De Moivre-tétel

A komplex számok szorzásának definíciójából következik, hogy $(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$. Ez vezet el a következő, **De Moivre-tételként** ismert eredményhez, mely a *z* komplex szám z^n hatványával kapcsolatos.

Tétel. Tetszőleges *n* pozitív egészre $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$.

Az eredmény igaz *n* negatív egész, sőt nulla értékére is, és ezek tekinthetők akár a De Moivre-tétel speciális esetének, akár kiterjesztésének.

De Morgan-szabály

Legyen *A* és *B* egy univerzális alaphalmaz két tetszőleges részhalmaza. Akkor $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ és $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Ezek a **De Morgan-szabályok**.

determináns

Az ***A*** négyzetes mátrix $\det(\mathbf{A})$-val vagy $|\mathbf{A}|$-val jelölt **determinánsát** a következőképpen definiálhatjuk. Tekintsük sorra az 1×1-es, 2×2-es, 3×3-as és az $n \times n$-es mátrixokat.

Az 1×1-es $[a]$ mátrix determinánsa egyszerűen az *a* szám. Ha ***A*** az alábbi 2×2-es mátrix, akkor $\det(\mathbf{A}) = ad - bc$, és a determinánst az alábbi módon jelölhetjük:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Ha ***A*** 3×3-as mátrix, akkor $\det(\mathbf{A})$, melyet így is jelölhetünk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a következőképpen számítható:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

differenciáloperátor

Általában bármilyen operátor, mely deriválást vagy parciális deriválásokat tartalmaz. Például a $\nabla := \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ operátor, ahol $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az egyes koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok, és $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ a parciális deriváltak *x*,*y*,*z* szerint. Lásd még rotáció, divergencia és gradiens.

Dirichlet-sor

A $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ alakú sor, ahol a_n és z komplex, $\{\lambda_n\}$ pedig valós, monoton növő sorozat. Ha $\lambda_n = \ln(n)$, akkor a sor a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-z}$ sorra egyszerűsödik, amely **Dirichlet-féle L-sorként** ismert.

divergencia

Az $m \to +\infty$ vektor-vektor függvény **divergenciája** a $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ operátorral vett skaláris szorzata, vagyis

$$i, -1+i, -1, 0, i, -1+i, \ldots$$

Vesd össze rotáció, gradiens.

Hérón-módszer

Iterációs eljárás egy szám négyzetgyökének a meghatározására. Ha $\sqrt{k}$ értékét szeretnénk kiszámítani, akkor egy x_0 kezdeti értékből kiindulva az $x_{n+1} = \frac{\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right)}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ rekurzióval definiált sorozat *k* négyzetgyökéhez fog konvergálni. Például 5 négyzetgyökének kiszámításához a 2 kezdeti értékből kiindulva azt kapjuk, hogy $x_1 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25, \quad x_2 = 2.23611111\ldots, \quad x_3 = 2.236067978\ldots, \quad x_4 = 2.236067978\ldots$ és $\sqrt{5} = 2.236067978\ldots$. Ez az eljárás már a harmadik iterációs lépésnél nagy pontosságú közelítést ad.

Horner-elrendezés

A (példaként vett) $f(x) := 2x^3 - 7x^2 + 5x + 11$ polinomnak az $x = h$ helyen vett helyettesítési értékét úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámoljuk a h^2 és a h^3 hatványokat, ezeket a megfelelő együtthatókkal megszorozzuk, és az így kapott tagokat összeadjuk. Ezt az értéket azonban kevesebb művelet elvégzésével is megkaphatjuk, ha a polinomot a

$$\big((2x-7)x+5\big)x+11$$

alakban értékeljük ki. Hasonló módon tetszőleges polinom helyettesítési értékeit is hatékonyabban lehet kiszámítani, ezért ezt az eljárást ajánlatos használni akár kézzel, akár géppel. Az eljárást **Horner-elrendezésnek** szokás nevezni. Például az ötödfokú

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

polinomot az

$$((((a_5x + a_4)x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

alakra írjuk át a fenti célból.

láncszabály

Differenciálható függvények kompozíciójának deriváltjára vonatkozó tétel: ha $h = f \circ g$, akkor $h' = (f' \circ g)g'$. Például, ha $h(x) = (x^2+1)^3$, akkor $h = f \circ g$, ahol $f(x) = x^3$ és $g(x) = x^2 + 1$. Ekkor $f'(x) = 3x^2$ és $g'(x) = 2x$, így tehát $h'(x) = 3(x^2+1)^2 2x = 6x(x^2+1)^2$.

Legendre-polinomok

A Legendre-féle differencálegyenlet megoldásainak $b = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ halmaza, melyek másrészt a $\frac{1}{\sqrt{(1-2xt+t^2)}}$ ktváltozós függvény *t* szerinti sorbafejtésével t^n együtthatójaként adódnak. Felírhatók a **Rodrigues-formula** segítségével is, azaz $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$.

másodfokú egyenlet

Az *x* ismeretlenre nézve **másodfokú egyenletnek** nevezzük az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y < 0\}$ alakú egyenletet, ahol *a*,*b*,*c* adott valós számok, $ax^2 + bx + c = 0$. Teljes négyzetté kiegészítéssel vagy az

$a \neq 0$

megoldóképlettel – amely szintén teljes négyzetté kiegészítéssel vezethető le – lehet megoldani. Ha $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, akkor két különböző valós gyök van, ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor egyetlen valós gyök van (amit célszerű lehet kétszeres vagy két egybeeső gyöknek tekinteni), ha pedig $b^2 - 4ac = 0$, akkor nincs valós gyök, van viszont két komplex gyök:

$b^2 - 4ac < 0$

Ha $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$. és α az β egyenlet gyökei, akkor

$ax^2 + bx + c = 0$

Tehát az adott $\alpha + \beta = -b/a \quad \alpha\beta = c/a$. és α gyökökkel bíró másodfokú egyenlet: β.

Maxwell-egyenletek

Az elektromos és mágneses mezők változását leíró differenciálegyenlet-rendszer:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Itt ***B*** jelöli a mágneses indukciót, ***D*** az elektromos eltolást, ***E*** az elektromos térerősséget, ***H*** a mágneses térerősséget, ***j*** a töltésáram-sűrűséget, ϱ a szabad töltéssűrűséget, *t* pedig az időt.

szórásnégyzet

Egy valószínűségi változó vagy minta szóródásának mértéke. Az *X* valószínűségi változó esetén a **sokaság szórásnégyzete** a sokaság második centrális momentuma, azaz a sokaság μ várható értékétől vett négyzetes eltérés várható értéke, $E((X-\mu)^2)$. A szórásnégyzetet gyakran a $\sigma^2, D^2(X)$ vagy a $E((X-\mu)^2)$ szimbólummal jelöljük.

Egy *n* elemű **minta szórásnégyzete** – amelyet s^2 vagy s_n^2 jelöl – nem más, mint a minta $\bar{x}$ átlaga körüli második centrális momentum, vagyis

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Az s^2 mennyiséget **tapasztalati szórásnégyzetnek** is nevezzük. A tapasztalati szórásnégyzet azonban a sokaság szórásnégyzetének nem torzítatlan becslése, ezért becslésekben helyette sokszor az

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

ún. **korrigált tapasztalati szórásnégyzetet** alkalmazzuk.

A számításokat a $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\overline{x}^2$ összefüggés segítségével gyakran egyszerűsíthetjük.

teljes valószínűség tétele

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egymást páronként kizáró események, amelyek uniója valamely kísérlet teljes eseménytere. A tetszőleges *B* esemény valószínűsége ekkor

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n)$$

alakban is felírható a feltételes valószínűségek segítségével.

többszörös integrál

Két- vagy többváltozós integrál kiszámításának módja, ahol az integrálás lépéseit egymás után hajtjuk végre, mindig egy-egy változó szerint, miközben többi változót konstansnak tekintjük. A kétszeres integrál a kétváltozós speciális eset.

A töbszörös integrálok lehetnek határozottak vagy határozatlanok. Határoztlan integrál esetén az első integrálnál kapott konstanst a második változó szerinti integrálnál már a második változó függvényének tekintjük. Ha egy felületet a kétváltozós *f* függvény ír le, akkor a felület alatti térfogat éppen $\int\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Például a $z = x + 3y + 5$ sík alatti térfogatot az $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$ tartományon a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\int_0^3\int_0^2 (x+3y+5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3\left[\frac{x^2}{2} + 3xy + 5x\right]_0^2 \mathrm{d}y = \int_0^3 (6y+12)\,\mathrm{d}y = [3y^2+12y]_0^3 = 63$$.

Vandermonde-féle konvolúciós képlet

Ha *m*,*n* és *k* nemnegatív egészeket jelölnek, akkor a binomiális együtthatók között fennáll, hogy

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}.$$

A képletet az $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ azonosságból kapjuk, ha összehasonlítjuk x^k együtthatóját a két oldal kifejtésekor.