Fiche de synthèse : Suites numériques

Benjamin L'Huillier

1 Définition d'une suite

Definition 1.1: Suite

Une *suite* est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) qui associe à chaque entier n un nombre réel u_n, appelé le *terme de rang n*.

2 Deux modes de définition

Definition 2.1: Formule explicite

Une suite est définie par une *formule explicite* si on peut exprimer u_n directement en fonction de n.

Si on connaît n, on peut directement calculer u_n.

Exemple : $u_n = 2n + 3$

Definition 2.2: Définition par récurrence

Une suite peut aussi être définie par *récurrence* :

$$\begin{cases} u_0 = a \quad \text{(valeur initiale)} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{(relation de récurrence)} \end{cases}$$

Dans ce cas, pour calculer u_n pour un n particulier, il faut d'abord calculer tous les u_k pour $k < n$: $u_0, \dots, u_{n-1}$.

Exemple : $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + 2$

Example 2.1: Suite définie explicitement

Soit $u_n = 3n^2 + 1$. C'est une suite définie explicitement : on peut calculer directement n'importe quel terme :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 4, \quad u_2 = 13, \quad u_3 = 28, \quad \dots$$

Example 2.2: Suite définie par récurrence

Soit $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$. C'est une suite définie par récurrence.

$$v_1 = 5, \quad v_2 = 11, \quad v_3 = 23, \quad \dots$$

Remarque 2.1: Différentes catégories de suites

Deux catégories importantes de suites sont les suites arithmétiques (voir **??**) et géométriques (voir **??**).

Une suite peut être ni arithmétique, ni géométrique.

3 Suites arithmétiques

Definition 3.1: Suite arithmétique

Une suite (u_n) est *arithmétique* s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété 3.1: Formule explicite

Soit r la raison de la suite arithmétique.

- Si on connaît le premier terme u_0, alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

- Plus généralement, pour tout entier $p \leq n$, on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Example 3.1: Suite arithmétique

Soit $u_0 = 5$ et $r = 3$. La suite est définie par :

$$u_n = 5 + 3n$$

Les premiers termes sont :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = 8, \quad u_2 = 11, \quad u_3 = 14, \quad \dots$$

Remarque 3.1: Exemples ?? et ??

Les suites des exemples **??** et **??** ne sont pas arithmétiques:

$$u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 1 = 3n^2 + 6n + 1 = u_n + 6n,$$

donc $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant. De même,

$$v_{n+1} - v_n = v_n + 1$$

n'est pas constant.

4 Suites géométriques

Definition 4.1: Suite géométrique

Une suite (u_n) est *géométrique* s'il existe un réel q tel que :

$$u_{n+1} = q \cdot u_n$$

Propriété 4.1: Formule explicite

Soit q la raison de la suite géométrique.

- Si on connaît le premier terme u_0, alors :

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

- Plus généralement, pour tout entier $p \leq n$, on a :

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

Example 4.1: Suite géométrique

Soit $u_0 = 2$ et $q = 3$. La suite est :

$$u_n = 2 \cdot 3^n$$

Les premiers termes :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 6, \quad u_2 = 18, \quad u_3 = 54, \quad \ldots$$

Somme des 4 premiers termes $(n = 3)$:

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 3^4}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 81}{-2} = 80$$

5 Somme des n premiers termes d'une suite

Propriété 5.1: Somme des $n + 1$ premiers termes

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Propriété 5.2: Somme des $n + 1$ premiers termes si $q \neq 1$

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

6 Limites de suites

Definition 6.1: Limite d'une suite

On dit que la suite (u_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$|u_n - \ell| \to 0$$

quand $n \to \infty$.

On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Remarque 6.1

Une suite peut aussi tendre vers $+\infty$, $-\infty$, ou être divergente sans limite.

Propriété 6.1: Limites classiques

- Si $r > 0$, alors la suite arithmétique $u_n = u_0 + nr \to +\infty$
- Si $|q| < 1$, alors $u_n = u_0 \cdot q^n \to 0$
- Si $q > 1$, alors $u_n = u_0 \cdot q^n \to +\infty$ (si $u_0 > 0$)

7 Exemples

Example 7.1: Suite de Fibonacci

La suite de **Fibonacci** est définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Chaque terme est la somme des deux termes précédents. Les premiers termes sont :

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \dots$$

Cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Remarque 7.1: Formule de Binet pour la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci admet une formule explicite (non au programme de Première) :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Cette expression fait intervenir le **nombre d'or** $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et sa conjugée.
Elle est utile pour démontrer des propriétés asymptotiques comme :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$$