Projets MODAL MAP 473D
Simulation Numérique Aléatoire (SNA)
autour des évènements rares

Equipe pédagogique :
G. Fort, O. Forghieri, A. Guyader,
T. Lelièvre , C. Rey, A. Singh

Période : Mars 2024 - Mai 2024

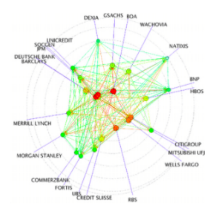
(Version du 21 avril 2024)

4 Risque systémique

4.1 Réseau financier et risque systémique d'un dèfaut

La crise financière de 2008 est un évènement d'une rare ampleur et lourd en conséquence. Elle a été qualifiée de systémique car elle s'est manifestée è l'échelle du système bancaire mondiale. Toutes les banques ont du faire face è de grandes difficultès de liquiditès ayant conduit certaines d'entre elles è la faillite (Lehman Brothers en 2008). Depuis le début de la crise financière en 2007, plus de 370 des banques amèricaines (sur près de 8000 banques assurées par la Federal Deposit Insurance Corporation) ont fait faillite. Entre 2000 et 2004, seulement 30 banques ont fait faillite et aucune entre 2005 et le dèbut de l'annèe 2007.

Le risque systémique est le risque d'effondrement d'un système suite à un choc sur certaines institutions financières qui entrainent par un effet *domino* la dégradation brutale ou la faillite de beaucoup d'autres. Ce n'est que très récemment que les institutions financières se sont intéressées à la modélisation mathématique de ces épisodes de contagion par défaut où un choc économique causant des pertes initiales et le défaut de quelques institutions sont amplifiés en raison de liens financiers complexes, pour finalement conduire à des faillites à plus grande échelle.



Risque de contagion entre banques au cœur de la crise (d'après http://www.nature.com/srep/2012/120802/srep00541/full/srep00541.html)

Risque de contagion entre banques au cœur de la crise (d'après http://www.nature.com/srep/2012/120802/srep00541/full/srep00541.html)

4.2 Modèlisation du bilan d'une banque et réseaux financiers

Un système d'institutions financières est naturellement modélisé par un réseau de relations ou contreparties (graphe) : un ensemble de n noeuds et des liens pondérés représentés par une matrice $E = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ oè $e_{i,j}$ est (la valeur marchè de) l'exposition de l'institution financière i è l'institution financière j.

A la date t, l'institution i dispose d'un capital (propre) $X_i(t)$, c'est-è-dire un matelas de sécurité pour les créanciers de l'entreprise, pour absorber les pertes potentielles. Le bilan d'une banque se prèsente sous la forme d'un èquilibre entre ses actifs[3], c'est-à-dire les biens qu'elle possède qui ont une

3. on ne considère ici que des actifs interbancaires : $A_i(t) \equiv 0$.

Actifs	Passifs
Actifs interbancaires $\sum_{j=1}^{n} e_{i,j}$	Passifs interbancaires $\sum_{j=1}^{n} e_{j,i}$
Autres actifs $A_i(t) = 0$	Capital $X_i(t)$

TABLE 1 – Bilan Actifs-Passifs de l'institution financière i à la date t

valeur économique positive, et ses passifs, c'est-à-dire l'ensemble de ses dettes ou de ses biens qui ont une valeur économique négative, c.f. Table 1.

Entre les temps t_k et t_{k+1} ($t_k := k\delta$ avec $\delta > 0$), le capital d'une institution subit des fluctuations dues au marchè dont la dynamique peut s'ècrire

$$X(t_{k+1}) = e^{-\lambda\delta} X(t_k) + \mu\left(1 - e^{-\lambda\delta}\right) + \sigma\sqrt{\delta} W_k \tag{3}$$

oè $(W_k)_{k\geq 0}$ est une suite de v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites. Le paramètre μ s'interprète comme l'équilibre moyen du capital, c'est-à-dire que lorsque $X(t)$ s'ècarte de cette valeur le paramètre λ agit comme une force de rappel vers μ, et le paramètre $\sigma > 0$ est l'écart-type des fluctuations du capital. Le processus $(X_{t_k})_{k\geq 0}$ est alors un processus gaussien.

$\triangleright$ **Bilan à l'horizon T.** A la date $T = N\delta$, un bilan de solvabilité a lieu permettant de conclure quant à la solidité financière de l'institution i. Si le capital de l'institution i est en dessous d'un seuil critique déterministe c_i celle-ci n'est plus *solvable*. Une banque est solvable si son capital restant à la date T est supèrieur au seuil critique, c'est-à-dire si $X_i(T) > c_i$. Une banque insolvable fait défaut et est liquidée. Chacun de ses créanciers perd une fraction $1-R$ de l'exposition à la banque faisant défaut. Cette perte vient alors se soustraire au capital et peut entraîner à son tour l'insolvabilité des crèanciers. Cette cascade de défaut dépend fortement du taux de récupération R (recovery rate) de la banque faisant défaut : pour simplifier, on suppose que ce taux de récupération est le même pour toutes les institutions (on prendra par exemple $R = 5\%$).

On définit l'ensemble $D_0^T = \{i \in \{1, \cdots, n\} : X_i(T) < c_i\}$ des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T, la cascade de défaut est la séquence d'ensemble $D_0^T \subset D_1^T \subset \cdots \subset D_{n-1}^T$, dèfinie par

$$D_k^T = D_{k-1}^T \cup \left\{ j \notin D_{k-1}^T : X_j(T) - \sum_{p \in D_{k-1}^T} (1-R) e_{j,p} < c_j \right\}, \quad k \geq 1.$$

Dans un réseau financier de taille n, cette cascade finit après au plus $n-1$ ètapes. A l'étape k, D_k^T représente l'ensemble des institutions financières insolvables (et donc faisant défaut) suite à l'exposition de contrepartie à des banques de l'ensemble D_{k-1}^T qui viennent de faire défaut à l'étape précédente.

Pour quantifier le risque systémique et l'effet de contagion, on définit *l'impact de dèfaut* $I(T)$ à la date T dû à la cascade de défaut à l'instant T,

$$I(T) = \sum_{j \in D_{n-1}^T} \left(X_j(T) + \sum_{p \notin D_{n-1}^T} (1-R) e_{p,j} \right)$$

qui est la somme des pertes générées par la contagion du dèfaut des banques è la date T.

▷ **Capitaux indépendants.** On supposera dans un premier temps que les capitaux évoluent de manière indépendante : les suites de variables $(W_k)_{k \geq 0}$ apparaissant dans (3) pour chaque institution sont mutuellement indépendantes.

L'horizon T est 1 an et les dates $(t_k)_k$ d'observation d'èvolution du capital sont trimestrielles ou mensuelles par exemple. Les autres paramètres sont $X_i(0) = \mu = 15$, $\sigma = 8$, $\lambda = 20$, $c_i = 10$, $i = 1, \cdots, 5$ avec un réseau simple constitué de 5 institutions financières, dont les liens interbancaires pourront ètre donnés par la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On abordera les points suivants.

1. Estimation de la probabilité que le nombre de banques insolvables soit 1, 2, 3, 4 ou 5.
2. Estimation de la Value-at-Risk et de la Conditional Value-at-Risk de la distribution $I(T)$ pour différents seuils α proches de 1 (par exemple $\alpha \geq 99.99\%$), ainsi que des intervalles de confiance associés aux estimateurs.
3. Influence de la taille du rèseau ($n = 10,\ 50$).
4. Evaluation de la distribution de l'impact de défaut conditionnellement à l'évènement : "le réseau entier d'institutions financières s'est effondré".

4.3 Extensions

On pourra chercher à aborder l'un des points suivants.

▷ **Contagion dynamique.** En réalitè, l'insolvabilité des institutions peut avoir lieu à tout moment entre la date 0 et la date T. Il est donc nécessaire de prendre en compte ce risque de manière dynamique. Cela nous conduit à considérer des impacts de défaut dynamique $I(t_k)$, $k = 1, \cdots, N$. On définit l'impact de défaut total à la date T comme la somme de tous les impacts de défaut entre la date 0 et la date T

$$\sum_{k=1}^{N} I(t_k).$$

On reprendra les questions précédentes en intégrant le risque de contagion dynamique.

$\triangleright$ **Modèle d'équilibre long terme**. Un modèle couramment utilisé pour les simulations de risque de défaut est un modèle d'équilibre à 1 facteur idiosyncratique et 1 facteur systémique. Les capitaux de toutes les institutions ont un facteur commun $(Z_{t_k})_{k\geq 0}$ règissant l'équilibre long terme du réseau financier. Ce capital long terme est un processus gaussien de dynamique

$$Z(t_{k+1}) = e^{-\lambda_e \delta} Z(t_k) + \sigma_e \sqrt{\delta} \bar{W}_k,$$

où $(\bar{W}_k)_{k\geq 0}$ est une nouvelle suite indépendante de v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites et $\lambda_e = 10$, $\sigma_e = 3$. Ce capital d'équilibre vient s'ajouter à chaque capital $X_i(t)$ de l'institution i. On reprendra les questions précédentes avec ce nouveau modèle.

Références

[FS02] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic finance*, volume 27 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002. An introduction in discrete time.

[GHS00] P. Glasserman, P. Heidelberger, and P. Shahabuddin. Variance reduction techniques for estimating value-at-risk. *Management Science*, 46 :1349–1364, 2000.

[Gla03] P. Glasserman. *Monte-Carlo methods in Financial Engineering*. Springer Verlag, New York, 2003.

[Min11] A. Minca. *Modélisation mathématique de la contagion de défaut*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2011. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00624419

[Mou11] A. Moussa. *Contagion and Systemic Risk in Financial Networks*. PhD thesis, Columbia University, 2011. https://academiccommons.columbia.edu/catalog/ac:131474