Апроксимація функцій чебишовськими многочленними сплайнами

Виконав: Левантович Б.М.
Керівник: доцент Пізюр Я.В.

На проміжку $[a, b]$ розглянемо множину точок $z = \{z_i\}_{i=0}^{r}$ $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = b$. Якщо на кожному проміжку $[z_{i-1}, z_i]$ функцію $f(x)$ наблизити виразом $F(A_i, x)$, то на всьому проміжку $[a, b]$ функція $f(x)$ буде наближена сплайном

$$S(F, x) = \sum_{i=1}^{r} F(A_i, x)\theta((x - z_{i-1})(z_i - x)) \qquad (1)$$

де

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{x} < 0 \\ 1 & \mathrm{x} \geq 0 \end{pmatrix} - \text{функція Хевісайда}$$

Сплайн (1), кожна ланка якого $F(A_i, x), i = \overline{1, r}$ є найкращим чебишовським наближенням функції $f(x)$ на проміжку $[z_{i-1}, z_i]$, називаємо чебишовським сплайном.

Система рівнянь для побудови ланки розривного чебишовського сплайна

$$\begin{cases} f(t_0^{(j)}) - a_0 - a_1 t_0^{(j)} - \cdots - a_m (t_0^{(j)})^m = \mu_j w(t_0^{(j)}), \\ f(t_1^{(j)}) - a_0 - a_1 t_1^{(j)} - \cdots - a_m (t_1^{(j)})^m = -\mu_j w(t_1^{(j)}), \\ \cdots \\ f(t_{m+1}^{(j)}) - a_0 - a_1 t_{m+1}^{(j)} - \cdots - a_m (t_{m+1}^{(j)})^m = (-1)^m \mu_j w(t_{m+1}^{(j)}). \end{cases} \qquad (2)$$

Система рівнянь для побудови парної ланки неперервного чебишовського сплайна

$$\begin{cases} f(t_0^{(j)}) - a_0 - a_1 t_0^{(j)} - \cdots - a_m \left(t_0^{(j)}\right)^m = -\mu_j w(t_0^{(j)}), \\ f(t_1^{(j)}) - a_0 - a_1 t_1^{(j)} - \cdots - a_m \left(t_1^{(j)}\right)^m = \mu_j w(t_1^{(j)}), \\ \cdots \\ f(t_{m+1}^{(j)}) - a_0 - a_1 t_{m+1}^{(j)} - \cdots - a_m \left(t_{m+1}^{(j)}\right)^m = (-1)^m \mu_j w(t_{m+1}^{(j)}). \end{cases} \qquad (3)$$

Система рівнянь для побудови ланки інтерполяційного чебишовського сплайна

$$\begin{cases} f(t_0^{(j)}) - a_0 - a_1 t_0^{(j)} - \cdots - a_m (t_0^{(j)})^m = 0, \\ f(t_1^{(j)}) - a_0 - a_1 t_1^{(j)} - \cdots - a_m (t_1^{(j)})^m = \mu_j w(t_1^{(j)}), \\ \cdots \\ f(t_m^{(j)}) - a_0 - a_1 t_m^{(j)} - \cdots - a_m (t_m^{(j)})^m = (-1)^m \mu_j w(t_m^{(j)}). \\ f(t_{m+1}^{(j)}) - a_0 - a_1 t_{m+1}^{(j)} - \cdots - a_m (t_{m+1}^{(j)})^m = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Рівномірне наближення чебишовськими сплайнами

Наближення функції $f(x)$ сплайном $S(F,x)$ називаємо рівномірним наближенням з заданою похибкою μ, якщо

$$\mu_i = \max_{x\in[z_{i-1},z_i]} |f(x) - S(F,x)|/w(x) = \mu, i = \overline{1, r-1}, \mu_r \leq \mu$$

Наближення функції $f(x)$ сплайном $S(F,x)$ називаємо рівномірним наближенням з заданою кількістю r ланок, якщо

$$\mu_i = \max_{x\in[z_0,z_1]} |f(x) - S(F,x)|/w(x) = \max_{x\in[z_{i-1},z_i]} |f(x) - S(F,x)|/w(x), i = \overline{2, r}$$

Точність апроксимації многочленними чебишовськими сплайнами

$$\varepsilon_c \approx \frac{1}{2^{2m+1} r^{m+1} (m+1)!} \left(\int_a^b \left| f^{(m+1)}(x) \right|^{\frac{1}{m+1}} dx \right)^{m+1}. \qquad (5)$$

$$r \approx \frac{2^{1/(m+1)}}{4[\varepsilon_c (m+1)!]^{1/(m+1)}} \int_a^b |f^{(m+1)}(x)|^{1/(m+1)} dx.$$

Приклад. $f(x) = 2^x, m = 1, x \in [0,1]$.

r	1	2	4	8	16	32
ε_c	$4.30 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
ε_{p}	$4.29 \cdot 10^{-2}$	$1.07 \cdot 10^{-2}$	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$	$4.18 \cdot 10^{-5}$

Функціональні можливості програми

Програма здійснює:

1) Рівномірне наближення з заданою похибкою;
2) Рівномірне наближення з заданою кількістю ланок;

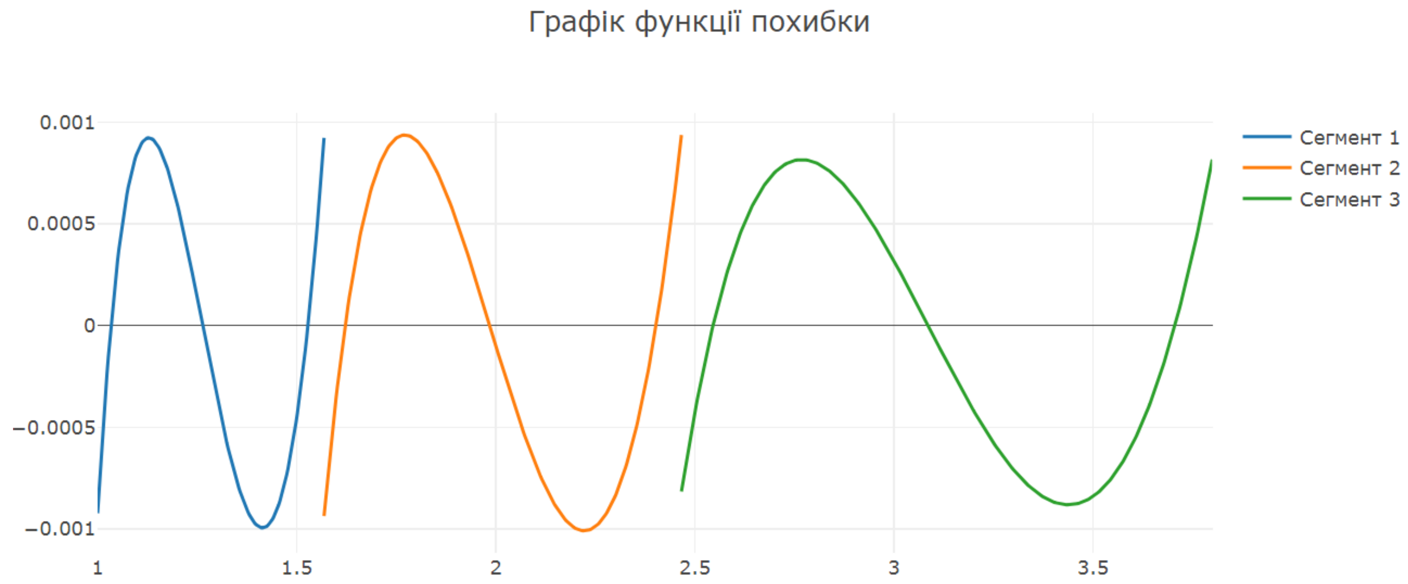
Види сплайнів:

1) Розривні; 2) Неперевні; 3) Інтерполяційні;

Дані задаються:

1) Дискретно у файлі; 2)Аналітичною формулою;

Приклад 1. Знайти рівномірне наближення чебишовським розривним сплайном 2-го степеня функції $f(x) = \ln(x)$ на проміжку $[1, 3.8]$ з заданою похибкою - 0,001.



Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.00100	$[1.000; 1.569]$	$-0.3133x^2 + 1.5933x - 1.2790$
2	0.00101	$[1.569; 2.466]$	$-0.1270x^2 + 1.0145x - 0.8277$
3	0.00088	$[2.466; 3.800]$	$-0.0525x^2 + 0.6520x - 0.3850$

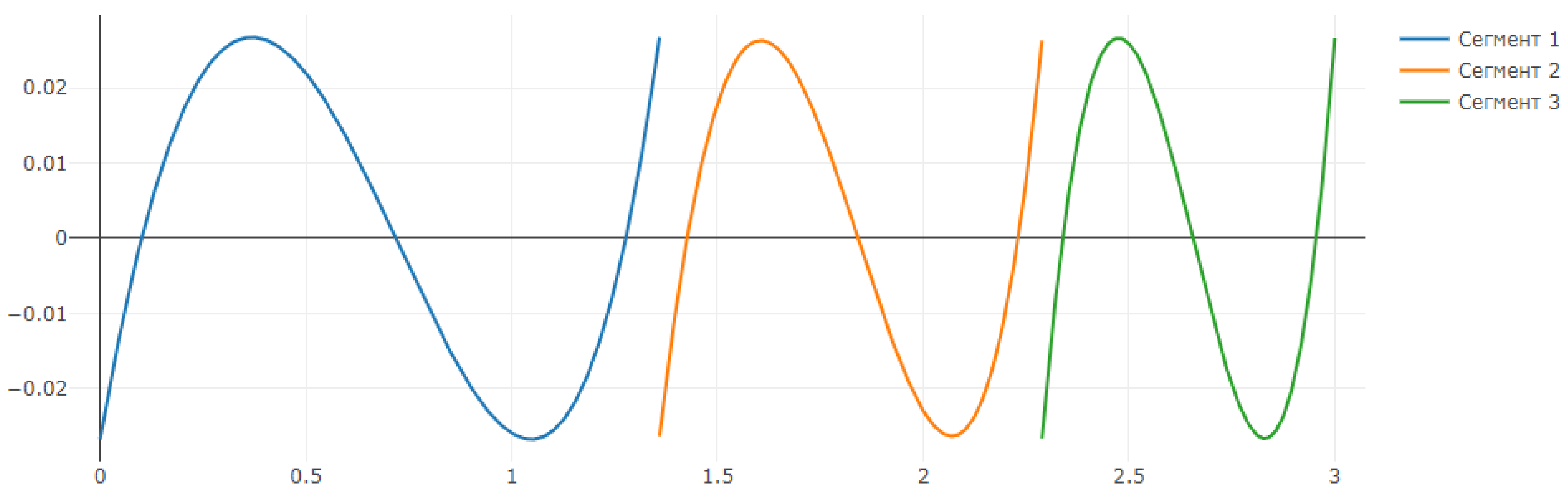
Приклад 2. Знайти рівномірне наближення чебишовським інтерполяційним сплайном 2-го степеня функції $f(x) = \ln(x)$ на проміжку $[1, 3.8]$ з заданою похибкою - 0,001.

Графік функції похибки

Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.00100	$[1.000; 1.487]$	$-0.3319x^2 + 1.6402x - 1.3082$
2	0.00099	$[1.487; 2.210]$	$-0.1502x^2 + 1.1034x - 0.9118$
3	0.00101	$[2.210; 3.291]$	$-0.0678x^2 + 0.7416x - 0.5146$
4	0.00005	$[3.291; 3.800]$	$-0.0399x^2 + 0.5655x - 0.2378$

Приклад 3. Знайти рівномірне наближення чебишовським розривним сплайном 2-го степеня функції $f(x) = e^x$ на проміжку $[0,3]$ з заданою кількістю ланок – 3

Графік функції похибки



Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.02676	$[0.000; 1.359]$	$1.0349x^2 + 0.6825x + 1.0267$
2	0.02634	$[1.359; 2.289]$	$3.1685x^2 - 5.1935x + 5.1249$
3	0.02665	$[2.289; 3.000]$	$7.1300x^2 - 23.4108x + 26.1207$

Приклад 4. Знайти рівномірне наближення чебишовським інтерполяційним сплайном 2-го степеня функції $f(x) = e^x$ на проміжку $[0,3]$ з заданою кількістю ланок – 3

Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.04125	$[0.000; 1.359]$	$1.0381x^2 + 0.7174x + 1.0$
2	0.04058	$[1.359; 2.289]$	$3.1733x^2 - 5.1543x + 5.0364$
3	0.04104	$[2.289; 3.000]$	$7.1362x^2 - 23.3687x + 25.9651$

Висновки

Чебишовське наближення функцій займає вагоме місце серед інших видів апроксимації, оскільки воно забезпечує найменшу похибку наближення та високу швидкість збіжності. Тому досліджуються і удосконалюються методи побудови наближень функцій чебишовськими сплайнами, а область їх застосування розширюється. У магістерській кваліфікаційній роботі отримано наступні результати:

1. Наведено означення чебишовських многочленних сплайнів і алгоритми побудови сплайнів з розривними, неперервними та інтерполяційними ланками.
2. Наведено алгоритми для побудови рівномірного наближення функцій чебишовськими многочленними сплайнами з заданою похибкою та заданою кількістю ланок.
3. Досліджено похибки рівномірних наближень функцій чебишовськими розривними, неперервними та інтерполяційними сплайнами. Наведено приклади, які підтверджують правильність отриманих оцінок похибок їх близькістю до реально отриманих похибок.
4. На основі проведених досліджень розроблено програму для побудови рівномірних наближень функцій цими сплайнами.

Дякую за увагу!