Fiche de synthèse : Fonction x^2 et équations du second degré

Benjamin L'Huillier

1 Étude de la fonction $x \mapsto x^2$

1.1 Définition

Definition 1.1: Fonction carrée

La fonction carrée est définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2. \tag{2}$$

Elle associe à tout réel x le carré de x, c'est-à-dire le produit $x \times x$.

1.2 Propriétés

- **Domaine de définition** : La fonction est définie pour tout réel :

  $$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

- **Parité** : La fonction est paire, c'est-à-dire que :

  $$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

  Cela signifie que le graphe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- **Variations** :

  $$\begin{cases} f \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0] \\ f \text{ est croissante sur } [0, +\infty[\end{cases}$$

  Intuitivement, plus on s'éloigne de 0, plus le carré augmente.

- **Minimum** : La fonction atteint son minimum en $x = 0$, où :

  $$f(0) = 0$$

  Ce minimum est absolu sur $\mathbb{R}$.

1.3 Représentation graphique

Remarque 1.1: Forme du graphe

Le graphe de la fonction carrée est une **parabole** :

- orientée vers le haut,
- ayant pour sommet l'origine $(0, 0)$,
- symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

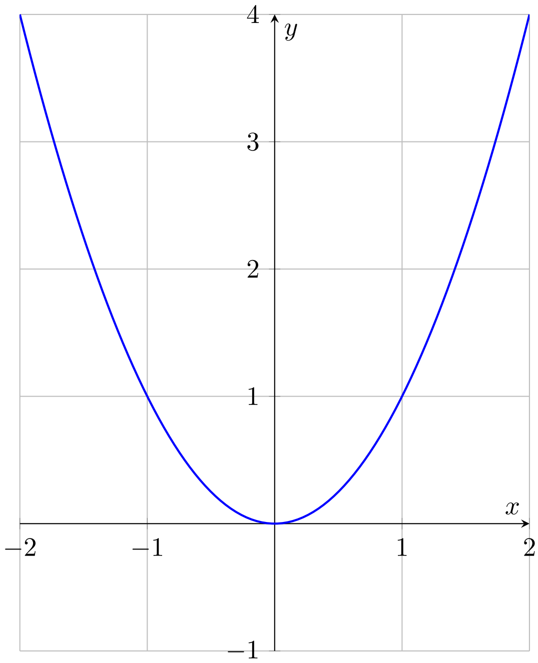


Figure 1: Graphe de la fonction $y = x^2$

2 Fonctions quadratiques (trinômes du second degré)

2.1 Définition

Definition 2.1: Trinôme du second degré

Un **trinôme du second degré** est une fonction polynomiale de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } a \neq 0,$$

où a, b, c sont des nombres réels appelés *coefficients*.

2.2 Influence des coefficients

- a détermine la concavité :
  - Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
  - Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.
- b influence la position de l'axe de symétrie et du sommet.
- c est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire $f(0) = c$.

2.3 Les trois formes d'un trinôme

Forme développée

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

C'est la forme la plus directe, mais elle ne permet pas de lire les caractéristiques géométriques facilement.

Forme canonique

Definition 2.2: Forme canonique

On peut réécrire le trinôme sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

où :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha) = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Cette forme permet d'identifier facilement le **sommet** de la parabole : $S(\alpha, \beta)$.

Forme factorisée (si $\Delta \geq 0$)

Definition 2.3: Forme factorisée

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles x_1 et x_2, alors :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Cette forme permet de lire directement les solutions de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire les points d'intersection du graphe avec l'axe des abscisses.

2.4 Propriétés géométriques

Propriété 2.1: Propriétés Géométriques

- **Axe de symétrie** : Le graphe est symétrique par rapport à la droite verticale :

$$x = \alpha = -\frac{b}{2a}$$

- **Sommet** : Le sommet de la parabole a pour coordonnées :

$$S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

- **Concavité** :
  - Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut (minimum).
  - Si $a < 0$, elle est ouverte vers le bas (maximum).

Remarque 2.1: Résumé visuel

Les trois formes du trinôme permettent de lire différentes informations :

- **Développée** : coefficients a, b, c, ordonnée à l'origine.
- **Canonique** : sommet.
- **Factorisée** : racines.

3 Résolution de l'équation du second degré

3.1 Équation standard

On considère l'équation suivante, où $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Elle est appelée **équation du second degré**.

3.2 Discriminant

Definition 3.1: Discriminant

Le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est le nombre réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La valeur de Δ permet de déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation.

Propriété 3.1: Nombre de racines

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique racine réelle (double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

3.3 Méthodes de résolution

3.3.1 Racines évidentes

Avant toute méthode générale, on peut tester les entiers simples, par exemple $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ pour voir si l'un d'eux annule le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si c'est le cas, on peut utiliser une factorisation directe :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

où x_1 est une racine évidente.

Example 3.1: Résolution d'une équation du second degré avec une racine évidente

Résolvons l'équation $5x^2 - 25x + 20 = 0$.

On observe que $x = 1$ est une racine évidente :

$$f(1) = 5(1)^2 - 25(1) + 20 = 5 - 25 + 20 = 0.$$

On factorise alors :

$$f(x) = 5x^2 - 25x + 20 = 5(x^2 - 5x + 4).$$

Puis on factorise le trinôme :

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1),$$

donc :

$$f(x) = 5(x - 1)(x - 4).$$

Les solutions sont $x = 1$ et $x = 4$.

3.3.2 Complément de carré

On peut résoudre l'équation en complétant le carré. Partons de l'expression générale :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

On ajoute et retranche le carré du demi-coefficient de x :

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c,$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c,$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Ainsi, on peut résoudre :

$$f(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}, \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Formule des racines La méthode directe à l'aide du discriminant donne :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Factorisation (si possible) Lorsque le discriminant est positif ou nul, le trinôme se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

où les racines x_1 et x_2 sont données par la formule des racines.

4 Dérivée et étude du signe

4.1 Dérivée d'un trinôme

Propriété 4.1: Dérivée du trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. Sa dérivée est :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Remarque 4.1: Nature de la dérivée

La dérivée d'un trinôme est une fonction affine. Son signe dépend donc du coefficient a.

4.2 Sens de variation

Le signe de $f'(x)$ permet de déterminer les variations de f.

Propriété 4.2: Minimum ou maximum

Le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ atteint un extremum en

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $a > 0$, alors f atteint un **minimum** en x_0.
- Si $a < 0$, alors f atteint un **maximum** en x_0.

Dans les deux cas, x_0 est l'abscisse du sommet de la parabole.

4.3 Tableau de variations

L'étude du signe de la dérivée permet de dresser le tableau de variations :

- Si $a > 0$, alors $f'(x) < 0$ pour $x < x_0$, $f'(x_0) = 0$, et $f'(x) > 0$ pour $x > x_0$: la fonction est décroissante puis croissante.
- Si $a < 0$, le sens de variation est inversé : croissante puis décroissante.

Remarque 4.2: Lien avec la forme canonique

La forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ montre aussi que $\alpha = x_0 = -\frac{b}{2a}$, et que β est la valeur de l'extremum.

5 Résumé à retenir

5.1 Les trois formes du trinôme

Forme	Écriture	Intérêt principal
Développée	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Lecture directe de a, b, c ; valeur en $x = 0$
Canonique	$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$	Lecture du sommet (α, β)
Factorisée	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Lecture des racines (si $\Delta \geq 0$)

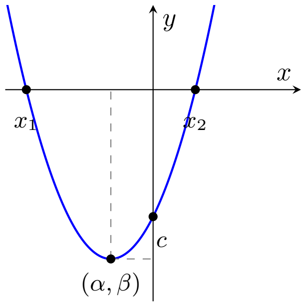
5.2 Propriétés clés à retenir

- Le graphe d'un trinôme est une parabole.
- Le signe de a détermine la concavité :
  - $a > 0$: parabole tournée vers le haut, minimum.
  - $a < 0$: parabole tournée vers le bas, maximum.
- L'axe de symétrie est $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ donne le nombre de racines :
  - $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes.
  - $\Delta = 0$: une racine double.
  - $\Delta < 0$: pas de racine réelle.

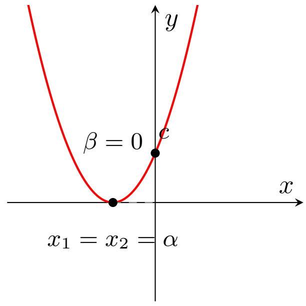
5.3 Graphes types selon Δ

$a > 0$

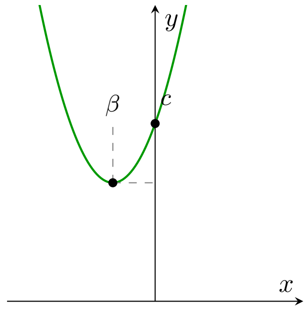
$\Delta > 0$



$\Delta = 0$

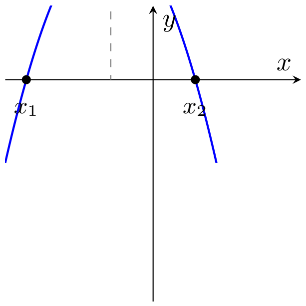


$\Delta < 0$

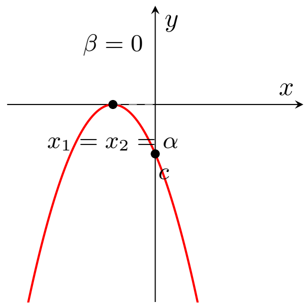


$a < 0$

$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$