mystyle backgroundcolor=, commentstyle=, keywordstyle=, numberstyle=, stringstyle=, basicstyle=, breakatwhitespace=false, breaklines=true, captionpos=b, keepspaces=true, numbers=left, numbersep=5pt, showspaces=false, showstringspaces=false, showtabs=false, tabsize=2

style=mystyle

Вступ

Наближення функцій використовується для розв’язування багатьох науково-технічних завдань. До широкого впровадження обчислювальної техніки головною якістю наближуючого виразу для функції була простота отримання параметрів цього виразу. Використовувавались в основному, методи, які дозволяють отримати параметри в аналітичному вигляді. При використанні обчислювальної техніки ця якість є не настільки важливою. На перший план виходять задачі отримання оптимальних наближень. Вимога отримати найменшу можливу похибку

на проміжку приводить до задачі знаходження найкращого рівномірного чебишовського наближення. При отримуємо найкраще рівномірне абсолютне наближення або наближення з найменшою абсолютною похибкою. Задача найкращого рівномірного наближення многочленами детальн розглянута в робтах [12, 13, 14, 39, 41]. Є немало програм для комп’ютера [23, 24, 28, 37-40]. Задача наближення рацінальними многочленами розглядалася в роботах [13, 23, 39, 44]. Існує деяка кількість програм для комп’ютера [2, 39, 40]. Ефективні методи отримання найкращих чебишовських нелінійних наближень існують, в основному, дял конкретних виразів.

Використання на практиці чебишовських наближень часто не зручне, бо через похибку обчислень неможливо досягнути заданої точності.

Цього недоліку не мають наближення сплайнами

1.1 Рівномірні сплайни, які складаються з відрізків многочленів

Припустимо, що наближувана функція має властивості

і проміжок розбитий на частин , . В такому випадку для значення абсолютної похибки найкращго рівномірного наближення многочленом степені на кожному проміжку має місце оцінка[4].

з якої випливають рівності

(1.4)

Просумувавши рівності (1.4) по , отримуємо

(1.5)

Якщо , то ліва частина рівності (1.5) рівна , а права є інтегральною сумою. Тому при достатньо малих маємо

Для формула вперше отримана в роботі [3]. Подібні формули є також в роботах [20, 25]. З формули (1.6) при заданій кількості ланок рівномірного сплайну знаходимо наближення виразу для мінімально можливої похибки :

(1.7)

Вираз (1.7) відповідає формулі, яка з нього витікає (1.3). При цьому вираз (1.7) зручніше у використанні, бо при конкретних і з н ього можуть бути знайдені чисельні значення . При і , з виразу (1.7) отримуємо

що є точним виразом для похибки найкращого рівномірного наближення відрізками констант, якщо монотонна функція.

Порівняймо числові значення, отримані за формулами (1.6) і (1.7), і при побудові рівномірних сплайнів за алгоритмами з робіт [27, 28].

Приклад 1.1. . Підставляючи значення в формулу (1.7), отримуємо

Для деяких показані точні значення (верхня межа) і значення , отримане за формулою (нижня межа).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Таким чином, точні значення і наближення значення співпадають з точністю до можливох машинної похибки.

Приклад 1.2 . В даному випадку з формули (1.7) отримуємо, .

Нижче для деяких проміжків показані точні значення , які є похибками наближення функції квадратним тричленом з найменшою абсолютною похибкою (верхня межа), а також відносна похибка у визначенні за формулою наближення.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Формулу (1.6) можна також використовувати для наближеного визначення границь ланок сплайну при заданій похибці . Перепишемо згадану формулу у вигляді

В загальному випадку рівність (1.8) є трансцендентним рівнянням для наближеного визначення границь ланок сплайну, яке може бути розв’язане на комп’ютері. Проте в деяких випадках задача можу бути розв’язана аналітично. Наведемо приклад

Приклад 1.4. В першому прикладі до програми 2.11 роботи [28] знайдено рівномірне лінійне сплайн наближення функції на проміжку з похибкою . Оскільки необмежена на заданому проміжку, то формули (1.6) - (1.8) безпосередньо застосовувати не можна. Проте якщо розглядати наближення на проміжку , то з формули (1.8) випливає що . Тому згідно виразу (1.8) можна наближено знаходити границі ланок, починаючи з другої, прийнявши . Якщо , то точність знаходження границь ланок збільшується. Нижче приведені точні значення границь при і їхні наближені значення при

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |
|  | - |  | 0.217420 | 0.607500 |
|  | - | - | 0.226548 | 0.627158 |
|  | - | - | - | 0.635451 |

При наближенні сплайном (відразки констант) з виразу (1.7а) випливає, що якшо наближувати монотонну функцію сплайном з заданою кількістю ланок і мінімально можливою похибкою, то границі ланок будути виражатися наступним чином:

Ця рівність має місце, оскільки воно еквівалентне відношенню , з якого випливає, що . Остання рівність є умовою того, що постійні є ланками рівномірного сплайну для монотонної функції .

1.2. Рівномірні сплайни, які склаадються з склеїних відрізків многочленів

В деяких випадках функціх необхідно наближати неперервним сплайном. Найбільш природно при цьому будувати сплайн так, щоб його перша ланка була найкращим рівномірним многочленним наближенням степені , а всі наступні - найкрщими рівномірними наближеннями многочленом з закріпленою лівою границею [39]. Такий сплайн будемо називати рівномірним, який складається з склеїних відрізків многочлена і позначимо . Якщо при цьому функція задовольняє умовам (1.1) і непарне, то співпадає з рівномірним сплайном, який складається з многочленів відрізків. Це наслідок співпадіння крайніх точок альтернансу кожної ланки з границями лаанок [48], а похибка наближення у всіх границях ланок однакова. Для функції парної степені це не так. Розглянемо спочатку найважливіший випадок . Як і раніше припускаємо справедливість властивостей (1.1). В другій і в наступних ланках сплайну позначимо ліву границю, - праву границю, - центральну точку альтернансу. Для визначення коефіцієнтів тричлена , а також точок і отримуємо систему рівнянь

де , похибка наближення . Позначимо через , з системи рівнянь (1.9) отримуємо вирази для коефіцієнтів і . , , . Підставивши ці значення в останнє рівняння системи (1.9), визначимо

Розклавши в цьому рівнянні в ряд і в околі точки запишемо

Відкикаючи члени порядку , маємо . Для визначення підставимо в рівняння значення коефіцієнтів і Розклавши в цьому рівнянні в ряд і в ряд Тейлора в околі точки і нехтуючи членами вищого порядку малості отримаємо: . Підставивши сюди значення , запишемо вираз для .

Отже, довжини другої і наступних ланок сплайна є

Так як з формули (1.4) випливає що довжина першої ланки сплайну рівна , то середня довжина ланок виражається формулою

де точка належить конкретній ланці рівномірого неперервного квадратичного сплайну.

Розмірковуючи так само, як при виведенні формул (1.6) і (1.7) отримуємо вираз для кількості ланок рівномірного неперервного квадратичного сплайну з заданою похибкою і для максимальної похибки такого сплайну при заданій кількості ланок

Приклад 1.5. Виходячи з формул (1.12) і (1.11) отримуємо

Нижче для деяких наведені визначені за допомогою алгоритму з роботи [39] точні значення (верхнє число) і відповідні величини, отримані за формулою для .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
|  |  |  |  |  | 1.31 10^-6 |
|  |  |  |  |  |  |

Далі для точних значень , які відповідають наведені значення, отримані за формулою (нижня межа).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| - | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| r | 0.9945 | 2.015 | 4.031 | 8.068 | 16.137 | 32.199 |

Приклад 1.6. Виходячи з формули (1.12) і (1.11), отримуємо

Нижче для деяких наведені точні значення (верхня межа) і відповідні величини, отримані по формулі для .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Для точних значень , які відповідають наведені значення, отримані за формулою для

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| - | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
|  | 1.0094 | 1.990 | 3.988 | 8.000 | 16.066 |

Відносна похибка визначених за формулою (1.12) величин в прикладі (1.4) не більше , в прикладі 1.5 - не більше , а величин - не більше в обох прикладах.

Для отримання наближених виразів і для будь-якого парного степеня, довжина всіх ланок, починаючи з другої, зменшується в порівнянні з виразом (1.5) на відстань між першою і другою точками альтернансу . Оскільки при виведенні формули (1.5), а також (1.10) в розкладі функції в ряд Тейлора нехтуємо членами з при , то точки альтернансу на проміжку повинні бути розміщені так само, як якщо би на цьому проміжку наближку наближалася функція за допомогою многочлена степені з найменшою абсолютною похибкою. Вираз для цих точок має вигляд [12, 13, 39]

Звідси випливає, що довжина всіх ланок неперервного многочленного сплайну парної степені, починаючи з другого, рівна , де вираз для виводиться з формули (1.3), а для є вираз

Оскільки довжина першої ланки сплайну випливає з формули (1.3), то середня довжина ланок має вигляд , де визначається за формулою (1.13).

Нижче наведено числові значення для деяких :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|  | 0.75 | 0.9045085 | 0.9504844 | 0.9698463 | 0.9797466 |

1.3. Рівномірні інтерполяційні сплайни

Ланки рівномірних інтерполяційних сплайнів є найкращими рівномірними наближеннями з двома закріплиними границями. В точках перетину значення рівномірного інтерполяційного сплайну рівні значенням наближуваної функції . Для виводу виразів, аналогічних формулам (1.14) і (1.15) розглянемо спочатку випадок і . При сплайн співпадає з лінійним інтерполяційним сплайном [14] і легко показати, що

Розглянемо випадок . Як і раніше при . Встановимо наближений вираз для довжини сплайну Для встановлення коефіцієнтів квадратного тричлена , точок альтернансу і і точки - правої границі ланки запишемо систему рівнянь

де при при . Позначивши через , з системи рівнянь (1.16) отримаємо

Виходяти з двох перших рівнянь системи (1.16), а також значень коефіцієнтів і , отримуємо рівняння, яке спрощується після розкладу в ньому величин і в ряд Тейлора в околі точки

З першого і третього рівнянь (1.16) отримуємо аналогічно

Нехтуючи другим доданком лівою частини рівняння (1.17) і додаючи рівняння (1.17) і (1.18) отримуємо, що . Віднявшт ці рівняння, записуємо відношення для визначення . Нехай . Тоді з останнього рівняння отримуємо кубічне рівняння для визначення множника . Єдиний йогр додатній розв’язок є . Оскільки величини і входять в систему рівнянь (1.17) симетрично, то і

Виходячи з цього виразу аналогічно отримуємо вираз для кількості ланок рівномірного квадратичного інтерполяційного сплайну з заданою похибкою і для максимальної похибки сплайну при заданій кількості ланок