

# Programmation de séries temporelles en finance

## ENSIMAG 3A - 2024 - IF - MeQA

### Programmation du modèle SQRGARCH

## 1 Introduction

L'objectif de ce projet est de programmer un modèle de série temporelle afin de pouvoir :

1. Calibrer le modèle à partir de données historiques de n'importe quelle origine
2. Simuler des trajectoires du modèle

La calibration doit automatiquement calculer les différents paramètres du modèle à partir de données historiques. Ce processus de calibration fera appel à différentes fonctions à implémenter pour le modèle auquel nous nous intéressons ici.

Ce modèle est le modèle dit **SQRGARCH**, pour "Square-Root Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity".

Toutes nos fonctions implémentées pour SQRGARCH sont fonctionnelles. Comparées aux résultats numériques, nos gradients et hessiennes sont corrects.

## 2 Modèle SQRGARCH

Le modèle SQRGARCH (*Square-Root Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*) est une extension du modèle GARCH (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*), développée pour modéliser la volatilité des séries temporelles financières. Introduit par Heston et Nandi (2000), ce modèle est étroitement lié au modèle VGARCH d'Engle et Ng (1993).

Le modèle SQRGARCH est parfois également désigné sous le nom de modèle Heston GARCH ou modèle Heston-Nandi GARCH.

La calibration du modèle SQRGARCH à partir de données historiques est essentielle pour estimer les paramètres du modèle.

### 2.1 Le Modèle et ses paramètres

Le modèle SQRGARCH est formulé comme suit :

$$h(t) = Const + \sum_{i=1}^p ARCH[i] \left( U[t-i] - Gamma[i] \sqrt{h(t-i)} \right)^2 + \sum_{j=1}^q GARCH[j] \cdot h[t-j] \quad (1)$$

Dans cette équation,  $h(t)$  représente la variance conditionnelle de la série temporelle à un instant  $t$ . Les termes  $ARCH[i]$  et  $GARCH[j]$  sont les coefficients ARCH et GARCH respectivement, tandis que  $U[t-i]$  désigne les résidus à un décalage temporel  $i$ . Les coefficients  $Gamma[i]$  capturent la relation entre les résidus précédents et la volatilité conditionnelle actuelle.

## 2.2 Utilisation en Finance

Le modèle SQRGARCH est largement utilisé en finance pour modéliser la volatilité des prix d'actifs financiers. Il permet une meilleure compréhension des processus stochastiques sous-jacents aux mouvements de prix observés sur les marchés financiers.

En particulier, le modèle SQRGARCH trouve des applications importantes dans la tarification des options et la gestion des risques financiers. En fournissant une estimation plus précise de la volatilité future des actifs, il aide les investisseurs et les gestionnaires de portefeuille à prendre des décisions éclairées concernant leurs stratégies d'investissement et de couverture.

En résumé, le modèle SQRGARCH constitue un outil essentiel pour les praticiens de la finance, offrant une approche robuste et flexible pour la modélisation de la volatilité des séries temporelles financières.

La spécification du modèle SQRGARCH permet de capturer à la fois les effets de volatilité persistante observés dans les données financières, ainsi que les réponses asymétriques aux chocs. Cela en fait un outil puissant pour la modélisation des séries temporelles financières, où de telles caractéristiques sont courantes.

## 3 Manuel Utilisateur

Pour utiliser, compiler et lancer les test, il suffit de lancer le fichier RegArch23Etudiants.sln.

L'exécution du projet de test, en particulier le fichier TestCPlusPlusDeriv.cpp, permet de visualiser et tester les résultats. Pour essayer d'autres paramètres de modèle, il faut se rendre dans TestCPlusPlusDeriv.cpp

## 4 Nos résultats

En lançant le fichier TestCPlusPlusDeriv.cpp, on obtient les résultats de comparaisons entre modèle théorique et notre modèle codé:

```
Modèle :
Régression avec des résidus de type ARCH :
-----
Distribution normale standardisée conditionnelle

Paramètres de la moyenne conditionnelle :
-----
Moyenne constante avec :
    Constante = 10 \\
Modèle AR(2) avec :
    AR[1] = 0.8 \\
    AR[2] = -0.2 \\
Modèle MA(2) avec :
    MA[1] = 0.4 \\
    MA[2] = 0.6 \\

Paramètres de la variance conditionnelle :
-----
Modèle SQRGARCH(1, 1) avec :
    Constante = 0.1 \\
```

```
ARCH[1] = 0.2 \\
GARCH[1] = 0.7 \\
GAMMA[1] = 0.2 \\
```

Voilà les résultats et comparaisons:

Table 1: Comparaison des gradients de  $\mu$

	Notre Modèle	Modèle existant
Grad Mu	0.5	0.5
Grad Mu Numérique	13.36	13.36
Grad Var	13.43	13.43
Grad Var Numérique	-0.01973	-0.02006
Grad Sigma	1.172	1.172
Grad Sigma Numérique	0	0
Grad Eps	0	0
Grad Eps Numérique	0	0
Grad Dens	0	0
Grad Dens Numérique	0	0

Table 2: Comparaison des gradients de la variance

	Notre Modèle	Modèle existant
Grad Var	-0.1008	-0.09925
	-2.457	-2.369
	-2.655	-2.633
	0.005801	0.006158
	-0.02216	-0.0222
	3.244	3.244
	0.9406	0.9405
	1.917	1.922
	-0.1512	-0.1511

 Table 3: Comparaison des gradients de  $\sigma$ 

	Notre Modèle	Modèle existant
Grad Sigma	-0.06941	-0.06832
	-1.692	-1.631
	-1.828	-1.813
	0.003993	0.004239
	-0.01525	-0.01528
	2.233	2.233
	0.6475	0.6474
	1.32	1.323
	-0.1041	-0.104

Table 4: Comparaison des gradients de  $\varepsilon$ 

	Notre Modèle	Modèle existant
Grad Eps	-0.7472	-0.7471
	-19.83	-19.82
	-20.04	-20.04
	0.03055	0.03121
	-1.626	-1.626
	1.894	1.893
	0.5493	0.5491
	1.12	1.12
	-0.08829	-0.08825

Table 5: Comparaison de la différence de log-densité

	Notre Modèle	Modèle existant
Diff LogDens	0.6162	0.6159

Table 6: Comparaison des hessiens de  $\mu$

Notre Modèle			Modèle existant		
0	0	0	$-3.553 \times 10^{-11}$	$-4.441 \times 10^{-10}$	$-1.776 \times 10^{-9}$
0	0	0	$-4.441 \times 10^{-10}$	0	$-2.22 \times 10^{-8}$
0	0	0	$-1.776 \times 10^{-9}$	$-2.22 \times 10^{-8}$	$-8.882 \times 10^{-8}$
-0.25	-7.092	-5.928	-0.25	-7.091	-5.927
-0.25	-5.928	-6.614	-0.2499	-5.927	-6.611
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Table 7: Comparaison des hessiens de la variance  $\mu$

Notre Modèle								
0.3725	9.82	9.723	0.1251	-0.07421	0.6637	-0.2205	0.2947	0.5465
9.752	257.5	254.7	2.788	-1.824	17.45	-4.707	8.655	14.3
9.689	255.5	253.4	2.79	-1.953	17.33	-5.801	8.317	14.17
0.1465	3.371	3.337	1.935	-0.2243	0.2952	0.01183	-0.5755	0.3089
-0.08434	-2.073	-2.19	-0.2342	0.735	-0.05994	-0.1307	0.1346	-0.06034
0.009677	0.2929	0.2863	-0.03662	0.003682	0.5424	-0.2246	12.89	0.09321
-0.473	-11.3	-12.32	-0.1428	-0.09673	-0.2246	-0.217	4.839	0.02463
-0.1314	-2.513	-2.779	-0.7758	0.1619	12.89	4.839	16.62	-0.1463
0.5586	14.65	14.49	0.3359	-0.05515	0.09321	0.02463	-0.1463	-0.08295
Modèle existant								
0.3174	8.372	8.279	0.2301	0.01181	0.2876	-0.4059	0.04183	0.4681
8.372	221.2	218.4	6.059	0.2646	7.616	-9.503	2.071	12.3
8.279	218.4	216.4	5.564	0.5805	7.532	-10.85	1.538	12.15
0.2301	6.059	5.564	1.784	-1.348	0.1309	0.1289	-0.5166	0.327
0.01181	0.2646	0.5805	-1.348	-0.1466	-0.02811	-0.1273	0.06857	-0.06071
0.2876	7.616	7.532	0.1309	-0.02811	0.526	-0.2764	11.04	-0.02608
-0.4059	-9.503	-10.85	0.1289	-0.1273	-0.2764	-0.2478	3.968	-0.7719
0.04183	2.071	1.538	-0.5166	0.06857	11.04	3.968	14.08	-0.2398
0.4681	12.3	12.15	0.327	-0.06071	-0.02608	-0.7719	-0.2398	0.6962

Table 8: Comparaison des hessiens de la variance:  $\sigma$

Notre Modèle								
0.2498	6.598	6.519	0.08653	-0.05254	0.6702	-0.08989	0.329	0.3662
6.551	173.3	171	1.928	-1.291	17.21	-1.732	9.031	9.602
6.495	171.6	169.9	1.93	-1.383	17.55	-2.364	9.045	9.495
0.1012	2.329	2.307	1.332	-0.1543	0.1909	0.004584	-0.4034	0.2132
-0.05952	-1.463	-1.546	-0.1611	0.5056	0.00562	-0.0764	0.1203	-0.04372
0.22	5.401	5.815	-0.03748	0.04942	-6.49	-2.145	4.818	0.3841
-0.2637	-6.271	-6.85	-0.1019	-0.05299	-2.145	-0.7265	2.155	0.1097
0.03565	1.344	1.408	-0.5413	0.1392	4.818	2.155	9.044	0.08838
0.3746	9.843	9.714	0.2318	-0.04015	0.3841	0.1097	0.08838	-0.07201
Modèle existant								
0.2121	5.61	5.528	0.1588	0.006691	0.408	-0.2185	0.1532	0.3124
5.61	148.6	146.3	4.181	0.1478	10.26	-5.088	4.396	8.233
5.528	146.3	144.4	3.84	0.3615	10.76	-5.855	4.36	8.107
0.1588	4.181	3.84	1.228	-0.9281	0.07704	0.08498	-0.3633	0.2257
0.006691	0.1478	0.3615	-0.9281	-0.1012	0.02762	-0.07402	0.07503	-0.04398
0.408	10.26	10.76	0.07704	0.02762	-6.502	-2.18	3.535	0.3018
-0.2185	-5.088	-5.855	0.08498	-0.07402	-2.18	-0.7476	1.552	-0.4386
0.1532	4.396	4.36	-0.3633	0.07503	3.535	1.552	7.281	0.02442
0.3124	8.233	8.107	0.2257	-0.04398	0.3018	-0.4386	0.02442	0.4643



Table 9: Comparaison des hessiens de l'erreur quadratique moyenne (Eps)

Notre Modèle								
0.06909	1.963	1.735	0.4246	0.1285	3.047	0.6423	1.744	0.1952
1.923	54.7	48.54	11.58	2.862	79.97	17.49	46.3	5.099
1.715	49.06	43.26	9.986	3.419	81.26	17.24	46.9	4.962
0.4371	11.92	10.31	3.404	1.068	0.05763	-0.02636	-0.4039	0.1857
0.1226	2.716	3.281	1.062	1.156	5.044	1.396	3.081	-0.272
2.665	69.95	71.31	-0.1361	5.082	-17.15	-5.197	-2.796	0.8686
0.4948	13.63	13.43	-0.1167	1.416	-5.197	-1.596	-0.1679	0.2505
1.495	39.78	40.42	-0.5209	3.097	-2.796	-0.1679	3.604	0.3958
0.2023	5.304	5.148	0.2015	-0.2689	0.8686	0.2505	0.3958	-0.08639
Modèle existant								
0.04409	1.413	1.035	0.4884	0.1813	2.827	0.5302	1.596	0.1534
1.413	44.09	33.97	13.62	4.224	74.21	14.49	42.44	4.149
1.035	33.97	24.21	11.64	4.932	75.52	14.23	42.96	3.839
0.4884	13.62	11.64	3.312	0.4144	-0.04165	0.04104	-0.3703	0.1965
0.1813	4.224	4.932	0.4144	0.6497	5.06	1.398	3.044	-0.2721
2.827	74.21	75.52	-0.04165	5.06	-17.14	-5.221	-3.892	0.7981
0.5302	14.49	14.23	0.04104	1.398	-5.221	-1.612	-0.6833	-0.2147
1.596	42.44	42.96	-0.3703	3.044	-3.892	-0.6833	2.064	0.3412
0.1534	4.149	3.839	0.1965	-0.2721	0.7981	-0.2147	0.3412	0.3687