях K , когда время рассеяния $\theta_{lc}^2 / \langle v \rangle$ на угол порядка $\theta_{lc} \approx 1 / \sqrt{K}$ формально становится меньше времени вылета из ловушки частицы, попавшей в конус потерь, — тогда нельзя считать, что функция распределения равна нулю в конусе потерь. Время вылета оценивается как L/c_s , где L — расстояние между пробками, а c_s — скорость звука (примерно равная тепловой скорости ионов). В случае $L/c_s \gg \theta_{lc}^2 / \langle v \rangle$ время жизни плазмы определяется из решения гидродинамической задачи об истечении газа из сосуда с маленьким отверстием. Так как площадь сечения столба плазмы в магнитной пробке в K раз меньше её сечения в минимуме магнитного поля, время истечения плазмы в гидродинамическом режиме примерно равно KL/c_s . Это время сравнивается с (2) при $KL/c_s \sim \ln K / \langle v \rangle$. Таким образом, формула (2) верна, если

$$\lambda \gg LK / \ln K,$$

где $\lambda = c_s / \langle v \rangle$ обозначает длину свободного пробега.

Лекция 12

Задача 12.1. Масса ионов m_i с зарядовым числом Z примерно в $2Z$ раз больше массы протона $m_p \approx 1836 m_e$. Так как $\tau_{ii} / \tau_{ee} \approx (m_i / m_e)^{1/2} / Z^3$, нетрудно подсчитать, что $\tau_{ii} < \tau_{ee}$ при $Z > (2m_p / m_e)^{1/5} \approx 5$.

Задача 12.2. Изотропия означает отсутствие выделенного направления. Как следствие, тензор второго ранга $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a$ можно представить в виде суммы инвариантных тензоров второго ранга со скалярными коэффициентами. Имеется только один такой тензор — единичный тензор $\delta_{\mu\nu}$, поэтому $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a = \mathbb{A} \delta_{\mu\nu}$. Чтобы найти коэффициент \mathbb{A} , достаточно составить одно уравнение, например, вычислив свёртку $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a \delta_{\mu\nu} = \langle w^2 \rangle_a$. Так как $\delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\mu} = 3$, получаем $\mathbb{A} = \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle_a$. Таким образом, $\langle w_\mu w_\nu \rangle_a = \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle_a \delta_{\mu\nu}$.

Задача 12.3. Вычислив интеграл

$$s = - \int [\ln f + \text{const}] f d^3v,$$

получим

$$s = n \ln \frac{T^{3/2}}{n} + \text{const } n.$$

Второе слагаемое опускают как несущественное. Например, очевидно, что оно выпадает из уравнения переноса тепла (12.26).

Задача 12.4. Пусть ионы в среднем покоятся, т. е. $u_i = 0$. Так как по условию задачи функция распределения электронов является максвелловской, слагаемое в интеграле столкновений, отвечающее за столкновения электронов с электронами, равно нулю, $C_{ee} = 0$. Формально это соответствует пределу лоренцевой плазмы, когда кинетическое уравнение приводится к виду (11.20). Его правая часть содержит выражение для интеграла столкновений электронов с ионами

$$C_{ei} = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f_e}{\partial \theta},$$

где θ — угол между v и u_e .

Разложим функцию распределения (12.5) до слагаемого, линейного по u_e и представим её в виде $f_e = f_{me} + \delta f_e$, где

$$f_{me} = n_e \exp(-m_e v^2 / (2T_e)) / (2\pi T_e / m_e)^{3/2}, \quad \delta f_e = (m_e v u_e \cos \theta) f_{me} / T_e.$$

Сила трения вычисляется по формуле (12.16), которая в данном случае принимает вид

$$R_{ei} = m_e \int v C_{ei} d^3v.$$

Собирая все формулы вместе, после несложных вычислений получаем

$$R_{u,ei} = - \frac{m_e n_e u_e}{\tau_e},$$

где

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda_{ei}}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}},$$

а индекс u в обозначении силы $R_{u,ei}$ указывает, что её происхождение связано с относительным движением электронов и ионов. Точное решение, включающее отыскание функции распределения электронов, отличается от $R_{u,ei}$ числовым коэффициентом, который в пределе $Z \rightarrow \infty$ равен $3\pi/32 \approx 0,29$ (см. п. 13.5).

Если $u_i \neq 0$, в формулах выше достаточно заменить u_e на $u = u_e - u_i$.

Задача 12.5. Пренебрегая инерцией (массой) электронов, заменим левую часть уравнения (12.28б) нулём, а в правой части отбросим градиент давления,

вязкие силы, а также магнитную часть силы Лоренца, полагая для простоты, что магнитное поле отсутствует. Подставляя $\mathbf{R}_{u,ei} = -m_e n_e \mathbf{u} / \tau_e$, имеем:

$$0 = e_e n_e \mathbf{E} - \frac{m_e n_e \mathbf{u}}{\tau_e}.$$

Так как $\mathbf{j} = e_e n_e \mathbf{u}$, вводя проводимость плазмы Σ согласно закону Ома $\mathbf{j} = \Sigma \mathbf{E}$, находим:

$$\Sigma = \omega_p^2 \tau_e / (4\pi).$$

Это так называемая спитцеровская проводимость плазмы, названная так в честь Лаймана Спитцера (Lyman Spitzer, 1953 [147]).

Задача 12.6. Предположим, что функции распределения ионов и электронов являются максвелловскими, но с разными температурами T_i и T_e . Тогда можно использовать кинетическое уравнение (11.26) для пробных частиц (электроны) в плазме, где полевые частицы (ионы) имеют максвелловское распределение. Так как функция распределения электронов изотропна, производные по углу в левой части этого уравнения выпадают, и мы получаем

$$C_{ei} = - \frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_{ei}}{m_e^2 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \frac{m_e}{m_i} \frac{dh_i}{dv} \left(f_e + \frac{T_i}{m_e v} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) \right].$$

Для максвелловской функции распределения, $f_e = f_{me}$, выражение в круглых скобках преобразуется к $(1 - T_i/T_e) f_{me}$. Так как скорость электронов велика по сравнению с тепловой скоростью ионов, приближённо $h_i(v) = n_i/v$. Поэтому

$$C_{ei} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_{ei} n_i}{m_i m_e v^2} \left(1 - \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\partial f_{me}}{\partial v}.$$

Удельная мощность нагрева вычисляется по формуле (12.23), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$Q_{ei} = \int \frac{1}{2} m_e v^2 C_{ei} d^3v.$$

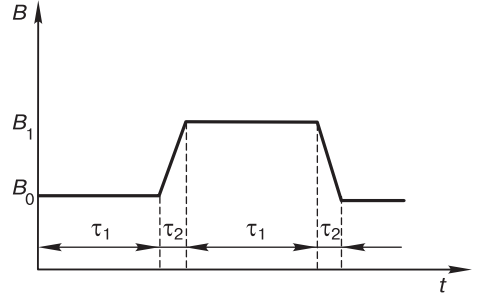
Подставляя сюда C_{ei} , получаем

$$Q_{ei} = \frac{3n_e}{\tau_e} \frac{m_e}{m_i} (T_i - T_e),$$

где время τ_e определено в задаче 12.4. Эта формула была получена Л. Д. Ландау [116, 117]. Так как она не содержит малых градиентов макроскопических величин, немаксвелловские анизотропные поправки к функции распределения частиц плазмы, пропорциональные этим градиентам, можно отбросить при вычислении Q_{ei} , что оправдывает начальное предположение относительно функции распределения частиц.

Задача 12.7. Рассмотрим простую модель гирорелаксационного нагрева плазмы. Будем считать, что магнитное поле изменяется с периодом $2(\tau_1 + \tau_2)$ от минимального значения B_0 до максимального значения $B_1 = (1 + \eta)B_0$, как показано на рис. 1, причём $\Omega^{-1} \ll \tau_2 \ll \nu^{-1} \ll \tau_1$, где Ω — циклотронная частота, а ν — частота кулоновских столкновений. Пусть в течение первого

Рис. 1. Модель гирорелаксационного нагрева; магнитное поле изменяется с периодом $2(\tau_1 + \tau_2)$; в течение коротких интервалов τ_1 вследствие сохранения магнитного момента изменяется поперечная энергия частиц плазмы; в течение длинных интервалов τ_2 кулоновские столкновения выравнивают поперечную и продольную энергии



промежутка времени τ_1 магнитное поле равно B_0 , затем плавно нарастает до значения B_1 за время τ_2 . В течение второго промежутка времени τ_1 магнитное поле поддерживается на уровне B_1 , а затем плавно уменьшается до исходного значения B_0 за время τ_2 . В течение коротких промежутков времени происходит изменение поперечной энергии частицы $W_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$ пропорционально изменению величины магнитного поля B , так как $\mu = W_{\perp} / B = \text{const}$. В течение длинных промежутков вследствие кулоновских столкновений происходит выравнивание поперечной W_{\perp} и продольной $W_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2$ энергий. Величины W_{\perp} , W_{\parallel} и $W = W_{\perp} + W_{\parallel}$ в моменты времени, соответствующие окончанию очередного интервала, указаны в таблице:

t	W_{\perp}	W_{\parallel}	W
τ_1	$\frac{2}{3} W_0$	$\frac{1}{3} W_0$	W_0
$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{2}{3} W_0 (1 + \eta)$	$\frac{1}{3} W_0$	$W_0 \left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$
$2\tau_1 + \tau_2$	$\frac{2}{3} W_0 \left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$	$\frac{1}{3} W_0 \left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$	$W_0 \left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$
$2\tau_1 + 2\tau_2$	$\frac{2}{3} W_0 \left(1 + \frac{2\eta}{3}\right) / (1 + \eta)$	$\frac{1}{3} W_0 \left(1 + \frac{2\eta}{3}\right)$	W_1

Складывая W_{\perp} и W_{\parallel} в последней строке таблицы, находим

$$W_1 = \frac{(1 + 2\eta/3)(1 + \eta/3)}{1 + \eta} W_0.$$

При $\eta \ll 1$ изменение энергии частицы за период равно $\Delta W = W_1 - W_0 \approx \frac{2}{9} \eta^2 W_0$.

Поскольку частота кулоновских столкновений ионов и электронов существенно различна, подбором длительности интервалов τ_1 и τ_2 можно обеспечить селективный нагрев электронов или ионов.

Лекция 13

Задача 13.1. Пусть электроны и ионы в среднем покоятся, так что через произвольное сечение $z = z_0$ слева направо и справа налево в единицу времени проходит в точности одинаковое число электронов $\Gamma \sim n_e v_{Te}$. Со стороны ионов на эти потоки действуют силы трения R_+ и R_- соответственно,

причём $R_{\pm} \approx m_e \Gamma v_{ei}$. Так как частота столкновений v_{ei} зависит от температуры, результирующая сила $\mathbf{R}_T = \mathbf{R}_+ + \mathbf{R}_-$ не равна нулю, если $\partial T_e / \partial z \neq 0$. Учитывая, что в плоскость $z = z_0$ попадают электроны в среднем с расстояний порядка $\lambda \sim v_{Te} / v_{ei}$, из области $z > z_0$ будут приходить электроны с энергией примерно на $\lambda \partial T_e / \partial z$ большей энергии электронов, приходящих из области $z < z_0$. Поэтому результирующая сила по порядку величины равна

$$R_T \sim \frac{\lambda}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} m_e \Gamma v_{ei} \approx \frac{m_e v_{Te}^2}{T_e} n_e \frac{\partial T_e}{\partial z} \approx n_e \frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Она направлена против градиента температуры и не зависит от частоты столкновений.

Задача 13.2. Чтобы найти термосилу \mathbf{R}_T , следуя определению силы Благинского (12.16), нужно вычислить интеграл

$$\mathbf{R}_T = m_e \int v C_{ei} d^3v,$$

взяв в качестве C_{ei} правую часть уравнения (13.1),

$$C_{ei} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \delta f}{\partial \theta},$$

где угол θ отсчитывается от направления градиента температуры, и учесть, что согласно (13.9) и (13.3)

$$\delta f = \frac{v^4}{2A} \left(4 - \frac{mv^2}{2T} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \cos \theta f_M, \quad f_M = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right).$$

Выполнив интегрированием, получим $\mathbf{R}_T = -\frac{3}{2} n_e \nabla T_e$.

Задача 13.3. Подставляя в формулу (13.11) функцию распределения электронов $f = f_M + \delta f$, найденную в п. 13.5, нужно учесть, что

$$\delta f = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{v^4 u}{(2T/m)^{5/2}} f_M \cos \theta$$

и u имеют один и тот же порядок малости. Оставляя в (13.11) только линейные по δf или u слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} q &= \int \frac{1}{2} m (v - u)^2 (v - u) f d^3v \approx \\ &\approx \int \frac{1}{2} m v^2 v \delta f d^3v - \int m (v \cdot u) v f_M d^3v - \int \frac{1}{2} m v^2 u f_M d^3v = \\ &= 4nT u - nT u - \frac{3}{2} nT u = \frac{3}{2} nT u. \end{aligned}$$

Вычисленная величина $q_u = \frac{3}{2} n_e T_e (u_e - u_i)$ составляет часть полного электронного потока тепла $q_e = q_u + q_{Te}$.

Задача 13.4. Пусть Δx_j — это смещение пешехода вдоль дороги за один шаг, а j — номер шага. По условию задачи, величина Δx_j может быть с одинаковой вероятностью равна как $+\lambda$, так и $-\lambda$. Сделав $N = t/\tau$ шагов, пешеход окажется в точке $x = \sum_{j=1}^N \Delta x_j$. Среднее значение $\langle x \rangle$ равно нулю, так как

$$\langle x \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \Delta x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_j \rangle = \sum_{j=1}^N 0 = 0.$$

Вычислим средний квадрат

$$\langle x^2 \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \Delta x_j \sum_{k=1}^N \Delta x_k \right\rangle.$$

Выделив в двойной сумме слагаемые с $j = k$, заметим, что все другие при усреднении дадут ноль:

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_j^2 \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1, j \neq k}^N \langle \Delta x_j \Delta x_k \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_j^2 \rangle = \lambda^2 N.$$

Таким образом, через время $t = N\tau$ пешеход окажется приблизительно на расстоянии

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\tau} t}$$

от места старта, однако достоверно нельзя сказать, справа или слева от него он будет обнаружен.

Задача 13.5. Чтобы получить уравнение теплопроводности из уравнения переноса тепла, нужно в правой части (12.26) отбросить все слагаемые, кроме $\text{div } \mathbf{q}_a$, а слева заменить полную производную $d_a/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}_a \cdot \nabla)$ на $\partial/\partial t$, приняв, что $\mathbf{u}_a = 0$. Затем нужно подставить справа $\mathbf{q}_a = -\kappa_a \nabla T_a$, слева — $s_a = n_a \ln(T_a^{3/2}/n_a)$ и вынести n_a за знак дифференцирования, считая, что плотность постоянна. В итоге получается уравнение теплопроводности (13.18). Часто его используют вместо уравнения переноса тепла, тем самым пренебрегая джоулевым и вязкостным нагревом плазмы, за который отвечают отброшенные в (12.26) слагаемые.

Задача 13.6. Так как уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T$$

линейно, его решение можно искать в виде суммы гармоник. Разложим искомое решение $T(\mathbf{x}, t)$ в интеграл Фурье по координатам:

$$T(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} T_{\mathbf{k}}(t).$$

Для каждой гармоники $T_{\mathbf{k}}(t)$ уравнение теплопроводности даёт обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} = -\chi k^2 T_{\mathbf{k}},$$

которое имеет решение вида

$$T_{\mathbf{k}}(t) = T_{0\mathbf{k}} e^{-\chi k^2 t}.$$

Так как при $t = 0$ должно быть $T = T_0(\mathbf{x})$, ясно, что $T_{0\mathbf{k}}$ представляет собой коэффициент Фурье-разложения функции $T_0(\mathbf{x})$, т. е.

$$T_{0\mathbf{k}} = \int d^3 x' T_0(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' }.$$

Собирая гармоники, получаем

$$T(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int d^3 x' T_0(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-\chi k^2 t}.$$

Выполнив интегрирование по d^3k , окончательно находим

$$T(x, t) = \frac{1}{(4\pi\chi t)^{3/2}} \int d^3x' T_0(x') \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right].$$

Пусть при $t = 0$ температура равна нулю везде, за исключением малой окрестности точки $x = 0$, в которой она принимает очень большое значение, но так, что полное количество тепла, пропорциональное интегралу $\int d^3x T_0(x)$, остаётся конечным. Такое распределение можно представить дельта-функцией,

$$T_0(x) = \text{const } \delta(x).$$

Подстановка этого распределение в найденное выше решение даёт

$$T(x, t) = \frac{\text{const}}{(4\pi\chi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right).$$

С течением времени температура в точке $x = 0$ падает как $t^{-3/2}$. Одновременно повышается температура в окружающем пространстве, причём заметно прогретая область постепенно расширяется. Полуширина пика температуры, вычисленная по уровню $1/e$ от максимального значения, равна $\sqrt{4\chi t}$.

Описанный процесс теплопроводности обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на всё пространство. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от температуры температуропроводностью χ , если только эта зависимость не приводит к обращению χ в нуль в какой-либо области пространства. Если же χ есть функция температуры, убывающая и обращающаяся в нуль вместе с нею, то это приводит к такому замедлению процесса распространения тепла, в результате которого влияние любого теплового возмущения будет простираться в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства.

Задача 13.7. Если $\chi = \beta T^n$, уравнение теплопроводности приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta \operatorname{div}(T^n \nabla T).$$

В течение небольшого интервала времени малый участок границы можно считать плоским, а скорость v его перемещения в пространстве — постоянной. Соответственно этому ищем решение в виде $T = T(x - vt)$, где x — координата в направлении, перпендикулярном границе. Для искомой функции $T(\xi)$, зависящей от одного аргумента $\xi = x - vt$, имеем уравнение

$$-v \frac{dT}{d\xi} = \beta \frac{d}{d\xi} T^n \frac{dT}{d\xi}.$$

Интегрируя его дважды, находим закон обращения T в нуль:

$$T \propto (-\xi)^{1/n}.$$

Если $n > 0$, это решение имеет смысл только при $\xi < 0$, что следует трактовать как наличие ненагретой зоны при $x > vt$. Если же $n < 0$, не существует решений, обращающихся в нуль на конечном расстоянии, т. е. тепло в каждый момент распределено по всему пространству.

Лекция 14

Задача 14.1. При движении электронов относительно ионов поперёк сильного магнитного поля (со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp$) поправка к сдвинутому максвелловскому распределению имеет порядок $(\Omega_e \tau_e)^{-1}$. При $\Omega_e \tau_e \gg 1$ ею можно пренебречь, поэтому поперечная сила трения просто равна силе $\mathbf{R}_{u\perp} = -(m_e n_e / \tau_e) \mathbf{u}_\perp$, вычисленной в задаче 12.4.

Задача 14.2. Если под действием какой-нибудь силы, например электрического поля, у электронов возникает средняя скорость \mathbf{u} , направленная вдоль \mathbf{B} , то их функция не будет просто сдвинутым на \mathbf{u} как целое максвелловским распределением. Это объясняется тем, что частота кулоновских столкновений уменьшается с ростом энергии электронов ($\nu_{ei}^{(p)} \propto v^{-3}$), поэтому доля быстрых электронов при той же средней направленной скорости \mathbf{u} будет больше, чем при простом сдвиге всей функции распределения, как целого, а средняя сила, действующая на электроны, будет меньше.

Так как сила трения $\mathbf{R}_{u\perp}$, перпендикулярная магнитному полю, равна силе, которая действует на сдвинутое максвелловское распределение (задача 14.1), продольная сила $\mathbf{R}_{u\parallel}$ будет меньше, чем $\mathbf{R}_{u\perp}$.

Задача 14.3. Пусть степень ионизации настолько мала, что столкновениями заряженных частиц друг с другом можно пренебречь по сравнению с их столкновениями с нейтральными атомами. Даже в этих условиях диффузия одного сорта заряженных частиц, например электронов, влияет на диффузию другого сорта заряженных частиц — ионов, как объяснил Вальтер Шоттки (Walter Schottky, 1924).

Запишем уравнения движения электронов и ионов в слабоионизованном газе без магнитного поля, учитывая, что те и другие тормозятся преимущественно в столкновениях с нейтральными атомами, которые в среднем неподвижны:

$$\begin{aligned} m_e n_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} &= -\nabla p_e + e_e n_e \mathbf{E} - m_e n_e \nu_{ea} \mathbf{u}_e, \\ m_i n_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} &= -\nabla p_i + e_i n_i \mathbf{E} - m_i n_i \nu_{ia} \mathbf{u}_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ν_{ea} и ν_{ia} обозначают соответственно частоту рассеяния электронов и ионов на нейтральных атомах, а \mathbf{u}_e и \mathbf{u}_i — скорости электронов и ионов. Пусть распределение температуры однородно, а, следовательно, $\nabla p_e = T \nabla n_e$, $\nabla p_i = T \nabla n_i$. Предполагая, что движение будет медленным, пренебрежём левыми частями уравнений (1) и найдём установившиеся потоки электронов и ионов:

$$n_e \mathbf{u}_e = \frac{e_e n_e}{m_e \nu_{ea}} \mathbf{E} - \frac{T}{m_e \nu_{ea}} \nabla n_e, \quad n_i \mathbf{u}_i = \frac{e_i n_i}{m_i \nu_{ia}} \mathbf{E} - \frac{T}{m_i \nu_{ia}} \nabla n_i.$$

Тот же результат можно выразить через коэффициенты диффузии $D_e = T/(m_e \nu_{ea})$, $D_i = T/(m_i \nu_{ia})$ и коэффициенты подвижности $b_e = 1/(m_e \nu_{ea})$, $b_i = 1/(m_i \nu_{ia})$:

$$n_e \mathbf{u}_e = e_e n_e b_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \quad n_i \mathbf{u}_i = e_i n_i b_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i. \quad (2)$$

Эти коэффициенты связаны друг с другом соотношениями Эйнштейна (Albert Einstein 1905 [148])

$$b_e = D_e/T, \quad b_i = D_i/T, \quad (3)$$

которые в наших вычислениях получились естественным образом из уравнений движения. Уравнения непрерывности для электронов и ионов:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{u}_e = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{u}_i = 0,$$

с учётом (2) и (3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} &= D_e \operatorname{div} \left[\nabla n_e - \frac{e_e n_e}{T} \mathbf{E} \right], \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} &= D_i \operatorname{div} \left[\nabla n_i - \frac{e_i n_i}{T} \mathbf{E} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

К ним надо добавить уравнение Пуассона для потенциала:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi (e_i n_i + e_e n_e). \quad (5)$$

Система уравнений (4), (5) допускает полное аналитическое исследование при различной степени ионизации газа, т. е. при различном соотношении дебаевской длины λ_D и характерных линейных размеров газа L . Однако мы ограничимся случаем квазинейтральной плазмы, когда $\lambda_D \ll L$. Формально это соответствует строгому равенству $e_e n_e + e_i n_i = 0$. Дополнительно учтём, что в слабоионизованной плазме ионы, как правило, ионизованы однократно, поэтому $e_i = -e_e = e > 0$, так что $n_e = n_i = n$. Исключим затем электрическое поле из уравнений (4) и получим уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n \quad (6)$$

с коэффициентом $D = 2D_i D_e / (D_i + D_e)$. Хотя сечения рассеяния электронов и ионов на нейтральных атомах, вообще говоря, одного порядка величины, их коэффициенты диффузии существенно различны благодаря разнице средних тепловых скоростей $D_e/D_i \approx v_{Te}/v_{Ti} \approx \sqrt{m_i/m_e}$, так что $D_e \gg 2D_i$. Это обстоятельство придаёт процессу диффузии своеобразные черты. Получается, что $D \approx 2D_i$, т. е. процесс диффузии определяется наиболее медленно диффундирующими частицами. В данном случае — ионами. Их коэффициент диффузии оценивается как произведение длины свободного пробега, $\lambda_i \approx v_{Ti}/\nu_{ia}$, на их тепловую скорость, $D_i \approx \lambda_i v_{Ti}$.

Задача 14.4. Сравнивая ионную и электронную теплопроводности, лучше говорить о коэффициентах температуропроводности, которые характеризуют поток энергии в расчёте на одну частицу, например: $\chi_{\perp e} = \kappa_{\perp e} \left/ \left(\frac{3}{2} n_e \right) \right.$ и $\chi_{\perp i} = \kappa_{\perp i} \left/ \left(\frac{3}{2} n_i \right) \right.$. Учитывая, что

$$\tau_e/\tau_i \approx \sqrt{m_e/m_i} (T_e/T_i)^{3/2} Z^2$$

(см. 13.2), находим:

$$\begin{aligned} \chi_{\parallel e}/\chi_{\parallel i} &\approx v_{Te}^2 \tau_e / v_{Ti}^2 \tau_i \approx (m_i/m_e)^{1/2} (T_e/T_i)^{5/2} Z^2, \\ \chi_{\perp e}/\chi_{\perp i} &\approx v_{Te}^2 \Omega_e^{-2} \tau_e^{-1} / v_{Ti}^2 \Omega_i^{-2} \tau_i^{-1} \approx (m_e/m_i)^{1/2} (T_i/T_e)^{1/2}, \\ \chi_{\wedge e}/\chi_{\wedge i} &\approx v_{Te}^2 \Omega_e^{-1} / v_{Ti}^2 \Omega_i^{-1} \approx (T_e/T_i) Z. \end{aligned}$$

В изотермической водородной плазме теплопроводность вдоль магнитного поля обеспечивается преимущественно электронами, а поперёк поля — ионами; косые потоки тепла, переносимые ионами и электронами одинаковы, но они направлены вдоль изотерм и не приводят к изменению энтропии.

Задача 14.5. В работе С. И. Брагинского [121] на основе наглядных соображений сделаны оценки почти всех кинетических коэффициентов, кроме α_{\wedge} (косая сила трения) и β_{\perp} (перпендикулярная термосила). Но именно для этих коэффициентов расчёты С. И. Брагинского оказались неточны в пределе $B \rightarrow \infty$. Полученное позднее точное решение задачи о вычислении кинетических коэффициентов для электронов в лоренцевой плазме [132] предсказывает для коэффициентов α_{\wedge} и β_{\perp} степенную зависимость от B в дробной степени (задача 14.9). Как получить такую зависимость для β_{\perp} при помощи наглядных рассуждений, показано в задаче 14.6, но оценить подобным образом α_{\wedge} вряд ли вообще возможно, поскольку косая сила трения $\mathbf{R}_{\wedge} = -\alpha_{\wedge}[\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$ параллельна силе Лоренца $(e_e/m_e c)[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$ и теряется на её фоне.

Точный расчёт показывает, что отношение $\alpha_{\wedge}/\alpha_{\perp}$ в максимуме не превышает $\frac{1}{3}$ и стремится к нулю как при $B \rightarrow 0$, так и при $B \rightarrow \infty$. Этим можно оправдать тот факт, что многие теории вообще игнорируют косую силу трения.

Задача 14.6. Термосила в магнитном поле содержит три члена:

$$\mathbf{R}_T = -\beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \beta_{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \beta_{\wedge} [\mathbf{h} \times \nabla T_e].$$

Как оценить продольную термосилу, $\mathbf{R}_{T\parallel} = -\beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e$, показано в задаче 13.1 для плазмы без магнитного поля.

Применим аналогичный метод к плазме в сильном магнитном поле, которое направлено по оси z , а градиент температуры направлен вдоль оси x , как показано на рис. 2. В этом случае косая термосила, $\mathbf{R}_{T\wedge} = -\beta_{\wedge} [\mathbf{h} \times \nabla T_e]$, параллельна оси y . В сильном магнитном поле ($|\Omega_e \tau_e| \gg 1$) электроны вращаются по окружностям радиуса $\rho_e \sim v_{Te}/|\Omega_e|$, поэтому в плоскость $x = x_0$ приходят электроны справа и слева с расстояний порядка ρ_e . Эти электроны «приносят с собой» разность температур порядка $\rho_e \partial T_e / \partial x$ и, как видно из рис. 2, вызывают раскомпенсацию сил трения у потоков, направленных по оси y , поскольку частота столкновений ν_{ei} убывает с ростом температуры. Действительно, сила трения $m_e n_e v_{Te} / \tau_e$, которая действует на электроны, приходящие в плоскость x_0 справа, направлена вверх и по величине меньше, чем сила трения, которая действует на электроны, приходящие слева, и направлена вниз. Таким образом, в результате столкновений с ионами возникает термосила, направленная вниз вдоль оси y , и по порядку величины равная

$$R_{T\wedge} \sim -\frac{\rho_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{m_e n_e v_{Te}}{\tau_e} \approx -\frac{n_e}{|\Omega_e \tau_e|} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

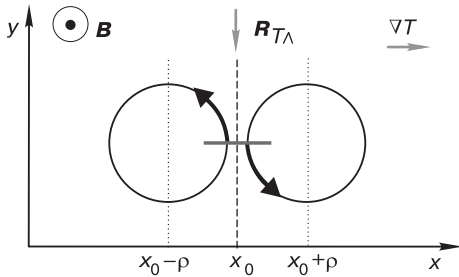


Рис. 2

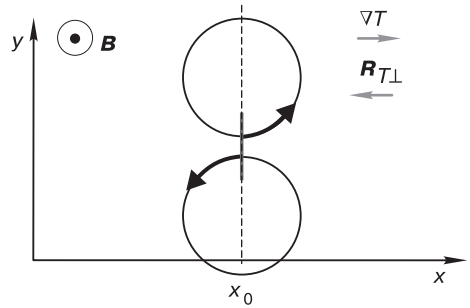


Рис. 3

Отсюда следует, что $\beta_\Lambda \approx n_e/|\Omega_e\tau_e|$. Аналогичное явление в металлах, приводящее к возникновению электрического поля, перпендикулярного магнитному полю и градиенту температуры, называется эффектом Нернста.

Оценим теперь термосилу в направлении оси x . Как показано на рис. 3, потоки вдоль оси x образуются в точке $x = x_0$ электронами, приходящими в среднем из областей с $x = x_0$, поэтому силы трения, действующие на встречные потоки вдоль оси x , полностью компенсируются. Однако такая логика не применима к электронам, которые двигаются столь медленно, что успевают затормозиться за один оборот по ларморовской окружности. Так как частота столкновений обратно пропорциональна кубу скорости электронов, из условия $v_{ei} \approx |\Omega_e|$ находим, что характерная скорость таких электронов v' по порядку величины равна $v_{Te}/|\Omega_e\tau_e|^{1/3}$. Число таких электронов в единице объёма $n'_e \approx (v'/v_{Te})^3 n_e$ существенно меньше плотности электронов n_e . Сила, которая действует на поток $n'_e v'$ медленных электронов, летящих слева направо, примерно равна $m_e n'_e v' \Omega_e$ и направлена влево. Сила, которая действует на встречный поток, примерно равна по величине, но чуть меньше и направлена вправо. Две силы компенсируются с точностью до множителя $(\rho'_e/T_e) \partial T_e / \partial x$, где $\rho'_e \sim v' / \Omega_e$. Собирая все множители, получаем

$$R_{T\perp} \sim -m_e n'_e v' \Omega_e \frac{\rho'_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \approx -\frac{n_e}{|\Omega_e \tau_e|^{5/3}} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Отсюда находим, что $\beta_\perp \approx n_e/|\Omega_e \tau_e|^{5/3}$.

Задача 14.7. Так как $v_{ei} \sim v^{-3}$, ток вдоль магнитного поля (или в плазме без магнитного поля) переносится преимущественно более быстрыми электронами. Поэтому в системе координат, где $u_e = 0$, в направлении $u = u_e - u_i$ летит больше быстрых электронов, а в направлении $-u$ — больше медленных. Хотя в этой системе электронов компенсируются, потоки энергии не компенсируются, и возникает поток тепла в направлении u . Так как этот «эффект порядка единицы» (как ясно из расчёта силы трения), соответствующий поток тепла $q_{u\parallel} = \beta_\parallel T_e u_\parallel$ имеет порядок величины $n_e T_e u_\parallel$. Как и продольная термосила, он связан со столкновениями, хотя его выражение не содержит τ_e явно.

Если ток течёт поперёк сильного магнитного поля, то тоже возникает поток тепла, но по другой причине. Сила, уравнивающая трение

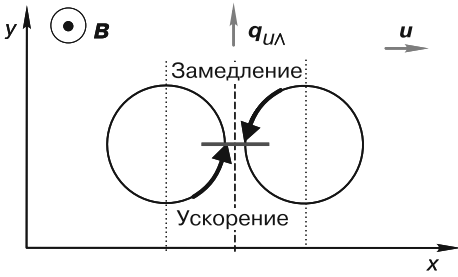


Рис. 4

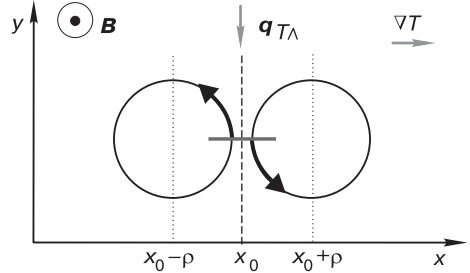


Рис. 5

электронов об ионы, в течение одного полупериода вращения электрона ускоряет его, а в течение другого полупериода — замедляет (рис. 4). Поэтому площадку, лежащую в плоскости векторов \mathbf{u} и \mathbf{B} , пересекают, с одной стороны, ускоренные электроны, а с другой — замедленные. Разность их энергий имеет порядок величины $(m_e u / \tau_e) \rho_e$. В результате возникает поток тепла

$$q_{u\perp} \sim \frac{m_e u_{\perp}}{\tau_e} \rho_e n_e v_{Te} \approx \frac{n_e T_e}{|\Omega_e \tau_e|} u_{\perp}.$$

Задача 14.8. «Косой» поток тепла возникает из-за того, что через площадку в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{B} и ∇T_e , проходят в среднем более быстрые электроны с одной стороны, чем с другой (рис. 5).

Если даже односторонние потоки $\Gamma \approx n_e v_{Te}$ в точности компенсированы, то у односторонних потоков энергии, имеющих порядок $q \approx n_e T_e v_{Te}$, остаётся нескомпенсированной доля порядка $(\rho_e \partial T_e / \partial x) / T_e$. В результате возникает поток тепла в направлении оси y

$$q_{Te\perp} \approx n_e v_{Te} \rho_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \approx \frac{n_e T_e}{m_e \Omega_e} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Аналогичный результат получается для ионов. Косые потоки переносят тепло вдоль изотерм и не приводят непосредственно к охлаждению плазмы или к увеличению энтропии, поэтому не стоит удивляться, что косые потоки у ионов и электронов имеют противоположные знаки.

Задача 14.9. В лоренцевой плазме столкновениями электронов с электронами можно пренебречь, так как зарядовое число ионов велико, $Z \gg 1$, и столкновения с ионами происходят в Z раз чаще. Запишем кинетическое уравнение для электронов, оставив в правой части только интеграл столкновений электронов с ионами:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = C'_{ei}[f_e]. \quad (1)$$

Так как тепловая скорость ионов мала по сравнению со скоростями электронов, интеграл столкновений $C'_{ei}[f_e]$ не зависит от вида функции распределения ионов (если пренебречь поправками, содержащими малое отношение m_e/m_i). Он имеет наиболее простой вид в системе отсчёта, где

ионы в среднем покоятся. Вводя обозначение $\mathbf{w}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}_i$, где \mathbf{u}_i — средняя направленная скорость ионов, имеем:

$$C'_{ei}[f_e] = \frac{2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei}}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial w'_\alpha} \left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{w'} - \frac{w'_\alpha w'_\beta}{w'^3} \right) \frac{\partial f_e}{\partial w'_\beta}. \quad (2)$$

Следуя методу Брагинского, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$f_e = f_M + \delta f, \quad (3)$$

где

$$f_M = f_M(w) = \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_e w^2}{2T_e}\right), \quad (4)$$

$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_e$, а макроскопические параметры электронов n_e , T_e , \mathbf{u}_e — являются, вообще говоря, функциями координат \mathbf{x} и времени t . Подставляя (3) в уравнение (1), будем считать, что поправка δf к максвелловской части f_M функции распределения электронов, электрическое поле \mathbf{E} и производные (как по координатам, так и по времени) макроскопических параметров малы и имеют один и тот же порядок малости. Отбрасывая в левой части уравнения слагаемые, квадратичные по малому параметру разложения, получаем:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{p_e} \frac{d_e p_e}{dt} + \left(\frac{m_e w^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{d_e T_e}{dt} \right\} f_M - \\ & - \left\{ e_e \mathbf{E} + \frac{e_e}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] - \frac{1}{n_e} \frac{\partial p_e}{\partial \mathbf{x}} - m_e \frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} \right\} \cdot \frac{\mathbf{w}}{T_e} f_M + \\ & + \left\{ \left(\frac{m_e w^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}} \right\} \cdot \mathbf{w} f_M + \\ & + \left\{ \frac{m_e}{T_e} \frac{\partial u_{e\nu}}{\partial x_\mu} \right\} w_\mu w_\nu f_M + \frac{e_e}{m_e c} [\mathbf{w} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{w}} = C'_{ei}[f_e], \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$\frac{d_e}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}.$$

Наряду с разложением (3) функции распределения f_e на максвелловский остов f_M , центрированный относительно средней скорости электронов, и малую поправку δf используем также другое разложение

$$f_e = f'_M + \delta f',$$

где поправка $\delta f'$ выделяется на фоне максвелловского распределения $f'_M = f_M(w')$, которое центрировано относительно средней скорости ионов. Оно удобно тем, что f'_M обращает в нуль правую часть кинетического уравнения, поэтому $C'_{ei}[f_e] = C'_{ei}[\delta f']$. Так как предполагается, что средние направленные скорости электронов и ионов, \mathbf{u}_e и \mathbf{u}_i , малы по сравнению с тепловой скоростью электронов $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$, приближённо

$$f'_M = f_M - \frac{m_e}{T_e} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) f_M, \quad \delta f' = \delta f + \frac{m_e}{T_e} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) f_M,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$. После подстановки $\delta f'$ в интеграл столкновений (2) можно заменить $\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \mathbf{u}$ на \mathbf{w} , поскольку поправка $\delta f'$ сама по себе мала. В результате простых вычислений находим:

$$C'_{ei}[f_e] = C_{ei}[\delta f] - \nu_{ei} \frac{m_e}{T_e} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) f_M,$$

где

$$\nu_{ei} = 4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / (m_e^2 w^3),$$

а C_{ei} (без штриха) вычисляется по формуле (2) для C'_{ei} с заменой \mathbf{w}' на \mathbf{w} .

Производные $d_e p_e / dt$ и $d_e T_e / dt$ внутри первой пары фигурных скобок в уравнении (5) удаётся исключить с помощью соотношения $p_e = n_e T_e$, уравнения непрерывности (12.28a)

$$\frac{d_e}{dt} \ln(n_e) = -\operatorname{div} \mathbf{u}_e$$

и уравнения адиабаты

$$\frac{d_e}{dt} \ln(p_e / n_e^{5/3}) = 0,$$

которое получается из уравнения передачи тепла (12.28в) путём отбрасывания малых слагаемых второго порядка (таких, как вязкий нагрев $(\vec{\pi}_e \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_e$ и дивергенция потока тепла $\operatorname{div} \mathbf{q}_e$) или содержащих малое отношение m_e / m_i (как прямой нагрев электронов ионами Q_{ei}), после чего первое слагаемое в левой части (5) приводится к виду

$$\left\{ -\frac{m_e w^2}{3T_e} \frac{\partial u_{e\gamma}}{\partial x_\gamma} \right\} f_M.$$

В сумме с предпоследним слагаемым в левой части оно даёт

$$\frac{m_e w_\mu w_\nu}{2T_e} W_{\mu\nu} f_M,$$

где

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial u_{e\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_{e\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{e\gamma}}{\partial x_\gamma} \delta_{\mu\nu}$$

обозначает тензор скорости сдвигов. Внутри второй пары фигурных скобок производную $d_e \mathbf{u}_e / dt$ можно исключить при помощи уравнения движения электронов (12.28б), в котором следует пренебречь вязкой силой, $-\nabla \cdot \vec{\pi}_e$, так как она содержит вторые производные по координатам (см. далее) и мала по сравнению с силой $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ei}$. Переноса в правую сторону все слагаемые, содержащие δf , получаем

$$\begin{aligned} \{\mathbf{R} + n_e \nu_{ei} m_e \mathbf{u}\} \cdot \frac{\mathbf{w}}{n_e T_e} f_M + \left\{ \left(\frac{m_e w^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{x}} \right\} \cdot \mathbf{w} f_M + \\ + \frac{m_e w_\mu w_\nu}{2T_e} W_{\mu\nu} f_M = C_{ei}[\delta f] - [\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{w}}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_e = e_e / (m_e c) \mathbf{B}$. Напомним, что заряд электрона $e_e = -e$ содержит знак, а $e > 0$ обозначает положительный элементарный заряд. Соответственно, циклотронная частота $\Omega_e = e_e B / (m_e c)$ считается отрицательной величиной.

Решение уравнения (6) удобно искать в виде

$$\delta f = \frac{w_\mu}{w} A_\mu + \left[\frac{w_\mu}{w} \frac{w_\nu}{w} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] B_{\mu\nu}, \quad (7)$$

где элементы вектора A_μ и тензора $B_{\mu\nu}$ зависят от длины вектора w , но не от его направления. Формула (7) обеспечивает выполнение условий

$$\int \delta f d^3w = 0, \quad \int w^2 \delta f d^3w = 0,$$

гарантирующих, что параметры n_e и T_e максвелловского распределения (4) совпадают с плотностью и температурой в данной точке,

$$n_e = \int f_e d^3v, \quad T_e = \frac{m_e}{3n_e} \int w^2 f_e d^3v.$$

Параметр u_e отождествляется со средней направленной скоростью электронов

$$u_e = \frac{1}{n_e} \int v f_e d^3v,$$

при дополнительном условии

$$\int w \delta f d^3w = \frac{1}{3} \int w A d^3w = 0. \quad (8)$$

Замечательно, что оба члена в представлении (7) сохраняют свою структуру под действием интеграла столкновений:

$$C_{ei}[\delta f] = -v_{ei} \frac{w_\mu}{w} A_\mu - 3v_{ei} \left[\frac{w_\mu}{w} \frac{w_\nu}{w} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] B_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Кроме того, они обладают свойством ортогональности при усреднении по равновероятным направлениям вектора w . Обозначая угловыми скобками результат усреднения, имеем:

$$\langle w_\mu \rangle = 0, \quad \langle w_\mu w_\nu \rangle = \frac{1}{3} w^2 \delta_{\mu\nu}, \quad \langle w_\alpha w_\mu w_\nu \rangle = 0. \quad (10)$$

Умножая δf и $C_{ei}[\delta f]$ на w_α и проводя усреднение, избавляемся от вторых слагаемых в (7) и (9), содержащих $B_{\mu\nu}$. То же самое происходит при усреднении уравнения (6). Такая процедура позволяет отделить уравнение для вектора A_μ от уравнения для тензора $B_{\mu\nu}$.

Найдём сначала вектор A . Подставив формулы (7) и (9) в уравнение (6), умножив результат на w и выполнив усреднение с помощью формул (10), получим:

$$v_{ei} A + \Omega_e [h \times A] = -s, \quad (11)$$

где $h = B/B$ и введено обозначение

$$s = \{R + n_e v_{ei} m_e u\} \frac{w}{n_e T_e} f_M + \left\{ \left(\frac{m_e w^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \right\} w f_M.$$

Решение уравнения (11) можно представить в виде

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{v_{ei}} \mathbf{s}_{\parallel} - \frac{v_{ei}}{v_{ei}^2 + \Omega_e^2} \mathbf{s}_{\perp} + \frac{\Omega_e}{v_{ei}^2 + \Omega_e^2} [\mathbf{h} \times \mathbf{s}_{\perp}], \quad (12)$$

где $\mathbf{s}_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{s})$, $\mathbf{s}_{\perp} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_{\parallel}$. Его нетрудно получить, если умножить уравнение (11) один раз векторно на \mathbf{h} , другой раз скалярно на \mathbf{h} , учесть тождество $\mathbf{h} \times [\mathbf{h} \times \mathbf{A}] = -\mathbf{A}_{\perp}$, а затем исключить из полученного набора уравнений $[\mathbf{h} \times \mathbf{A}]$.

Подставив \mathbf{A} в условие (8), можно выразить, например, \mathbf{R} через другие параметры, входящие в определение \mathbf{s} . Из сравнения слагаемых в формуле (12) следует, что выражение для продольной части силы \mathbf{R}_{\parallel} , порождённой первым слагаемым, получается из поперечной части \mathbf{R}_{\perp} , которой отвечают второе и третье слагаемые, путём предельного перехода $\Omega_e \rightarrow 0$. В связи с этим достаточно ограничиться вычислением \mathbf{R}_{\perp} . В результате комбинирования формул (8) и (12) получается уравнение для \mathbf{R}_{\perp} :

$$\frac{2}{3m_e v_T} \left\{ \mathbb{A}_{7,0} \mathbf{R}_{\perp} - \Omega \mathbb{A}_{10,0} [\mathbf{h} \times \mathbf{R}_{\perp}] + \mathbb{A}_{4,0} m_e n_e v_T \mathbf{u}_{\perp} - \right. \\ \left. - \Omega \mathbb{A}_{7,0} [\mathbf{h} \times m_e n_e v_T \mathbf{u}_{\perp}] + \mathbb{A}_{7,1} n_e \nabla_{\perp} T_e - \Omega \mathbb{A}_{10,1} [\mathbf{h} \times n_e \nabla_{\perp} T_e] \right\} = 0, \quad (13)$$

где безразмерная функция

$$\mathbb{A}_{k,l}(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{v^k}{1 + \Omega^2 v^6} \left(v^2 - \frac{5}{2} \right)^l e^{-v^2} dv$$

зависит от безразмерного параметра $\Omega = \Omega_e / v_T$, а $v_T = 4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{ei} / (m_e^2 v_{Te}^3)$ обозначает частоту электрон-ионных столкновений v_{ei} при $w = v_{Te}$. Решая уравнение (13) тем же методом, что и уравнение (11), находим:

$$\mathbf{R}_{\perp} = - \left\{ \left[\mathbb{A}_{4,0} \mathbb{A}_{7,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,0} \right] m_e n_e v_T \mathbf{u}_{\perp} + \right. \\ + \Omega \left[\mathbb{A}_{4,0} \mathbb{A}_{10,0} - \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{7,0} \right] [\mathbf{h} \times m_e n_e v_T \mathbf{u}_{\perp}] + \\ + \left[\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{7,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,1} \mathbb{A}_{10,0} \right] n_e \nabla_{\perp} T_e + \\ \left. + \Omega \left[\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0} - \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1} \right] [\mathbf{h} \times n_e \nabla_{\perp} T_e] \right\} / \left\{ \mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2 \right\}. \quad (14)$$

Переходя к вычислению потока тепла

$$\mathbf{q}_e = \int \frac{1}{2} m_e w^2 \mathbf{w} f_e d^3 v = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2} m_e w^2 \right) \mathbf{w} A d^3 w,$$

заметим, что условие (8) позволяет переписать интеграл, подлежащий вычислению, в виде

$$\mathbf{q}_e = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2} m_e w^2 - \frac{5}{2} T_e \right) \mathbf{w} A d^3 w. \quad (15)$$

Далее уже нетрудно сообразить, что результат вычисления интеграла можно получить из левой части формулы (13), увеличив на единицу второй индекс в коэффициентах $\mathbb{A}_{k,l}$:

$$\begin{aligned} q_{e\perp} = \frac{2}{3} \frac{T_e}{m_e \nu_T} \left\{ \mathbb{A}_{7,1} \mathbf{R}_\perp - \Omega \mathbb{A}_{10,1} [\mathbf{h} \times \mathbf{R}_\perp] + \mathbb{A}_{4,1} m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_\perp - \right. \\ \left. - \Omega \mathbb{A}_{7,1} [\mathbf{h} \times m_e n_e \nu_T \mathbf{u}_\perp] + \mathbb{A}_{7,2} n_e \nabla_\perp T_e - \Omega \mathbb{A}_{10,2} [\mathbf{h} \times n_e \nabla_\perp T_e] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из полученного выражения с помощью формулы (14) нужно исключить \mathbf{R}_\perp . Итоговые формулы для \mathbf{R} и q_e можно немного упростить при помощи легко проверяемых тождеств:

$$\mathbb{A}_{4,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0} = \frac{3}{2}, \quad \mathbb{A}_{4,1} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,1} = 0. \quad (17)$$

Сравнивая результат с формулами¹⁾

$$\mathbf{R} = -\alpha_\parallel \mathbf{u}_\parallel - \alpha_\perp \mathbf{u}_\perp - \alpha_\wedge [\mathbf{h} \times \mathbf{u}] - \beta_\parallel \nabla_\parallel T_e - \beta_\perp \nabla_\perp T_e - \beta_\wedge [\mathbf{h} \times \nabla T_e], \quad (18)$$

$$q_e = \beta_\parallel T_e \mathbf{u}_\parallel + \beta_\perp T_e \mathbf{u}_\perp + \beta_\wedge T_e [\mathbf{h} \times \mathbf{u}] - \kappa_\parallel \nabla_\parallel T_e - \kappa_\perp \nabla_\perp T_e - \kappa_\wedge [\mathbf{h} \times \nabla T_e], \quad (19)$$

находим так называемые векторные кинетические коэффициенты, через которые выражается сила \mathbf{R} и поток q_e :

$$\begin{aligned} \alpha_\perp &= \left(\frac{9\sqrt{\pi}}{8} \frac{\mathbb{A}_{7,0}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} \right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \alpha_\wedge &= \left(\Omega_e \tau_e \left[\frac{3}{2} \frac{\mathbb{A}_{10,0}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} - 1 \right] \right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \beta_\perp &= \left(\frac{\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{7,0} + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,1} \mathbb{A}_{10,0}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} \right) n_e, \\ \beta_\wedge &= \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0} - \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1}}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \Omega^2 \mathbb{A}_{10,0}^2} \right] \Omega_e \tau_e \right) n_e, \\ \kappa_\perp &= \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \left[\mathbb{A}_{7,2} - \frac{\mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{7,1}^2}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} + \frac{\mathbb{A}_{10,1} (\mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1} - 2 \mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0})}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} \Omega^2 \right] \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} \\ \kappa_\wedge &= \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \left[\mathbb{A}_{10,2} - \frac{\mathbb{A}_{10,0} \mathbb{A}_{10,1}^2}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} + \frac{\mathbb{A}_{7,1} (\mathbb{A}_{7,1} \mathbb{A}_{10,0} - 2 \mathbb{A}_{7,0} \mathbb{A}_{10,1})}{\mathbb{A}_{7,0}^2 + \mathbb{A}_{10,0}^2 \Omega^2} \Omega^2 \right] \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\tau_e = 3\sqrt{\pi}/(4\nu_T)$, а функции $\mathbb{A}_{k,l} = \mathbb{A}_{k,l}(\Omega)$ вычисляются при $\Omega = 4\Omega_e \tau_e / (3\sqrt{\pi})$. Коэффициенты $\alpha_\parallel, \beta_\parallel$ и κ_\parallel получаются соответственно из $\alpha_\perp, \beta_\perp$ и κ_\perp подстановкой $\Omega_e = 0$:

$$\alpha_\parallel = \left(\frac{3\pi}{32} \right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad \beta_\parallel = \left(\frac{3}{2} \right) n_e, \quad \kappa_\parallel = \left(\frac{128}{3\pi} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}.$$

¹⁾С. И. Брагинский чередует знаки «+» и «-» перед «косыми» членами в разных формулах, чтобы сделать соответствующие коэффициенты положительными. В формулах (18) и (19) выбраны одинаковые знаки перед всеми слагаемыми одной группы, в частности перед $\alpha_\parallel \mathbf{u}_\parallel, \alpha_\perp \mathbf{u}_\perp$ и $\alpha_\wedge [\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$. Однако при этом оказывается, что для электронов $\alpha_\wedge < 0$.

Они не зависят от величины магнитного поля. Для других транспортных коэффициентов в пределе слабозамагниченной плазмы $|\Omega_e \tau_e| \ll 1$, из общих формул получаются следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}\alpha_{\perp} &= \left(\frac{3\pi}{32}\right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, & \alpha_{\parallel} &= \left(-\left[\frac{315\pi}{512} - 1\right] |\Omega_e \tau_e|\right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \beta_{\perp} &= \left(\frac{3}{2}\right) n_e, & \beta_{\parallel} &= \left(\frac{315}{32} |\Omega_e \tau_e|\right) n_e, \\ \kappa_{\perp} &= \left(\frac{128}{3\pi}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} & \kappa_{\parallel} &= \left(\frac{1085}{2\pi} |\Omega_e \tau_e|\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}.\end{aligned}$$

В противоположном предельном случае, $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$, имеем:

$$\begin{aligned}\alpha_{\perp} &= (1) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, & \alpha_{\parallel} &= \left(-\frac{\pi^{4/3}}{6^{1/3}} |\Omega_e \tau_e|^{-2/3}\right) \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \\ \beta_{\perp} &= \left(\frac{5\pi^{4/3}}{2^{4/3} 3^{1/3}} |\Omega_e \tau_e|^{-5/3}\right) n_e, & \beta_{\parallel} &= \left(\frac{3}{2} |\Omega_e \tau_e|^{-1}\right) n_e, \\ \kappa_{\perp} &= \left(\frac{13}{4} |\Omega_e \tau_e|^{-2}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} & \kappa_{\parallel} &= \left(\frac{5}{2} |\Omega_e \tau_e|^{-1}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}.\end{aligned}$$

Перейдём к вычислению второго слагаемого в формуле (7) для поправки к функции распределения электронов. Она нужна для вычисления тензора вязких напряжений

$$\pi_{\alpha\beta} = \int m_e \left(w_{\alpha} w_{\beta} - \frac{1}{3} w^2 \delta_{\alpha\beta} \right) f_e d^3 w. \quad (21)$$

С помощью равенств (10) легко проверить, что изотропная часть функция распределения, f_M , равно как и первое слагаемое в (7), $A_{\mu} w_{\mu}/w$, дают нулевой вклад в интеграл (21). Вычисляя вклад второго слагаемого, $\left[w_{\mu} w_{\nu}/w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] B_{\mu\nu}$, полезно с самого начала учесть, что без ограничения общности, тензор $B_{\mu\nu}$ можно считать симметричным $B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$, а его след равным нулю $\delta_{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 0$. Действительно, замена $B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\nu\mu}$ или $B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} - \frac{1}{3} B_{\gamma\gamma} \delta_{\mu\nu}$ не меняет δf , а $\delta_{\mu\nu} [B_{\mu\nu} - \frac{1}{3} B_{\gamma\gamma} \delta_{\mu\nu}] = B_{\mu\mu} - B_{\gamma\gamma} = 0$. Так как

$$\begin{aligned}\left\langle \left[\frac{w_{\alpha} w_{\beta}}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right] \left[\frac{w_{\mu} w_{\nu}}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] \right\rangle &= \\ &= \left\langle \frac{w_{\alpha} w_{\beta}}{w^2} \left[\frac{w_{\mu} w_{\nu}}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] \right\rangle = \frac{1}{15} \left[\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \right],\end{aligned} \quad (22)$$

имеем

$$\pi_{\alpha\beta} = \frac{2}{15} \int m_e w^2 B_{\alpha\beta} d^3 w. \quad (23)$$

В плазме без магнитного поля тензор $B_{\mu\nu}$ пропорционален $W_{\mu\nu}$. Действительно, умножив уравнение (6) на $\left[w_{\alpha} w_{\beta}/w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right]$ и выполнив усреднение с помощью формулы (22), при $\Omega_e = 0$ без труда находим, что

$$B_{\alpha\beta} = -\frac{m_e w^2}{6\nu_{ei} T_e} W_{\alpha\beta} f_M \quad (24)$$

при $B = 0$. Следовательно,

$$\pi_{\alpha\beta} = -\eta W_{\alpha\beta}, \quad (25)$$

где

$$\eta = \frac{256}{45\pi} n_e T_e \tau_e. \quad (26)$$

При наличии магнитного поля задача усложняется, так как последнее слагаемое в правой части уравнения (6), содержащее оператор $[w \times \Omega_e] \cdot \frac{\partial}{\partial w}$, «портит» структуру слагаемого $\left[w_\mu w_\nu / w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] B_{\mu\nu}$ в δf . Чтобы обойти это препятствие, разложим \vec{B} на сумму тензоров, которые данным оператором преобразуются по сравнительно простому правилу. Поскольку произвольный симметричный тензор второго ранга с нулевым следом в трёхмерном пространстве имеет 5 независимых элементов, его можно записать в виде суммы не более чем пяти других симметричных тензоров с нулевым рангом. Учитывая это, введём 5 проекций тензора \vec{W} на триаду ортогональных единичных векторов, таких что $a = [b \times h]$, $b = [h \times a]$, $h = [a \times b]$, $|h| = |a| = |b| = 1$. Пусть

$$\begin{aligned} \vec{W}_0 &= \frac{1}{2}(aa + bb)(a \cdot \vec{W} \cdot a + b \cdot \vec{W} \cdot b) + (hh)(h \cdot \vec{W} \cdot h), \\ \vec{W}_1 &= \frac{1}{2}(aa - bb)(a \cdot \vec{W} \cdot a - b \cdot \vec{W} \cdot b) + \frac{1}{2}(ab + ba)(a \cdot \vec{W} \cdot b + b \cdot \vec{W} \cdot a), \\ \vec{W}_2 &= \frac{1}{2}(ah + ha)(a \cdot \vec{W} \cdot h + h \cdot \vec{W} \cdot a) + \frac{1}{2}(bh + hb)(b \cdot \vec{W} \cdot h + h \cdot \vec{W} \cdot b), \\ \vec{W}_3 &= \frac{1}{2}(-aa + bb)(a \cdot \vec{W} \cdot b + b \cdot \vec{W} \cdot a) + \frac{1}{2}(ab + ba)(a \cdot \vec{W} \cdot a - b \cdot \vec{W} \cdot b), \\ \vec{W}_4 &= \frac{1}{2}(-ah - ha)(b \cdot \vec{W} \cdot h + h \cdot \vec{W} \cdot b) + \frac{1}{2}(bh + hb)(a \cdot \vec{W} \cdot h + h \cdot \vec{W} \cdot a). \end{aligned}$$

Для справки приведём первую из этих формул в индексной записи:

$$W_{0\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta)(a_\mu W_{\mu\nu} a_\nu + b_\mu W_{\mu\nu} b_\nu) + (h_\nu h_\nu)(h_\mu W_{\mu\nu} h_\nu).$$

В специальной системе координат, где $a = \{1, 0, 0\}$, $b = \{0, 1, 0\}$, $h = \{0, 0, 1\}$,

$$\begin{aligned} \vec{W}_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_{xx} + W_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & W_{xx} + W_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 2W_{zz} \end{pmatrix}, \\ \vec{W}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_{xx} - W_{yy} & W_{xy} + W_{yx} & 0 \\ W_{xy} + W_{yx} & -W_{xx} + W_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{W}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{xz} + W_{zx} \\ 0 & 0 & W_{yz} + W_{zy} \\ W_{xz} + W_{zx} & W_{yz} + W_{zy} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\vec{W}}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -W_{xy} - W_{yx} & W_{xx} - W_{yy} & 0 \\ W_{xx} - W_{yy} & W_{xy} + W_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\vec{W}}_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W_{yz} - W_{zy} \\ 0 & 0 & W_{xz} + W_{zx} \\ -W_{yz} - W_{zy} & W_{xz} + W_{zx} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Тензоры $\vec{\vec{W}}_p$ ортогональны друг другу в том смысле, что $\vec{\vec{W}}_p : \vec{\vec{W}}_q = 0$, т. е.

$$W_{p\alpha\beta} W_{q\alpha\beta} = 0, \quad (27)$$

если $p \neq q$. Для разложения тензора $\vec{\vec{W}}$ достаточно трёх первых тензоров $\vec{\vec{W}}_p$, так как

$$\vec{\vec{W}} = \vec{\vec{W}}_0 + \vec{\vec{W}}_1 + \vec{\vec{W}}_2,$$

но оператор $[\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}$ порождает остальные два тензора, так как

$$\begin{aligned}[\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{0\mu\nu} &= 0, \\ [\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{1\mu\nu} &= 2\Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{3\mu\nu}, \\ [\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{2\mu\nu} &= \Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{4\mu\nu}, \\ [\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{3\mu\nu} &= -2\Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{1\mu\nu}, \\ [\mathbf{w} \times \boldsymbol{\Omega}_e] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{4\mu\nu} &= -\Omega_e \left[\frac{w_\mu w_\nu}{w^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right] W_{2\mu\nu}.\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что тензор $\vec{\vec{B}}$ можно искать в виде суммы пяти слагаемых:

$$\vec{\vec{B}} = \gamma_0 \vec{\vec{W}}_0 + \gamma_1 \vec{\vec{W}}_1 + \gamma_2 \vec{\vec{W}}_2 + \gamma_3 \vec{\vec{W}}_3 + \gamma_4 \vec{\vec{W}}_4. \quad (28)$$

Уравнения для коэффициентов γ_p получаем, умножив уравнение (6) на тензор $w_\alpha w_\beta / w^2 - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}$ и выполнив усреднение по направлениям вектора \mathbf{w} с помощью формул (22):

$$\begin{aligned}\frac{m_e w^2}{T_e} \left(\vec{\vec{W}}_0 + \vec{\vec{W}}_1 + \vec{\vec{W}}_2 \right) f_M &= \\ &= -3v_{ei} \left(\gamma_0 \vec{\vec{W}}_0 + \gamma_1 \vec{\vec{W}}_1 + \gamma_2 \vec{\vec{W}}_2 + \gamma_3 \vec{\vec{W}}_3 + \gamma_4 \vec{\vec{W}}_4 \right) - \\ &\quad - \Omega_e \left(2\gamma_1 \vec{\vec{W}}_3 + \gamma_2 \vec{\vec{W}}_4 - 2\gamma_3 \vec{\vec{W}}_1 - \gamma_4 \vec{\vec{W}}_2 \right).\end{aligned}$$

Так как тензоры $\vec{\vec{W}}_q$ ортогональны друг другу, система уравнений для определения коэффициентов γ_p получается отсюда простым сравнением

коэффициентов при одинаковых тензорах в правой и левой частях последнего уравнения. Действительно, умножая это уравнение последовательно на $W_{0\alpha\beta}$, $W_{1\alpha\beta}$ и т. д. с помощью свойства ортогональности (27) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 3\nu_{ei}\gamma_0 &= -\frac{m_e w^2}{2T_e} f_M, \\ 3\nu_{ei}\gamma_1 - 2\Omega_e\gamma_3 &= -\frac{m_e w^2}{2T_e} f_M, \\ 3\nu_{ei}\gamma_2 - \Omega_e\gamma_4 &= -\frac{m_e w^2}{2T_e} f_M, \\ 3\nu_{ei}\gamma_3 + 2\Omega_e\gamma_1 &= 0, \\ 3\nu_{ei}\gamma_4 + \Omega_e\gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из формул (23) и (28) следует, что тензор вязких напряжений в магнитном поле,

$$\vec{\pi} = -\eta_0 \vec{W}_0 - \eta_1 \vec{W}_1 - \eta_2 \vec{W}_2 - \eta_3 \vec{W}_3 - \eta_4 \vec{W}_4, \quad (29)$$

зависит от пяти коэффициентов

$$\eta_p = -\frac{2}{15} \int m_e w^2 \gamma_p d^3w. \quad (30)$$

Вычисляя коэффициенты γ_p находим, что коэффициенты вязкости выражаются через ранее введенные функции $\mathbb{A}_{k,0}$:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{16}{135\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{9,0}(0) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_1 &= \frac{16}{135\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{9,0} \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_2 &= \frac{16}{135\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{9,0} \left(\frac{4}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_3 &= \frac{128}{1215\pi} (-\Omega_e \tau_e) \mathbb{A}_{12,0} \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e, \\ \eta_4 &= \frac{64}{1215\pi} (-\Omega_e \tau_e) \mathbb{A}_{12,0} \left(\frac{4}{9\sqrt{\pi}} \Omega_e \tau_e \right) n_e T_e \tau_e. \end{aligned}$$

Коэффициент η_0 совпадает с коэффициентом вязкости η в плазме без магнитного поля, η_1 и η_2 стремятся к η в пределе $\Omega_e \tau_e \rightarrow 0$, а η_3 и η_4 обращаются в ноль в этом пределе. Полезно также заметить, что $\eta_1(\Omega_e) = \eta_2(2\Omega_e)$, $\eta_3(\Omega_e) = \eta_4(2\Omega_e)$, поэтому достаточно исследовать зависимость от параметра $\Omega_e \tau_e$ только двух коэффициентов η_2 и η_4 . В пределе $\Omega_e \tau_e \rightarrow 0$ имеем

$$\eta_2 = \left(\frac{256}{45\pi} \right) n_e T_e \tau_e, \quad \eta_4 = \left(\frac{154}{9\pi} |\Omega_e \tau_e| \right) n_e T_e \tau_e,$$

а при $\Omega_e \tau_e \rightarrow \infty$

$$\eta_2 = \left(\frac{6}{5} |\Omega_e \tau_e|^{-2} \right) n_e T_e \tau_e, \quad \eta_4 = \left(|\Omega_e \tau_e|^{-1} \right) n_e T_e \tau_e.$$

Задача 14.10. Система кинетических коэффициентов С. И. Брагинского непоследовательна в том смысле, что в ней перемешаны гидродинамические потоки и термодинамические силы. Например, сила \mathbf{R} выражается через поперечную скорость \mathbf{u} и градиент температуры ∇T_e , который в термодинамике относят к силам. Как указал Р. Балеску [149], логичнее было бы выразить плотность электрического тока \mathbf{j} и поток тепла \mathbf{q} через термодинамические силы, такие как градиенты макроскопических величин и напряжённости полей. В его системе кинетических коэффициентов

$$\mathbf{j} = \vec{\Sigma} \cdot \mathbf{E}^* - \vec{\beta}' \cdot \nabla T_e, \quad \mathbf{q}_e = T_e \vec{\beta}' \cdot \mathbf{E}^* - \vec{\kappa}'_e \cdot \nabla T_e,$$

где

$$\mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}] - \frac{1}{e_e n_e} \nabla p_e,$$

тогда как в системе Брагинского

$$\mathbf{R} = -\vec{\alpha} \cdot \mathbf{u} - \vec{\beta} \cdot \nabla T_e, \quad \mathbf{q}_e = T_e \vec{\beta} \cdot \mathbf{u} - \vec{\kappa}_e \cdot \nabla T_e.$$

Тензоры $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\kappa}_e$, $\vec{\Sigma}$, $\vec{\beta}'$, $\vec{\kappa}'_e$ имеют одинаковую структуру, например

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{\perp} & -\alpha_{\wedge} & 0 \\ \alpha_{\wedge} & \alpha_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\parallel} \end{bmatrix}$$

в системе координат, где магнитное поле направлено вдоль оси z . В векторной записи

$$\vec{\alpha} \cdot \mathbf{u} = \alpha_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} + \alpha_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} + \alpha_{\wedge} [\mathbf{h} \times \mathbf{u}],$$

причём

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B.$$

Не вдаваясь в дискуссию, какая система «логичнее», покажем, что коэффициенты Брагинского можно выразить через коэффициенты Балеску, и наоборот. Для этого заметим, что

$$\mathbf{j} = e_e n_e \mathbf{u},$$

а поле \mathbf{E}^* можно выразить через силу \mathbf{R} с помощью уравнения движения электронов (12.286). Пренебрегая в этом уравнении инерцией электронов, $m_e n_e d_e \mathbf{u}_e / dt$, и вязким трением, $\nabla \cdot \vec{\pi}_e$, имеем

$$e_e n_e \mathbf{E}^* \approx -\mathbf{R} - \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = \frac{1}{e_e n_e} \vec{\alpha}' \cdot \mathbf{j} + \vec{\beta} \cdot \nabla T_e, \quad (1)$$

где

$$\vec{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_{\perp} & -\alpha_{\wedge} - m_e n_e \Omega_e & 0 \\ \alpha_{\wedge} + m_e n_e \Omega_e & \alpha_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\parallel} \end{bmatrix}.$$

Выражая отсюда \vec{j} и сравнивая результат с формулой Балеску $\vec{j} = \vec{\Sigma} \cdot \vec{E}^* - \vec{\beta}' \cdot \nabla T_e$, находим

$$\vec{\Sigma} = e_e^2 n_e^2 \vec{\alpha}'^{-1}, \quad \vec{\beta}' = e_e n_e \vec{\alpha}'^{-1} \cdot \vec{\beta}.$$

Подставляя затем \vec{E}^* в формулу Балеску $\vec{q}_e = T_e \vec{\beta}' \cdot \vec{E}^* - \vec{\kappa}'_e \cdot \nabla T_e$ и сравнивая с аналогичной формулой Брагинского $\vec{q}_e = T_e \vec{\beta} \cdot \vec{u} - \vec{\kappa}_e \cdot \nabla T_e$, получаем

$$\vec{\kappa}'_e = \vec{\kappa}_e + T_e \vec{\beta}' \cdot \vec{\Sigma}^{-1} \cdot \vec{\beta}'.$$

Матрицы $\vec{\alpha}'$ и $\vec{\alpha}$ различаются только в элементе $\alpha'_\perp = \alpha_\perp + m_e n_e \Omega_e$. Поскольку

$$\vec{\alpha}' \cdot \vec{u} = \vec{\alpha} \cdot \vec{u} + m_e n_e \Omega_e [\vec{h} \times \vec{u}] = \vec{\alpha} \cdot \vec{u} - \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}],$$

величина $\vec{R}'_u = -\vec{\alpha}' \cdot \vec{u}$ равна сумме силы трения $\vec{R}_u = -\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$ и силы Ампера $\frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]$. Косая часть силы трения $\vec{R}_{u\perp} = -\alpha_\perp [\vec{h} \times \vec{u}]$ направлена параллельно силе Ампера. В плазме не существует эффективного способа раздельного измерения этих двух сил. Такая точка зрения родственна утверждению, что в диспергирующей среде определение как магнитного, так и электрического полей путём измерения силы, действующей на движущуюся заряженную частицу, в принципе невозможно по той причине, что невозможно отделить силу Лоренца от других сил, в частности от силы трения.¹⁾ Вероятно, этим обстоятельством объясняется тот факт, что до настоящего времени не найден способ оценки коэффициента α_\perp из качественных рассуждений, подобных изложенным в задаче 14.6. Величина α_\perp по существу является вспомогательной — вторым членом разложения силы $\vec{R}'_{u\perp}$ по величине B . В частности, именно α'_\perp , но не α_\perp входит в обобщённый закон Ома, который получается из уравнения (1), если его разрешить относительно плотности тока \vec{j} .

Задача 14.11. В лоренцевой плазме для кинетических коэффициентов Балеску получаются существенно более простые выражения, чем для коэффициентов Брагинского. Воспользовавшись решением задач 14.9 и 14.10, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_\perp &= \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{7,0} \right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, & \Sigma_\perp &= \left(-\frac{32}{27\pi} \Omega_e \tau_e \mathbb{A}_{10,0} \right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, \\ \beta'_\perp &= \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{7,1} \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, & \beta'_\perp &= \left(-\frac{32}{27\pi} \Omega_e \tau_e \mathbb{A}_{10,1} \right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, \\ \kappa'_\perp &= \left(\frac{8}{9\sqrt{\pi}} \mathbb{A}_{7,2} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, & \kappa'_\perp &= \left(-\frac{32}{27\pi} \Omega_e \tau_e \mathbb{A}_{10,2} \right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}. \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ Электрическое и магнитное поля в среде можно измерить соответственно при помощи эффектов Штарка и Зеемана без измерения силы Лоренца.

В пределе $|\Omega_e \tau_e| \ll 1$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\perp} &= \left(\frac{32}{3\pi}\right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, & \Sigma_{\wedge} &= \left(\frac{70}{\pi} |\Omega_e \tau_e|\right) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, \\ \beta'_{\perp} &= \left(\frac{16}{\pi}\right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, & \beta'_{\wedge} &= \left(\frac{210}{\pi} |\Omega_e \tau_e|\right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, \\ \kappa'_{\perp} &= \left(\frac{200}{3\pi}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, & \kappa'_{\wedge} &= \left(\frac{1015}{\pi} |\Omega_e \tau_e|\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}.\end{aligned}$$

При $|\Omega_e \tau_e| \gg 1$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\perp} &= (|\Omega_e \tau_e|^{-2}) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, & \Sigma_{\wedge} &= (|\Omega_e \tau_e|^{-1}) \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}, \\ \beta'_{\perp} &= \left(-\frac{3}{2} |\Omega_e \tau_e|^{-2}\right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, & \beta'_{\wedge} &= \left(\frac{5\pi^{4/3}}{2^{4/3} 3^{1/3}} |\Omega_e \tau_e|^{-8/3}\right) \frac{e_e n_e \tau_e}{m_e}, \\ \kappa'_{\perp} &= \left(\frac{13}{4} |\Omega_e \tau_e|^{-2}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, & \kappa'_{\wedge} &= \left(\frac{5}{2} |\Omega_e \tau_e|^{-1}\right) \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}.\end{aligned}$$

Простота формул для кинетических коэффициентов Балеску, наводит на мысль, что должен существовать столь же простой способ их вывода. Действительно, если в уравнениях (13) и (16) из задачи (14.9) произвести замену $\mathbf{R} = -e_e n_e \mathbf{E}^* + m_e n_e \Omega_e [\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$, то слагаемые с $[\mathbf{h} \times \mathbf{u}]$ взаимно сократятся, и с учётом тождеств (17) сразу получаются формулы (1).

Задача 14.12. Предположим, что в плазме возникли переменные электрические поля с амплитудой E , изменяющиеся независимо в точках на расстоянии, большем ℓ . Будем также считать, что характерная частота изменения полей заметно меньше ионной циклотронной частоты, $\omega \ll \Omega_i$, так что они вызывают дрейф частиц со скоростью $u \sim cE/B$, которая хаотически изменяет своё направление после того, как частица продрейфует на расстояние порядка ℓ . Коэффициент возникающей при этом диффузии можно оценить с помощью формулы $D_B \sim \ell u \sim cE\ell/B$.

Предположим также, что амплитуда флуктуирующих полей такова, что соответствующая энергия порядка тепловой энергии частиц, т. е. $eE\ell \sim T$. Это соотношение, конечно, нуждается в обосновании, но не выглядит заведомо бессмысленным. В результате получим $D_B \sim cT/(eB)$.

Вообще говоря, коэффициент диффузии, может быть больше вычисленного по формуле Бома, так как он вписал в формулу (14.15) численный коэффициент, обобщив результаты серии экспериментов в рамках одного конкретного проекта. Экспериментально почти четырёхкратное превышение фактического коэффициента диффузии над бомовским было обнаружено в работе [150].

Лекция 15

Задача 15.1. Введём массовую плотность и гидродинамическую скорость

$$\begin{aligned}\rho &= m_e n_e + m_i n_i \simeq m_i n_i, \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{\rho} (m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i) \simeq \mathbf{u}_i.\end{aligned}$$

Тогда уравнение непрерывности (12.28а) для ионов предстаёт в виде закона сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0.$$

Далее сложим уравнения движения (12.28б) для электронов и ионов, учтём, что $\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie}$ и $e_e n_e + e_i n_i = 0$, пренебрежём в суммарном уравнении инерцией и вязким трением электронов. В результате получим

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i,$$

где $\mathbf{j} = e_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$ — плотность тока, $p = n_e T_e + n_i T_i$ — давление. При вычислении $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i$ вместо \mathbf{u}_i подставляют \mathbf{V} , а такой же член $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e$ для электронов опускают, так как он обычно мал.

Последнее уравнение в системе получим, сложив уравнения

$$n_e T_e \frac{d}{dt} \ln \frac{T_e^{3/2}}{n_e} = Q_{ei}, \quad n_i T_i \frac{d}{dt} \ln \frac{T_i^{3/2}}{n_i} = Q_{ie},$$

следующие из (12.28в), если пренебречь диссипацией энергии вследствие вязкости и теплопроводности; при необходимости то и другое нетрудно учесть так, как это сделано в уравнении движения. Пренебрегая термосилой и учитывая, что согласно (12.27) и (14.13)

$$Q_{ei} + Q_{ie} = -\mathbf{R} \cdot (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) = \frac{\alpha_{\parallel} j_{\parallel}^2}{e_e^2 n_e^2} + \frac{\alpha_{\perp} j_{\perp}^2}{e_e^2 n_e^2},$$

после несложных преобразований получаем искомое уравнение

$$p \frac{d}{dt} \ln \frac{p^{3/2}}{\rho^{5/2}} = \frac{\alpha_{\parallel} j_{\parallel}^2}{e_e^2 n_e^2} + \frac{\alpha_{\perp} j_{\perp}^2}{e_e^2 n_e^2}.$$

Его правая часть описывает джоулев нагрев. Для быстрых движений, когда скорость относительного движения $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ электронной и ионной компонент значительно меньше \mathbf{V} , джоулевым нагревом пренебрегают и используют уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^{\gamma}} = 0$$

с показателем адиабаты $\gamma = \frac{5}{3}$.

Задача 15.2. Чтобы вывести закон сохранения энергии в рамках идеальной одножидкостной магнитной гидродинамики, запишем уравнение непрерывности и уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}), \\ \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на $\frac{1}{2} V^2$, а второе на \mathbf{V} и выполнив почленное сложение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \mathbf{V} \right) - \mathbf{V} \cdot \nabla p + \frac{1}{4\pi} \mathbf{V} \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}].$$

Добавив сюда уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}],$$

умноженное на $\mathbf{B}/(4\pi)$, с помощью векторного тождества

$$\mathbf{V} \cdot [\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \cdot \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = -\text{rot} \mathbf{B} \cdot [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \cdot \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] = -\text{div}[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]]$$

объединяем слагаемые с \mathbf{B} справа в одно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) = -\text{div} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \mathbf{V} \right) - \mathbf{V} \cdot \nabla p - \frac{1}{4\pi} \text{div}[\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]].$$

Наконец, используем уравнение политропы

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0,$$

предварительно переписанное в виде

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{p} \mathbf{V} \cdot \nabla p + \frac{\gamma}{\rho} \mathbf{V} \cdot \nabla \rho.$$

Исключив отсюда производную $\partial \rho / \partial t$ с помощью уравнения непрерывности, после умножения на $p/(\gamma - 1)$, получим уравнение

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} p \text{div} \mathbf{V} - \frac{1}{\gamma - 1} \mathbf{V} \cdot \nabla p.$$

Добавив его к предыдущей сумме, свернём члены с p справа в одно слагаемое. В окончательном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = -\text{div} \left(\frac{\rho V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \mathbf{V} + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]] \right).$$

Выражение в левой стороне, очевидно, следует интерпретировать как производную плотности энергии плазмы. Она состоит из энергии направленного движения $\frac{1}{2} \rho V^2$, внутренней энергии плазмы $p/(\gamma - 1)$ и энергии магнитного поля $B^2/(8\pi)$. Соответственно, правая часть уравнения содержит поток энергии, который также состоит из трёх частей, причём поток энергии магнитного поля есть не что иное как вектор Пойнтинга, так как

$$\frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

Задача 15.4. Предполагая, что интегрирование в

$$K = \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) d^3x$$

проводится по области с неподвижной (твёрдой) границей, имеем

$$\frac{dK}{dt} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3x.$$

Производные $\partial A/\partial t$ и $\partial B/\partial t$ выражаем через электрическое поле E и электрический потенциал φ с помощью уравнений

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -c \operatorname{rot} E.$$

В получившемся выражении

$$\frac{dK}{dt} = -c \int (E \cdot B + \nabla \varphi \cdot B + A \cdot \operatorname{rot} E) d^3x$$

последнее слагаемое преобразуем с помощью векторного тождества

$$A \cdot \operatorname{rot} E = \operatorname{div}[E \times A] + E \cdot \operatorname{rot} A,$$

после чего первое слагаемое удваивается, так как $\operatorname{rot} A = B$. Далее замечаем, что $\nabla \varphi \cdot B = \operatorname{div}(\varphi B)$ вследствие уравнения $\operatorname{div} B = 0$, а $E \cdot B = 0$, так как в идеально проводящей плазме электрическое поле $E = -\frac{1}{c} [V \times B]$ перпендикулярно магнитному. Получившийся интеграл

$$\frac{dK}{dt} = -c \int \operatorname{div}(\varphi B + [E \times A]) d^3x$$

преобразуем к поверхностному с помощью теоремы Остроградского—Гаусса:

$$\frac{dK}{dt} = -c \oint (\varphi B + [E \times A]) \cdot dS.$$

Он равен нулю, если граница области интегрирования составлена из магнитных силовых линий. Действительно, первое слагаемое обращается в ноль, так как $B \cdot dS = 0$. Второе слагаемое также равно нулю, так как

$$[E \times A] \cdot dS = [dS \times E] \cdot A = -\frac{1}{c} [dS \times [V \times B]] \cdot A,$$

а вектор $[V \times B]$ на границе параллелен dS при условии, что $V \cdot dS = 0$ и $B \cdot dS = 0$.

Лекция 16

Задача 16.1. Умножим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})$$

на x_μ и проинтегрируем по всему доступному объёму. Пусть система находится в стационарном состоянии, тогда производная по времени равна нулю и, следовательно,

$$\int x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\rho V_\mu V_\nu + P_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) d^3x = 0.$$

Интегрируя по частям и пренебрегая интегралом по поверхности, окружающей систему, заключаем, что

$$\int (\rho V_\mu V_\mu + P_{\mu\mu} + T_{\mu\mu}) d^3x = \int \left(\rho V^2 + 3p + \frac{B^2}{8\pi} \right) d^3x = 0.$$

Поскольку все члены в подынтегральном выражении положительны, равенство невозможно. Это означает, что изолированная система не может находиться в равновесии. Данное утверждение известно как теорема вириала (В. Д. Шафранов, 1963 [151]). Учёт отброшенного поверхностного интеграла делает равенство возможным, но в таком случае система не может считаться изолированной.

Задача 16.2. Докажем сначала равенство

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \left[\mathbf{h} \times \nabla \frac{1}{B} \right] \cdot \nabla p = 0, \quad (1)$$

где интегрирование осуществляется вдоль силовой линии между точками s_1 и s_2 пересечения магнитной силовой линии с торцами. Оно следует из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} j_{\parallel} + \operatorname{div} j_{\perp} = 0$$

и поэтому называется *условием замыкания токов*. Так как

$$\operatorname{div} j_{\parallel} = \operatorname{div} \left(\frac{j_{\parallel}}{B} B \right) = B \cdot \nabla \left(\frac{j_{\parallel}}{B} \right) = B \frac{\partial}{\partial s} \frac{j_{\parallel}}{B},$$

имеем

$$\frac{j_{\parallel}}{B} = \operatorname{const} - \int \frac{ds}{B} \operatorname{div} j_{\perp}.$$

Приравнявая нулю j_{\parallel} на торцах, получаем

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \operatorname{div} j_{\perp} = 0. \quad (2)$$

Поперечный ток выражаем из уравнения равновесия изотропной плазмы:

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla p].$$

Так как $\operatorname{rot} \nabla p = 0$,

$$\operatorname{div} j_{\perp} = c \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) \cdot \nabla p.$$

Поскольку $(\mathbf{j} \cdot \nabla p) = 0$ и, следовательно, $(\operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0$, получаем равенство

$$\operatorname{div} j_{\perp} = c \left[\mathbf{B} \times \nabla \frac{1}{B^2} \right] \cdot \nabla p = 2c \left[\mathbf{h} \times \nabla \frac{1}{B} \right] \cdot \nabla p.$$

Его подстановка в (2) завершает вывод уравнения (1).

Рассмотрим теперь две соседние поверхности $p = \operatorname{const}$ и $p + \Delta p = \operatorname{const}$ и введём ось координат ξ_1 по нормали к ним. Другую ось координат ξ_2

расположим в плоскости $p = \text{const}$ перпендикулярно силовым линиям. В результате получим систему криволинейных ортогональных координат (ξ_1, ξ_2, s) . Градиент давления ∇p имеет только одну отличную от нуля компоненту $\partial p / \partial \xi_1$, поэтому уравнение (1) приводится к виду

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{B} = 0.$$

Вычислим этот интеграл для тонкой магнитной трубки (образованной силовыми линиями) с прямоугольным сечением $\Delta \xi_1 \times \Delta \xi_2$. Вдоль такой трубки

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_1} = \frac{\Delta p}{\Delta \xi_1}, \quad \frac{\partial B^{-1}}{\partial \xi_2} = \frac{\Delta B^{-1}}{\Delta \xi_2},$$

а $\Delta p = \text{const}$ и $\Delta \Phi = B \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 = \text{const}$, поэтому

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{B} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} \frac{\Delta p}{\Delta \xi_1} \frac{\Delta B^{-1}}{\Delta \xi_2} = \frac{\Delta p}{\Delta \Phi} \int_{s_1}^{s_2} ds \Delta B^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{s_1}^{s_2} ds \Delta B^{-1} = 0.$$

Наконец, если торцевые поверхности ортогональны силовым линиям, то

$$\int_{s_1}^{s_2} ds \Delta B^{-1} = \Delta \int_{s_1}^{s_2} ds B^{-1},$$

где выражение справа означает разность значений интеграла

$$U = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B},$$

вычисленного для двух соседних силовых линий на поверхности $p = \text{const}$. Равенство $\Delta U = 0$ означает, что величина U не меняется на поверхности постоянного давления, что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что

$$U \Delta \Phi = \int ds \frac{\Delta \Phi}{B}$$

есть объём магнитной трубки, через которую проходит магнитный поток $\Delta \Phi$. В связи с этим U называют удельным объёмом магнитной трубки. Очевидно также, что утверждение о постоянстве давления на поверхности $U = \text{const}$ верно и для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями; именно для последнего случая оно было впервые получено Б. Б. Кадомцевым.

Задача 16.3. Найдём минимум энергии магнитного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int B^2 d^3x \quad (1)$$

при заданной спиральности

$$K = \int (B \cdot A) d^3x. \quad (2)$$

Для этого составим функцию Лагранжа

$$L = \int \{B^2 - \lambda \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\} d^3x$$

с неопределённым множителем λ и вычислим её вариацию

$$\delta L = \int \{(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \cdot \delta \mathbf{B} - \lambda \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{A}\} d^3x.$$

Учитывая, что $\delta \mathbf{B} = \text{rot } \delta \mathbf{A}$, первое слагаемое в δL преобразуем с помощью векторного тождества

$$(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \cdot \text{rot } \delta \mathbf{A} = -\text{div}[(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A}] + \delta \mathbf{A} \cdot \text{rot}(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}).$$

В полученном выражении слагаемое

$$-\int \text{div}[(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A}] d^3x$$

преобразуется к интегралу по поверхности, окружающей плазму, и при подходящем выборе граничных условий обращается в нуль. Оставшееся выражение

$$\delta L = \int \{\text{rot}(2\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) - \lambda \mathbf{B}\} \cdot \delta \mathbf{A} d^3x$$

обращается в нуль при любой вариации $\delta \mathbf{A}$, если равно нулю выражение в фигурных скобках. Так как $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, приходим к уравнению

$$\text{rot } \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}. \quad (3)$$

При наличии аксиальной симметрии его решением является винтовое поле (16.17). Из (3) находим также, что

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B},$$

откуда и из формул (1), (2) следует соотношение

$$K = \frac{1}{\lambda} \int B^2 d^3x = \frac{8\pi}{\lambda} W.$$

Параметр λ определяется по заданному значению спиральности K , после чего уже легко вычислить энергию магнитного поля $W = \lambda K / (8\pi)$.

Задача 16.4. Формулы (16.27) для вектора намагничивания $\mathbf{M} = -(p_{\perp} / B^2) \mathbf{B}$ и (16.28) для плотности диамагнитного тока $\mathbf{j}_{\mu} = c \text{rot } \mathbf{M}$ верны в общем случае, если давление вычислять по релятивистской формуле $p_{\perp} = \sum_s n_s \langle m \gamma v_{\perp}^2 / 2 \rangle_s$.

Задача 16.5. При вычислении тока, вызванного градиентным дрейфом, нужно умножить скорость этого дрейфа (4.27) на плотность заряда $e_s n_s$ частиц соответствующего сорта, выполнить суммирование по сортам частиц

и усреднение по скоростям. Так как скорость дрейфа пропорциональна квадрату поперечной скорости v_{\perp} , результат усреднения

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = \frac{c p_{\perp}}{B^2} [\mathbf{h} \times \nabla B] \quad (1)$$

выражается через давление плазмы $p_{\perp} = \sum_s n_s \left\langle \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right\rangle_s = \sum_s n_s T_{\perp s}$ поперёк магнитного поля. Скорость центробежного дрейфа (4.33) пропорциональна квадрату продольной скорости частиц v_{\parallel} , поэтому соответствующий ток

$$\mathbf{j}_{\text{cf}} = \frac{c p_{\parallel}}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \quad (2)$$

выражается через продольное давление плазмы $p_{\parallel} = \sum_s n_s \langle m v_{\parallel}^2 \rangle_s = \sum_s n_s T_{\parallel s}$.

Задача 16.6. Добавим к сумме градиентного и центробежного токов

$$\frac{c p_{\perp}}{B} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{c p_{\parallel}}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}]$$

слагаемое

$$\frac{c p_{\perp}}{B} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}),$$

направленное вдоль магнитного поля. Как станет ясно в итоге вычислений, с ним сократится такое же слагаемое в диамагнитном токе, и результирующий вектор будет перпендикулярен магнитному полю. Перегруппировав слагаемые, запишем сумму

$$\frac{c p_{\perp}}{B} \left[\mathbf{h} \times \left(\frac{\nabla B}{B} + (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right) \right] + \frac{c p_{\perp}}{B} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}) - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Использував сначала векторное тождество

$$[\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] + \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}) = \text{rot } \mathbf{h},$$

а затем

$$\left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla B}{B} \right] + \text{rot } \mathbf{h} = B \text{rot } \frac{\mathbf{h}}{B},$$

свернём слагаемые, пропорциональные $c p_{\perp} / B$:

$$c p_{\perp} \text{rot } \frac{\mathbf{h}}{B} - \frac{c(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}].$$

Затем прибавим диамагнитный ток

$$-c \text{rot } \frac{p_{\perp} \mathbf{h}}{B} = -c p_{\perp} \text{rot } \frac{\mathbf{h}}{B} + \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}].$$

При этом часть слагаемых вновь сократится. Так как $(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = \boldsymbol{\kappa}$, в окончательном виде

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}] - \frac{c}{B} (p_{\perp} - p_{\parallel}) [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}].$$

Задача 16.7. В магнитном поле с прямыми силовыми линиями $\kappa = 0$ и

$$j_{\perp} = \frac{c}{B} \frac{dp_{\perp}}{dr}.$$

Дрейфовый ток вызван градиентом магнитного поля:

$$j_{dr} = \frac{cp_{\perp}}{B^2} \frac{dB}{dr}.$$

С помощью уравнения поперечного равновесия

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const}$$

находим

$$j_{dr}/j_{\perp} = -4\pi p_{\perp}/B^2.$$

Задача 16.8. В анизотропной плазме

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{B} \{ [\mathbf{h} \times \nabla p_{\perp}] - (p_{\perp} - p_{\parallel}) [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \}. \quad (1)$$

Преобразуем сначала второе слагаемое, исключив вектор кривизны $\boldsymbol{\kappa}$ с помощью векторного тождества

$$[\mathbf{h} \times \text{rot } \mathbf{h}] = \nabla \frac{h^2}{2} - (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = -(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = -\boldsymbol{\kappa}.$$

Тогда

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] = [\mathbf{h} \times [\text{rot } \mathbf{h} \times \mathbf{h}]] = \text{rot } \mathbf{h} - \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}).$$

Далее заметим, что

$$(\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}) = \left(\mathbf{h} \cdot \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{B} \right) = \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{B} \right) = \frac{4\pi}{cB} j_{\parallel},$$

так как

$$\left(\mathbf{h} \cdot \left[\nabla \frac{1}{B} \times \mathbf{B} \right] \right) = 0.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] = \text{rot } \mathbf{h} - \frac{4\pi}{cB} j_{\parallel}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), вычислим дивергенцию \mathbf{j}_{\perp} . Учитывая векторное тождество $\text{rot } \nabla p_{\perp} = 0$, получим:

$$\text{div } \mathbf{j}_{\perp} = c \nabla p_{\perp} \cdot \text{rot } \frac{\mathbf{h}}{B} - c \text{div} \left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \text{rot } \mathbf{h} - \frac{4\pi}{c} \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} j_{\parallel} \right).$$

Так как $\text{div } \mathbf{j}_{\perp} = -\text{div } \mathbf{j}_{\parallel}$, отсюда следует равенство

$$-\frac{1}{c} \text{div} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) j_{\parallel} \right\} = \nabla p_{\perp} \cdot \text{rot } \frac{\mathbf{h}}{B} - \text{div} \left\{ \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \text{rot } \mathbf{h} \right\}. \quad (2)$$

Преобразуем его правую часть к более симметричному виду. Выполнив дифференцирование с учётом тождества $\text{div } \text{rot } \mathbf{h} = 0$, получим

$$\text{rot } \mathbf{h} \cdot \left(\frac{\nabla p_{\perp}}{B} - \nabla \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B} \right) - \frac{\nabla p_{\perp}}{B^2} \cdot [\nabla B \times \mathbf{h}].$$

Далее воспользуемся доказанным выше тождеством

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] + \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h})$$

и перегруппируем слагаемые в круглых скобках:

$$([\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] + \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h})) \cdot \left(\frac{\nabla p_{\parallel}}{B} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \nabla B \right) - \frac{\nabla p_{\perp}}{B^2} \cdot [\nabla B \times \mathbf{h}].$$

Из уравнения продольного равновесия (16.24) следует

$$\mathbf{h} \cdot \left(\frac{\nabla p_{\parallel}}{B} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \nabla B \right) = 0,$$

поэтому слагаемые, содержащие $(\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h})$, взаимно сокращаются. В оставшемся выражении

$$[\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \left(\frac{\nabla p_{\parallel}}{B} + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \nabla B \right) - \frac{\nabla p_{\perp}}{B^2} \cdot [\nabla B \times \mathbf{h}]$$

все градиенты ∇B можно заменить на $\nabla_{\perp} B$, не меняя результат, а затем исключить с помощью уравнений поперечного равновесия (16.22) и (16.23):

$$\nabla_{\perp} B = -\frac{4\pi}{B} \nabla_{\perp} p_{\perp} + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{B} (B^2 + 4\pi p_{\perp} - 4\pi p_{\parallel}).$$

В итоге уравнение (2) принимает следующий вид:

$$-\frac{1}{c} \operatorname{div} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) \mathbf{j}_{\parallel} \right\} = [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla (p_{\perp} + p_{\parallel}).$$

Левую часть этого уравнения можно переписать в виде

$$-\frac{1}{c} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) \frac{j_{\parallel}}{B} \right\} = -\frac{B}{c} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(1 + 4\pi \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2} \right) \frac{j_{\parallel}}{B} \right\},$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Поделив затем всё равенство на B и выполнив интегрирование по s вдоль магнитной силовой линии между точками s_1 и s_2 за пределами плазмы, где $j_{\parallel} = 0$, получим *условие замыкания токов* для анизотропной плазмы:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{B} [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla (p_{\perp} + p_{\parallel}) = 0. \quad (3)$$

Задача 16.9. В изотропной плазме, где $(\mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0$, магнитной поверхностью является поверхность $p = \text{const}$. В цилиндрических координатах магнитное поле с винтовой симметрией описывается векторным потенциалом с компонентами

$$A_r = 0, \quad A_{\theta} = A_{\theta}(r, \theta - \alpha z), \quad A_z = A_z(r, \theta - \alpha z).$$

Вычислив компоненты магнитного поля

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z}, \quad B_{\theta} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta},$$

нетрудно проверить, что $(\mathbf{B} \cdot \nabla \psi) = 0$, если

$$\psi = A_z(r, \theta - \alpha z) + \alpha r A_{\theta}(r, \theta - \alpha z).$$

Отсюда следует, что все магнитные линии лежат на поверхности $\psi = \text{const}$, а давление постоянно на этой поверхности, если $p = p(\psi)$. В частном случае трансляционной симметрии $\alpha = 0$ и $\psi = A_z(r, \theta)$. Для осесимметричной конфигурации $\psi = r A_{\theta}(r, z)$.

Список литературы

1. Котельников И. А., Ступаков Г. В. Лекции по физике плазмы. — Новосибирск : НГУ, 1996. ⇨ 3, 122
2. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. — М. : Физматлит, 1961. ⇨ 4, 171
3. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. — 3-е изд. — М. : Интеллект, 2008. ⇨ 35, 45, 71, 186
4. Кралл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы / Под ред. А. М. Дыхне. — М. : Мир, 1975. ⇨ 16
5. Лукьянов С. Ю. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. — М. : Наука, 1975. ⇨
6. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. — М. : Атомиздат, 1979. ⇨ 71, 88, 109, 129
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — 2-е, доп. изд. — М. : Наука, 1966. ⇨ 122, 129, 145
8. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. — Долгопрудный : Интеллект, 2009. ⇨ 109, 122, 129, 144, 145, 321
9. Чен Ф. Введение в физику плазмы. — М. : Мир, 1987. ⇨
10. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — 2-е, испр. и доп. изд. — М. : Наука, 1988. ⇨ 23, 277
11. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы / Под ред. проф. А. А. Рухадзе. — 2-е, перераб. изд. — М. : Высшая школа, 1988. ⇨
12. Трубников Б. А. Теория плазмы. — М. : Энергоатомиздат, 1996. ⇨ 109
13. Лукьянов С. Ю., Ковальский Н. Г. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. — М. : МИФИ, 1997. ⇨ 129, 171
14. Александров А. Ф., Рухадзе А. А. Лекции по электродинамике плазмopodobных сред. — М. : Изд-во МГУ, 1999. ⇨ 16
15. Freidberg J. P. Ideal Magnetohydrodynamics. — New York and London : Plenum Press, 1987. ⇨ 248, 277
16. Freidberg J. P. Plasma Physics and Fusion Energy. — Cambridge University Press, 2007. ⇨ 217, 263
17. Миямото К. Основы физики плазмы и управляемого синтеза: Перевод с англ. / Под ред. В. Д. Шафранова. — М. : Физматлит, 2007. ⇨ 4
18. Вейнберг С. Гравитация и космология / Под ред. Я. А. Смородинского. — М. : Мир, 1975. ⇨ 4
19. Crookes William. On radiant matter: a lecture delivered to the British Association for the Advancement of Science, at Sheffield, Friday, August 22, 1879. — Philadelphia: James W. Queen & Co., 1879. ⇨ 7

20. Вейсман А. Д. Греческо-русский словарь, Репринт V-го издания 1899 г. — М. : Греко-латинский кабинет Ю. А. Шичалина, 1991. ▷ 9
21. Langmuir Irving. Oscillations in Ionized Gases // National Academy of Sciences of the United States of America. — 1928. — Vol. 14. — P. 627–637. ▷ 10, 11, 15, 98, 278
22. Tonks L. The birth of “plasma” // American Journal of Physics. — 1967. — Vol. 35. — P. 857–858. ▷ 10
23. Браун С. Краткая история газовой электроники // Успехи физ. наук. — 1981. — Т. 133, № 4. — С. 693. ▷ 11
24. Mott-Smith Harold M. History of “Plasmas” // Nature. — 1971. — September 17. — Vol. 233. — P. 219. ▷ 11
25. Tonks Lewi, Langmuir Irving. Oscillations in Ionized Gases // Physical Review. — 1929. — Vol. 33. — P. 195–211. ▷ 12, 15
26. Schottky W. Diffusionstheorie der positiven säule // Physik. Zeits. — 1924. — Vol. 25. — P. 635. ▷ 12
27. Tonks Lewi, Langmuir Irving. A General Theory of the Plasma on an Arc. // Physical Review. — 1929. — Vol. 34. — P. 876–922. ▷ 12
28. Debye P., Hückel E. Zur Theorie der Elektrolyte. I. Gefrierpunktserniedrigung und verwandte Erscheinungen // Physikalische Zeitschrift. — 1923. — no. 9. — P. 185–206. ▷ 13, 25, 279
29. Child C. D. Discharge from Hot CaO // Phys. Rev. (Series I). — 1911. — Vol. 32, no. 5. — P. 492–511. ▷ 14
30. Langmuir I. The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum // Phys. Rev. — 1913. — Vol. 2. — P. 450–486. ▷ 14
31. Dittmer Arthur F. Experiments on the Scattering of Electrons by Ionized Mercury Vapor // Phys. Review. — 1926. — Vol. 28. — P. 507–520. ▷ 15
32. Penning F. M. Scattering of electrons in ionized gases // Nature. — 1926. — Aug. 28. — Vol. 118. — P. 301–312. ▷ 15
33. Penning F. M. Abnormale electronensnelheden en Trilligen van Zeer Hooge Frequentie in Ontladingsbuizen // Physica. — 1926. — Vol. 6. — P. 241–248. ▷ 15
34. Huba Jn. D. NRL Formulary. — Washington : Naval Research Laboratory, 2009. ▷ 16, 137, 141
35. Рябов В. А., Царев В. А., Цховребов А. М. Поиски частиц темной материи // Успехи физических наук. — 2008. — Т. 178, № 11. — С. 1129–1164. ▷ 16
36. Ван Аллен Дж. А. О радиационной опасности при космических полетах // Успехи физ. наук. — 1960. — Т. 70, № 4. — С. 715–724. ▷ 19
37. Чудаков А. Е., Вернов С. Н. Исследования космических лучей и земного корпускулярного излучения при полетах ракет и спутников // Успехи физ. наук. — 1960. — Т. 70, № 4. — С. 585–619. ▷ 19
38. Alfven H. On the Motion of a Charged particle in a Magnetic Field // Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. — 1940. — Vol. 27A, no. 22. ▷ 20
39. Альфвен Х. Космическая электродинамика. — М. : Изд-во иностр. лит., 1952. ▷ 20

40. Alfven H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves // *Nature*. — 1942. — Vol. 150. — P. 405–406. ▷ 20, 254
41. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. : Изд-во АН СССР, 1958. — Т. 1–3. ▷ 21
42. Бишоп А. С. Проект Шервуд: Пер. с англ. — М. : Госатомиздат, 1960. ▷ 21, 81
43. Котельников И. А. Генезис Плазмы, или история одного слова // *Вестник НГУ, серия Физика*. — 2008. — Т. 4, № 2. — С. 108–117. ▷ 23
44. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. — М. : Наука, 1976. — Т. V. Статистическая физика, часть 1. ▷ 27, 32, 45
45. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. — М. : Наука, 1979. — Т. X. Физическая кинетика. ▷ 28, 35, 141, 180, 186, 202
46. Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // *Zeitschrift für Physik*. — 1927. — Vol. 43. — P. 172–198. ▷ 30
47. Planck M. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum // *Verhandl. Deutsch. Phys. Ges.* — 1900. — Bd. 2. — S. 237–245. ▷ 30
48. Planck Max. Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum // *Ann. Phys.* — 1901. — Bd. 309, H. 3. — S. 553–563. ▷ 30
49. de Broglie L. Recherches sur la théorie des quanta : Thèse de doctorat / L. de Broglie ; Paris. — 1924. ▷ 30, 46
50. Fermi Enrico. Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico // *Rend. Lincei*. — 1926. — Vol. 3. — P. 145–149. ▷ 31
51. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. — М. : Наука, 1989. — Т. V. Квантовая электродинамика. ▷ 119, 121, 129, 145, 314, 320
52. Saha M. N. Ionization in the solar chromosphere // *Phil. Mag.* — 1920. — Vol. 40. — P. 472–478. ▷ 41
53. Bohr N. On the Constitution of Atoms and Molecules // *Phil. Mag.* — 1913. — Vol. 26. — P. 1–25. ▷ 45
54. Lorentz H. A. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants // *Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*. — 1892. — Vol. 25. — P. 363–552. ▷ 49
55. Lorentz H. A. Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Less than that of Light // *Proceedings of the Academy of Sciences of Amsterdam*. — 1904. — Vol. 6. — P. 809–831. ▷ 56
56. Alfven H. On the motion of a charged particle in a magnetic field // *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. — 1940. — Vol. 27A, no. N:0 22. — P. 1–20. ▷ 59, 63, 80
57. Будкер Г. И. Вопросы, связанные с дрейфом частиц в тороидальном термоядерном реакторе // *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. : Изд-во АН СССР, 1958, работа выполнена в 1951 г. — Т. 1. — С. 66–76. ▷ 71

58. Сивухин Д. В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. — М. : Атомиздат, 1963. — Т. 1. — С. 7–97. ▷ 71
59. Морозов А. И., Соловьёв Л. С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. — М. : Атомиздат, 1963. — Т. 2. — С. 177–261. ▷ 71, 88, 299
60. Jackson John David. Classical Electrodynamics. — 3rd edition. — University of California, Berkeley, John Wiley & Sons, Inc., 2001. ▷ 71, 80
61. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. — М. : Наука, 1988. — Т. I. Механика. ▷ 76
62. Будкер Г. И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М. : Изд-во АН СССР, 1958, работа выполнена в 1954 г. — Т. 3. — С. 3–31. ▷ 81, 340
63. Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. Процессы переноса в аксиально-несимметричных открытых ловушках // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М. : Энергоатомиздат, 1983. — Т. 13. — С. 74–159. ▷ 88
64. Чириков Б. В. Динамика частиц в магнитных ловушках // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — Т. 13. — С. 3–73. ▷ 89, 302
65. Kotelnikov I. A. Breakdown of the adiabatic invariant of charged particles in long open system for plasma // Proc. Int. Conf. Open Plasma Confinement Systems for Fusion (Novosibirsk, 1993) / Ed. by A. A. Kabantsev. — Singapore : IAEA, World Scientific, 1993. — P. 545–550. ▷ 89, 303
66. Родионов С. Н. Экспериментальная проверка поведения заряженных частиц в адиабатической ловушке // Атомная энергия. — 1959. — Т. 6. — С. 623–629. ▷ 89
67. Gibson Gordon, Jordan Willard C., Lauer Eugene J. Containment of Positrons in a Mirror Machine // Phys. Rev. Lett. — 1960. — Vol. 5, no. 4. — P. 141–144. ▷ 89
68. Rutherford E. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom // Philosophical Magazine. — 1911. — Vol. 21. — P. 669–688. ▷ 93
69. Dreicer H. Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. I // Phys. Rev. — 1959. — Vol. 115, no. 2. — P. 238–249. ▷ 106
70. Dreicer H. Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. II // Phys. Rev. — 1960. — Vol. 117, no. 2. — P. 329–342. ▷ 106
71. Lieberman Michael A., Lichtenberg Allan J. Principles of Plasma Discharges and Materials Processing. — Wiley-Interscience, 1994. ▷ 109
72. Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизированной плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. : Атомиздат, 1963. — Т. 1. — С. 98–182. ▷ 109, 202

73. Сивухин Д. В. Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. : Атомиздат, 1964. — Т. 4. — С. 81–187. ▷ 109, 202
74. Larmor J. On a dynamical theory of the electric and luminiferous medium.— Part 3. Relations with material media // Philosophical Transactions of the Royal Society. — 1897. — Vol. 190. — P. 205–300. ▷ 115
75. Röntgen W.C. On a new kind of rays // Nature. — 1896. — 23 January 1896. — Vol. 53. — P. 274–276. ▷ 117
76. Элементарные процессы в высокотемпературной плазме : Препр. ИЯФ СО АН СССР : 80-110 / Институт ядерной физики ; исполн.: В. П. Жданов. — Новосибирск : 1980. ▷ 122
77. Stefan J. Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur // Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. — Wien, 1879. — Bd. 79. — S. 391–428. ▷ 124
78. Boltzmann L. Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie // Annalen der Physik und Chemie. — 1884. — Vol. 22. — P. 291–294. ▷ 124
79. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. — М. : Наука, 1989. — Т. III. Квантовая механика. ▷ 127
80. Коган В. Я., Лисица В. С. Радиационные процессы в плазме // Итоги науки и техники. Физика плазмы / Под ред. Б. Б. Кадомцева. — ВИНТИ, 1983. — Т. 4. — С. 194–273. ▷ 129
81. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. — М. : Наука, 1988. — Т. II. Теория поля. ▷ 129, 314, 317, 318
82. Трубников Б. А. Универсальный коэффициент выхода циклотронного излучения из плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — Москва : Атомиздат, 1973. — Т. 7. — С. 274–300. ▷ 129
83. Thomson J. J. On the Scattering of Rapidly Moving Electrified Particles // Philosophical Magazine. — 1912. — Vol. 23. — P. 449–457. ▷ 133
84. ALADDIN // Atomic and Molecular Data. — Vienna, Austria : IAEA. — URL: <http://www-amdis.iaea.org/ALADDIN/> (online; accessed: 16.01.2012). ▷ 134, 135, 139
85. Elwert G. Über die Ionisations und Rekombinationsprozesse in einem plasma und die Ionisationsformel der Sonnenkorona // Zeitschrift Naturforschung Teil A. — 1952. — Vol. 7, no. 2. — P. 432. ▷ 144
86. Елецкий А. В., Смирнов Б. М. Элементарные процессы в плазме // Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана. — М. : Энергоатомиздат, 1983. — Т. 1. — С. 58–81. ▷ 145
87. Смирнов Б. М. Введение в физику плазмы. — 2-е, перераб. изд. — М. : Наука, 1982. ▷ 145
88. Aston F. W. Isotope and Atomic Weights // Nature. — 1920. — Vol. 105. — P. 617–619. ▷ 149

89. Андрушин И. А., Чернышёв А. К., Юдин Ю. А. Укрощение ядра. Страницы истории ядерного оружия и ядерной инфраструктуры СССР / Под ред. Р. И. Ильяева. — Саров: Красный октябрь, 2003. ⇨ 150
90. Artsimovich L. A. Untersuchungen Über Impulsentladungen im Zusammenhang mit der Möglichkeit von Kontrollierbaren Thermonuklearen Reaktionen // International Astronomical Union Symposium No. 6, Electromagnetic Phenomena In Cosmical Physics / Ed. by B. Lehnert ; Stockholm, August, 1956. — Cambridge : The University Press, 1958. — P. 451–463. ⇨ 149, 166
91. Urey H. C., Brickwedde Ferdinand G., Murphy G. M. A Hydrogen Isotope of Mass 2 // Physical Review. — 1932. — Vol. 39. — P. 164–165. ⇨ 151
92. Cockcroft J. D., Walton E. T. S. Artificial Production of Fast Protons // Nature. — 1932. — February 13. — Vol. 129. — P. 242. ⇨ 151
93. Cockcroft J. D., Walton E. T. S. Disintegration of Lithium by Swift Protons // Nature. — 1932. — April 16. — Vol. 129. — P. 649. ⇨ 151
94. M. L. E. Oliphant, P. Harteck, Lord Rutherford. Transmutation Effects Observed with Heavy Hydrogen // Proceedings of the Royal Society, A. — 1934. — Vol. 144. — P. 692–703. ⇨ 151
95. Luis W. Alvarez, Robert Cornog. Helium and Hydrogen of Mass 3 // Phys. Rev. — 1939. — Vol. 56. — P. 613. ⇨ 151
96. Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars // The Observatory. — 1920. — Vol. 43, no. 341–358. ⇨ 152
97. Heindler M, Kernbichler W. Advanced fuel fusion // Emerging Nuclear Energy Systems 1989, Proceedings of the Fifth International Conference / ICENES. — World Scientific, 1989. — P. 177–182. ⇨ 154
98. EXFOR // Experimental Nuclear Reaction Data. — Vienna, Austria : IAEA, 2011. — URL: <http://www-nds.iaea.org/exfor> (online; accessed: 16.01.2012). ⇨ 159, 160, 171
99. Some Criteria for a Useful Thermonuclear Reactor : Rep. : A.E.R.E. report GP/R 1807 / A.E.R.E. ; Executor: J. D. Lawson : 1955, declassified April 9th, 1957. — December. ⇨ 166
100. Lawson J. D. Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor // Proceedings of Physical Society B. — Vol. 70, pt.1. — 1957. — P. 6–10. ⇨ 166
101. Тамм И. Е. Теория магнитного термоядерного реактора. Часть I. Свойства высокотемпературной плазмы, находящейся в магнитном поле // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М. : Изд-во АН СССР, 1958, работа выполнена в 1951 г. — Т. 1. — С. 3–19. ⇨ 168
102. Сахаров А. Д. Теория магнитного термоядерного реактора. Часть II // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М. : Изд-во АН СССР, 1958, работа выполнена в 1951 г. — Т. 1. — С. 20–30. ⇨
103. Тамм И. Е. Теория магнитного термоядерного реактора. Часть III. Дрейф и теплопроводность плазмы при наличии стабилизирующего

- тока // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. — М. : Изд-во АН СССР, 1958, работа выполнена в 1951 г. — Т. 1. — С. 31–41. ▷▷ 168
104. (Paper CN24/B1) / L. A. Artsimovich, G. A. Bobrovskii, E. P. Gorbunov et al. // Proc. 3rd Int. Conf. on Plasma Physics and Nuclear Fusion / International Atomic Energy Agency, Vienna. — Vol. 1. — Novosibirsk, USSR, 1968, 1969. — P. 157. ▷▷ 168
105. Measurement of the Electron Temperature by Thomson Scattering in Tokamak T3 / N. J. Peacock, D. C. Robinson, M. J. Forrest et al. // Nature. — 1969. — November 1. — Vol. 224. — P. 488–4990. ▷▷ 168
106. Nuckolls John, Wood Lowell, Thiessen Albert and Zimmerman George. Laser Compression of Matter to Super-High Densities: Thermonuclear (CTR) Applications // Nature. — 1972. — Vol. 239. — P. 139–142. ▷▷ 169
107. Басов Н. Г., Лебо И. Г., Розанов В. Б. Физика лазерного термоядерного синтеза. — М. : Знание, 1988. ▷▷ 171
108. Moreau D. C. Potentiality of the proton-boron fuel for controlled thermonuclear fusion // Nuclear Fusion. — 1977. — Feb. — Vol. 17. — P. 13–20. ▷▷ 171
109. Wittenberg L. J., Santarius J. F., Kulcinski G. L. Lunar source of ^3He for commercial fusion power // Fusion Technology. — 1986. — Vol. 10. — P. 167–178. ▷▷ 171
110. Шафранов В. Д. Первый период истории термоядерных исследований в Курчатовском институте // Успехи физических наук. — 2001. — Т. 171, № 8. — С. 877–886. ▷▷ 171
111. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8, № 3. — С. 291. ▷▷ 180
112. Хинтон Ф. Явление переноса в столкновительной плазме // Основы физики плазмы / Под ред. Р.З. Сагдеева и М. Розенблюта. — М. : Энергоатомиздат, 1983. — Т. 1. — С. 152–200. ▷▷ 183, 202, 217, 248
113. Fokker A. D. Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld // Ann. Phys. (Leipzig). — 1914. — Vol. 43. — P. 810–820. ▷▷ 183
114. Planck M. Über einen Satz der statistischen Dynamik and seine Erweiterung in der Quantentheorie // Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. — 1917. — S. 324–341. ▷▷ 183
115. Rosenbluth M. N., MacDonald W. M., Judd D. L. Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force // Physical Review. — 1957. — Vol. 107, no. 1. — P. 1–6. ▷▷ 193
116. Landau L.D. Die kinetische gleichung für den fall Coulombscher wechsellwirkung // Physikalische Zeitschrift der Sowjet Union. — 1936. — Vol. 10. — P. 154–164. ▷▷ 193, 235, 342
117. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ. — 1937. — Т. 7. — С. 203–209. ▷▷ 193, 202, 342
118. Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen // Wiener Berichte. — 1872. — Bd. 66. — S. 275–370. ▷▷ 199

119. O'Neil T. M. Nonneutral Plasmas Have Exceptional Confinement Properties // *Comments Plasma Phys. Contr. Fusion.* — 1980. — Vol. 5, no. 5. — P. 213–217. ⇨ 207
120. Malmberg J. H., Driscoll C. F. Long-Time Confinement of a Pure Electron Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 44, no. 10. — P. 654–657. ⇨ 207
121. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // *Вопросы теории плазмы* / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. : Атомиздат, 1963. — Т. 1. — С. 183–272. ⇨ 217, 224, 235, 248, 349
122. Калсруд Р. Магнитогидродинамическое описание плазмы // *Основы физики плазмы* / Под ред. Р.З. Сагдеева и М. Розенблюта. — М. : Энергоатомиздат, 1983. — Т. 1. — С. 122–151. ⇨ 217, 248
123. Волков Т. Ф. Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы // *Вопросы теории плазмы* / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. : Атомиздат, 1964. — Т. 4. — С. 3–19. ⇨ 263
124. Chapman S. On the law of distribution of molecular velocities, and on the theory viscosity and thermal conduction, in a non-uniform simple monoatomic gas // *Philos. Trans. R. Soc. London.* — 1916. — Vol. 216. — P. 279–348. ⇨ 218
125. Enskog D. Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen : Diss. Ph. D. / D. Enskog ; Uppsala University. — Uppsala, 1917. ⇨ 218
126. Chapman S., Cowling T.G. The Mathematical Theory of NonUniform Gases. — Cambridge : Cambridge University Press, 1939. ⇨ 218
127. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. — 511 с. ⇨
128. Cowling T. G. The Electrical Conductivity of an Ionized Gas in a Magnetic Field, with Applications to the Solar Atmosphere and the Ionosphere // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* — 1945. — Vol. 183. — P. 453–479. ⇨ 218
129. Брагинский С. И. Явление переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 33. — С. 459. ⇨ 218
130. Брагинский С. И. О поведении полностью ионизованной плазмы в сильном магнитном поле // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 33. — С. 645. ⇨ 218
131. Epperlein E. M. The accuracy of Braginskii's transport coefficients for a Lorentz plasma // *Phys. Fluids.* — 1984. — Vol. 17. — P. 1823–1827. ⇨ 218
132. Epperlein E. M., Haines M. G. Plasma transport coefficients in a magnetic field by direct numerical solution of the Fokker–Planck equation // *Phys. Fluids.* — 1986. — Vol. 29. — P. 1029–1041. ⇨ 218, 248, 349
133. Thomson William. On a mechanical theory of thermoelectric currents // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* — 1851. — P. 91–98. ⇨ 234
134. O'Neil T. M., Driscoll C. F. Transport to thermal equilibrium of a pure electron plasma // *Phys. Fluids.* — 1979. — Vol. 22, no. 2. — P. 266–277. ⇨ 239
135. Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I // *Phys. Rev.* — 1931. — Vol. 37, no. 4. — P. 405–426. ⇨ 243
136. Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II // *Physical Review.* — 1931. — Vol. 38, no. 12. — P. 2265–2279. ⇨ 243

137. Bohm D. Minimum ionic kinetic energy for a stable sheath // The Characteristic of Electrical Discharges in Magnetic Fields / Ed. by A. Guthrie, R. K. Wakerling. — New York : McGraw-Hill Book Company, Inc., 1949. — Vol. 5 of National Nuclear Energy Series. — P. 197. ⇨ 244
138. Spitzer Lyman Jr. Particle Diffusion across a Magnetic Field // Phys. Fluids. — 1960. — Vol. 3. — P. 659–661. ⇨ 244
139. Hall Edwin. On a New Action of the Magnet on Electric Currents // American Journal of Mathematics. — 1879. — November. — Vol. 2. — P. 287–292. ⇨ 246, 248
140. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E. The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1956. — Vol. 236. — P. 112–118. ⇨ 262
141. Taylor J. B. Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields // Phys. Rev. Lett. — 1974. — Vol. 33. — P. 1139–1141. ⇨ 270
142. Brillouin Leon. A Theorem of Larmor and Its Importance for Electrons in Magnetic Fields // Phys. Rev. — 1945. — Vol. 67, no. 7-8. — P. 260–266. ⇨ 279
143. Coriolis G.-G. Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps // J. de l'Ecole royale polytechnique. — 1835. — Vol. 15. — P. 144–154. ⇨ 291
144. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М. : ПХД, 2002. ⇨ 299
145. Балакин А. А. Интеграл парных электрон-ионных столкновений в переменных электромагнитных полях // Физика плазмы. — 2008. — Т. 34, № 12. — С. 1059–1070. ⇨ 304
146. Kramers H. A. On the Theory of X-Ray Absorption and of the Continuum X-Ray Spectrum // Philosophical Magazine. — 1923. — Vol. 46. — P. 836–871. ⇨ 314
147. Spitzer Lyman, Härm Richard. Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 89. — P. 977–981. ⇨ 342
148. Einstein Albert. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // Annalen der Physik. — 1905. — Bd. 322, H. 8. — S. 549–560. ⇨ 348
149. Balescu R. Transport Processes in Plasmas. Classical transport theory. — Elsevier Science, 1988. — Vol. 1. ⇨ 361
150. Geissler Klaus H. Classical and Anomalous Diffusion of an Afterglow Plasma // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 171, no. 1. — P. 179–180. ⇨ 363
151. Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. : Атомиздат, 1963. — Т. 2. — С. 92–131. ⇨ 367

Оглавление

Предисловие	3
Лекция 1. Общие сведения о плазме	7
1.1. Плазма как состояние вещества	7
1.2. Квазинейтральность	8
1.3. Определение плазмы	9
1.4. Генезис физики плазмы	9
1.5. Дебаевское экранирование	12
1.6. Ленгмюровские колебания	14
1.7. Практические формулы	16
1.8. Плазма в природе	16
Литература	23
Задачи	23
Лекция 2. Дебаевское экранирование	24
2.1. Экранирование пробного заряда	24
2.2. Энергия кулоновского взаимодействия в плазме	27
2.3. Плазменный параметр	28
2.4. Идеальная и неидеальная плазмы	29
2.5. Классическая и вырожденная плазмы	30
2.6. Классификация плазмы	32
Литература	35
Задачи	35
Лекция 3. Ионизационное равновесие	37
3.1. Уравнение Саха	38
3.2. Степень ионизации плазмы	42
3.3. Ограниченность теории Саха	44
Литература	45
Задачи	45
Лекция 4. Движение заряженных частиц	48
4.1. Дрейфовое приближение	48
4.2. Движение в однородном магнитном поле	49
4.3. Электрический дрейф	53
4.4. Дрейф под действием малой силы	58
4.5. Гравитационный дрейф	60
4.6. Градиентный дрейф	61
4.7. Центробежный дрейф	63
4.8. Поляризационный дрейф	66
4.9. Дрейф в неоднородном электрическом поле	69
4.10. Скорость движения ведущего центра	70
Литература	71
Задачи	72
Лекция 5. Адиабатические инварианты	74
5.1. Магнитный момент	74
5.2. Первый адиабатический инвариант	75
5.3. Система уравнений ведущего центра	78
5.4. Магнитные пробки	80
5.5. Второй адиабатический инвариант	84
5.6. Третий адиабатический инвариант	87
Литература	88
Задачи	89
Лекция 6. Кулоновские столкновения	91
6.1. Параметры столкновений	91

6.2. Дифференциальное сечение рассеяния	93
6.3. Транспортное сечение	95
6.4. Кулоновский логарифм	97
6.5. Приближение далёких пролётов	98
6.6. Парные столкновения	101
6.7. Торможение пробной частицы	103
6.8. Остывание пробной частицы	106
6.9. Релаксация начального состояния	108
Литература	109
Задачи	109
Лекция 7. Излучение плазмы	112
7.1. Типы радиационных переходов	112
7.2. Тормозное излучение	114
7.3. Рекомбинационное излучение	120
7.4. Длина пробега излучения	122
7.5. Излучение спектральных линий	125
7.6. Циклотронное излучение	127
Литература	129
Задачи	130
Лекция 8. Элементарные процессы в плазме	131
8.1. Ионизация электронным ударом	132
8.2. Тройная рекомбинация	135
8.3. Ступенчатая ионизация	137
8.4. Фоторекомбинация	140
8.5. Фотоионизация	141
8.6. Резонансная перезарядка	142
8.7. Корональное равновесие	144
Литература	145
Задачи	145
Лекция 9. Термоядерные реакции	146
9.1. Физика ядерных реакций	146
9.2. Топливные циклы	149
9.3. Кулоновский барьер	156
9.4. Параметры термоядерных реакций	158
9.5. Зажигание термоядерной реакции	162
9.6. Управляемый термоядерный синтез	168
Литература	171
Задачи	171
Лекция 10. Кинетическое уравнение	173
10.1. Функция распределения	173
10.2. Кинетическое уравнение	175
10.3. Самосогласованное поле	177
10.4. Уравнение Фоккера—Планка	181
10.5. Рассеяние пробных частиц	184
Литература	186
Задачи	187
Лекция 11. Интеграл столкновений	188
11.1. Интеграл столкновений Ландау	189
11.2. Законы сохранения в столкновениях частиц	193
11.3. Упрощение интеграла столкновений	194
11.4. H-теорема	199
Литература	202
Задачи	202

Лекция 12. Двухжидкостная магнитная гидродинамика	204
12.1. Динамика установления равновесия	205
12.2. Моменты функции распределения	207
12.3. Моменты кинетического уравнения	209
12.4. Двухжидкостная гидродинамика	216
Литература	217
Задачи	217
Лекция 13. Уравнения переноса	218
13.1. Кинетические коэффициенты	219
13.2. Теплопроводность плазмы	220
13.3. Уравнение теплопроводности	224
13.4. Термосила	228
13.5. Проводимость плазмы	229
13.6. Перенос тепла током	232
13.7. Вязкость плазмы	232
13.8. Выделение тепла	234
Литература	235
Задачи	235
Лекция 14. Процессы переноса в магнитном поле	236
14.1. Амбиполярная диффузия	237
14.2. Кинетические коэффициенты в магнитном поле	241
14.3. Бомовская диффузия	244
14.4. Обобщённый закон Ома	245
14.5. Эффект Холла	246
Литература	248
Задачи	248
Лекция 15. Одножидкостная магнитная гидродинамика	250
15.1. Плазма как сплошная среда	251
15.2. Идеальная магнитная гидродинамика	253
15.3. Вмороженность магнитного поля	254
15.4. Тензор напряжений магнитного поля	258
15.5. Гидродинамика анизотропной плазмы	260
15.6. Адиабаты Чу—Голдбергера—Лоу	262
Литература	263
Задачи	263
Лекция 16. Равновесие плазмы	264
16.1. Равновесие изотропной плазмы	264
16.2. Равновесие в пинчах	266
16.3. Бессилловые конфигурации	269
16.4. Равновесие в токамаке	271
16.5. Равновесие анизотропной плазмы	274
16.6. Плазма как диамагнетик	275
Литература	277
Задачи	277
Ответы и решения к задачам	278
Список литературы	373

Учебное электронное издание

Котельников Игорь Александрович

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Ведущий редактор *И. Я. Ицхоки*

Обложка: *И. Е. Марев*

Художественный редактор *Н. А. Новак*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Корректор *Д. И. Мурадян*

Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете \LaTeX 2 ϵ

Подписано 13.08.13. Формат 70×100/16.

Усл. печ. л. 31,2.

Издательство «БИНOM. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: binom@Lbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 10-й для операционных систем Windows, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry