

Темы

Линейная алгебра

1. Системы линейных уравнений, матрицы, операции, блочные операции, обратимость и невырожденность, полиномиальное исчисление от матриц, спектр, минимальный многочлен.
2. Определители (3 подхода), ориентированные объемы, формулы разложения определителя, присоединенная матрица, явные формулы обратной матрицы, характеристический многочлен, теорема Гамильтона-Кэли.
3. Векторные пространства и подпространства, линейная зависимость, базисы, размерность. Ранги матриц: строчный ранг, столбцовый ранг, факториальный ранг, тензорный ранг, минорный ранг. Свойства рангов и неравенства на ранги.
4. Линейные отображения и их матричное описание, смена координат. Образ и ядро их геометрический смысл, связь на размерности. Инварианты линейного оператора: след, определитель, характеристический многочлен. Собственные значения и векторы, связь со спектром. Замечание о комплексных числах. Диагонализуемость, теорема о ЖНФ и связанные матричные разложения.
5. Билинейные формы. Квадратичные формы и симметричные билинейные формы. Сигнатура, ее геометрический смысл, методы определения сигнатуры. Связь с LU-разложением. Скалярные произведения, углы и расстояния. Ортогонализация и QR-разложение. Линейные многообразия и линейные классификаторы, отступы.
6. Операторы в евклидовых пространствах. Движения и ортогональные матрицы их классификация. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы, их диагонализуемость. Сингулярное разложение (SVD). Нахождение SVD.

Математический анализ

1. Пределы, ряды и их сходимость. Методы суммирования рядов и признаки сходимости. Дискретное интегрирование и дифференцирование.
2. Функции одной переменной, пределы, производные их геометрический смысл, вычисление производных, касательные, критические точки, поиск минимумов и максимумов. Интегралы и ориентированные площади, скорости и расстояния, намек на вычисление интегралов, свойства интегрирования.
3. Функции нескольких переменных, градиент, производная по направлению, линии уровня, касательная плоскость, критические точки, Гессиан и сигнатура, поиск минимумов и максимумов. Нормы, понятие непрерывности в векторном пространстве. Матричные дифференцирования.
4. Оптимизационные задачи, лагранжиан и его геометрический смысл, нахождение минимума или максимума с заданными ограничениями.

Теория вероятностей

1. Вероятностное пространство, случайные события, как их понимать. Вероятность (мера) и условная вероятность, независимость событий, геометрический смысл. Формулы Байеса и полной вероятности.
2. Случайные величины, как их понимать. Функции распределения, вероятности (меры) на прямой и как их задавать. Классы распределений, примеры дискретных и непрерывных распределений. Распределение композиции. Характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, моменты, медиана (в хорошем случае). Нормальное или Гауссово распределение.
3. Случайный вектор или многомерная случайная величина, как их понимать и задавать. Классы распределений, примеры дискретных и непрерывных распределений. Восстановление распределений координат. Математическое ожидание и матрица ковариации. Независимость случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии для независимых случайных величин.

4. Условные математические ожидания и вероятности. Формулы Байеса и полной вероятности для непрерывного случая. Распределение суммы независимых случайных величин и свертка плотностей. Многомерное гауссово распределение.
5. Основная модель математической статистики (как связать формализм теории вероятностей с измерениями сэмплов). Оценки и их свойства. Зачем нужны сходимости и предельные теоремы. Виды сходимостей и связь между ними. Законы больших чисел и неравенство Чебышева. Выборочные среднее и выборочная дисперсия, выборочная матрица ковариации, коэффициент корреляции. Метод максимального правдоподобия. PCA и SVD. ЦПТ и неравенство Берри-Эссена.