Fiche de synthèse : Le Produit Scalaire

Benjamin L'Huillier

1 Rappels

1.1 Repère orthonormé

Definition 1.1: Repère

Un **repère** $(O; (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ dans un plan est un système de référence défini par :

- Un point appelé **origine** O.
- Deux vecteurs ***non colinéaires*** $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, définissant la direction des axes.

Tout point du plan peut être repéré par ses coordonnées (x, y) dans ce repère.

Definition 1.2: Repère orthonormé

Un **repère orthonormé** est un repère particulier où :

- Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont **orthogonaux**.
- La norme de chaque vecteur est égale à 1 :

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1.$$

Un repère orthonormé permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur avec des calculs simplifiés.

2 Produit Scalaire

Definition 2.1: Définition géométrique

Soient trois points A, B, C dans le plan, avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des vecteurs non nuls. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est défini par :

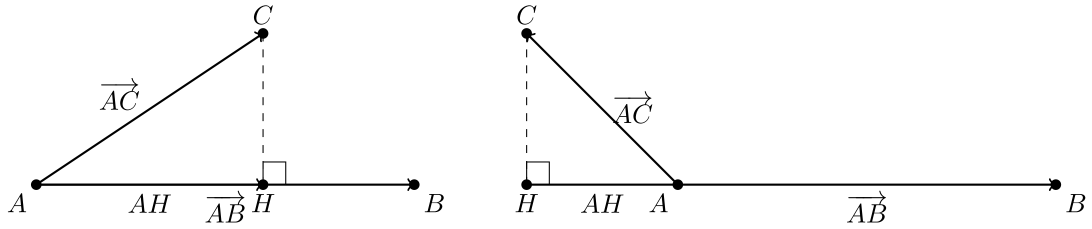
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AH \times AB & \text{si } H \in [AB] \\ -AH \times AB & \text{sinon.} \end{cases}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Definition 2.2: Définition trigonométrique

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ deux vecteurs non nuls formant un angle θ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$



(a) Projection orthogonale de C sur (AB), cas d'un angle aigu.

(b) Projection orthogonale de C sur (AB), cas d'un angle obtus.

Figure 1: Cas du produit scalaire selon l'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarque 2.1

Cette définition englobe les deux définitions de : pour les angles obtus, le cosinus est négatif.

Definition 2.3: Définition analytique

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

2.1 Norme

Definition 2.4: Norme d'un vecteur

Soient A et B deux points du plan. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est définie par :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$$

De manière générale, la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriété 2.1: Propriétés du produit scalaire

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (commutativité).
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ (linéarité).
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

2.2 Formules liées au produit scalaire

Propriété 2.2: Formules des carrés

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2\right)$$
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Propriété 2.3: Lien avec les coordonnées

En coordonnées, on retrouve ces relations sous la forme :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$
$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$