Автоколебания. Стоячие волны.

Малышев Павел

1 Содержание

2 Введение

Колебательные процессы встречаются практически во всех разделах физики — от механики и акустики до радиотехники и оптики. В простейших моделях мы изучаем либо свободные колебания, которые со временем затухают из-за потерь, либо вынужденные колебания, где периодическое внешнее воздействие задаёт частоту системы.

Однако в реальных физических системах существует третий, принципиально иной класс колебаний — **автоколебания**. Автоколебания возникают при постоянном подводе энергии и поддерживаются самой системой за счёт положительной обратной связи. В отличие от вынужденных колебаний, здесь частота и амплитуда не навязываются извне, а определяются внутренними свойствами системы и её нелинейностями. Такие колебания устойчивы и не зависят от начальных условий: система сама выходит на установившийся режим, который соответствует балансу между подводом и потерями энергии.

Во многих физических ситуациях автоколебания возникают в протяжённых системах, обладающих собственными резонансными модами. В этом случае автоколебательный механизм приводит к возбуждению стоячих волн, форма и частота которых определяются граничными условиями. Типичными примерами являются струны, трубы, резонаторы, а также колебания упругих тел.

В своём сообщении я рассмотрю теоретические основы автоколебаний и стоячих волн и покажу, как оба этих явления проявляются в простом и наглядном примере — **скрипе мела о доску**.

Этот эффект представляет собой автоколебательный процесс, возникающий из-за нелинейного трения, при котором возбуждается собственная стоячая волна в мелке, что и приводит к появлению характерного звука.

3 Затухающие и вынужденные колебания

Для понимания природы автоколебаний сначала рассмотрим поведение линейного гармонического осциллятора с потерями и внешним воздействием.

3.1 Затухающие колебания

Рассмотрим одномерный осциллятор массы m с линейной силой упругости и вязким трением:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Введём стандартные обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \gamma = \frac{b}{2m}.$$

Тогда уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

В случае слабого затухания ($\gamma < \omega_0$) решение имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Амплитуда колебаний экспоненциально убывает со временем:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

Это означает, что механическая энергия системы

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

также убывает со временем, так как часть энергии рассеивается силой трения.

Таким образом, в линейной системе с потерями свободные колебания всегда затухают и не могут поддерживаться бесконечно долго.

3.2 Вынужденные колебания

Теперь добавим внешнюю периодическую силу:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t).$$

В стандартной форме:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t).$$

Решение этого уравнения состоит из суммы затухающей переходной части и установившегося решения. Нас интересует установившийся режим, который имеет вид

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t - \delta).$$

Амплитуда вынужденных колебаний равна

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}.$$

Фазовый сдвиг между силой и откликом системы определяется соотношением

$$\tan \delta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Максимум амплитуды достигается при частоте

$$\Omega \approx \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

что соответствует явлению резонанса.

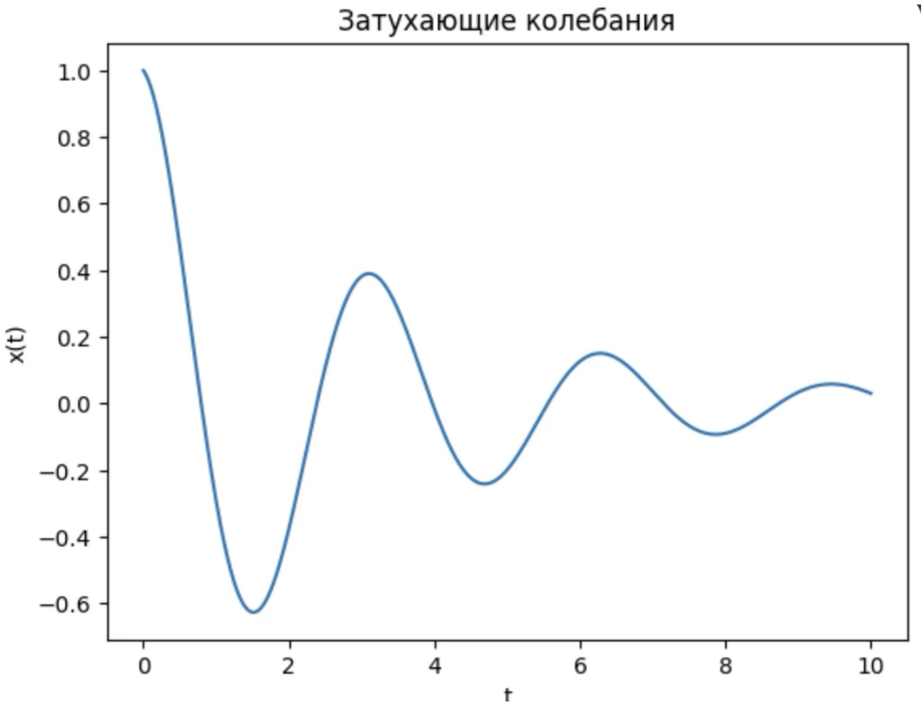

Рис. 1: Затухающие колебания линейного осциллятора: амплитуда экспоненциально убывает из-за потерь энергии.

Важно подчеркнуть, что в режиме вынужденных колебаний:

- частота колебаний **совпадает** с частотой внешней силы Ω;
- энергия, теряемая на трение, в точности компенсируется работой внешней силы за период;
- при исчезновении внешнего воздействия колебания снова затухают.

3.3 Ограниченность линейной модели

Затухающие и вынужденные колебания показывают, что:

- без подвода энергии колебания затухают;
- при периодическом подводе энергии система колеблется только на навязанной частоте;
- амплитуда определяется параметрами внешней силы.

Следовательно, линейная теория не описывает ситуацию, когда система:

- получает энергию от **постоянного** источника;
- сама выбирает частоту колебаний;
- выходит на устойчивый режим **независимо** от начальных условий.

Именно такие режимы реализуются в автоколебательных системах, к рассмотрению которых мы переходим далее.

4 Автоколебания

5 Скрип мела о доску как автоколебательный процесс и возбуждение стоячей волны

Рассмотрим скрип мела о доску как наглядный пример, в котором одновременно реализуются механизм автоколебаний и возбуждение собственной стоячей волны в упругом теле.

5.1 Механизм скрипа и автоколебания

При движении мела по доске сила трения не является постоянной и линейной функцией скорости. Важную роль играет так называемый режим *stick–slip* (прилипание–скольжение).

Физическая картина процесса следующая:

- при движении мела он периодически *прилипает* к поверхности доски;
- в фазе прилипания в мелке накапливается упругая деформация;
- при достижении предельной силы трения происходит *срыв* и быстрое скольжение;
- после срыва сила трения уменьшается, мел возвращается назад, и процесс повторяется.

Таким образом, при постоянной скорости движения руки реализуется периодический процесс, при котором энергия трения частично преобразуется в энергию механических колебаний. Это соответствует автоколебательному механизму: источник энергии постоянен, а периодичность возникает самопроизвольно за счёт нелинейной обратной связи.

Упрощённо движение мела можно описать уравнением вида

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(\dot{x}),$$

где сила трения $F(\dot{x})$ является нелинейной функцией скорости. В определённом диапазоне скоростей такая зависимость приводит к эффекту “отрицательного трения”, что вызывает самовозбуждение колебаний.

5.2 Собственная мода мела и стоячая волна

Мел является упругим стержнем конечной длины и, следовательно, обладает собственными колебательными модами. При удержании мела рукой один его конец оказывается практически зафиксирован, в то время как другой конец остаётся относительно свободным.

В первом приближении такая система эквивалентна резонатору с граничными условиями:

- у удерживаемого конца — узел смещения;
- у свободного конца — пучность смещения.

Для такой конфигурации основная мода соответствует четвертьволновому резонансу:

$$L \approx \frac{\lambda}{4},$$

где L — длина мела, λ — длина упругой волны в материале мела.

Соответствующая собственная частота порядка

$$f \approx \frac{u}{4L},$$

где u — скорость распространения упругих волн в мелке.

Именно эта собственная частота выбирается автоколебательным механизмом: трение подкачивает энергию наиболее эффективно на резонансной моде, что приводит к возбуждению стоячей волны вдоль мела.

5.3 Физический итог

Таким образом, скрип мела о доску представляет собой автоколебательный процесс, в котором:

- нелинейное трение реализует механизм самовозбуждения (stick–slip);
- мел как упругий стержень играет роль резонатора;
- в мелке возбуждается собственная стоячая волна;
- излучение этой волны в воздух воспринимается как резкий звук.

Отсутствие скрипа у короткого мела объясняется тем, что его собственные частоты выходят из слышимого диапазона, и автоколебательный режим становится неэффективным.