Fiche de synthèse : Dérivation

Benjamin L'Huillier

1 Rappels

Definition 1.1: Taux d'Accroissement

Le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$ est défini par :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Definition 1.2: Nombre Dérivé

Si la *limite du taux d'accroissement existe* lorsque h tend vers 0, on dit que f *est dérivable en* a, et on définit le *nombre dérivé de* f *en* a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Propriété 1.1: Nombre dérivé et équation de la tangente

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point a est :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Definition 1.3: Domaine de dérivabilité

Le *domaine de dérivabilité* de f est l'ensemble des points où f est dérivable (admet un taux d'accroissement fini).

Definition 1.4: Fonction dérivée

La fonction dérivée de f est la fonction qui, à tout point x de son domaine, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

2 Les Dérivées

2.1 Dérivées usuelles

La table **??** résume les dérivées des fonctions usuelles, *à connaître par cœur* !

2.2 Règles de dérivation

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité	Remarque
k (constante)	0	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{Z}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$

Table 1: Dérivées de fonctions usuelles

Opération	Règle de dérivation	Remarque
Somme	$(u+v)' = u' + v'$	
Produit par une constante	$(au)' = au'$	$a \in \mathbb{R}$
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$	
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, pour $v \neq 0$	
Fonction linéaire $af(x)+b$	$af'(x)$	$a, b \in \mathbb{R}$

Table 2: Opérations et dérivées. f, u et v représentent des fonctions.

Remarque 2.1: Règles de dérivation

La Table **??** résume les formules à connaître.

3 Dérivation et Étude de Fonction

Remarque 3.1: Lien entre dérivée et variations

L'étude du signe de la dérivée d'une fonction nous informe sur ses variations :

- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est **croissante** sur cet intervalle.
- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est **décroissante** sur cet intervalle.
- Si $f'(x)$ s'annule et change de signe en un point x_0, alors x_0 est un **extremum** (minimum ou maximum local).

Remarque 3.2: Tableau de variations

Pour étudier les variations d'une fonction f, on suit les étapes suivantes :

1. Calculer la dérivée $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les points critiques.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur les intervalles délimités par ces points.
4. Construire un tableau de variations synthétisant ces informations.

3.1 Exemple : Étude de fonction

Nous considérons la fonction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{-2x+3}{x^2+x-2}.$$

1. **Déterminons le domaine de définition** : Le dénominateur s'annule lorsque :

   $$x^2+x-2 = (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

   Ainsi, $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

2. **Calcul de la dérivée** :

   f est dérivable sur son domaine de définition en tant que quotiens de fonctions dérivables.

   f est de la forme $f = u/v$. Nous appliquons la formule de la *dérivée d'un quotient* : $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

   $$f'(x) = \frac{(-2)(x^2+x-2)-(-2x+3)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}.$$

   En développant le numérateur :

   $$-2(x^2+x-2) = -2x^2-2x+4,$$

   $$(-2x+3)(2x+1) = -4x^2-2x+6x+3 = -4x^2+4x+3.$$

   Ainsi :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-2x^2-2x+4)-(-4x^2+4x+3)}{(x-1)^2(x+2)^2}. \\ &= \frac{-2x^2-2x+4+4x^2-4x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}. \\ &= \frac{2x^2-6x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}. \end{aligned}$$

3. **Étude du signe de** $f'(x)$: Le dénominateur de f' est toujours positif, car c'est un carré. Le signe de f' est donc celui du numérateur. Nous résolvons $2x^2-6x+1=0$ pour trouver les points où f' s'annule et change de signe.

   $$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 36 - 8 = 28.$$

   $$x = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

   On a $4 < 7 < 9$, donc $2 < \sqrt{7} < 3$, et $5/2 < (3+\sqrt{7})/2 < 2$. On a également $-3 < -\sqrt{7} < -2$, donc $0 < (3-\sqrt{7})/2 < 1/2$.

   Comme $a > 0$, $2x^2-6x+1$ est négatif à l'intérieur des racines ($[x_1, x_2]$) et positif à l'extérieur des racines ($]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$).

x	$-\infty$		-2		$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

   La fonction $f(x)$ est croissante sur $]-\infty, -2[$ et $]\frac{3+\sqrt{7}}{2}, +\infty[$ et décroissante sur $]\frac{3-\sqrt{7}}{2}, 1[$. Les points $x=-2$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales.