Наведено означення наближення функцій многочленними чебишовськими сплайнами. Наведено алгоритми побудови розривних, неперервних та інтерполяційних чебишовських сплайнів. Введено поняття рівномірного наближення функцій многочленними чебишовськими сплайнами та алгоритми його реалізації. Виведено формули для похибок такого наближення чебишовськими сплайнами. Написано програму на мові Python, яка будує рівномірні наближення функцій цими сплайнами, наведено приклади.

The definition of function approximation using splines of Chebyshev polynomials is presented. Algorithms of construction of discontinuous, continuous, interpolated Chebyshev splines are introduced. Concept of minimax approximation of functions using Chebyshev splines and construction algorithms of such approximation are introduced. Formulas for error estimation of such approximation are presented. Python program that implements function approximation using Chebyshev splines is written. Examples of the results of the program are included.

Зміст

Вступ

У багатьох галузях прикладної математики та інформатики для ефективного розв'язання задач необхідно моделювати функціональні залежності, які задані таблично. Інколи також виникає потреба використання простішої функції (многочлена) замість складної. Чебишовське наближення (його ще називають мінімаксним) застосовують для побудови моделей функціональних залежностей різних фізичних величин: формування керуючих сигналів у системах автоматичного керування [25, 28]; проектування контрольно-вимірювальних приладів, зокрема, для високоточного градуювання статичних характеристик сенсорів термометрів, вологомірів, пірометрів, розрахунку схем лінеаризації вимірювальних перетворювачів [6, 15]; побудови математичних моделей різноманітних неперервних процесів маючи дискретні результати вимірювань їхніх значень [4, 32]; для опису контурів проекцій деталей зі складними геометричними формами у машинобудуванні [28]; побудови алгоритмів обчислення функцій на мікропроцесорах для апроксимації складних функціональних залежностей простішими аналітичними виразами зручнішими для обчислення [3, 24, 32]. Особливістю моделей, які побудовані на основі мінімаксного наближення, є те, що вони забезпечують найменшу із можливих похибку апроксимації при заданій кількості параметрів. Саме це зумовлює їхню практичну цінність в отриманні розв'язків задач, для яких важлива висока точність відтворення функціональної залежності [11, 23]. До знаходження чебишовського наближення зводиться розв'язування багатьох наукових та інженерних задач, так як воно значно переважає інші види наближень за точністю апроксимації функцій [17, 29].

Проте використання на практиці мінімаксного наближення часто не є зручним, бо через обчислювальну похибку неможливо досягнути заданої точності [7, 23]. Цього недоліку не мають наближення сплайнами $S(x)$, які на деякому проміжку є наближеннями за допомогою відрізків многочленів степеня m, причому сплайн $S(x)$ неперевним разом з деякою кількістю похідних [1, 9]. Параметри сплайнів вибирають з умов узгодження значень функцій і похідних в точках стику. Вони легко обчислюються на комп'ютері і останнім часом отримали широке розповсюдження в багатьох областях математики. Властивості рівномірних сплайнів різних видів і алгоритми знаходження їхніх параметрів розглянуті в роботах [5, 12, 19, 23].

Метою магістерської роботи є дослідження многочленних чебишовських сплайнів і застосування їх для моделювання функціональних залежностей.

У першому розділі наведено основні поняття (поняття чебишовського наближення, означення чебишовського сплайна, рівномірного наближення із заданою точністю і заданою кількістю ланок) та алгоритми для побудови рівномірних наближень чебишовськими сплайнами.

Другий розділ присвячений дослідженню точності апроксимації многочленими чебишовськими сплайнами. У третьому розділі описано програму, яка здійснює побудову рівномірних наближень (із заданою точністю і заданою кількістю ланок) многочленними чебишовськими сплайнами.

Далі наведено висновки, отримані в результаті виконання магістерської кваліфікаційної роботи. У додатках містяться текст програми та скріншоти основних результатів роботи програми.

1. Побудова рівномірних наближень чебишовськими сплайнами

1.1. Побудова чебишовського многочленного наближення

За теоремою Вейєрштрасса [2] довільну неперервну функцію $f(x)$ можна наблизити многочленом $P_m(x)$ із будь-якою точністю ϵ. Серед усіх способів наближення функцій найменшу похибку дає найкраще чебишовське (мінімаксне) наближення [23]. Найкращим чебишовським зваженим наближенням називають вираз $F(A,x) \in F(B,x)$, для якого максимум модуля зваженої похибки досягає на проміжку $[a,b]$ найменшого значення

$$\min_{c \in B} \max_{x \in [a,b]} \frac{|f(x) - F(C,x)|}{w(x)} = \max_{x \in [a,b]} \frac{|f(x) - F(A,x)|}{w(x)}. \tag{1.1}$$

В працях [23, 26] і моїй бакалаврській кваліфікаційній роботі наведено теорему про існування многочленного чебишовського наближення, про побудову такого наближення. Щоб многочлен $P_m(x)$ був многочленом найкращого чебишовського наближення на $[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб на цьому проміжку існувала система з $m+2$ точок $T = \{t_k\}_{k=0}^{m+1}$ $a \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots \leq t_{m+1}$, у яких виконувались би такі рівності

$$\rho(t_0) = -\rho(t_1) = \rho(t_2) = \ldots = (-1)^{m+1}\rho(t_{m+1}) = \pm E(f,W), \tag{1.2}$$

де $\rho = \frac{f(x) - P_m(x)}{w(x)}, x \in [a,b]$ – зважена різниця, $w(x) \neq 0$ вагова функція, а $E(f,W) = \mu$ – зважене відхилення. Систему точок T називають точками альтернансу. Для побудови многочленного чебишовського наближення необхідно визначити точки альтернансу. На практиці їх знаходять ітераційними методами, розробленими українським математиком Ремезом Є. Я. [23, 26]. Він складається з таких етапів:

1. На проміжку $[a,b]$ вибирають початкове наближення T_0 до точок альтернансу $T : t_0^{(0)} < t_1^{(0)} < t_2^{(0)} < \ldots < t_{m+1}^{(0)}$.
2. Для цих точок будують чебишовську інтерполяцію, тобто знаходять коефіцієнти многочлена $P_m^{(i)}(x)$ і значення μ_j, для яких виконуються

умови $\rho(t_k^{(j)}) = (-1)^k \mu_k \quad k = \overline{0, m+1}$. Вони є розв'язками системи рівнянь:

$$\begin{cases} f(t_0^{(j)}) - a_0 - a_1 t_0^{(j)} - \ldots - a_m (t_0^{(j)})^m = \mu_j w(t_0^{(j)}), \\ f(t_1^{(j)}) - a_0 - a_1 t_1^{(j)} - \ldots - a_m (t_1^{(j)})^m = -\mu_j w(t_1^{(j)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(t_{m+1}^{(j)}) - a_0 - a_1 t_{m+1}^{(j)} - \ldots - a_m (t_{m+1}^{(j)})^m = (-1)^{m+1} \mu_j w(t_{m+1}^{(j)}). \end{cases} \tag{1.3}$$

Система (1.3) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $a_0, a_1, \ldots a_m$ та μ.

3. Якщо виконується рівність

$$|\mu_j| = \frac{\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_m^{(j)}(x)|}{w(x)} \equiv \rho_j, \tag{1.4}$$

то многочлен $P_m^{(j)}(x)$ і є многочленом найкращого чебишовського наближення. Процес побудови завершений.

4. Якщо умова (1.4) не виконується, то переходимо до заміни точок альтернансу за алгоритмом Валлє-Пуссена [23, 26, 29]. Суть алгоритму полягає у тому, що ми знаходимо точку $\tilde{x}$, у якій досягається максимальне відхилення $\rho_j = |\rho(\tilde{x})|$, і цю точку вводимо у систему точок альтернансу T замість однієї із сусідніх, у яких зважене відхилення $\rho(x)$ із тим же знаком за абсолютною величиною є меншим. Отже наступна система точок альтернансу відрізняється від попередньої тим, що точка $\tilde{x}$, у якій є максимум абсолютної величини зваженої похибки, вводиться у альтернанс замість однієї із старих точок. Далі знову переходимо до пункту 2. Відомо, що алгоритм Валле-Пуссена заміни точок альтернансу збігається незалежно від початкового наближення до точок альтернансу.

1.2. Означення та побудова многочленних чебишовських сплайнів

На проміжку $[a, b]$ розглянемо множину точок $z = \{z_i\}_{i=0}^{r}$ $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_r = b$. Якщо на кожному проміжку $[z_{i-1}, z_i]$ функції $f(x)$ наблизити виразом $F(A_i, x)$, то на всьому проміжку $[a, b]$ функція $f(x)$ буде наближена сплайном

$$S(F, x) = \sum_{i=1}^{r} F(A_i, x)\theta((x - z_{i-1})(z_i - x)), \tag{1.5}$$

де

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \text{ – функція Хевісайда.}$$

Сплайн (1.5), кожна ланка якого $F(A_i, x), i = \overline{1, r}$ є найкращим чебишовським наближенням функції $f(x)$ на проміжку $[z_{i-1}, z_i]$, називаємо чебишовським сплайном.

Ланки розривних чебишовських сплайнів будуються за алгоритмом наведеним у попередньому п. 1.1., а їхні параметри і похибку наближення знаходять із системи (1.3). Якщо у ланці сплайна використовуватимемо многочлен непарного степеня, то сплайн буде неперервним, бо знак біля похибки μ в правій частині останнього рівняння біжучої ланки і знак біля похибки μ в правій частині першого рівняння наступної ланки буде однаковим. Якщо ж у ланці сплайна стоятиме многочлен парного степеня, то знаки при похибці μ у цих рівняннях будуть протилежні, а тому розрив на межі ланок матиме величину 2μ. Щоб уникнути розриву, система рівнянь (1.3), з якої знаходять коефіцієнти многочлена чебишовського наближення і похибку μ для кожної парної за номером ланки, матиме вигляд

$$\begin{cases} f(t_0^{(j)}) - a_0 - a_1 t_0^{(j)} - \ldots - a_m (t_0^{(j)})^m = \mu_j w(t_0^{(j)}), \\ f(t_1^{(j)}) - a_0 - a_1 t_1^{(j)} - \ldots - a_m (t_1^{(j)})^m = -\mu_j w(t_1^{(j)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(t_{m+1}^{(j)}) - a_0 - a_1 t_{m+1}^{(j)} - \ldots - a_m (t_{m+1}^{(j)})^m = (-1)^m \mu_j w(t_{m+1}^{(j)}). \end{cases} \tag{1.6}$$

Для інтерполяційних сплайнів повинна виконуватись вимога рівності сплайна наближуваній функції на обох границях ланки, а тому система (1.3) набуде вигляду

$$\begin{cases} f(t_0^{(j)}) - a_0 - a_1 t_0^{(j)} - \ldots - a_m (t_0^{(j)})^m = 0, \\ f(t_1^{(j)}) - a_0 - a_1 t_1^{(j)} - \ldots - a_m (t_1^{(j)})^m = \mu_j w(t_1^{(j)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(t_m^{(j)}) - a_0 - a_1 t_m^{(j)} - \ldots - a_m (t_m^{(j)})^m = (-1)^m \mu_j w(t_m^{(j)}). \\ f(t_{m+1}^{(j)}) - a_0 - a_1 t_{m+1}^{(j)} - \ldots - a_m (t_{m+1}^{(j)})^m = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.3. Означення рівномірного наближення чебишовськими сплайнами

Наближення функції $f(x)$ сплайном $S(F,x)$ називаємо рівномірним наближенням з заданою похибкою μ, якщо

$$\mu_i = \max_{x \in [z_{i-1}, z_i]} |f(x) - S(F,x)|/w(x) = \mu, i = \overline{1, r-1}, \mu_r \leq \mu \tag{1.8}$$

Наближення функції $f(x)$ сплайном $S(F,x)$ називаємо рівномірним наближенням з заданою кількістю r ланок, якщо

$$\mu_i = \max_{x \in [z_0, z_1]} |f(x) - S(F,x)|/w(x) = \max_{x \in [z_{i-1}, z_i]} |f(x) - S(F,x)|/w(x), i = \overline{2, r} \tag{1.9}$$

З умов рівномірності (1.8) чи (1.9) визначаються границі ланок (вузли Z сплайна $S(F,x)$). Рівномірні наближення неперервної функції чебишовським сплайном є і оптимальні у тому сенсі, що при заданій похибці одержуємо мінімальну можливу кількість ланок, а при заданій кількості ланок - мінімальну можливу похибку. Ця властивість справедлива і для наближення деякими многочленами сплайнами степеня m, якщо $f^{(m+1)}(x) \neq 0$ при $x \in [a,b]$. В таких випадках говорять також про оптимальний розподіл вузлів сітки.

1.4. Алгоритми побудови рівномірних наближень

Наведемо алгоритм рівномірного наближення чебишовськими сплайнами із заданою похибкою. Алгоритм не залежить від виду сплайна.

1. Будуємо ланку нелінійного чебишовського сплайна на всьому інтервалі $[a, b]$. Ліва границя $z_e = a$, права $z_p = b$.

2. Знаходимо похибку наближення $\mu_1 = max\left|\frac{f(x)-S(A,x)}{w(x)}\right|$.

3. Якщо $\mu_1 < \mu$, то наближення побудоване. Кінець

4. Якщо $\mu_1 > \mu$, то зсуваємо праву границю інтервалу вліво, поки похибка на даному інтервалі не стане меншою від заданої похибки μ. Допустимо, що при k-му зсуві границі вліво (т. z^-) похибка рівна $\mu_k < \mu$, а на попередньому кроці $\mu_{k-1} > \mu$ (права границя $z^+, z^+ > z^-$). Тоді можна знайти таку праву границю $z_p \in [z^-, z^+]$, при якій похибка μ^* буде як завгодно мало відрізнятись від заданої $|\mu - \mu^*| < \epsilon(\epsilon = O(\mu))$. Точку z_p можна знайти одним із відомих способів, наприклад методом ділення відрізка навпіл або методом хорд.

5. Запам'ятовуємо границі ланки і параметри чебишовського сплайна.

6. Лівою границею наступної ланки є права границя попередньої ланки. Правою границею можна завжди вважати точку b, але можна також екстраполюватися точкою $z_p = z_p + \Delta z$, де Δz - довжина попередньої ланки.

7. Будуємо сплайн і знаходимо похибку.

8. Якщо $\mu_1 > \mu$, то переходимо до пункту 4.

Очевидно, що описаний алгоритм приводить до єдиного рішення, якщо наближувана функція $f(x)$ і сплайн $S(A, x)$ такі, що функція похибки $\rho(b) = max_{x\in[z_e,b]}|(f(x) - S(A, x))/w(x)|$ є неспадною функцією від b. Для цього достатньо, щоб ядро наближення $\eta(f, F) \neq 0$ при $x \in [a, b]$.

Наведемо алгоритм рівномірного наближення чебишовськими сплайнами із заданою кількістю ланок.

1. При заданій кількості ланок r обчислюємо похибку μ балансного наближення.

2. Ініціалізуємо змінні $\mu^- = \mu^+ = 0$.

3. Будуємо рівномірне наближення функції мінімаксним сплайном з заданою похибкою μ. В результаті наближення отримаємо на заданому інтервалі мінімаксний сплайн з k ланками.

4. Порівнюємо отриману кількість ланок k із заданою r. Якщо $k = r$ і максимальні похибки на кожній ланці μ_i рівні між собою з деякою точністю $\epsilon(\frac{\mu_i - \mu}{\mu} < \epsilon$, де ϵ може дорівнювати, наприклад, 0.05 або 0.01), то рівномірне наближення функцій з заданою кількістю ланок побудоване. Переходимо до пункту 7.

5. Нехай отримана кількість ланок $k > r$ або $k = r$, але на останній ланці максимальне значення похибки набагато менше від значень максимальних похибок на попередніх ланках (тобто $\frac{\mu_r - \mu}{\mu} > \epsilon$), то робимо присвоєння $\mu^- = \mu$ і збільшуємо похибку μ. Перевіряємо, чи $\mu^+ \neq 0$. Якщо так, то $\mu = \frac{\mu + \mu^+}{2}$. Якщо $\mu^+ = 0$, то збільшуємо μ на 10%. Будуємо рівномірне наближення функції мінімаксним сплайном з заданою похибкою μ. Переходимо до пункту 4.

6. Якщо $k < r$, то робимо присвоєння $\mu^+ = \mu$ і зменшуємо похибку μ. Перевіряємо, чи $\mu^- \neq 0$. Якщо так, то $\mu = \frac{\mu + \mu^-}{2}$. Якщо $\mu^- = 0$, то зменшуємо похибку μ на 10%. Будуємо рівномірне наближення функції мінімаксним сплайном з заданою похибкою μ . Переходимо до пункту 4.

7. Виводимо границі ланок, параметри і максимальні значення похибок на кожній ланці.

8. Кінець алгоритму.

2. Точність апроксимації многочленними чебишовськими сплайнами

2.1. Точність наближення розривними сплайнами

Припустимо, що наближувана функція $f(x)$ має властивості

$$f(x) \in C^{m+1}[a,b], 0 < M_1 < |f^{(m+1)}(x)| < M_2 < \infty, x \in [a,b], \tag{2.1}$$

і проміжок $[a,b]$ розбитий на r частин $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{1,r}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В такому випадку для значення абсолютної похибки ϵ_i найкращого рівномірного наближення многочленом степеня m на кожному проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ має місце оцінка [3].

$$\frac{M_1(\Delta x_i)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} < \epsilon_i < \frac{M_2(\Delta x_i)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}, \quad i = \overline{1,r}, \tag{2.2}$$

з якої випливають рівності

$$\epsilon_i = \frac{|f^{(m+1)}(\epsilon_i)|(\Delta x_i)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \tag{2.3}$$

$$\epsilon_i^{1/(m+1)} = \left(\frac{|f^{(m+1)}(\epsilon_i)|}{2^{2m+1}(m+1)!}\right)^{1/(m+1)} \Delta x_i \tag{2.4}$$

Просумувавши рівності (2.4) по i, отримуємо

$$\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i^{1/(m+1)} = \frac{2^{1/(m+1)}}{4[(m+1)!\,]^{1/(m+1)}} \sum_{i=1}^{r} |f^{(m+1)}(\epsilon_i)|^{1/(m+1)} \Delta x_i. \tag{2.5}$$

Якщо $\epsilon_i \equiv \epsilon_c = const, i = \overline{1,r}$, то ліва частина рівності (2.5) рівна $p\epsilon_c^{1/(m+1)}$, а права є інтегральною сумою. Тому при достатньо малих Δx_i маємо

$$r \approx \frac{2^{1/(m+1)}}{4[\epsilon_c(m+1)!\,]^{1/(m+1)}} \int_a^b |f^{(m+1)}(x)|^{1/(m+1)} dx. \tag{2.6}$$

Для $m = 1$ формула (2.6) отримана в роботах [14, 18]. З формули (2.6) при заданій кількості ланок r рівномірного сплайну $S_m(x)$ знаходимо наближення виразу для мінімально можливої похибки ϵ_c:

$$\epsilon_c \approx \frac{1}{2^{2m+1} r^{m+1} (m+1)!} \left(\int_a^b \left| f^{(m+1)}(x) \right|^{\frac{1}{m+1}} dx \right)^{m+1}. \tag{2.7}$$

Вираз (2.7) зручний у використанні, бо при конкретних $[a, b], m, f(x)$ і r з нього можуть бути знайдені чисельні значення ϵ_c. При $m = 0$ і $f'(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$ з виразу (2.7) отримуємо

$$\epsilon_c \approx \frac{1}{2r} \int_a^b |f'(x)| dx = \frac{|f(b) - f(a)|}{2r}, \tag{2.8}$$

що є точним виразом для похибки найкращого рівномірного наближення відрізками констант, якщо $f(x)$ монотонна функція.

Порівняймо числові значення, отримані за формулами (2.6) і (2.7), і при побудові рівномірних сплайнів за алгоритмами з робіт [19, 20].

Приклад 1.1. $f(x) = 2^x, m = 1, x \in [0, 1]$. Підставляючи значення в формулу (2.7), отримуємо

$$\epsilon_c \approx \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{4r^2} \approx 0.0428932/r^2$$

Для деяких r показані точні значення ϵ_t (верхня межа) і значення ϵ_b, отримане за формулою (нижня межа).

r	1	2	4	8	16	32
ϵ_b	$4.30 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
ϵ_t	$4.29 \cdot 10^{-2}$	$1.07 \cdot 10^{-2}$	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$	$4.18 \cdot 10^{-5}$

Таким чином, точні значення і наближення значення ϵ_t співпадають з точністю до можливої машинної похибки.

Приклад 1.2 $f(x) = e^x, p = 1, m = 2$. В даному випадку з формули (2.7) отримуємо, $\epsilon_t = 9(e^{b/3} - e^{a/3})^3/64$.

Нижче для деяких проміжків $[a, b]$ показані точні значення ϵ_t, які є похибками наближення функції e^x квадратним тричленом з найменшою абсолютною похибкою (верхня межа), а також відносна похибка δ у визначенні ϵ за формулою наближення.

$[a, b]$	$[0, 2]$	$[0, 1]$	$[1/2, 1]$	$[0, 1/21]$
ϵ_t	0.1224	$8.71 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$
ϵ_b	0.1197	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$8.39 \cdot 10^{-4}$
δ	2.2%	1%	1.4%	0.1%

Формулу (2.6) можна також використовувати для наближеного визначення границь $x_i(i = \overline{1, p})$ ланок сплайну $S_m(x)$ при заданій похибці ϵ_c. Перепишемо згадану формулу у вигляді

$$i = \frac{2^{1/(m+1)}}{4(\epsilon(m+1)!\,)^{1/(m+1)}} \int_a^{x_i} \left| f^{(m+1)(x)} \right|^{\frac{1}{m+1}} dx, \quad i = \overline{1, p-1} \tag{2.9}$$

В загальному випадку рівність (2.9) є трансцендентним рівнянням для наближеного визначення границь ланок сплайну, яке може бути розв'язане на комп'ютері. Проте в деяких випадках задача можу бути розв'язана аналітично. Наведемо приклад

Приклад 1.3. В роботі [20] знайдено рівномірне лінійне сплайн наближення $S_1(x)$ функції $f(x) = \sqrt{x}$ на проміжку $[0, 1]$ з похибкою $\epsilon = 0.01$. Оскільки $f''(x) = -\frac{x^{-3/2}}{4}$ необмежена на заданому проміжку, то формули (2.6) - (2.9) безпосередньо застосовувати не можна. Проте якщо розглядати наближення на проміжку $[a, b], a > 0$, то з формули (2.9) випливає що $x_i = (2i\sqrt{\epsilon} + a^{1/4})^4$. Тому згідно з виразом (2.6) можна наближено знаходити границі ланок, починаючи з другої, прийнявши $a = x_1$. Якщо $a = x_2$, то точність знаходження границь ланок збільшується. Нижче приведені точні значення границь x_i при $i = \overline{1, 4}$ і їхні наближені значення $\hat{x}_i$ при $a = x_i, i = \overline{1, 3}$

i	1	2	3	4
x_i	$6.40059 \cdot 10^{-3}$	$5.76040 \cdot 10^{-2}$	0.230418	0.640039
$\hat{x}_i(a = x_1)$	-	$5.43558 \cdot 10^{-2}$	0.217420	0.607500
$\hat{x}_i(a = x_2)$	-	-	0.226548	0.627158
$\hat{x}_i(a = x_3)$	-	-	-	0.635451

При наближенні сплайном $S_0(x)$ (відрізки констант) з виразу (2.8) отримуємо для x_i точну формулу

$$x_i = f^{-1}(f(a) + 2i\epsilon_c \operatorname{sign} f'(a)), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Більше того, з виразу (2.8) випливає, що якщо наближувати монотонну функцію сплайном $S_0(x)$ з заданою кількістю ланок і мінімально можливою похибкою, то границі ланок будути виражатися наступним чином:

$$x_i = f^{-1}([(p - i)f(a) + if(b)]/p)i = \overline{0, p}.$$

Ця рівність має місце, оскільки воно еквівалентне відношенню

$$f(x_i) = [(p - a)f(a) + if(b)]/p,$$

з якого випливає, що $|f(x_{i+1} - f(x_i)| = 2\epsilon = const, i = \overline{0, p-1}$. Остання рівність є умовою того, що константи $a_i = |f(x_{i+1} - f(x_i)|/2$ є ланками рівномірного сплайну $S_0(x)$ для монотонної функції $f(x)$.

2.2. Точність наближення неперервними сплайнами

В деяких випадках функцію $f(x)$ необхідно наближати неперервним сплайном. Найбільш природно при цьому будувати сплайн $Sh_m(x)$ так, щоб його перша ланка була найкращим рівномірним многочленним наближенням $P_m(x)$ степеня m, а всі наступні - найкращими рівномірними наближеннями многочленом з закріпленою лівою границею [23]. Такий сплайн будемо називати рівномірним, який складається з склеєних відрізків многочлена і позначимо $Sh_m(x)$. Якщо при цьому функція $f(x)$ задовольняє умовам (2.1) і m непарне, то $Sh_m(x)$ співпадає з рівномірним сплайном, який складається з многочленів відрізків. Це наслідок співпадіння крайніх точок альтернансу кожної ланки з границями ланок [30], а похибка наближення у всіх границях ланок однакова. Для функції $Sh_m(x)$ парного степеня це не так. Розглянемо спочатку найважливіший випадок $m = 2$. Як і раніше припускаємо справедливість властивостей (2.1). В другій і в наступних ланках сплайну позначимо z_0 ліву границю, z_2 - праву границю, z_1 - центральну точку альтернансу. Для визначення коефіцієнтів тричлена $P_2(x) = Ax^2 + Bx + c$, а також точок z_1 і z_2 отримуємо систему рівнянь

$$f_i - Az_i^2 - Bz_i - C = (-1)^i\mu, i = \overline{0,2}; f_i' - 2Az_i - B = 0, i = \overline{0,1}, \quad (2.10)$$

де $f_i = f(z_i)$, похибка наближення $\epsilon = |\mu|$. Позначимо $z_1 - z_0$ через h_1, з системи рівнянь (2.10) отримуємо вирази для коефіцієнтів A, B і C. $A = (f_1 - f_0 - 2\mu)/h_1^2 - f_0'/h_1$, $B = f_0' - 2Az_0$, $C = f_1 - Az_1^2 - bz_1 + \mu$. Підставивши ці значення в останнє рівняння системи (2.10), визначимо

$$(f_1' + f_0')h_1 - 2(f_1 - f_0 - 2\mu) = 0.$$

Розклавши в цьому рівнянні в ряд f_0' і f_0 в околі точки z_1 запишемо

$$\frac{1}{6}f^{'''}h_1^3 - \frac{1}{12}f_1^{(4)}h_1^4 + \ldots = -4\mu.$$

Відкидаючи члени порядку $O(h_1^4)$, маємо $h_1 \approx 2\sqrt[3]{\frac{3}{f_1^{'''}}}$. Для визначення $h_2 = z_2 - z_1$ підставимо в рівняння $f_2 - Az_2^2 - Bz_2 - c = \mu$ значення коефіцієнтів A, B і C $(f_2 - f_1 - h_2 f_0' - 2\mu)h_1^2 - h_2(h_2 + 2h_1)(f_1 - f_0 - 2\mu - f_0'h_1) = 0$. Розклавши в цьому рівнянні в ряд f_0, f_2, f_0' і f_2' в ряд Тейлора в околі точки z_1 і нехтуючи членами вищого порядку малості отримаємо: $f^{'''}h_1^2h_2 = 12\mu$. Підставивши сюди значення h_1, запишемо вираз для $h_2 : h_2 = \sqrt{3|\mu|f_1^{'''}}$.

Отже, довжини другої і наступних ланок сплайна є

$$h = z_2 - z_0 = h_1 + h_2 = 3\sqrt[3]{3|\mu/f^{'''}(z_1)|}.$$

Так як з формули (2.4) випливає що довжина першої ланки сплайну рівна $h = 4\sqrt[3]{3|\mu/f^{'''}(z_1)|}$, то середня довжина ланок виражається формулою

$$\bar{h} = \left(3 + \frac{3}{r}\right) \sqrt[3]{3|\mu / f'''(z_1)|}, \tag{2.11}$$

де точка z_1 належить конкретній ланці рівномірного неперервного квадратичного сплайну.

Розмірковуючи так само, як при виведенні формул (2.6) і (2.7) отримуємо вираз для кількості ланок r рівномірного неперервного квадратичного сплайну з заданою похибкою ϵ і для максимальної похибки ϵ такого сплайну при заданій кількості ланок

$$r \approx \left[(3\epsilon)^{-1/3} \int_a^b \sqrt[3]{|f'''(x)|dx} - 1\right] / 3, \tag{2.12}$$

$$\epsilon \approx \frac{1}{3(3r+1)^3} \left(\int_a^b \sqrt[3]{|f'''(x)|dx}\right)^3. \tag{2.13}$$

Приклад 1.4. $f(x) = 2^x, m = 2, x \in [0, 1]$. Виходячи з формул (2.13) і (2.12) отримуємо

$$\epsilon \approx 9(\sqrt[3]{2} - 1)^3 / (3r + 1)^3 \approx 0.1580398/(3r + 1)^3,$$

$$r \approx (0.5406575\epsilon^{-1/3} - 1)/3.$$

Нижче для деяких r наведені визначені за допомогою алгоритму з роботи [23] точні значення ϵ (верхнє число) і відповідні величини, отримані за формулою для ϵ.

r	1	2	4	8	16
ϵ	$2.50 \cdot 10^{-3}$	$4.52 \cdot 10^{-4}$	$7.04 \cdot 10^{-5}$	$9.87 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$
ϵ	$2.47 \cdot 10^{-3}$	$4.61 \cdot 10^{-4}$	$7.19 \cdot 10^{-5}$	$10.11 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-6}$

Далі для точних значень ϵ, які відповідають $r = 2^k, k = \overline{0,5}$ наведені значення, отримані за формулою (нижня межа).

-	1	2	4	8	16	32
r	0.9945	2.015	4.031	8.068	16.137	32.199

Приклад 1.5. $f(x) = log_2(1 + x), m = 2, x \in [0, 1]$. Виходячи з формули (2.13) і (2.12), отримуємо

$$\epsilon \approx 2ln^2 2/[3(3p + 1)^3], r \approx (\sqrt[3]{(2ln^2 2/(3\epsilon)} - 1)/3.$$

Нижче для деяких r наведені точні значення ϵ (верхня межа) і відповідні величини, отримані по формулі для ϵ.

r	1	2	4	8	16
ϵ	$4.90 \cdot 10^{-3}$	$9.58 \cdot 10^{-4}$	$1.47 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-5}$	$2.69 \cdot 10^{-6}$
ϵ	$5.00 \cdot 10^{-3}$	$9.34 \cdot 10^{-4}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-5}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$

Для точних значень ϵ, які відповідають $r = 2^k, k = \overline{0, 5}$ наведені значення, отримані за формулою для r

-	1	2	4	8	16
r	1.0094	1.990	3.988	8.000	16.066

Відносна похибка визначених за формулою (2.13) величин ϵ в прикладі (1.3) не більше 2%, в прикладі 1.4 - не більше 1%, а величин r - не більше 1% в обох прикладах.

Для отримання наближених виразів r і ϵ для будь-якого парного m степеня, довжина всіх ланок, починаючи з другої, зменшується в порівнянні з виразом (2.5) на відстань між першою і другою точками альтернансу $z_1 - z_0$. Оскільки при виведенні формули (2.5), а також (2.11) в розкладі функції в ряд Тейлора нехтуємо членами з $f^{(k)}(x)$ при $k > m + 1$, то точки альтернансу на проміжку $[z_0, z_{m+1}]$ повинні бути розміщені так само, як якщо би на цьому проміжку наближалася функція x^{m+1} за допомогою многочлена степеня m з найменшою абсолютною похибкою. Вираз для цих точок має вигляд [7, 8, 23]

$$z_i = \frac{h}{2} cos \frac{(m + 1 - i)\pi}{m + 1} + \frac{z_0 + z_{m+1}}{2}.$$

Звідси випливає, що довжина всіх ланок неперервного многочленного сплайну парного степеня, починаючи з другого, рівна $h' = \lambda_m h$, де вираз для $h = \Delta x_i$ виводиться з формули (2.3), а для λ_m є вираз

$$\lambda_m = \left(1 + cos\frac{\pi}{m+1}\right)/2. \qquad (2.14)$$

Оскільки довжина першої ланки сплайну випливає з формули (2.3), то середня довжина r ланок має вигляд $h = h(\lambda_m + (1-\lambda_m)/p)$, де λ визначається за формулою (2.14). При парному m отримуємо вираз для кількості ланок r рівномірного многочленного неперервного сплайну з заданою похибкою ϵ і для максимальної похибки ϵ такого сплайну при заданій кількості ланок r

$$r = 1 - 1/\lambda_m + \frac{2^{\frac{1}{m+1}}}{4\lambda_m[\epsilon(m+1)!\,]^{1/m+1}} \int_a^b |f^{(m+1)}(x)|^{\frac{1}{m+1}} dx \qquad (2.15)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2^{2m+1}(\lambda_m r + 1 - \lambda_m)^{m+1}(m+1)!} \left(\int_a^b |f^{(m+1)}(x)|^{\frac{1}{m+1}} dx\right)^{m+1} \qquad (2.16)$$

Нижче наведено числові значення λ_m для деяких m:

m	2	4	6	8	10
λ_m	0.75	0.9045085	0.9504844	0.9698463	0.9797466

2.3. Точність наближення інтерполяційними сплайнами

Ланки рівномірних інтерполяційних сплайнів $Si_m(x)$ є найкращими рівномірними наближеннями з двома зафіксованими границями. В точках перетину значення рівномірного інтерполяційного сплайну $Si_m(x)$ рівні значенням наближуваної функції $f(x)$. Для виводу виразів, аналогічних формулам (2.15) і (2.16) розглянемо спочатку випадок $m = 1$ і $m = 2$. При $m = 1$ сплайн $Si_1(x)$ співпадає з лінійним інтерполяційним сплайном [9] і легко показати, що

$$P_I^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{2\epsilon_r}} \int_a^b \sqrt{|f''(x)|}dx; \epsilon_r^{(1)} = \frac{1}{8p_I^2}\left(\int_a^b \sqrt{|f''(x)|}dx\right)^2.$$

Розглянемо випадок $m = 2$. Як і раніше $f(x) \in C^{(3)}[a, b], f^{'''}(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$. Встановимо наближений вираз для довжини сплайну $h = z_3 - z_0, x \in [z_0, z_3]$. Для отримання коефіцієнтів A, B, C квадратного тричлена $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, точок альтернансу z_1 і z_2 і точки z_3 - правої границі ланки запишемо систему рівнянь

$$f_i - Az_i^2 - Bz_i - C = (-1)^i \mu\gamma; i = \overline{0,3}, f_i^{'} - 2Az_i - B = 0, i = \overline{1,2}, \quad (2.17)$$

де $\gamma = 0$ при $i = 0, 3, \gamma = 1$ при $i = 1, 2; f_i = f(z_i), i = \overline{0,3}, |\mu| = \epsilon_r$. Позначивши через $h_1 = z_1 - z_0, h_2 = z_2 - z_1, h_3 = z_3 - z_2$, з системи рівнянь (2.17) отримаємо

$$F = (f_2^{'} - f_1^{'})/(2h_2), B = f_1^{'} = 2Az_1 = f_2^{'} - 2Az_2,$$

$$C = f_1 - Az_1^2 - Bz_1 + \mu = f_2 - Az_2^2 - Bz_2 - \mu.$$

Виходячи з двох перших рівнянь системи (2.17), а також значень коефіцієнтів A і B, отримуємо рівняння, яке спрощується після розкладу в ньому величин f_0 і $f_2^{'}$ в ряд Тейлора в околі точки z_1

$$(3h_1^2 h_2 + 2h_1^3) f_1^{'''} + (h_1^4 - 2h_1^2 h_2^2) f_1^{(4)}/2 + \ldots = 12\mu. \quad (2.18)$$

З першого і третього рівнянь (2.17) отримуємо аналогічно

$$(h_2^3 - 3h_2 h_1^2 - 2h_1^3) f_1^{'''} = 12\mu. \quad (2.19)$$

Нехтуючи другим доданком лівої частини рівняння (2.18) і додаючи рівняння (2.18) і (2.19) отримуємо, що $h_2 = \sqrt[3]{3|\mu/f_1^{'''}|}$. Віднявши ці рівняння, записуємо відношення для визначення h_1 $h_2^4 - 6h_2 h_1^2 - 4h_1^3 = 0$. Нехай $h_1 = \alpha h_2$. Тоді з останнього рівняння отримуємо кубічне рівняння для визначення множника α $4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 1 = 0$. Єдиний його додатній розв'язок є $\lambda = 1/(1 + \sqrt{3})$. Оскільки величини h_1 і h_3 входять в систему рівнянь (2.18) симетрично, то $h_1 = h_3$ і

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = 2\sqrt{3}\sqrt[3]{3|\mu/f^{'''}(z_1)|}.$$

Виходячи з цього виразу аналогічно отримуємо вираз для кількості ланок рівномірного квадратичного інтерполяційного сплайну $Si_2(x)$ з заданою похибкою і для максимальної похибки сплайну $Si_2(x)$ при заданій кількості ланок

$$p_I^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt[3]{3\epsilon_I}} \int_a^b \sqrt[3]{|f'''(x)|}dx,$$

$$\epsilon_I^{(2)} \approx \frac{1}{72\sqrt{3}p_I^3} \left(\int_a^b \sqrt[3]{|f'''(x)|}dx \right)^3 .$$

3. Опис програми і отриманих результатів

3.1. Призначення програми

Програма призначена для побудови апроксимацій функцій чебишовськими сплайнами. Функція може бути задана двома способами: дискретним (у вигляді таблиці) або аналітично. Програма дає змогу знайти коефіцієнти многочленів чебишовського наближення, границі кожної ланки сплайна, максимальні похибки на кожній ланці сплайну. А також будувати графіки сплайна, яким наближуємо функцію, функції, яка наближується, графік функції похибки. Є можливість порівняти два наближення для певної функції.

3.2. Умови застосування

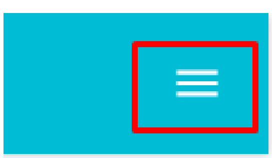
Вимоги до ПК:

- 32-розрядний (x86) або 64-розрядний (x64) процесор із тактовою частотою 1 ГГц або швидший;
- 1 гігабайт (ГБ) RAM (для 32-розрядної версії) або 2 ГБ (для 64-розрядної версії);Another entry in the list

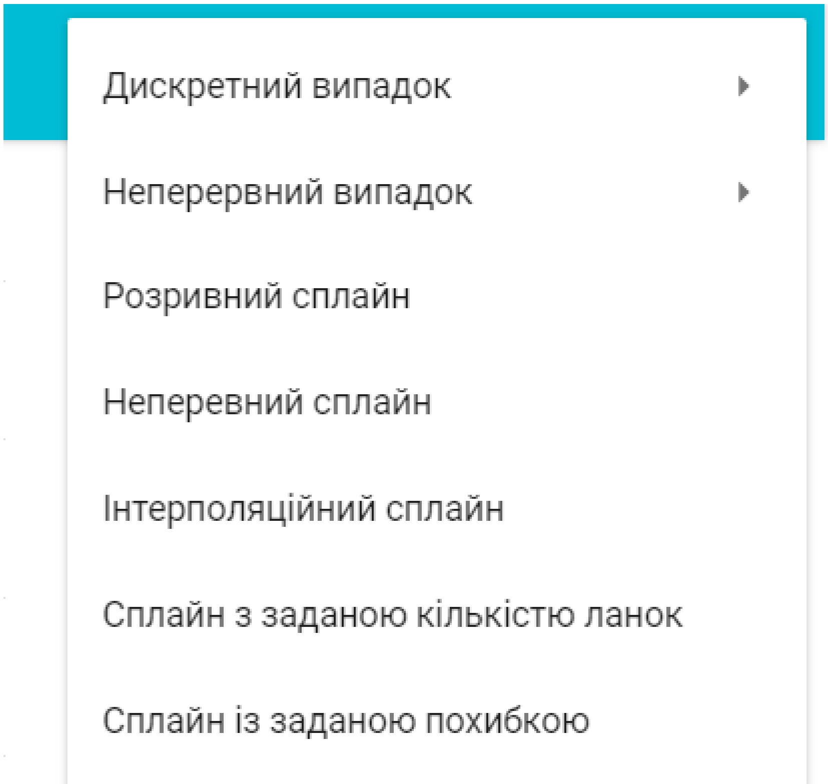
ОС: Windows 7/8/10

3.3. Запуск програми та задання вхідних даних

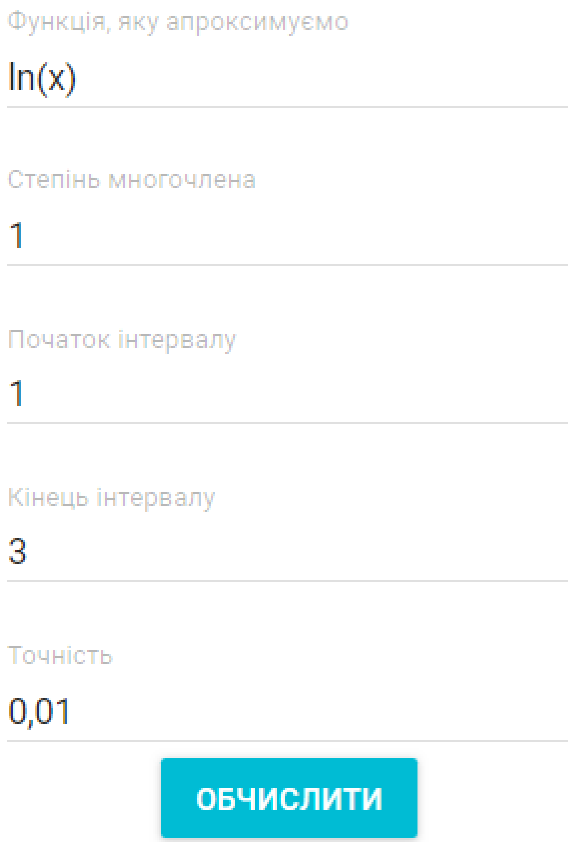
Для знаходження наближення функції, спочатку потрібно вибрати, яким чином задана функція (таблично чи аналітично). Це можна зробити натиснувши кнопку з правої сторони головного меню сайту.



Далі необхідно вибрати метод яким потрібно апроксимувати функцію.



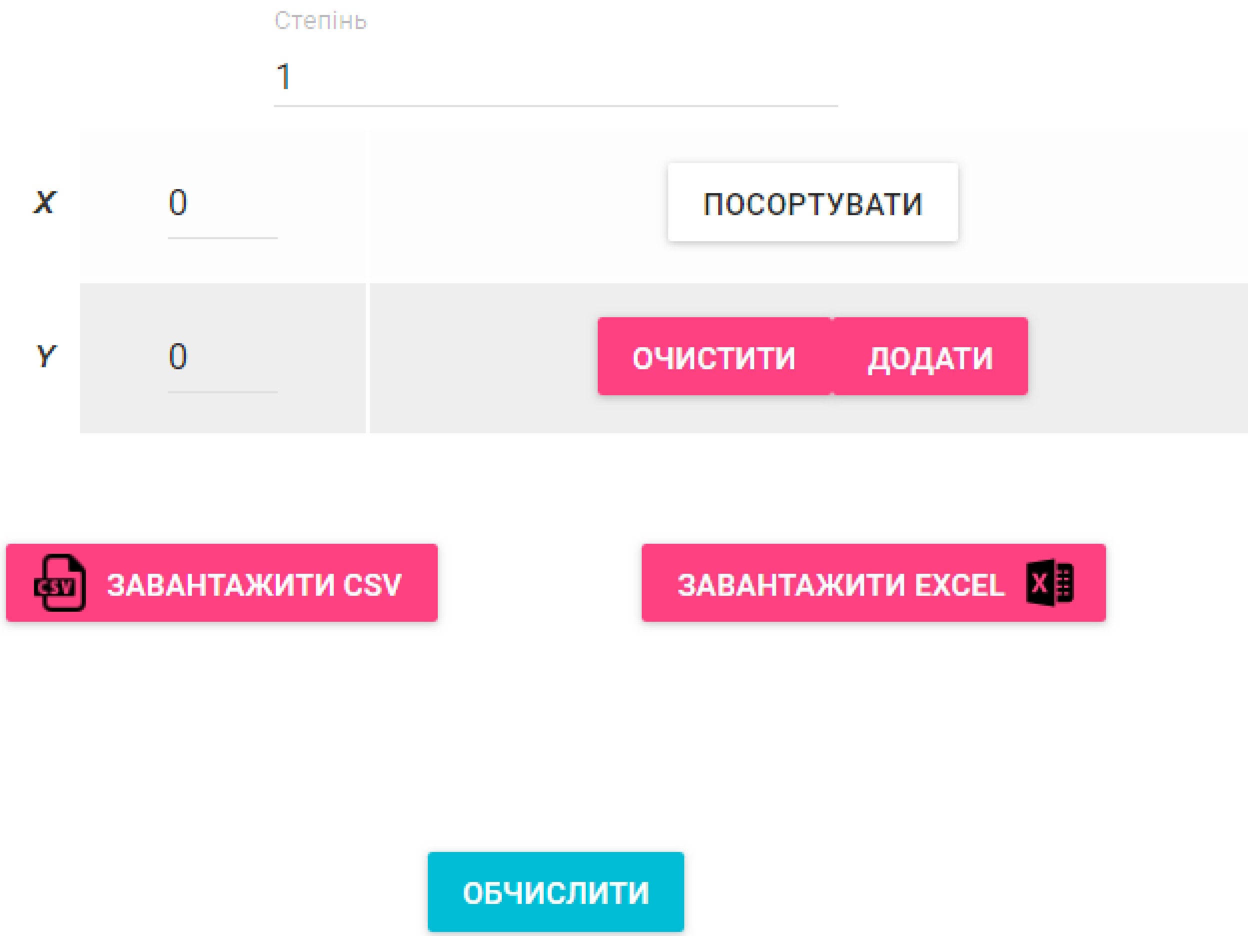
Для неперервного випадку, потрібно заповнити наступну форму:



Як видно з рисунку, користувачу потрібно вибрати функцію для апроксимації. Приклади вводу функцій:

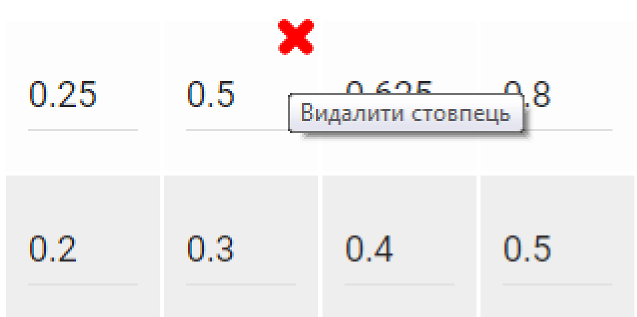
e^x	e^x
$\sqrt(x)$	sqrt(x)
$cos^2(x)$	cos(x)^2 або (cos(x))^2
$\frac{1}{x}$	1/x

Точність – допустима відносна похибка у визначенні похибки наближення у мінімаксному наближенні. Для дискретного випадку:



Тут можна задати степінь апроксимуючого многочлена та задати табличну функцію. Це можна зробити двома способами:

1. Вручну. За допомогою кнопки “ДОДАТИ ТОЧКУ” можна додати до таблиці, яка знаходиться лівіше, ще одну точку. Редагувати точки можна відразу в таблиці. При необхідності можна також вилучити точку навівши курсор на неї.



Також є можливість посортувати ці точки (по змінній x), натиснувши на відповідну кнопку.

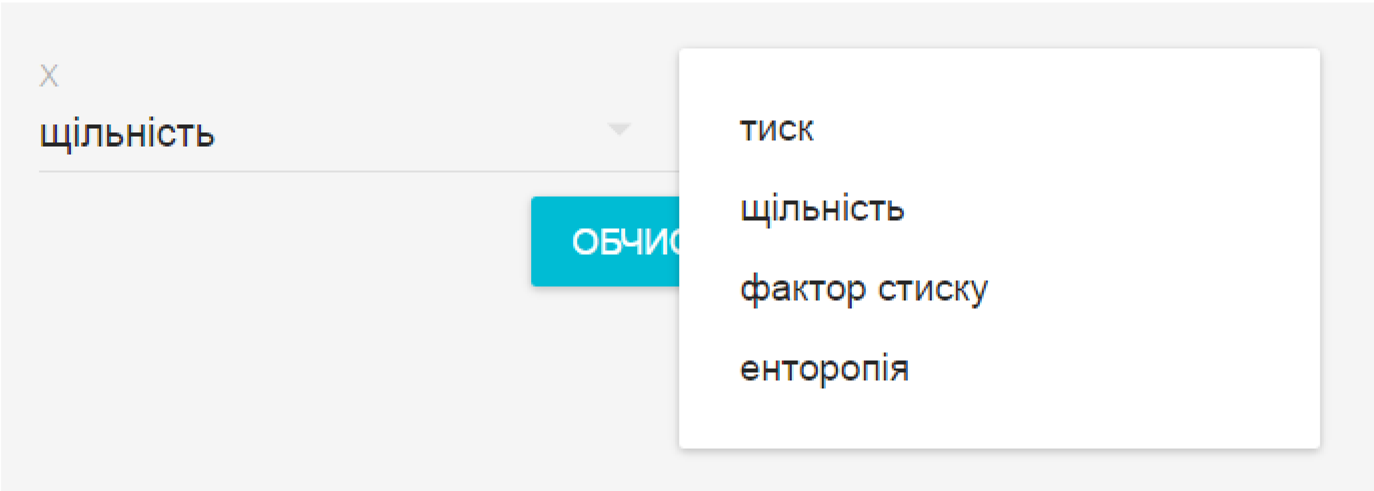
2. Завантажити з файлу. Файл повинен бути у форматі CSV(Comma Separated Values), тобто значення які розділені комою. Перший стовпець – це значення x, другий – y. Приклад файлу CSV:

```
0.1,    0.77
1,      7.68
2,      15.34
3,      22.96
4,      30.55
5,      38.11
6,      45.63
8,      60.55
10,     75.31
12,     89.89
16,     118.49
20,     146.26
25,     179.75
30,     211.8
35,     242.39
40,     271.53
45,     299.25
50,     325.6
```

Також файл може бути у форматі xlsx (Excel). Приклад Excel файлу.

	A	B	C	D
1	тиск	щільність	фактор стиску	енторопія
2	0.1	0.048	1.0004	72.293
3	1	0.483	1.004	62.794
4	2	0.962	1.008	59.933
5	3	1.438	1.012	58.259
6	4	1.909	1.016	57.07
7	5	2.377	1.02	56.147
8	6	2.841	1.024	55.393
9	8	3.759	1.032	54.203
10	10	4.663	1.04	53.278
11	12	5.553	1.048	52.522
12	16	7.293	1.0639	51.327
13	20	8.982	1.0797	50.399
14	25	11.026	1.0995	49.47
15	30	12.998	1.1192	48.709
16	35	14.903	1.1389	48.065
17	40	16.745	1.1584	47.506
18	45	18.526	1.1779	47.013
19	50	20.251	1.1973	46.571
20	60	23.542	1.2359	45.805
21	70	26.64	1.2742	45.157
22	80	29.564	1.3122	44.594

Далі необхідно вибрати яка величина – змінна x, а яка – y.



Після цього, незважаючи на спосіб, яким задали функцію (вручну чи завантажили з файлу), потрібно натиснути кнопку "ОБЧИСЛИТИ". Коли запит обробиться на сервері, результати можна побачити на екрані.

3.4. Опис отриманих результатів

Приклад отриманих результатів наближення функції $sin(x)$, розривним лінійним сплайном на проміжку $[1, 5]$ із заданою похибкою на кожній ланці – 0.1. Вхідні дані:

Функція, яку апроксимуємо

sin(x)

Степінь многочлена

1

Початок інтервалу

1

Кінець інтервалу

5

Точність

0,1

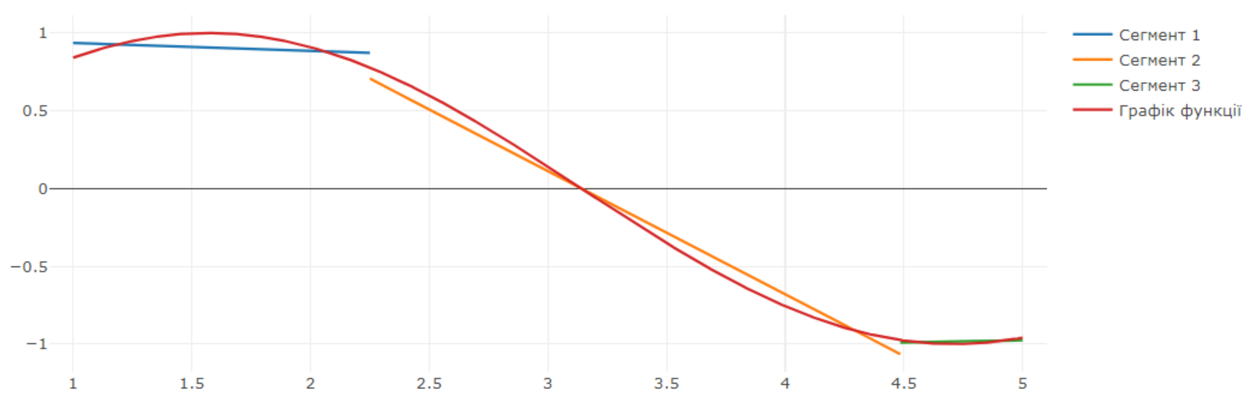
Допустима похибка на одному відрізку сплайна

0,1

ОБЧИСЛИТИ

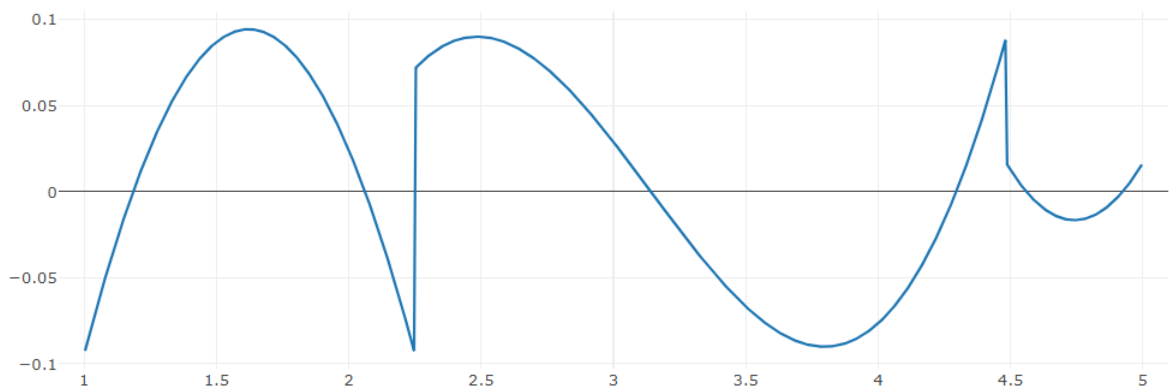
Вихідні дані:

Апроксимація мінімаксними сплайнами



Як можна побачити з рисунку, результатом роботи програми є вивід на екран графік функції, яку наближаємо, а також сплайна.

Графік функції похибки



Також виводиться графік функції похибки на кожній ланці.

Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.094	$[1.000; 2.250]$	$-0.0507x + 0.9865$
2	0.090	$[2.250; 4.484]$	$-0.7924x + 2.4896$
3	0.017	$[4.484; 5.000]$	$0.0294x - 1.1227$

В таблиці представлено максимальну похибку, межі інтервалу і аналітичний вигляд многочлена на всіх ланках чебишовського сплайна.

Висновки

Чебишовське наближення функцій займає вагоме місце серед інших видів апроксимації, оскільки воно забезпечує найменшу похибку наближення та високу швидкість збіжності. Тому досліджуються і удосконалюються методи побудови наближень функцій чебишовськими сплайнами, а область їх застосування розширюється. У магістерській кваліфікаційній роботі отримано наступні результати:

1. Наведено означення чебишовських многочленних сплайнів і алгоритми побудови сплайнів з розривними, неперервними та інтерполяційними ланками.

2. Наведено алгоритми для побудови рівномірного наближення функцій чебишовськими многочленними сплайнами з заданою похибкою та заданою кількістю ланок.

3. Досліджено похибки рівномірних наближень функцій чебишовськими розривними, неперервними та інтерполяційними сплайнами. Наведено приклади, які підтверджують правильність отриманих оцінок похибок їх близькістю до реально отриманих похибок.

4. На основі проведених досліджень розроблено програму для побудови рівномірних наближень функцій цими сплайнами.

Список використаної літератури

1. Альбер Дж. Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения: Пер. с англ. -М.: Мирб 1972.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – Москва: Наука, 1987. – 600с.

3. Бердышев В. И., Петрак Л. В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложение. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 297 с.

4. Вакал Л. П., Каленчук-Порханова А. О. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації // Мат. машини і системи. – 2006. – № 2. – С. – 15-24.

5. Воробель Р.А., Кужий Л.И., Попов Б.А. Нелинейные равномерные сплайны. - Отбор и передача информ., 1982, вып. 66.

6. Головко Д. Б., Рего К. Г., Скрипник Ю. О. Основи метрології та вимірювань. – Київ: Либідь, 2001. – 408 с.

7. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. - М.: Наука, 1972.

8. Дзядык В.К. Введение в теорию приближения функций полиномами. - М.: Наука, 1977.

9. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л., Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1960.

10. Теплофизические свойства технически важных газов при высоких температурах и давлениях: Справочник / [В. Н. Зубарев, А. Д. Козлов, В. М. Кузнецов и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 232 с.

11. Коллатц Л., Альберт Ю. Задачи по прикладной математике. – М.: Мир, 1978.

12. Кужий Л.И. Равномерное приближение замкнутых кривых. - В кн.: Распаллеливание обработки информации. - Львов: Тез.докл. и сообщений IУ Всесоюз. школы-семинара. -Львов: Изд. Физ.-мех. ин-та им. Г.В. Карпенко АН УССР, 1983, ч. 3.

13. Кужий Л.И., Попов Б.А. Погрешность приближения равномерными рациональными сплайнами. - Отбор и передача информ., 1983, вып 70.

14. Кургаев О.Ф. Застосування інтерполяційного полінома Ньютона із змінним кроком для кускової апроксимації аналітичних функцій. - Автоматика, 1975, №1.

15. Кутнів М. В. Чисельні методи: Навчальний посібник. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2010.– 288 с.

16. Луцик Я. Т., Гук О. П., Лах О. І., Стадник Б. І. Вимірювання температурні: Теорія та практика. – Львів: Бескид Біт, 2006. – 560 с.

17. Малачівський П.С., Пізюр Я.В., Левантович Б.М. Чебишовська апроксимація характеристики намагнічування електротехнічних сталей // П'ятнадцята відкрита наукова конференція Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (ІМФН) : збірник матеріалів і програма конференції, (13-14 листопада 2018 р., Львів) - Львів : Видавництво Львівської політехніки. – С. 43.

18. Писарский А.В., Кургаев А.Ф. Полиполиномтальная апроксимация функций. - В кн.: Моделирующие гибридные системы. - Киев: Наук.думка, 1978.

19. Попов Б.А. Наилучшее приближение выпуклой функции с помощью ломаной. - В кн.: Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. - Киев: Ин-т кибернетики, 1972, вып. 1.

20. Попов Б.А. Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. - Киев: Ин-т кибернетики, 1972, вып. 2.

21. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.

22. Попов Б. О. Чисельні методи рівномірного наближення сплайнами. Конспект лекцій. – Львів: ЛДУ, 1992. – 92 с.

23. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближения функций для технических приложений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 352 с.

24. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. – Киев: Наук. думка, 1984. – 599 с.

25. Попов Я. Б. Нелинейное наилучшее приближение градуировочных характеристик датчиков температуры // Электрон. моделирование. – 1999. – 21, № 4. – С. 119 – 123.

26. Ремез Є.Я. Основы численных методов чебышевского приближения . - Киев: Наук.думка, 1969. - 623 с.

27. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука, 1989. - 432 с.

28. Шумейко А. А., Товстоног Е. А. Асимптотически оптимальное весовое кусочно-линейное восстановление кривых // Системні технології. Прогресивні засоби одержання і технології виробництва матеріалів. – 1998. – С. 109 – 113.

29. Яцук В. О., Малачівський П. С. Методи підвищення точності вимірювань: підруч. [для студ. вищ. навч. закл.]. – Львів: Бескид Біт, 2008. – 368 с.

30. Fike C.T. Computer evaluation of mathematical function - New Jersey: Prentice-Hall, 1968.

31. Muller J. M. Elementary Functions: Algorithms and Implementation. – Boston: Birkhauser, 1997. – 204 p.

32. Rice J. R. Approximative formulas for phyncal data // Pyro – dynamics. – 1969. – 6, № 314. – P. 231 – 256.

33. Zed A. Shaw Learn Python the Hard Way: A Very Simple Introduction to the Terrifyingly Beautiful World of Computers and Code. Addison-Wesley, 2014. — 306 p. — 3rd ed. — ISBN: 9780321884916

Додатки

Додаток 1. Код програми

Підпрограма для створення початкового альтернансу (дискретний випадок). Вхідні параметри:

1. масив значень x

2. degree – степінь апроксимуючого многочлена

Результат виконання функції: початковий альтернанс В цій функції використана бібліотека numpy(http://www.numpy.org/).

```
def make_initial_alternance(x, degree):
    alternance = [x[0]]  # add first
    busy = []
    for i in range(degree):
        rand_index = np.random.randint(1, len(x)  1)
        while rand_index in busy:
            rand_index = np.random.randint(1, len(x)  1)
        busy.append(rand_index)
        alternance.append(x[rand_index])
    alternance.append(x[len(x)  1])  # add last
    alternance.sort()
    return alternance
```

Підпрограма для визначення максимального значення функції в дискретних точках. Вхідні параметри:

1. func – функція

2. x_vals – масив дискретних точок

Результат виконання функції: максимальне значення заданої функції

```
def max_error(func, x_vals):
    y_vals = func(x_vals)
    neg_err = min(y_vals)
    pos_err = max(y_vals)

    if abs(neg_err) > pos_err:
        e_max = neg_err
    else:
        e_max = pos_err
    return e_max
```

Підпрограма для заміни точок альтернансу. Вхідні параметри:

1. err_func – функція похибки
2. alternance – попередній альтернанс
3. x_vals – значення x для таблично заданої функції

Результат виконання функції: новий альтернанс

```
def change_alternance(err_func, alternance, x_vals):
    x_err = x_of_max_error(err_func, x_vals)
    temp = alternance[:]
    temp.append(x_err)
    temp.sort()
    index_of_x_err = temp.index(x_err)
    if index_of_x_err != 0 and index_of_x_err != (len(temp)  1):
        if sign(err_func(temp[index_of_x_err])) == sign(err_func(temp[index_of_x_err  1])):
            del temp[index_of_x_err  1]

        else:
            del temp[index_of_x_err + 1]

    elif index_of_x_err == 0:
        if sign(err_func(temp[index_of_x_err])) == sign(err_func(temp[1])):
            del temp[1]
        else:
            del temp[len(temp)  1]
    elif index_of_x_err == (len(temp)  1):
        if sign(err_func(temp[index_of_x_err])) == sign(err_func(temp[index_of_x_err  1])):
            del temp[index_of_x_err  1]
        else:
            del temp[0]
    return temp
```

Підпрограма для побудови аналітичного вигляду многочлена. Вхідні параметри:

1. t – альтернанс
2. degree – степінь апроксимуючого многочлена
3. f_discrete – дискретна функція

Результат виконання функції: аналітичний вигляд многочлена.

```python
def pol(t, degree, f_discrete):
    x = Symbol('x')
    e = Symbol('e')
    vars_str = ' '.join(['a' + str(i) for i in range(degree + 1)])
    variables = symbols(vars_str)
    eqs = []

    for i in range(degree + 2):
        eqs.append(make_eq(variables, t[i], f_discrete(t[i])) + e)
        e *=  1
    if degree % 2 == 1:
        e *=  1

    solution = solve(eqs, variables + (e,))

    error_on_iteration = solution[e]
    polynom = x   x
    for i, v in enumerate(variables):
        polynom += solution[v] * x ** i

    return [polynom, error_on_iteration]
```

Підпрограма *main* для апроксимації чебишовським сплайном з заданою кількістю ланок. Вхідні параметри:

1. func – функція, яку апроксимуємо
2. deg – степінь апроксимуючого многочлена
3. start – початок інтервалу
4. end – кінець інтервалу
5. r – кількістю ланок

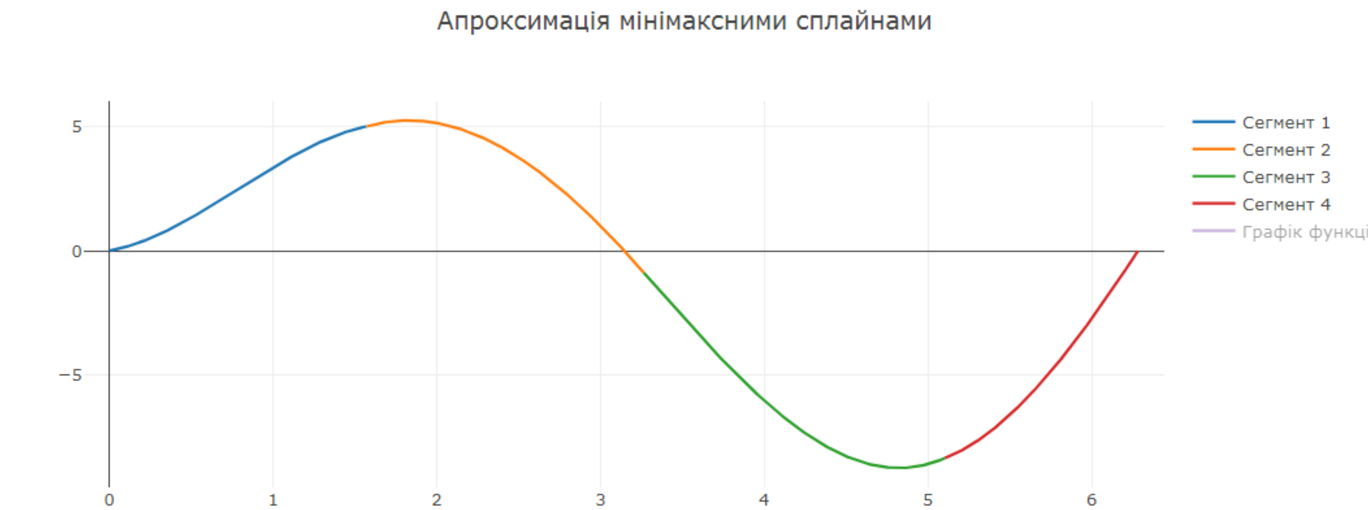
```python
import spline_minmax


def checkIfErrorsOk(specified_precision, approximation, epsilon=0.01):
    for approx in approximation:
        if abs(specified_precision   approx["max_error"]) > epsilon:
            return False
    return True


def main(func, deg, start, end, r):
```

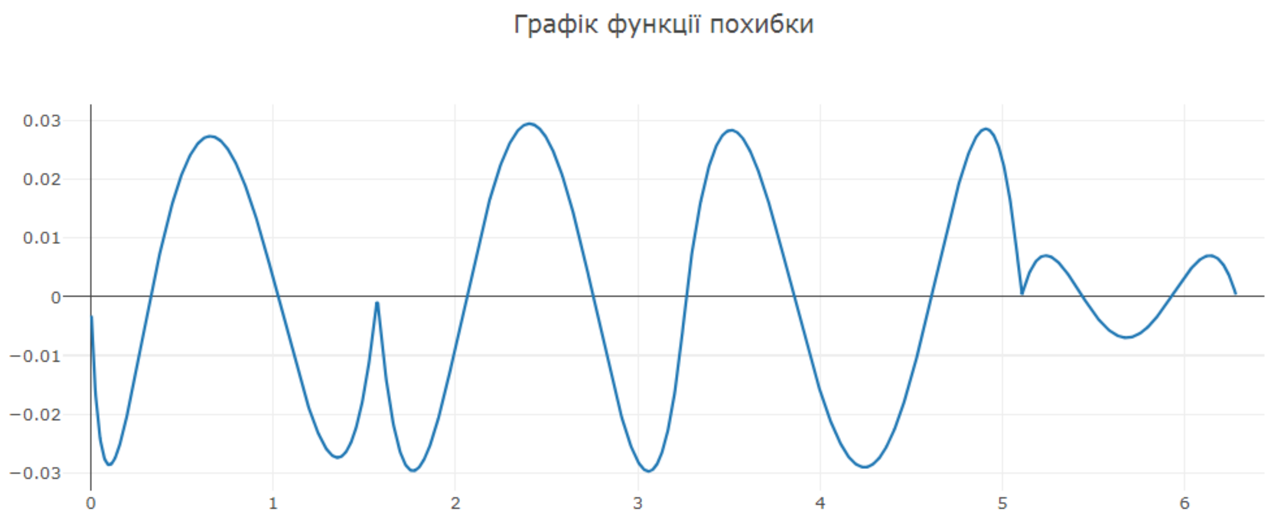
```
    mu_left = 0
    mu_right = 0
    prev_specified_precision = 0
    precision = 0.0009
    mu = 0.1

    approximation = spline_minmax.main(func, deg, start, end, precision, mu)
    k = len(approximation)
    while k != r or not checkIfErrorsOk(mu, approximation):
        if k > r:
            mu_left = mu
            if mu_right != 0:
                mu = (mu + mu_right) / 2
            else:
                mu *= 1.1

        if k == r:
            mu_right = mu
            if mu_left != 0:
                mu = (mu + mu_left) / 2
            else:
                mu *= 0.9
        if k < r:
            mu_right = mu
            if mu_left != 0:
                mu = (mu + mu_left) / 2
            else:
                mu *= 0.9

        approximation = spline_minmax.main(func, deg, start, end, precision, mu)

        if len(approximation) == r and abs(prev_specified_precision   mu) < 0.000001:
            return approximation

        prev_specified_precision = mu

        k = len(approximation)

    return approximation
```

Додаток 2. Результати виконання програми

Приклад 1. Знайти рівномірне наближення чебишовським інтерполяційним сплайном третього степеня для функції $f(x) = 4sin(x)\sqrt{x}$ на проміжку $[0, 2\pi]$ із заданою похибкою – 0.03.

Результат роботи програми:

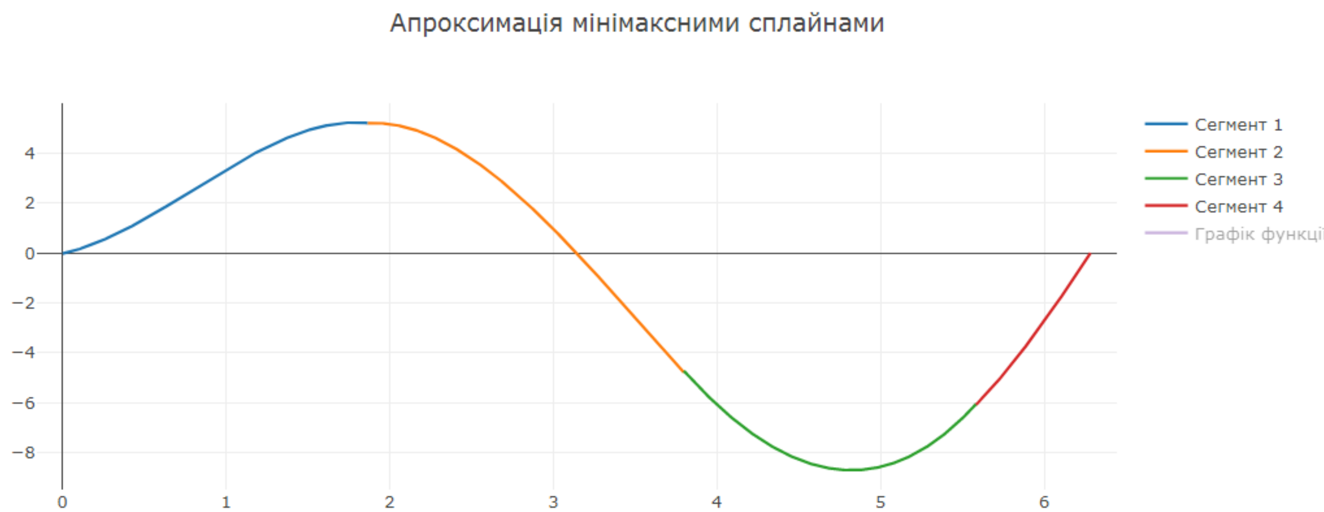


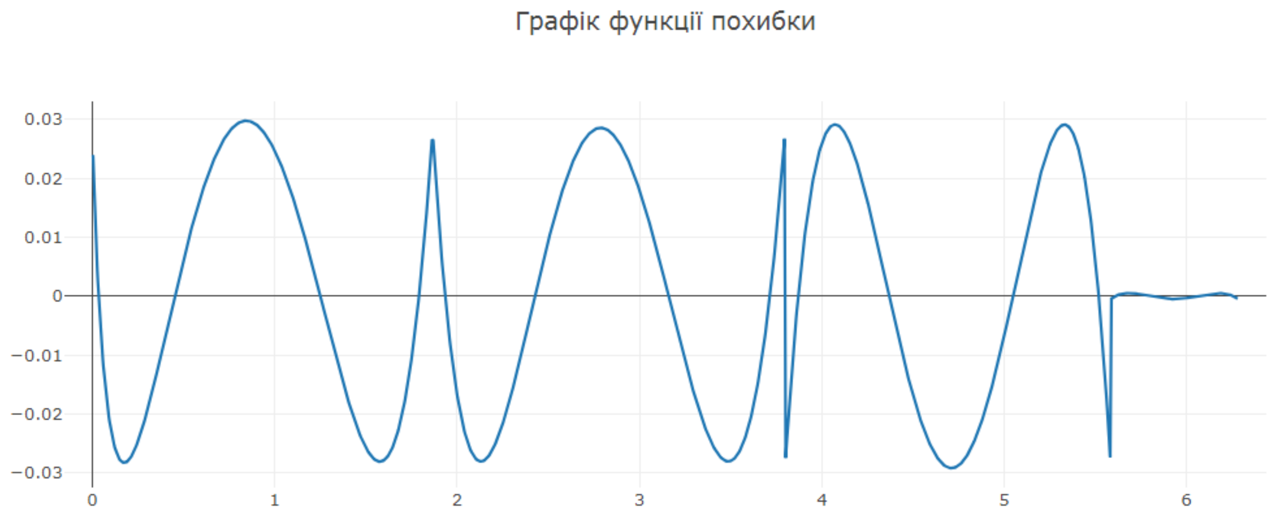


Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.02865	$[0.000; 1.571]$	$-1.5738x^3 + 3.7462x^2 + 1.1904x$
2	0.02976	$[1.571; 3.264]$	$0.4431x^3 - 6.0396x^2 + 17.6322x - 9.4986$
3	0.02907	$[3.264; 5.104]$	$1.0411x^3 - 10.2092x^2 + 25.8096x - 12.5643$
4	0.00702	$[5.104; 6.283]$	$-1.0929x^3 + 21.9000x^2 - 135.6305x + 258.7080$

Приклад 2. Знайти рівномірне наближення розривним чебишовським сплайном третього степеня для функції $f(x) = 4 * sin(x)\sqrt{x}$ на проміжку $[0, 2\pi]$ із заданою похибкою – 0.03.

Результат роботи програми:

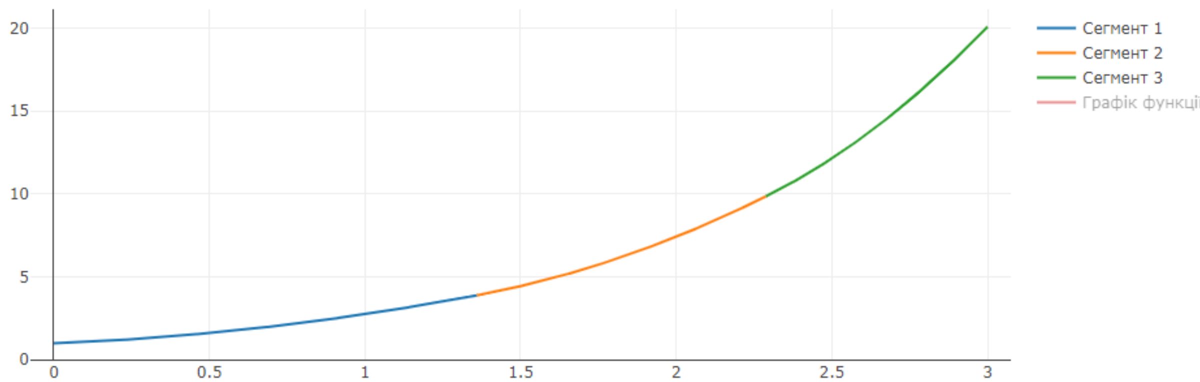




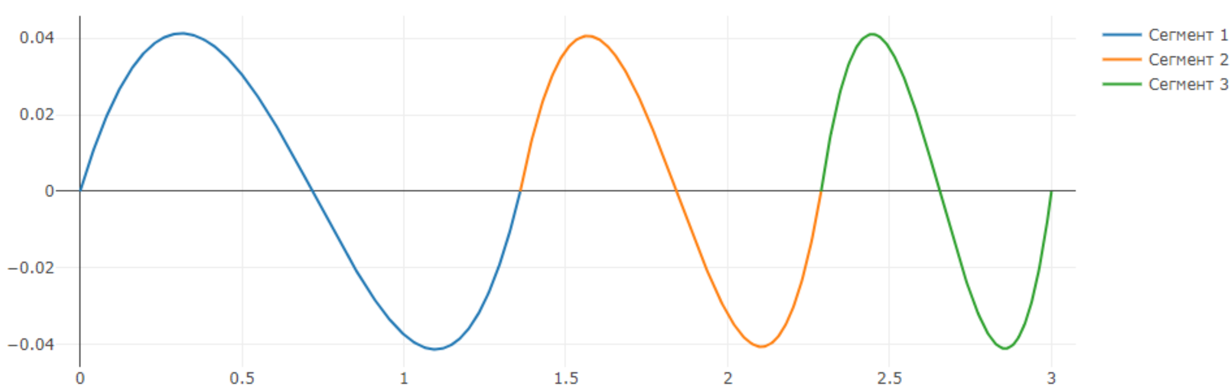
Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.02976	$[0.000; 1.865]$	$-1.3787x^3 + 3.2956x^2 + 1.4523x - 0.0280$
2	0.02855	$[1.865; 3.798]$	$0.9199x^3 - 9.7615x^2 + 27.1276x - 17.4082$
3	0.02921	$[3.798; 5.584]$	$0.4442x^3 - 2.1881x^2 - 9.8981x + 40.0879$
4	0.00050	$[5.584; 6.283]$	$-1.4059x^3 + 27.4453x^2 - 168.3306x + 322.8903$

Приклад 3. Знайти рівномірне наближення чебишовським інтерполяційним сплайном 2-го степеня функції $f(x) = e^x$ на проміжку $[0, 3]$ з заданою кількістю ланок - 3.

Результат роботи програми:

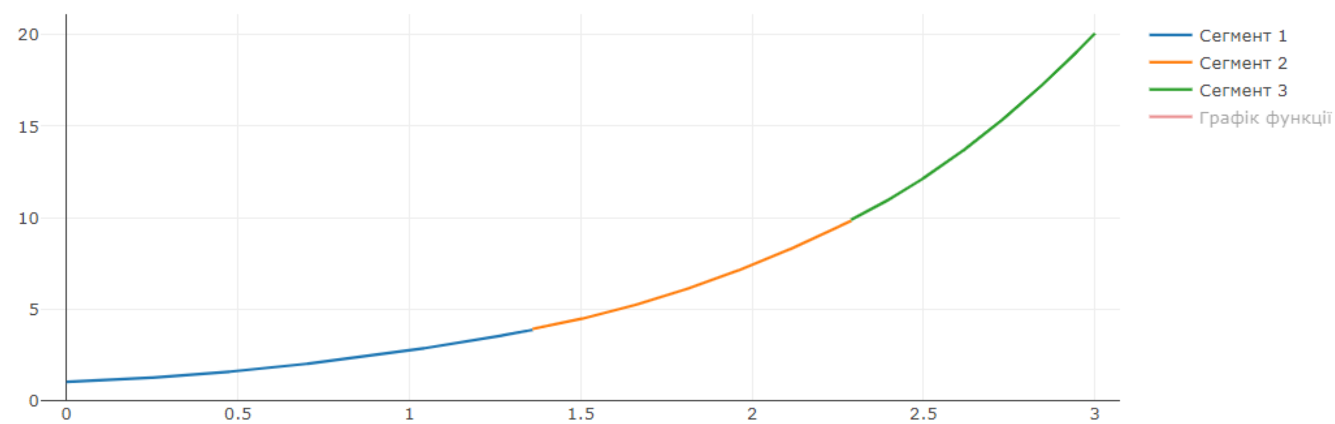


Графік функції похибки

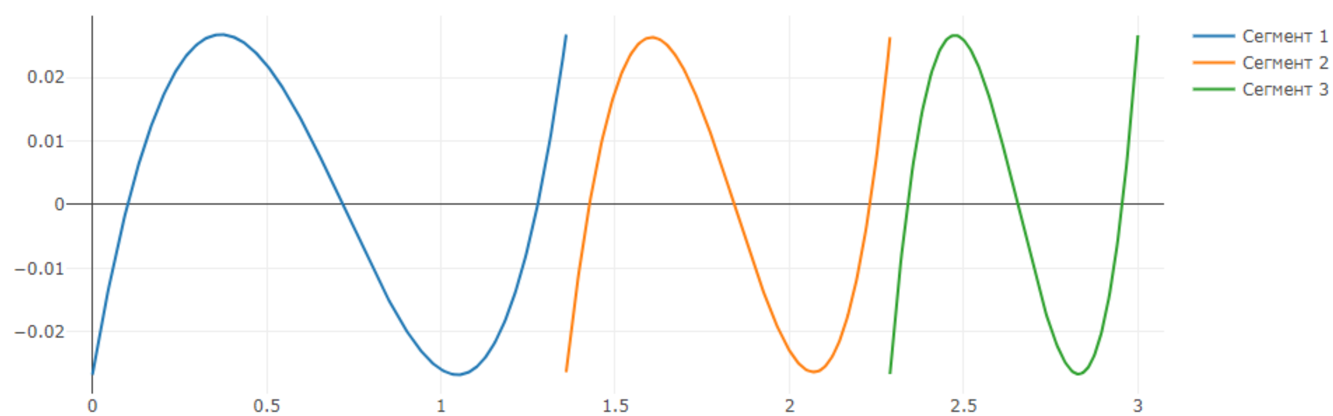


Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.04125	$[0.000; 1.359]$	$1.0381x^2 + 0.7174x + 1.0$
2	0.04058	$[1.359; 2.289]$	$3.1733x^2 - 5.1543x + 5.0364$
3	0.04104	$[2.289; 3.000]$	$7.1362x^2 - 23.3687x + 25.9651$

Приклад 4. Знайти рівномірне наближення чебишовським розривним сплайном 2-го степеня функції $f(x) = e^x$ на проміжку $[0, 3]$ з заданою кількістю ланок - 3. Результат роботи програми:



Графік функції похибки



Сегмент	Максимальна похибка	Інтервал	Аналітичний вигляд
1	0.02676	$[0.000; 1.359]$	$1.0349x^2 + 0.6825x + 1.0267$
2	0.02634	$[1.359; 2.289]$	$3.1685x^2 - 5.1935x + 5.1249$
3	0.02665	$[2.289; 3.000]$	$7.1300x^2 - 23.4108x + 26.1207$