Fiche de synthèse : Probabilités

Benjamin L'Huillier

1 Notions fondamentales

Definition 1.1: Expérience aléatoire

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat ne peut pas être prévu avec certitude, mais pour laquelle on connaît tous les résultats possibles.

Definition 1.2: Univers

L'*univers* est l'ensemble Ω de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Definition 1.3: Événement

Un *événement* est un sous-ensemble de l'univers. Il peut être formé d'un ou plusieurs résultats.

Definition 1.4: Événement élémentaire

Un événement est dit *élémentaire* s'il est constitué d'un seul résultat.

Definition 1.5: Événement certain et événement impossible

- L'*événement certain* est l'univers Ω lui-même : il se réalise toujours.
- L'*événement impossible* est l'ensemble vide $\varnothing$: il ne se réalise jamais.

Example 1.1: Exemples

- **Expérience aléatoire** : lancer un dé à 6 faces. On ne peut pas prédire à l'avance le résultat du lancer, mais les issues possibles sont connues : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Expérience aléatoire** : mesurer la longueur d'un segment avec une règle graduée. Même si l'on connaît les conditions exactes de mesure, le résultat sera toujours légèrement différent à cause des incertitudes.
- **Expérience déterministe** : calculer $3 + 5$. Le résultat est toujours le même et ne dépend d'aucun hasard.

Remarque 1.1: Exemples d'univers et d'événements

- Lancer d'un dé à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $A = \{2, 4, 6\}$: *le résultat est un nombre pair*
  - $B = \{1, 4, 5\}$: exemple d'événement quelconque
  - $\{3\}$ est un événement élémentaire
  - $\{7\}$ est un événement impossible
- Lancer d'une pièce : $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$
  - $A = \{\text{pile}\}$ est un événement élémentaire
  - $B = \{\text{côté}\}$ est un événement impossible

Definition 1.6: Intersection

L'intersection de deux événements A et B, notée $A \cap B$, est l'événement « A et B se produisent ».

Definition 1.7: Union

L'union de deux événements A et B, notée $A \cup B$, est l'événement « A ou B (ou les deux) se produisent ».

Remarque 1.2: Le « ou » en mathématiques

En mathématiques, le mot « ou » est *non-exclusif* :

$$A \cup B = \text{« } A \text{ ou } B \ \underline{\text{ou les deux}} \text{ »}$$

Autrement dit, $A \cup B$ comprend tous les cas où A se réalise, ou B, ou les deux en même temps.

Example 1.2: Lancer d'une pièce

On lance une pièce. On considère les événements :

- A : « obtenir pile » $= \{\text{pile}\}$
- B : « obtenir face » $= \{\text{face}\}$

Alors :

$$A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \text{événements incompatibles}$$

$$A \cup B = \{\text{pile}, \text{face}\} = \Omega$$

Definition 1.8: Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se produire en même temps, c'est-à-dire :

$$A \cap B = \varnothing$$

Example 1.3: Dé à 6 faces

On lance un dé à 6 faces. On considère les événements :

- A : « le résultat est pair » $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
- B : « le résultat est strictement supérieur à 3 » $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\}$

Alors :

- $A \cap B = \{4, 6\}$ est l'événement « le résultat est pair et strictement supérieur à 3 »,
- $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ est l'événement « le résultat est pair ou strictement supérieur à 3 ».

Definition 1.9: Partition d'un événement

Une famille d'événements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une *partition* d'un événement E si :

- Tous les A_i sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$
- Leur union est égale à E : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$

Example 1.4: Partition de l'univers Ω

Au lancer d'un dé à 6 faces, on peut partitionner $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en :

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{3, 4\}, \quad A_3 = \{5, 6\}$$

Ces trois événements sont deux à deux incompatibles, et leur union vaut Ω, donc ils forment une partition.

2 Axiomes de la probabilité

Propriété 2.1: Axiomes

Pour toute fonction de probabilité P sur Ω, on a :

- $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement $A \subset \Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- Si des événements $A, B, C, \cdots$ sont deux à deux incompatibles (i.e. disjoints), alors

$$P(A \cup B \cup C \cup \cdots) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots$$

3 Probabilités d'unions et d'intersections

Propriété 3.1: Probabilité de l'union de deux événements

Pour tous événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque 3.1: Interprétation

- Cette formule permet d'éviter de compter deux fois les cas où A et B se produisent en même temps.
- Si A et B sont *incompatibles* (i.e. $A \cap B = \varnothing$), alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Example 3.1: Exemple de calcul d'union

Soit un dé à 6 faces. On note :

- A : « obtenir un nombre pair » $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
- B : « obtenir un nombre ≤ 3 » $\Rightarrow B = \{1, 2, 3\}$

Alors :

$$A \cap B = \{2\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$P(A) = \frac{3}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Definition 3.1: Événement contraire

L'événement contraire de A est noté $\bar{A}$.

Propriété 3.2: Événement contraire

Soit A un événement. On a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

4 Indépendence

Definition 4.1: Indépendance

Deux événements A et B sont dits *indépendants* si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque 4.1

Pour montrer que deux événements sont indépendants, il faut calculer d'une part $P(A \cap B)$, et comparer avec le produit $P(A)P(B)$.

Remarque 4.2: Indépendance vs incompatibilité

Deux événements peuvent être incompatibles sans être indépendants, et inversement.

- Incompatibles : ne peuvent pas se produire ensemble $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$
- Indépendants : la connaissance de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre

5 Probabilités Conditionnelles et théorème de Bayes

Definition 5.1: Probabilité conditionnelle

La probabilité de A sachant que B est réalisé (et que $P(B) \neq 0$) est notée $P_B(A)$ et vaut :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque 5.1

Si les événements A et B sont indépendents :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A). \quad (1)$$

En effet, si les événements sont indépendents, le fait que B soit réalisé n'affecte pas la probabilité de A.

Theorem 5.1: Théorème de Bayes

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Remarque 5.2: Utilité des arbres de probabilité

Les arbres permettent de représenter :

- des situations avec plusieurs étapes,
- des probabilités conditionnelles,
- des cas de branches disjointes avec la formule des probabilités totales.

Propriété 5.1: Formule des probabilités totales

Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de l'univers (i.e. $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$, et $\bigcup_i B_i = \Omega$), alors :

$$P(A) = \sum_i P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)$$

À retenir

- Ω : univers des résultats possibles. $P(\Omega) = 1$
- $\varnothing$: événement imposssible. $P(\varnothing) = 0$.
- $A \subset \Omega$: un événement (ensemble de résultats)
- $P(A)$: probabilité de l'événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $A \cup B$: « A ou B » (union)
- $A \cap B$: « A et B » (intersection)

- $\bar{A}$: contraire de A, avec $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- A et B incompatibles : $A \cap B = \varnothing \to P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$: probabilité conditionnelle
- Théorème de Bayes : $P_A(B) = \dfrac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(A)}$
- Probabilité totale : $P(A) = \sum_i P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)$ (si B_i forment une partition)