



MODAL - RAPPORT FINAL

Risque systémique

Tuteur : M. REY Clément

BLILET Hatim – BENZINEB ZAYD



TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	4
1.1	Modélisation	5
1.1.1	Modélisation des capitaux	5
1.1.2	Modélisation du réseau financier	5
1.2	Risque systémique	6
1.2.1	Risque statique	6
1.2.2	Risque dynamique	7
1.3	Implémentation numérique	8
1.3.1	Implémentation Python	8
1.3.2	Valeurs numériques	8
2	Risque systémique statique	10
2.1	Méthode de Monte-Carlo naïf	11
2.1.1	Estimation de $\mathbf{P}(D_{n-1}^T = k)$ avec $k \in [0, n]$	11
2.1.2	Estimation de la VaR de $I(T)$ pour différents seuils proches de 1.	12
2.1.3	Distribution de $I(T)$ conditionnellement à $\mathcal{F} = \{ D_{n-1}^T = n\}$	12
2.2	Échantillonnage d'importance	14
2.2.1	Échantillonnage par moyenne	14
2.2.2	Échantillonnage par variance	15
2.2.3	Estimation de $\mathbf{P}(D_{n-1}^T = k)$ avec $k \in [0, n]$	17
2.2.4	Estimation de la VaR de $I(T)$ pour différents seuils proches de 1.	18
2.2.5	Distribution de $I(T)$ conditionnellement à $\mathcal{F} = \{ D_{n-1}^T = n\}$	20
2.3	Méthode de splitting	22
2.3.1	Principe	22
2.3.2	Implementation	22
2.3.3	Intervalle de confiance et résultats	23
2.4	Validation par théorie de graphes	24
2.4.1	Graphe de E	24
2.4.2	Graphes vers sous-ensembles	25
2.4.3	Décomposition en hypercubes	26
2.4.4	Résultats	27
2.4.5	Comparaison avec les méthodes d'estimation	30
2.5	Conclusion	30

3	Risque systémique dynamique	31
3.1	Modélisation du risque dynamique	32
3.1.1	Génération de trajectoire avec risque dynamique	32
3.1.2	Temps de première insolvance	32
3.1.3	Impact moyen	33
3.2	Comportement limites	34
3.2.1	$\delta \rightarrow 0$	34
3.2.2	$n = 10$ et $n = 20$	37
3.3	Analyse de résultat et conclusion	41
4	Conclusion	42

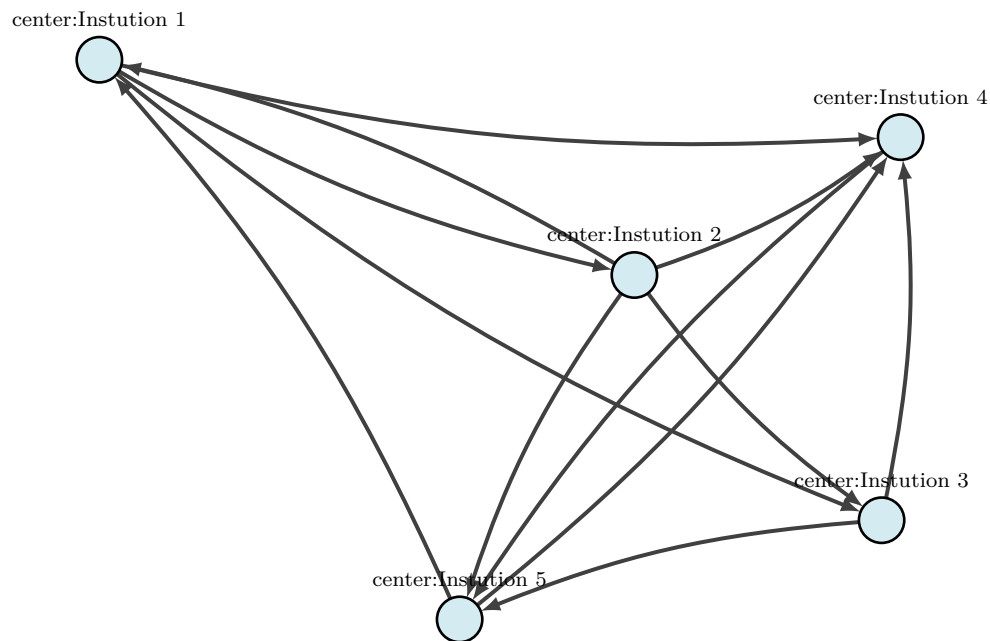
1

INTRODUCTION

Le système financier mondial est un réseau complexe d'institutions interconnectées par divers instruments financiers, où les actifs et les passifs se croisent et se chevauchent. Cette interconnexion, bien qu'essentielle pour le fonctionnement fluide du marché, engendre également des vulnérabilités significatives.

Ce rapport se concentre sur le risque systémique, un phénomène où la défaillance d'une seule institution financière peut déclencher une réaction en chaîne de faillites au sein du réseau, menaçant ainsi la stabilité économique globale (*c.f* Crise 2008).

L'objectif de ce projet est de modéliser un tel réseau financier et d'estimer la probabilité d'un risque systémique et les différentes quantités reliées avec un tel événement.



1.1 MODÉLISATION

1.1.1 • MODÉLISATION DES CAPITAUX

Pour notre projet, on considère qu'on a n institutions financières.

On considère qu'à un instant **discret** $t \in \{0, \delta, 2\delta, \dots, P\delta\}$, l'institution i dispose d'un capital $X_i(t)$. Les $X_i(t)$ suivent la relation stochastique suivante [1] :

$$\forall k \in \{1, \dots, P\}, t_k = k\delta : X_i(t_{k+1}) = e^{-\lambda\delta} X_i(t_k) + \mu(1 - e^{-\lambda\delta}) + \sigma\sqrt{\delta}W_k^i$$

- Le paramètre δ est le pas de discrétisation.
- Le paramètre λ agit comme une force de rappel vers μ , en particulier pour $\lambda \rightarrow +\infty$, on a $X_i(t_{k+1}) \simeq \mu + \sigma\sqrt{\delta}W_k^i$.
- Le paramètre σ est l'écart-type (supposé constant) des fluctuations du capital. Les $(W_k^i)_{k \geq 0}$ sont des variables i.i.d qui suivent la loi normale centrée réduite.

On fait l'hypothèse que les (W_k^i) sont indépendants en i , et donc les capitaux $(X_i(t_k))$ à k fixé sont indépendants.

1.1.2 • MODÉLISATION DU RÉSEAU FINANCIER

Un réseau se modélise naturellement par un graphe en considérant chacune des institutions comme un noeud d'un graphe, et le fait qu'une institution i soit exposée à la défaillance de l'institution j par un arc orienté $j \rightarrow i$ pondérée par la quantité d'exposition (perte) engendrée par un tel cas de figure. Une manière très élégante de représenter cela est par une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où la banque i perd lors de la faillite de la banque j la quantité :

$$l(j \rightarrow i) = -(1 - R)E_{i,j}$$

- Le paramètre R est appelé le taux de récupération qu'on suppose ne dépend pas du couple (i, j) .

Cette matrice décrit et impose parfaitement les schémas de risque systémique (*c.f* Validation par théorie des graphes).

On fait l'hypothèse que les actifs et passifs de toute institution financières est de source dans le réseau financier (i.e pas d'intervenants/variables extérieures).

1.2 RISQUE SYSTÉMIQUE

1.2.1 • RISQUE STATIQUE

Dans la première partie RISQUE SYSTÉMIQUE STATIQUE, on se fixe une date appelée horizon temporel $T = P\delta$. On fait le bilan sur tout les instituts financiers, si une institution a un capital $X_i(T)$ inférieur à un certain seuil fixé et déterministe c_i , on considère qu'elle n'est plus solvable (fait faillite), ceci en tout invoque un effet domino sur les autres banques. Cette effet domino est schématisé de manière mathématique suivant :

► On pose $D_0^T = \{i \in [1, n] , X_i(T) < c_i\}$.

► La cascade est modélisé par les ensembles $D_0^T \subset D_1^T \subset \dots \subset D_{n-1}^T$ avec :

$$\forall k \in [1, n-1] : D_k^T = D_{k-1}^T \cup \left\{ j \notin D_{k-1}^T : X_j(T) - \sum_{i \in D_{k-1}^T} (1-R)e_{i,j} < c_j \right\}$$

L'ensemble D_k^T représente l'ensemble des institutions qui ont fait défaut à cause de l'exposition des banques de l'ensemble qui le précède D_{k-1}^T .

► L'ensemble D_{n-1}^T représente l'ensemble de tout les banques qui ont fait faillite à la fin de l'effet dominé.

Pour quantifier les pertes dûes à cet effet domino, on introduit l'impact de défaut au temps T comme étant :

$$I(T) = \underbrace{\sum_{i \in D_{n-1}^T} X_i(T)}_{\text{Capitaux des institutions insolvés}} + \underbrace{\sum_{i \notin D_{n-1}^T} \sum_{j \in D_{n-1}^T} (1-R)E_{i,j}}_{\text{Pertes engendré par les instutions insolvés sur les institutions stables}}$$

Qu'on réécrit :

$$I(T) = \sum_{j \in D_{n-1}^T} \left(X_j(T) + \sum_{i \notin D_{n-1}^T} (1-R)E_{i,j} \right)$$

Pour des raisons de régularité (*c.f* Méthode de Splitting), on introduit l'impact adapté suivant :

$$\tilde{I}(T) = I(T) + \sum_{i \notin D_{n-1}^T} (X_i(0) - X_i(T))$$

On s'intéresse alors dans notre étude d'estimer les trois quantités suivantes :

- La distribution du cardinal de D_{n-1}^T (i.e nombre de banque insolvés).
- $\text{VaR}(\alpha)$ de $I(T)$ pour des différents niveaux α qui représente des limites (maximaux) de pertes.
- La distribution de l'impact conditionnellement à l'évènement $\mathcal{F} = \{|D_{n-1}^T| = n\}$ (i.e insolvance totale).

Comme le risque statique ne dépend que de la valeur de $X(\cdot) = (X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))$ à l'horizon temporel, on se sert du résultat suivant :

RÉSULTAT FONDAMENTAL :

Pour (W_k^i) i.i.d et $\sim \mathcal{N}(0, 1)$, pour $k \in [1, n]$ et un temps t_P :

- $X_k(t_p)$ est une variable gaussienne.
- Les caractéristiques de cette gaussienne vérifient la relation de récurrence de l'équations :

$$\begin{cases} \mu_{p,k} = e^{-\lambda\delta} \mu + \mu(1 - e^{-\lambda\delta}) \\ \sigma_{p,k}^2 = e^{-2\lambda\delta} \sigma_{p-1,k}^2 + \delta\sigma^2 \end{cases}$$

Explicitement :

$$\mu_{p,k} = \mu, \sigma_{p,k}^2 = r(1 - e^{-2p\lambda\delta}) \text{ où } r = \frac{\delta\sigma^2}{1 - e^{-2\lambda\delta}}$$

1.2.2 • RISQUE DYNAMIQUE

Pour un modèle plus sophistiqué, on propose de faire le bilan non qu'à l'horizon temporel T mais sur chaque instant $t \in \{0, \dots, P\delta\}$. En effet l'insolvabilité peut avoir lieu à chacun de ces moments.

On introduit alors l'impact de défaut dynamique $I(t_k)$ définit de manière analogue à l'impact au temps T . Cet impact de défaut prend en compte que les institutions qui ont fait insolvance à l'instant t_k . On obtient alors un impact de défaut total à la date T :

$$I(T)_\Sigma = \sum_{k=1}^N I(t_k)$$

Pour étudier la dynamique de ce type de défaut, on étudie les différentes quantités du risque statique et on introduit la variable aléatoire suivante T^D qui représente le temps de première

insolvance :

$$T^D = \inf\{p \in [0, P] \mid \exists i \in [1, n] : X_i(t_p) < c_i\}$$

1.3 IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE

1.3.1 • IMPLÉMENTATION PYTHON

Notre implémentation informatique du projet repose essentiellement sur les bibliothèques :

- La bibliothèque **NumPy** : On se sert de cette bibliothèque pour vectoriser (paralleliser) les calculs. Dans notre cas on simule jusqu'à 10^7 fois des capitaux, l'efficacité des calculs est un enjeu cruciale. On se sert aussi de **NumPy** pour la génération rapide d'échantillons gaussiens.
- La bibliothèque **matplotlib** : Pour la representation graphique des données générées.
- La bibliothèque **scipy.stats** : Pour les calculs exactes des quantiles et fonction de répartition de la loi normale et eventuellement de la loi normale conditionnelle.
- La bibliothèque **itertools** : Pour des manipulations combinatoires sur les graphes et intervalles (*c.f* Validation par théorie des graphes).
- La bibliothèque **random** : Utilisé vers la fin du projet pour le choix d'indices d'intervalles (*c.f* Validation par théorie des graphes).

1.3.2 • VALEURS NUMÉRIQUES

On prend pour notre projet les paramètres de capitaux suivants :

$$n = 5 \text{ , } \mu = 15 \text{ , } \sigma = 8 \text{ , } \lambda = 20 \text{ , } \delta = \frac{1}{365}$$

On considère aussi que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n = 5\} : X_i(0) = \mu = 15$$

Pour la modélisation du réseau, on prend :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} ; R = 0.05 ; T = 1\text{an} ; P = 365$$

Les seuils d'insolvances sont supposés égaux à la valeur :

$$c = C_1 = \dots = C_n = 10$$

Comme susmentionné, l'insolvabilité à l'instant $T = P\delta$ ne dépend que des valeurs des $X_i(T)$ dont on sait la loi est $\mathcal{N}(\mu, \sigma_{P,i}^2)$, avec :

$$\forall i \in [1, n] : \sigma_{P,i}^2 = \sigma_T^2 = \frac{\delta\sigma^2}{1 - e^{-2P\lambda\delta}} (1 - e^{-2P\lambda\delta}) \stackrel{A.N}{=} 1.68$$

Un cas d'insolvance est celui où tous les capitaux sont au dessous de leurs seuils fixées, i.e :

$$X_1(T) \in [0, 10], \dots, X_5(T) \in [0, 10]$$

Par indépendance des capitaux, on peut calculer cette probabilité :

$$\mathbf{P}(X_1(T) \in [0, 10], \dots, X_5(T) \in [0, 10]) = \prod_{i=1}^{n=5} \mathbf{P}(\underbrace{X_i(T)}_{\sim \mathcal{N}(15, 1.68)} \in [0, 10]) \simeq 10^{-12} \ll 10^{-4}$$

On est bien dans le cadre de simulation d'événements rares.

2

RISQUE SYSTÉMIQUE STATIQUE

Grâce à la relation de récurrence suivante à i fixé :

$$\forall k \in \{1, \dots, P\}, t_k = k\delta : X_i(t_{k+1}) = e^{-\lambda\delta} X_i(t_k) + \mu(1 - e^{-\lambda\delta}) + \sigma\sqrt{\delta}W_k^i$$

On arrive à simuler les capitaux des banques le long de l'intervalle de temps $[0, T]$:

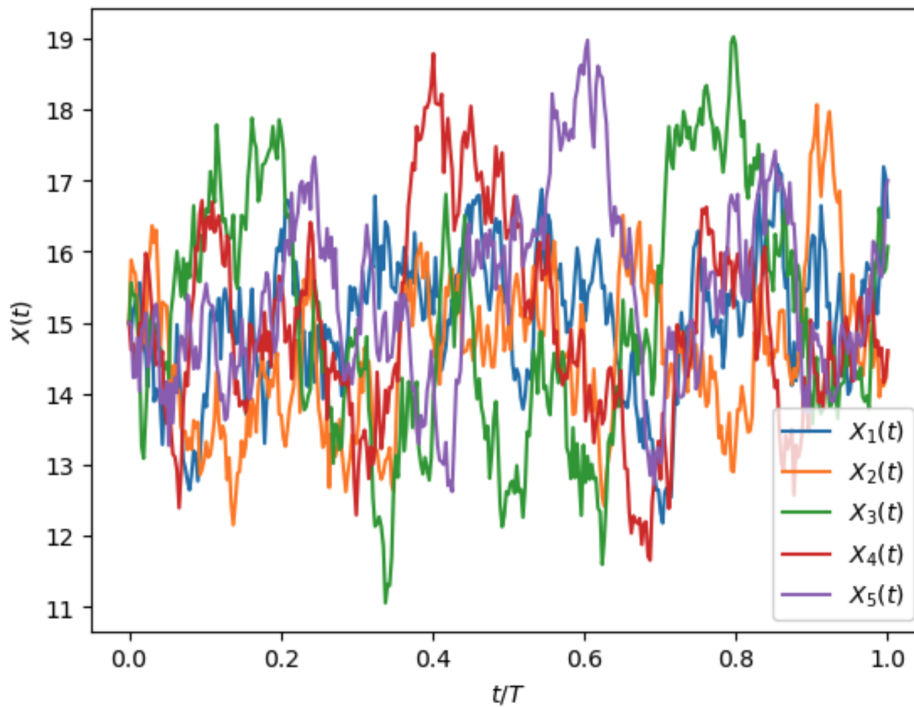


FIGURE 1 : Tracé de courbes de capitaux

Comme susmentionnée, dans le cadre de l'étude statique, on se sert que de valeurs finaux des capitaux dont on génère suivant la loi :

$$X(T) = (X_1(T), \dots, X_n(T)) \sim \mathcal{N}(\mu I_n, \sigma_T^2 I_n)$$

2.1 MÉTHODE DE MONTE-CARLO NAIF

La méthode de Monte-Carlo se repose sur la loi forte des grands nombres. Les hypothèses sur les capitaux (independance ,...) nous permettent de l'utiliser pour estimer les quantités suivantes :

2.1.1 • ESTIMATION DE $\mathbf{P}(|D_{n-1}^T| = k)$ AVEC $k \in [0, n]$

On désigne par $X(T)$ le vecteur $(X_1(T), \dots, X_n(T))$ et par $X^v(T)$ une réalisation d'un tel vecteur. On travaille que pour $t = T$, on écrit sans ambguité X sans argument temporel.

On a $|D_{n-1}^T| = |D_{n-1}^T|(X(T))$ (i.e fonction déterministe en X) et donc pour des (X^v) i.i.d qui suivent la loi $\mathcal{N}(\mu I_n, \sigma_T^2 I_n)$ et à k fixé par loi forte de grand nombres [2] :

$$\bar{c}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \overbrace{\mathbf{1}_{|D_{n-1}^T|(X^v)=k}}^{\text{i.i.d dans } \{0,1\}, \text{ admet donc tous moment}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|D_{n-1}^T|(X) = k) = p_k$$

On obtient une estimation première des probabilités de k -insolvances avec $N \sim p_k^{-1}$.

Pour obtenir un intervalle de confiance de ces intervalles, on se sert du Lemme de Slutsky et le théorème centrale limite pour obtenir [2] :

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\bar{c}_k^N(1 - \bar{c}_k^N)}}(\bar{c}_k^N - p_k) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

On obtient un intervalle de confiance, en notant q la quantile d'ordre 0.95 de la loi normale :

$$p_k \in [\bar{c}_k^N - \rho_k^N, \bar{c}_k^N + \rho_k^N] \text{ où } \rho_k^N = q \frac{\sqrt{\bar{c}_k^N(1 - \bar{c}_k^N)}}{\sqrt{N}}$$

On obtient pour $N = 10^5$, les valeurs suivantes qui justifient notre usage de $N = 10^5$:

k	\bar{c}_k^N	ρ_k^N
0	0.99972	$8.70 \cdot 10^{-5}$
1	0.00018	$6.9 \cdot 10^{-5}$
2	0	0
3	$1 \cdot 10^{-5}$	$1.64 \cdot 10^{-5}$
4	$1 \cdot 10^{-5}$	$1.64 \cdot 10^{-5}$
5	$8 \cdot 10^{-5}$	$4.65 \cdot 10^{-5}$

TABLE 1 - Estimateurs de probabilité par MC

2.1.2 • ESTIMATION DE LA VAR DE $I(T)$ POUR DIFFÉRENTS SEUILS PROCHES DE 1.

Pour cela, on utilise l'estimateur de quantile empirique. On simule un nombre N de variable X^v , on calcule leurs impacts $I^v(T)$ et on les trie puis on prend pour $\alpha \in [0.95, 1]$, l'estimateur :

$$\hat{q}_N = I^{[N \cdot \alpha]:N}(T)$$

L'intervalle de confiance qu'on peut construire pour cet estimateur dépend de la densité [1] de la quantité estimée.

Dans notre cas $I(T)$ n'est pas à densité ($\mathbf{P}(I(T) > 0) - \mathbf{P}(I(T) = 0) \neq 0$). On se contente des valeurs empiriques de la quantile. On trouve alors pour $N = 10^5$ le tracé de la $\text{VaR}(\alpha)$ suivant :

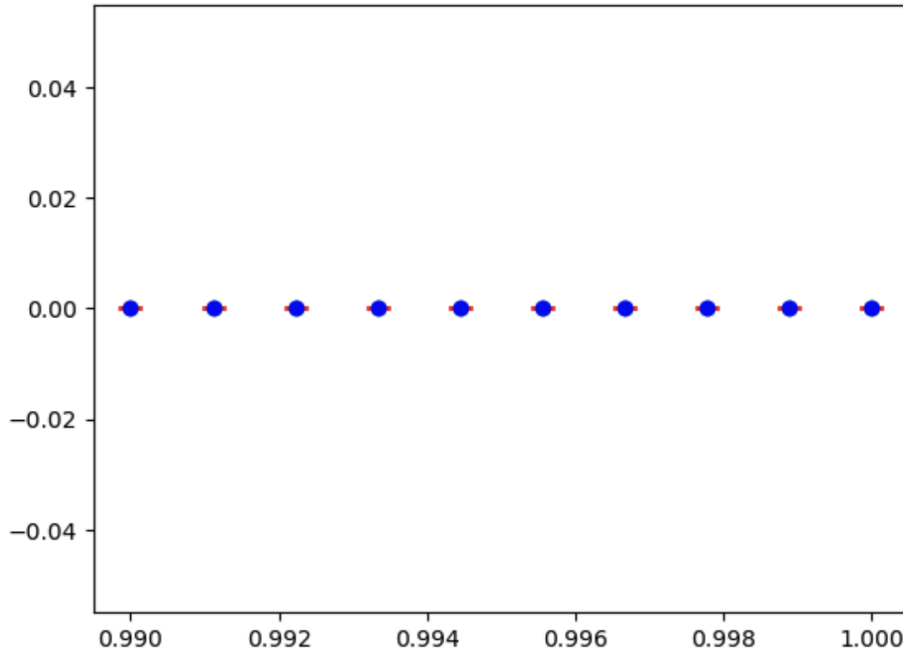
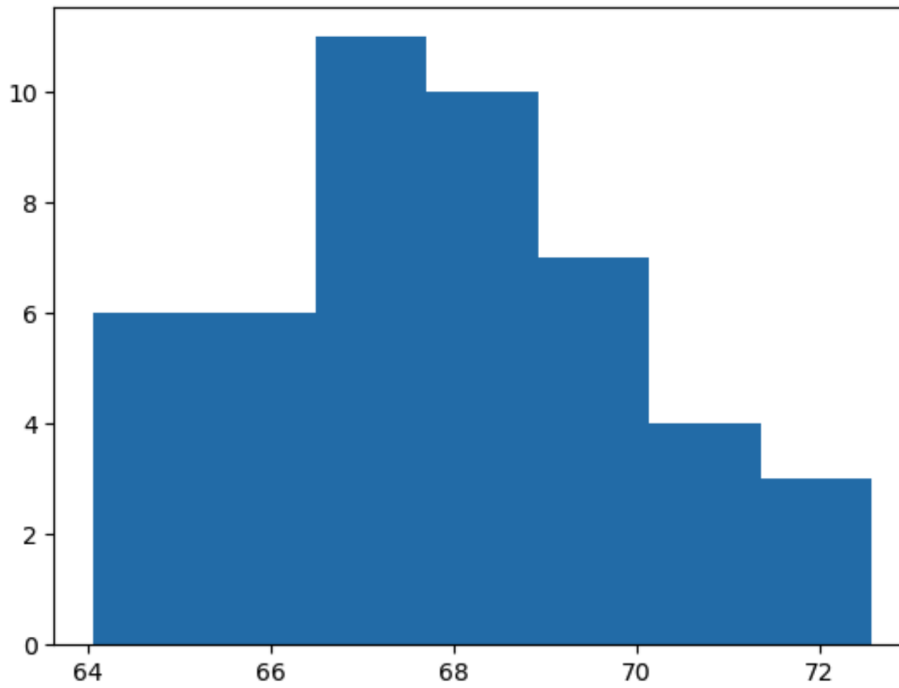


FIGURE 2 : Tracé de valeurs de $\text{VaR}(\alpha)$

2.1.3 • DISTRIBUTION DE $I(T)$ CONDITIONNELLEMENT À $\mathcal{F} = \{|D_{n-1}^T| = n\}$

Pour estimer la distribution de la variable $I(T)$ sachant qu'on a défaillance, on simule N variables X^v et on accepte que ceux où $|D_{n-1}^T| = n$, on calcul alors leur impacts (que l'on rappelle est fonction déterministe en X), on trouve la distribution suivante pour $N = 10^5$:

FIGURE 3 : Distribution estimée par MC de $I(T)|\mathcal{F}$

La distribution est assez imprécise, ceci est dû au faible nombre $N_{\mathcal{F}}$ de X^v vérifiant \mathcal{F} . Pour avoir un nombre $N_{\mathcal{F}}$ de l'ordre de 10^5 , avec $\mathbf{P}(\mathcal{F}) \sim 10^{-5}$, il nous faut simuler environ 10^{10} variables X^v , ce qui est très coûteux en termes de mémoire. En effet générer X^v revient au minimum de générer $n = 5$ valeurs suivant la loi gaussiennes de type `float64`. Le stockage en mémoire de $5 \cdot 10^{10}$ de ces `float64` prend environ 370Gb de mémoire !

En se basant sur ces résultats, la méthode de Monte Carlo naïf **n'est pas suffisante** pour étudier le risque systémique. Nous optons pour d'autres méthodes dites de réduction de variance, comme suit :

2.2 ÉCHANTILLONAGE D'IMPORTANCE

L'idée est utiliser l'échantillonnage par importance avec une distribution de telle manière à augmenter la probabilité que $|D_{n-1}^T|$ prennent des valeurs élevées, on propose de réduire μ en μ' de telle manière qu'il y'a plusieurs fois la réalisation de $X_i \leq c_i$ ou bien augmenter la variance de telle manière que les queues de distribution soient assez conséquents et qu'on ait encore plusieurs réalisations de $X_i \leq c_i$. On traite d'abord le choix d'échantillonnage d'importance par moyenne **ou bien** par variance.

2.2.1 • ÉCHANTILLONAGE PAR MOYENNE

On prend pour $\mu' \leq \mu$, on pose :

$$X' \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu' I_n, \sigma_T^2 I_n)$$

On fait varier $\mu' \in [9, 16]$ et en utilisant la méthode Monte-Carlo naïf avec $N = 10^4$ (simulation de plusieurs X'), on estime en moyenne le nombre d'institutions insolvantes, on obtient la courbe suivante :

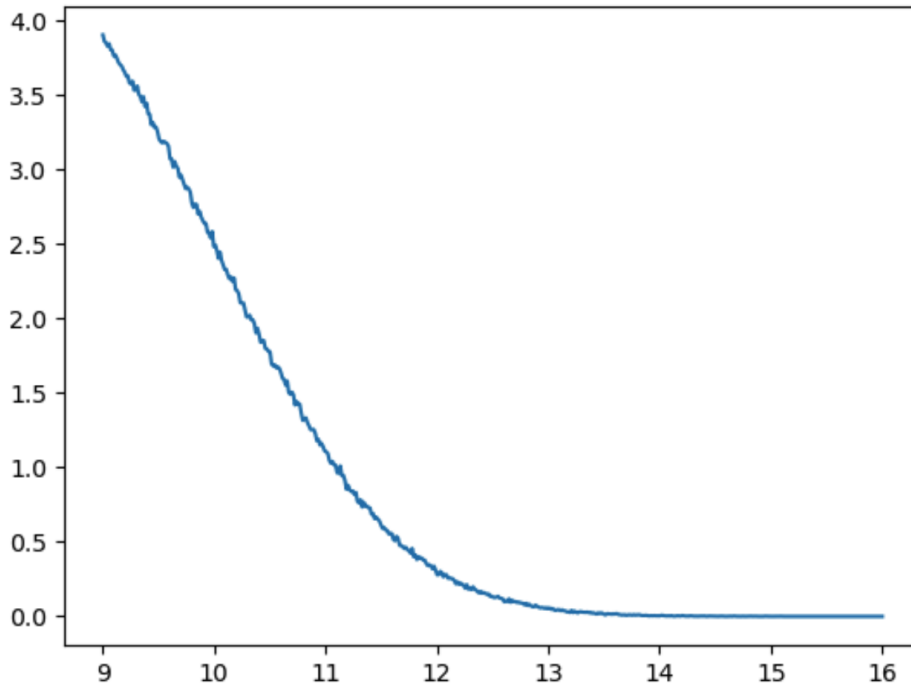


FIGURE 4 : Tracé de $\mathbf{E}_{\mu'}(|D_{n-1}^T|)$ empirique

On prend $\mu' \in \{10, 11, 12\}$, on obtient des problèmes de débordement de mémoire et des probabilités incohérentes (de l'ordre 10^{10}) lors de calcul de $\mathbf{P}_\mu(|D_{n-1}^T| = k)$ En effet [3] :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|D_n^T| = k) &= \mathbf{E}_X \left[\mathbf{1}_{|D_n^T|(X)=k} \right] = \mathbf{E}_{X'} \left[\mathbf{1}_{|D_n^T|(X')=k} \frac{f_{\mu, \sigma_T}^n(X)}{f_{\mu', \sigma_T}^n(X')} \right] \\ &= \mathbf{E}_{X'} \left[\mathbf{1}_{|D_n^T|(X')=k} \cdot \exp \left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n (X'_i - \mu')^2 - (X'_i - \mu)^2}{2\sigma_T^2}}_{\text{devient très négative}} \right) \right] \end{aligned}$$

On simule plusieurs valeurs de la quantité à l'intérieur de l'exponentielle, on trouve une valeur minimale de -118 et moyenne de -45 . Or pour des `float64`, on a débordement dès des valeurs inférieures à 10^{-38} et qui deviennent 10^{38} , expliquant alors les probabilités obtenues. Ceci peut être réglé en utilisant des variables à double précision `double64`, mais les calculs devient très lourds.

Or, l'intérêt de l'échantillonnage d'importance c'est de rendre la probabilité de $|D_n^T|$ plus grande, et la plage de valeurs de μ où c'est le cas on obtient ces problèmes numériques, on **abandonne l'échantillonnage d'importance par moyenne**.

2.2.2 • ÉCHANTILLONAGE PAR VARIANCE

Du aux erreurs d'arrondis, nous avons décidé d'appliquer l'échantillonnage d'importance à la variance au lieu de la moyenne. On pose alors :

$$X' \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu I_n, (\sigma'_T)^2) \text{ avec } \sigma'^2_T = \sigma_T^2 + \Delta\sigma^2$$

On fait varier $\sigma'^2_T \in [0.75, 2.75]$ et en utilisant la méthode Monte-Carlo naïf avec $N = 10^4$ (simulation de plusieurs X'), on estime en moyenne le nombre d'institutions insolventes, on obtient la courbe de la figure 4.

Dans ce cas, on n'a pas de problème d'overflow lors des calculs de probabilités, on décide d'utiliser l'échantillonnage d'importance par variance. Pour raffiner notre choix de plus on écrit pour $f_{\mu, \sigma}^n$ la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu I_n, \sigma^2 I_n)$ [3] :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|D_{n-1}^T| = k) &= \mathbf{E}_X \left[\mathbf{1}_{|D_{n-1}^T|(X)=k} \right] = \mathbf{E}_{X'} \left[\mathbf{1}_{|D_{n-1}^T|(X')=k} \frac{f_{\mu, \sigma_T}^n(X)}{f_{\mu, \sigma'_T}^n(X')} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\sigma'^2_T}{\sigma_T^2}}^5 \mathbf{E}_{X'} \left[\mathbf{1}_{|D_{n-1}^T|(X')=k} \cdot \exp \left(- \sum_{i=1}^n (X'_i - \mu)^2 \left(\frac{1}{2\sigma_T^2} - \frac{1}{2\sigma'^2_T} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

On décide de prendre σ qui affaiblit la variance de cet estimateur, on trace la variance empirique en fonction de σ'_T , on obtient la figure 5.

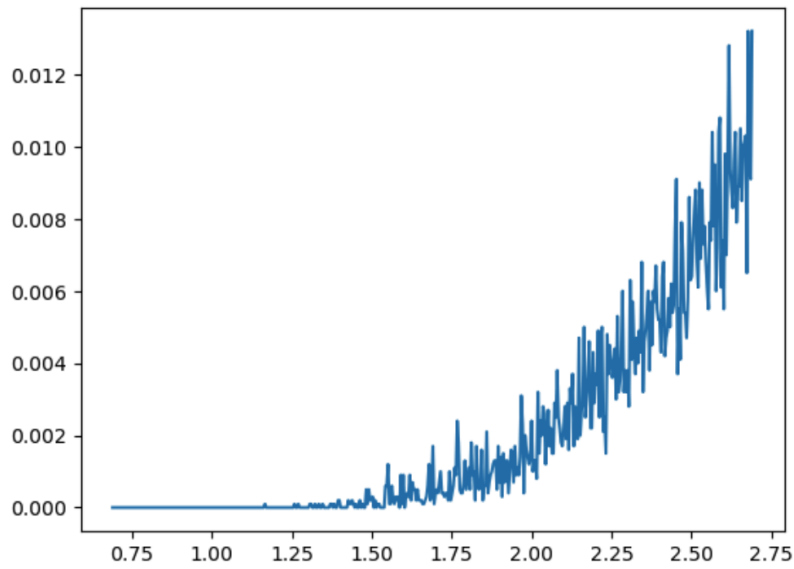


FIGURE 4 : Tracé de $\mathbf{E}_{\sigma'_T}(|D_{n-1}^T|)$ empirique

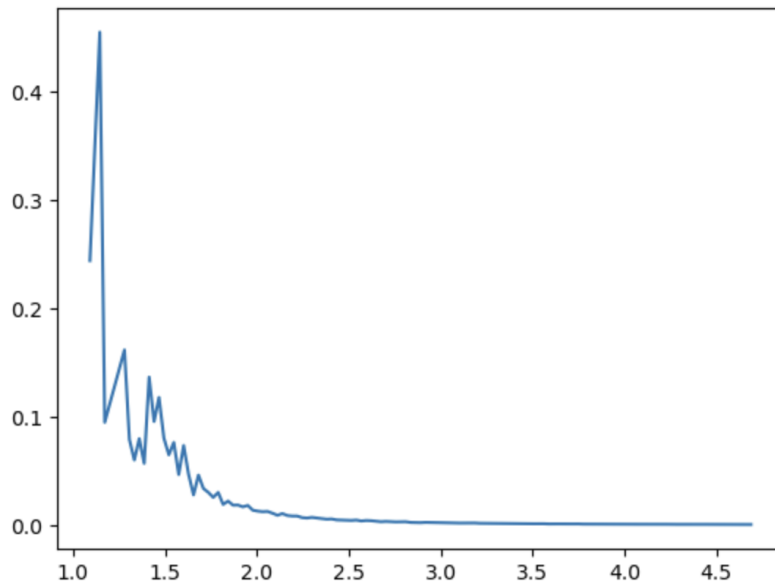


FIGURE 5 : Tracé de variance empirique

On prend $\Delta\sigma^2 = 2$.

2.2.3 • ESTIMATION DE $\mathbf{P}(|D_{n-1}^T| = k)$ AVEC $k \in [0, n]$

En utilisant la formule ci-dessus (qui est du Monte-Carlo naif appliqué à une fonction différente, $N = 10^5$), on obtient les estimations de probabilité et intervalles de confiances suivants :

k	$\mathbf{P}_{\sigma_T}(D_{n-1}^T = k) \simeq$	ρ_k^N
0	0.996	$3.274 \cdot 10^{-4}$
1	$2.412 \cdot 10^{-4}$	$8.078 \cdot 10^{-5}$
2	$1.359 \cdot 10^{-5}$	$1.918 \cdot 10^{-5}$
3	$4.432 \cdot 10^{-6}$	$1.095 \cdot 10^{-5}$
4	$2.644 \cdot 10^{-6}$	$8.458 \cdot 10^{-6}$
5	$4.394 \cdot 10^{-5}$	$3.448 \cdot 10^{-5}$

TABLE 2 - Estimateurs de probabilité par IS

Soit sous la forme suivante :

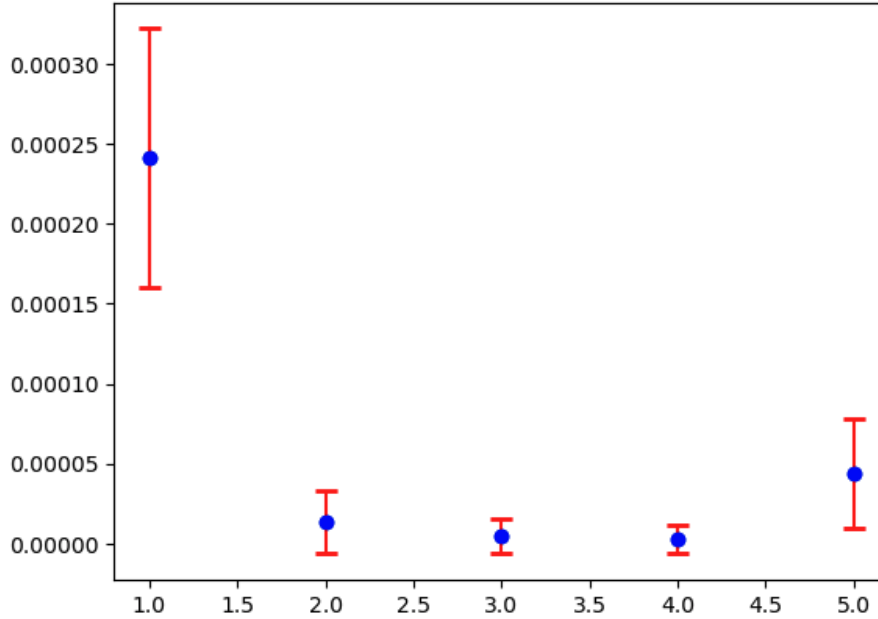


FIGURE 6 : Valeurs de $\mathbf{P}(|D_{n-1}^T| = k)$ pour $k \geq 1$

2.2.4 • ESTIMATION DE LA VAR DE $I(T)$ POUR DIFFÉRENTS SEUILS PROCHES DE 1.

Pour cela on approche pour $x \in \mathbf{R}$, la fonction répartition de $I(T)$ en x [3] :

$$\mathbf{P}(I(T) \leq x) = \sqrt{\frac{\sigma_T'^2}{\sigma_T^2}}^5 \mathbf{E}_{X'} \left[\mathbf{1}_{I(T) \leq x} \cdot \exp \left(- \sum_{i=1}^n (X'_i - \mu)^2 \left(\frac{1}{2\sigma_T^2} - \frac{1}{2\sigma_T'^2} \right) \right) \right]$$

On fait la remarque suivante :

$$\forall X \in \mathbf{R}^n : 0 \leq I(T) \leq \sum_{j=1}^n X_i + (1 - R) \sum_{i,j} E_{i,j} \sim \mathcal{N} \left(n\mu + (1 - R) \sum_{i,j} E_{i,j}, n\sigma_T^2 \right)$$

Après calculs, on obtient :

$$I(T) \in [0, 130] \text{ avec probabilité } 0.99$$

On prend $x \in [0, 130]$, on estime $\mathbf{P}(I(T) \leq x)$ en utilisant la formule ci-dessus. On obtient l'allure suivante de la fonction de répartition de $I(T)$ en utilisant $N = 10^7$ (pour $x \geq 80$, $F_N(x) = 1$) :

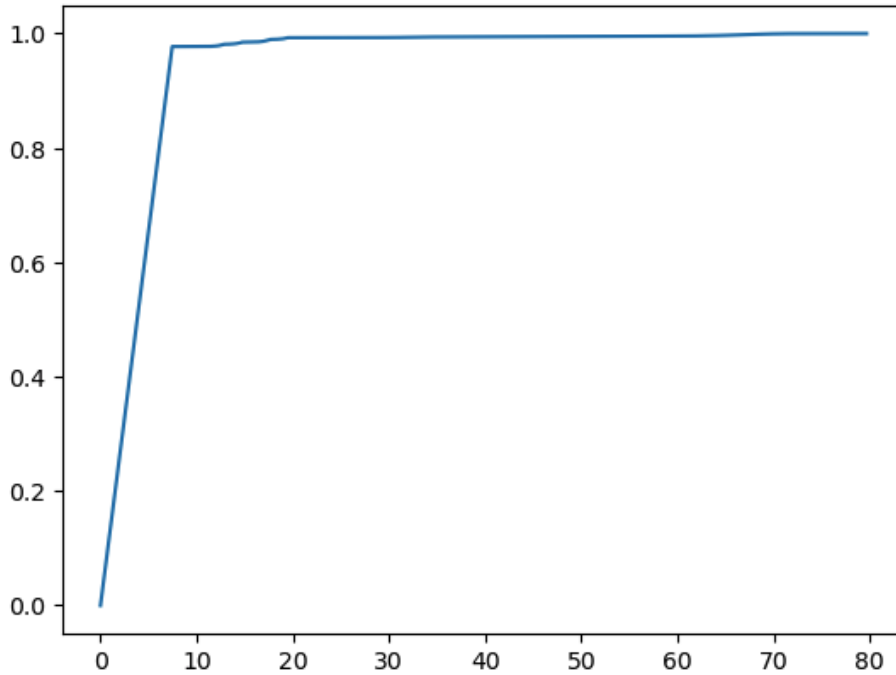


FIGURE 7 : Fonction de répartition de $I(T)$ sur $[0, 80]$

On obtient aisément les valeurs de la VaR pour des seuils proche de 1 :

α	0.95	0.955	0.96	0.965	0.97	0.975	0.98	0.985	0.99	0.995
VaR (α)	7.284	7.284	7.284	7.284	7.284	7.284	12.636	15.677	18.264	51.947

TABLE 3 - Estimations de VaR par IS

Soit :

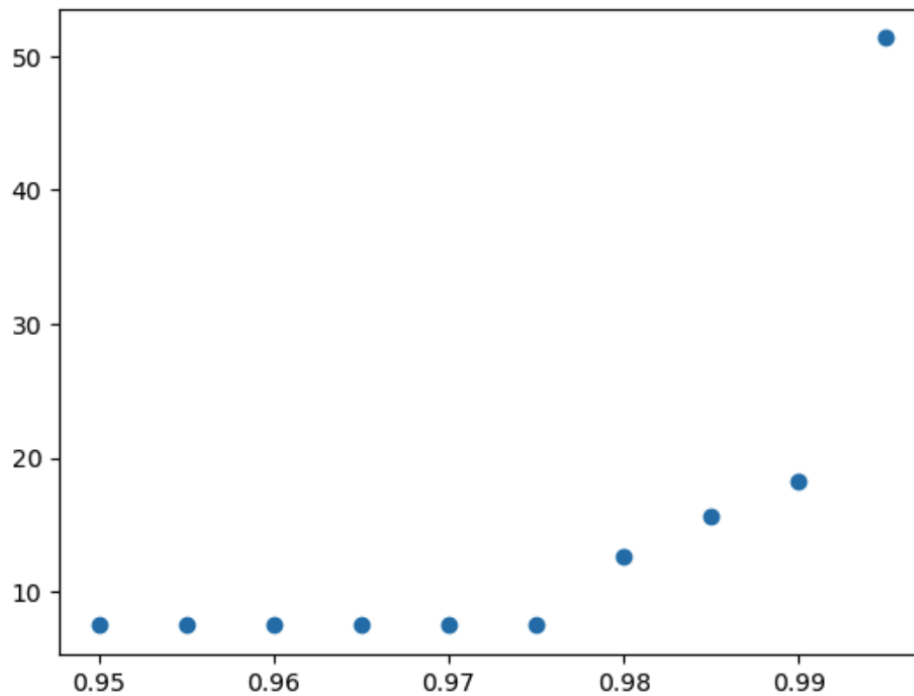


FIGURE 8 : VaR de $I(T)$ sur $[0.95, 1]$

La encore on n'a pas de formule close donnant des intervalles de confiance pour ces estimateurs.

2.2.5 • DISTRIBUTION DE $I(T)$ CONDITIONNELLEMENT À $\mathcal{F} = \{|D_{n-1}^T| = n\}$

On écrit :

$$\forall x \in \mathbf{R} : \mathbf{P}(I(T) \leq x \mid \mathcal{F}) = \frac{\mathbf{P}(I(T) \leq x, \mathcal{F})}{\mathbf{P}(\mathcal{F})} \text{ où on a estimé } \mathbf{P}(\mathcal{F}) = 3.44 \cdot 10^{-5}$$

Et :

$$\mathbf{P}(I(T) \leq x, \mathcal{F}) = \sqrt{\frac{\sigma_T'^2}{\sigma_T^2}}^5 \mathbf{E}_{X'} \left[\mathbf{1}_{I(T) \leq x} \mathbf{1}_{X \in \mathcal{F}} \cdot \exp \left(- \sum_{i=1}^n (X'_i - \mu)^2 \left(\frac{1}{2\sigma_T^2} - \frac{1}{2\sigma_T'^2} \right) \right) \right]$$

On estime alors de manière analogue à la partie précédente la fonction de répartition de $I(T)$ conditionnelle à l'événement \mathcal{F} :

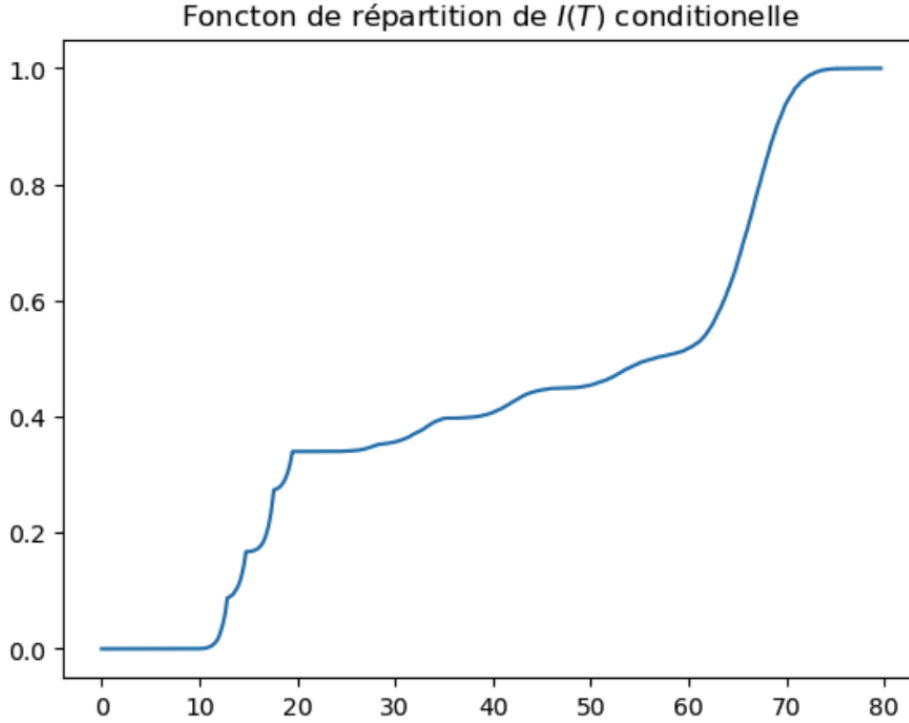


FIGURE 9 : Fonction de répartition $I(T)|\mathcal{F}$

On obtient la distribution conditionnelle suivante :

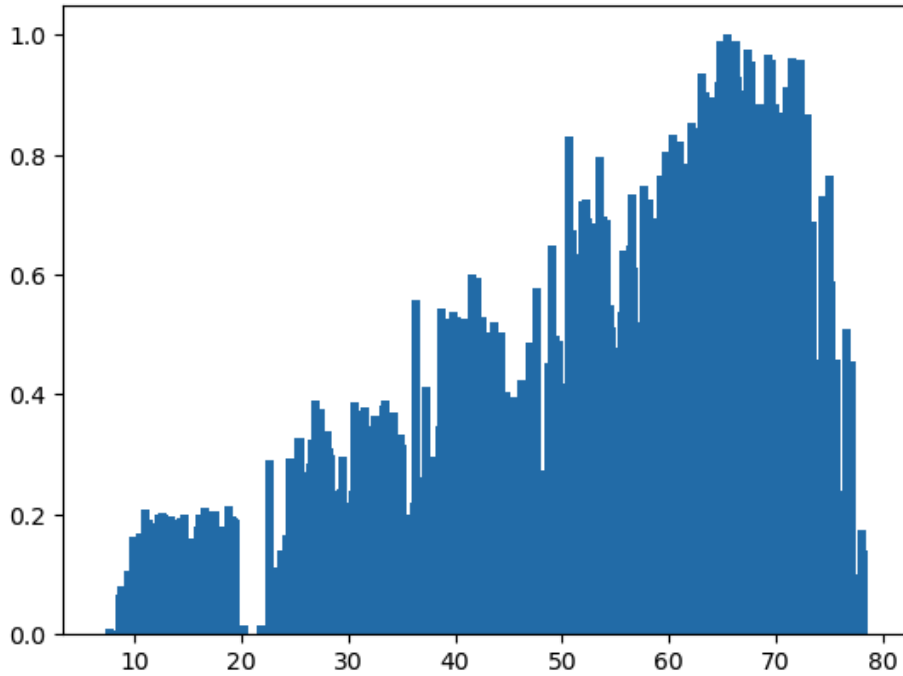


FIGURE 10 : Estimation de distribution conditionnelle de $I(T)$ par rapport à \mathcal{F}

2.3 MÉTHODE DE SPLITTING

2.3.1 • PRINCIPE

La méthode de splitting fonctionne très bien sur de variables à valeurs continues, on ne peut pas l'appliquer pour l'estimation de probabilité $\mathbf{P}(|D_{n-1}^T| = k)$ et elle est assez couteuse à implementer, on se contente de l'utiliser pour calculer une seule valeur $a = 10$ de la fonction de répartition de $I(T)$ (on ne peut pas déduire la fonction de répartition complète par souci de complexité).

On utilise la formule de Bayes ('diviser pour régner') comme suit :

$$\mathbf{P}(I(T) > q = q_r) = \prod_{i=0}^{r-1} \mathbf{P}(I(T) > q_{i+1} | I(T) > q_i) \text{ avec } q_0 = -\infty$$

L'avantage de cette méthode est que l'on peut contrôler que (sous réserve de régularité) :

$\mathbf{P}(I(T) > q_{i+1} | I(T) > q_i) \simeq \varepsilon$ un seuil fixé tel que $\mathbf{P}(I(T) > q = q_r) \simeq \varepsilon^r$ où r le nombre de splits

Comme $I(T)$ n'est pas à densité (en particulier sa fonction de répartition est discontinue en 0), il n'est pas judicieux d'appliquer la méthode de splitting sur $I(T)$ puisque le but est de contrôler les produits intermédiaires. On utilise l'impact adapté $\tilde{I}(T)$.

2.3.2 • IMPLEMENTATION

On implémente le splitting comme suit :

On génère un nombre N d'échantillons. On accepte qu'un nombre (généralement petit par rapport à N) vérifiant une certaine condition (dans notre cas $\tilde{I}(T) > c_1$) et on calcule la probabilité de cette condition comme rapport de ce nombre sur N , on génère alors de nouveaux échantillons vérifiant cette condition en utilisant le noyau AR(1) :

$$G_{n+1} = \rho G_n + \sqrt{1 - \rho^2} Y_i \text{ avec } Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Où $G_0 \sim \mathcal{N}(1, 0) | C$ qui suit une loi normale centrée réduite conditionnelle. On utilise le noyau pour générer au bout de plusieurs (par théorème ergodique) étapes une variable qui suit la même loi que G_0 . Dans notre cas les $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_T^2)$, on se ramène aisément vers la loi centrée réduite par la transformation $x \mapsto (x - \mu)\sigma_T$. On obtient alors de nouveaux N échantillons vérifiant la condition $\tilde{I}(T) > c_1$, on passe alors au niveau supérieur de splitting...

2.3.3 • INTERVALLES DE CONFIANCE ET RÉSULTATS

Pour le calcul d'intervalles de confiance, on se sert de la remarque suivant, en notant $I_i = [m_i, M_k]$ un intervalle de confiance de $p_i = \mathbf{P}(I(T) > q_{i+1} | I(T) > q_i)$ avec probabilité p pour $i \in \{1, r-1\}$. On a :

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{P}(I(T) > q) \in \left[\prod m_i, \prod M_i\right]\right) \geq \mathbf{P}(p_1 \in I_1, \dots, p_{r-1} \in I_{r-1}) \geq \sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{P}(p_i \in I_i) - (r-1) = rp - (r-1)$$

Où on a utilisé le résultat suivant :

$$\mathbf{P}(A \cap B) \geq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) \geq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1$$

Dont la généralisation est la suivante :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_R) \geq \sum_{k=1}^R \mathbf{P}(A_k) - (R-1)$$

On obtient les résultats suivants :

Nombre de niveaux = 4:

Splitting fournit la probabilité = 5.540e-05

Splitting fournit l'intervalle de confiance = 4.803e-04

Monte-Carlo naif fournit = 6.400e-04

L'estimation est donc plus précise que le Monte-Carlo naif mais l'intervalle de confiance est impertinent, ceci est dû au fait que pour obtenir un intervalle de confiance sur $\mathbf{P}(\tilde{I}(T) > a)$ d'un ordre α , on doit fournir des intervalles de confiances sur les probabilités intermédiaires d'ordres élevés (et donc des intervalles de plus en plus grands).

2.4 VALIDATION PAR THÉORIE DE GRAPHS

2.4.1 • GRAPHE DE E

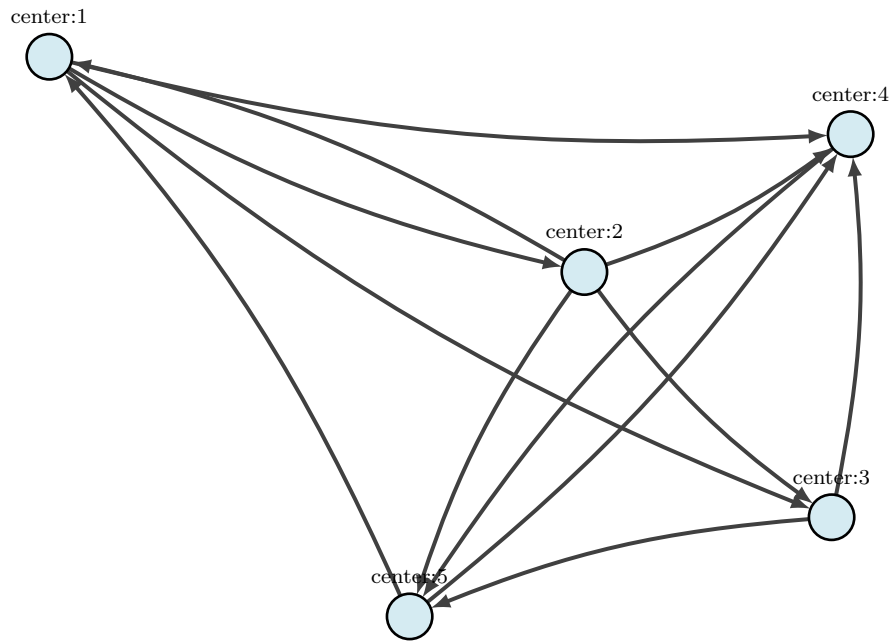
On remarque qu'un risque systémique souvent se passe par une succession d'insolvances qu'on peut modéliser par des graphes. Autrement dit, l'effet domino peut se modéliser par un graphe. Par exemple, un tel scénario étant donné notre matrice est le suivant :

$$5 \rightarrow 1 \rightarrow \begin{cases} 3 \\ 2 \\ 4 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases} \end{cases}$$

► Le premier schéma signifie que la première institutions fait insolvanace (i.e $x_5 \leq c_5$) et à cause de cette insolvanace l'institution 5 est devenue aussi insolvanace (ce qui fournit la condition $x_1 \leq c_1 + (1 - R)E_{1,5}$) puis insolvanace du reste (fournit les conditions $x_i \leq c_i + (1 - R)(E_{i,1} + E_{i,5})$).

► Le deuxieme signifie que les institutions 1 et 4 tombe en défaut de manières indépendantes ($x_1 \leq c_1$ et $x_4 \leq c_4$) puis 1 provoque insolvanace de 2 ($x_2 \leq c_2 + (1 - R)E_{2,1}$) et 4 provoque insolvanace de 3 et 5 ($x_3 \leq c_3 + (1 - R)E_{3,4}$, $x_5 \leq c_5 + (1 - R)E_{5,4}$).

Les différents cas possibles sont prédéterminés grâce à la structure de la matrice E . En effet, E définit le graphe suivant :



Les cas d'insolvance totaux sont des sous-graphes $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}(E) = (e(E), n(E))$ où :

- $e(E) = \{(j, i) , E_{i,j} > 0\}$ l'ensemble des arrêts possibles
- $n(E) = [|1, \dim(E)|] = [|1, n|]$.

L'insolvance dépend très fortement de la matrice E .
Par exemple pour la matrice suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a, avec défaillance de la banque 3, les seuls cas de figure suivants :

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 5 \end{cases} \quad \text{ou } \mathcal{C}_2 : \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 5 \rightarrow 4 \end{cases} \quad \text{ou } \mathcal{C}_3 : \begin{cases} 2 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 5 \end{cases} \quad \text{ou } \mathcal{C}_4 : \begin{cases} 2 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 4 \end{cases}$$

2.4.2 • GRAPHES VERS SOUS-ENSEMBLES

L'idée cruciale sur laquelle se base notre vérification par graphes est qu'on a équivalence d'un cas $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{G}(E)$ et le fait que $(X_1(T), \dots, X_n(T)) \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}_i}$ où l'on construit $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_i}$ de près en près :

- On commence par déterminer les parents p de chaque composante connexe du graphe \mathcal{C}_i , on pose $I^p = c_p$ (la borne sur la variable X_p).
- On parcourt les sous-graphes connexes du graphe \mathcal{C}_i , on pose $I^p = c_p + (1-R) \sum_{j \in \text{Chemin menant à } i} e_{p,j}$.
- Si on se retrouve avec un cycle $C \subset \mathcal{C}_i$, on fixe $I^p = c_p$ pour tout $p \in C$.

\implies On obtient, un intervalle :

$$I_{\mathcal{C}_i} = [0, I^1] \times \dots \times [0, I^n]$$

Pour l'implémentation informatique, on représente les sous-graphes par leur matrices d'incidences.

Par exemple pour :

$$\mathcal{C}_4 : \begin{cases} 2 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 4 \end{cases} \equiv G(\mathcal{C}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul ci-dessous fournit :

$$I_{\mathcal{C}_4} = [0, 12.85] \times [0, 10] \times [0, 10] \times [0, 15.7] \times [0, 11.9]$$

Avec un seuil fixe de 10 et taux d'amortissement $R = 0.05$.

2.4.3 • DÉCOMPOSITION EN HYPERCUBES

En utilisant l'étude précédente, on trouve une forme explicite de \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\mathcal{C} \subset \mathcal{G}(E)} I_{\mathcal{C}}$$

L'inconvénient de cet écriture est que l'union n'est pas disjointe et donc :

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}) \neq \sum_{\mathcal{C} \subset \mathcal{G}(E)} \mathbf{P}(I_{\mathcal{C}})$$

On a voulu contourner cette difficulté en utilisant la formule suivante :

FORMULE DU CRIBLE DE POINCARRÉ : Pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$, on a l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < \dots < i_n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_{i_j}\right)$$

Dans notre cas les intersection seront aussi des hypercubes, le problème est le fait que le calcul de la somme précédente est en $O(2^{|\mathcal{G}(E)|} |\mathcal{G}(E)|)$ qui est très inefficace.

On propose alors de faire est de calculer \mathcal{F} puis de le décomposer en hypercubes **disjoints**.

On désigne par hypercubes un sous-ensemble $C \subset \mathbf{R}^n$ qui s'écrit $C = [c_0^1, c_1^1] \times \dots \times [c_0^n, c_1^n]$. L'avantage d'utiliser des hypercubes est le fait qu'ils soit adapter au calcul de probabilité de variables indépendants, concrètement :

$$\mathbf{P}(X = (X_1, \dots, X_n) \in C) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \in [c_0^i, c_1^i])$$

Ainsi, étant donné une partition en hypercubes de $\mathcal{F} = \bigcup_{m=1}^M C_m$, on calcule aisément :

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^M \mathbf{P}(C_m)$$

Pour simuler $X \in \mathcal{F}$, il suffit de simuler $L \in \{1, \dots, M\}$ avec $\mathbf{P}(L = k) = \mathbf{P}(C_k)/\mathbf{P}(\mathcal{F})$ où $k \in [1, M]$, puis simuler une gaussienne de même caractéristiques que X mais conditionnellement à C_k .

Le fait que C_k soit un hypercube simplifie cette simulation puisqu'on a des formules exactes de densité de gaussienne conditionnellement à l'appartenance à un intervalle :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n : f_{X|C_k}(x) = f_X(X) \frac{\mathbf{1}_{X \in C_k}}{\mathbf{P}(C_k)}$$

2.4.4 • RÉSULTATS

Graphes possibles :

On obtient 55 graphes/matrices possibles. Exemple de matrices obtenues :

Matrice de chemin 1:

```
[[0 1 0 0 0]
 [0 0 1 0 0]
 [0 0 0 1 0]
 [0 0 0 0 1]
 [0 0 0 0 0]]
```

Matrice de chemin 2:

```
[[0 1 0 0 0]
 [0 0 1 0 0]
 [0 0 0 1 0]
 [0 0 0 0 0]
 [0 0 0 0 0]]
```

Matrice de chemin 3:

```
[[0 1 0 0 0]
 [0 0 1 0 0]
 [0 0 0 0 1]
 [0 0 0 0 0]
 [0 0 0 1 0]]
```

Conversion graphes/matrices \rightarrow intervalles :

À chaque matrice, on calcul I_M :

```
Exemples d'intervalles: [array([[ 0. , 18.55],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 11.9 ],
    [ 0. , 10. ]]), array([[ 0. , 12.85],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 10. ]]), array([[ 0. , 18.55],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 10. ]],
    [ 0. , 12.85]])]
```

Décomposition de \mathcal{F} en hypercubes :

Les hypercubes sont les suivants :

```
C1 = [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0]
C2 = [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 12.85]
C3 = [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 11.9], [0.0, 10.0]
C4 = [10.0, 12.85], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0]
C5 = [10.0, 12.85], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 12.85]
C6 = [10.0, 12.85], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 11.9], [0.0, 10.0]
C7 = [12.85, 15.7], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0]
C8 = [12.85, 15.7], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 12.85]
C9 = [12.85, 15.7], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 11.9], [0.0, 10.0]
C10 = [15.7, 18.549999999999997], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0]
C11 = [15.7, 18.549999999999997], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 12.85]
C12 = [15.7, 18.549999999999997], [0.0, 10.0], [0.0, 10.0], [10.0, 11.9], [0.0, 10.0]
```

Calcul exacte de $P(\mathcal{F})$: On trouve, en utilisant la bibliothèque `scipy.stats.norm` la valeur de probabilité d'appartenance à chaque hypercube, en sommant ces probabilités disjointes, on déduit :

$$P(\mathcal{F}) = 1.65 \cdot 10^{-5}$$

Distribution conditionnelle de $I(T)$:

En général, on écrit :

$$I(T) = \sum_{i \in D_{n-1}^T} X_i(T) + \sum_{j \notin D_{n-1}^T} (1-R)e_{i,j} = \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{i \in A} X_i(T) + \sum_{j \notin A} (1-R)e_{i,j} \right) \mathbf{1}_{D_{n-1}^T = A}$$

La faillite correspond à exactement $A = [1, n]$, on a alors :

$$\forall c \in \mathbf{R} : \mathbf{P}(I(T) > c | \mathcal{F}) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k(T) \mid \mathcal{F}\right)$$

On obtient la distribution :

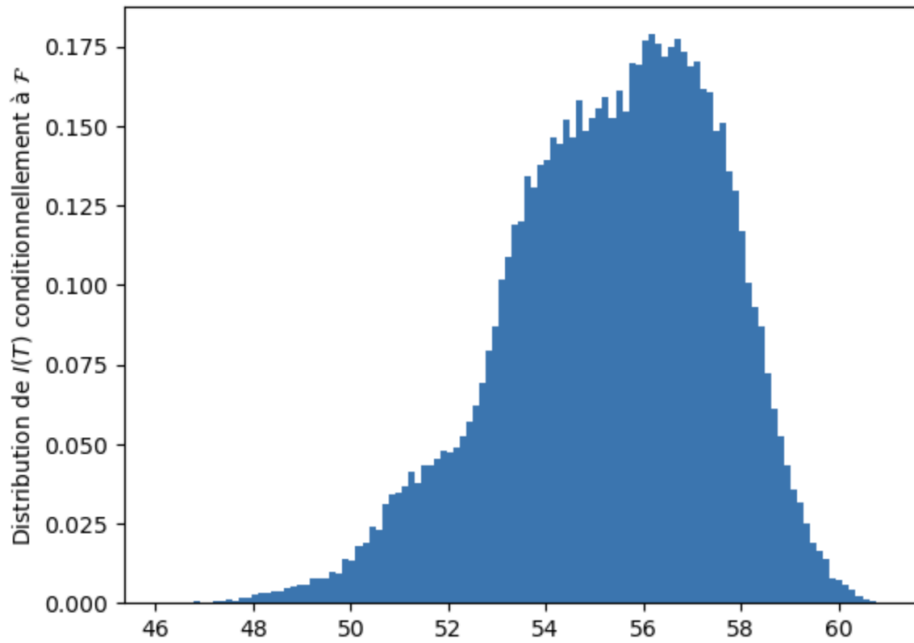


FIGURE 11 : Distribution conditionnelle de $I(T)$ par rapport à \mathcal{F}

2.4.5 • COMPARAISON AVEC LES MÉTHODES D'ESTIMATION

► On valide notre méthode d'échantillonnage d'importance pour le calcul de probabilités puisque :

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}) \in [\mathbf{P}(|D_{n-1}^T| = n)_{\text{IS}} - \rho_N, \mathbf{P}(|D_{n-1}^T| = n)_{\text{IS}} + \rho_N]$$

► Néanmoins la distribution conditionnelle estimée par IS diffère radicalement de celle calculée par notre étude sur les graphes (estimé sur $[10, 80]$, calculée sur $[48, 60]$). Ceci est dû au compromis qu'on a du faire pour calculer la répartition conditionnelle F pour un nombre important de points $x \in [0, 130]$ avec la contrainte :

$$\text{nbr}(\text{points } x) \cdot \text{nbr}(\text{sim par } x) \leq 10^7$$

Au déla de 10^8 simulations, les calculs prennent environ $4h$ pour chaque execution.

► La méthode de Monte-Carlo offre pour des valeurs $N = 10^5$ des valeurs de probabilité de même ordre que celle prévue $1.65 \cdot 10^{-5}$.

► Comme la méthode de splitting était utilisé que pour des probabilités non conditionnées, on ne peut pas juger la qualité de l'estimation de cette méthode en ce basant sur les résultats de graphes.

2.5 CONCLUSION

À partir de notre modèle rudimentaire, on déduit que la probabilité de défaillance d'au moins une banque est de l'ordre de 10^{-5} , ceci s'interprète que la durée qu'une insolvance d'au moins une institution se passe en moyenne tout les :

$$\mathbf{E}(\tau_D) = \frac{1}{\mathbf{P}(|D_{n-1}^T| \geq 1)} \sim 10^5 \text{ année}$$

Ceci est très loin de la réalité...

Comme susmentionné, les insolvances en vrai vie peuvent se passer à n'importe quel instant hors de l'horizon temporel. On se dirige vers un modèle prenant compte de cette dépendance temporelle de l'insolvance.

3

RISQUE SYSTÉMIQUE DYNAMIQUE

On reprend les quantités introduites relatives au risque systémique :

- Le temps de première insolvance

$$T^D = \inf\{p \in [0, P] \text{ , } \exists i \in [1, n] : X_i(t_p) < c_i\}$$

- L'impact de défaut total à la date T .

$$I(T)_\Sigma = \sum_{k=1}^N I(t_k)$$

L'hypothèse sur le risque statique fournit une formule explicite qu'on a utilisé pour simuler directement les échantillons $X(T)$.

$$X(T) = (X_1(T), \dots, X_n(T)) \sim \mathcal{N}(\mu I_n, \sigma_T^2 I_n)$$

Ce n'est plus possible, on commence alors par exposer comment générer les trajectoires $X(t_k)$ en prenant compte de l'insolvance qui se passe au cours de l'évolution.

Désormais, on n'utilise que la méthode de Monte-Carlo naïf, les autres méthodes de réduction deviennent de plus en plus complexe à manipuler et leurs performances se dégradent à nombre de simulations fixées.

3.1 MODÉLISATION DU RISQUE DYNAMIQUE

3.1.1 • GÉNÉRATION DE TRAJECTOIRE AVEC RISQUE DYNAMIQUE

Pour générer la trajectoire avec risque avec risque dynamique, on génère une trajectoire sans y tenir compte qu'on note du risque qu'on note :

$$X^C = \begin{pmatrix} - & X_1(t_k) & - \\ - & X_2(t_k) & - \\ - & X_3(t_k) & - \\ - & X_4(t_k) & - \\ - & X_5(t_k) & - \end{pmatrix}$$

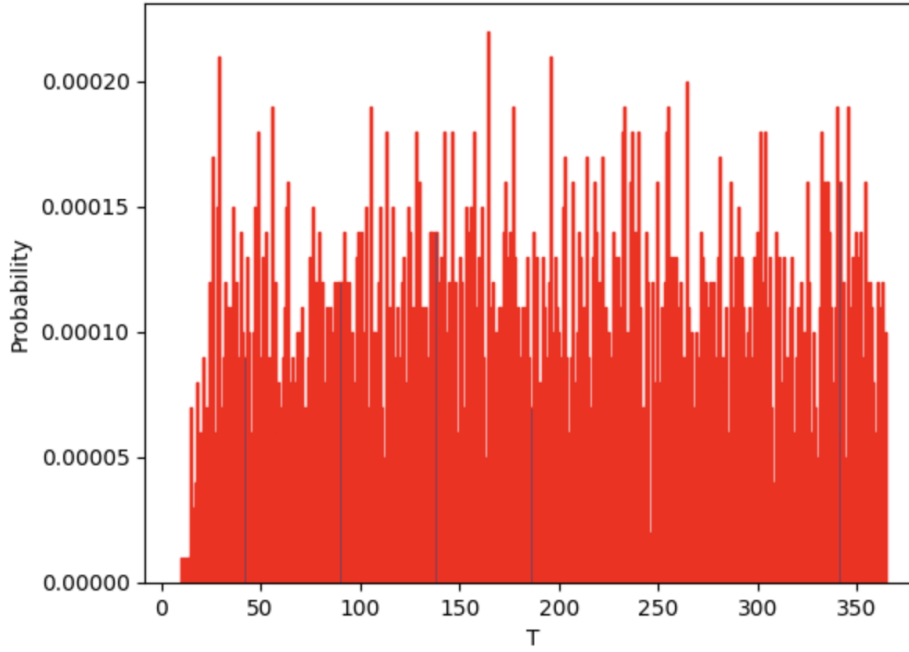
On parcourt cette matrice par colonnes. Pour une colonne j où on a défaillance des institutions $S = \{b_1^j, \dots, b_p^j\}$, on sous trait au colonnes qui suivent (i.e $\geq j + 1$) la somme sur S des colonnes de E (i.e que les colonnes de E où on a insolvance) multiplié par $(1 - R)$. Ainsi, on prend compte de fur et en mesure du risque dynamique.

Ceci étant bien clair en théorie devient très lourd numériquement puisqu'il s'agit de manipuler plusieurs fois des matrices de taille $\text{shape}(X^C) = (5, 365)$ et ceci $N = 10^5$ fois...

Ce qu'on fait en pratique c'est qu'on elimine les lignes des institutions insolventes de la matrice X^C ainsi que dans E (on prend soin de ne pas modifier E en place).

3.1.2 • TEMPS DE PREMIÈRE INSOLVANCE

Par définition de T_D , on a $T_D \in [1, P] \cup \{+\infty\}$. En simulant $N = 10^4$ trajectoires d'institutions on trouve la répartition empirique suivante de T_D . On obtient la distribution :

FIGURE 12 : Distribution conditionnelle de T_D par rapport à $T_D < +\infty$

On remarque une équidistribution des T_D , et une espérance :

$$\mathbf{E}(T_D | T_D < +\infty) \simeq 190$$

Ceci valide de plus la remarque que l'insolvance peut se passer à n'importe quel instant $t \in [0, T]$.

3.1.3 • IMPACT MOYEN

L'espérance de $I(T)_\Sigma$ conditionnelle à la défaillance d'au moins une banque estimée avec du Monte-Carlo naïf est de :

$$\mathbf{E}(I(T)_\Sigma | T_D < +\infty) \simeq 10$$

En parallèle, on obtient que la probabilité d'insolvance d'au moins une institution (i.e $T_D < \infty$) est de l'ordre de 4% et de tout le système est de 0 (on rappelle par du Monte-Carlo naïf). La probabilité d'insolvance augmente alors en considérant la dynamique complète. Ceci est bien logique puisque le risque statique est un cas particulier du risque dynamique.

$$\mathbf{P}(\forall i : \text{Insolvance à l'instant } T) \leq \mathbf{P}(\forall i : \text{Insolvance})$$

3.2 COMPORTEMENT LIMITES

3.2.1 • $\delta \rightarrow 0$

Dans cette sous partie, on ne suppose plus δ fixé à $\delta = 1/365$ et on s'autorise à varier $\delta \rightarrow 0$ et donc par conséquent le nombre de pas $P = \lfloor 1/\delta \rfloor \rightarrow +\infty$. On estime alors pour chaque valeur de δ la probabilité de défaillance d'une seule institution, on obtient la courbe suivante :

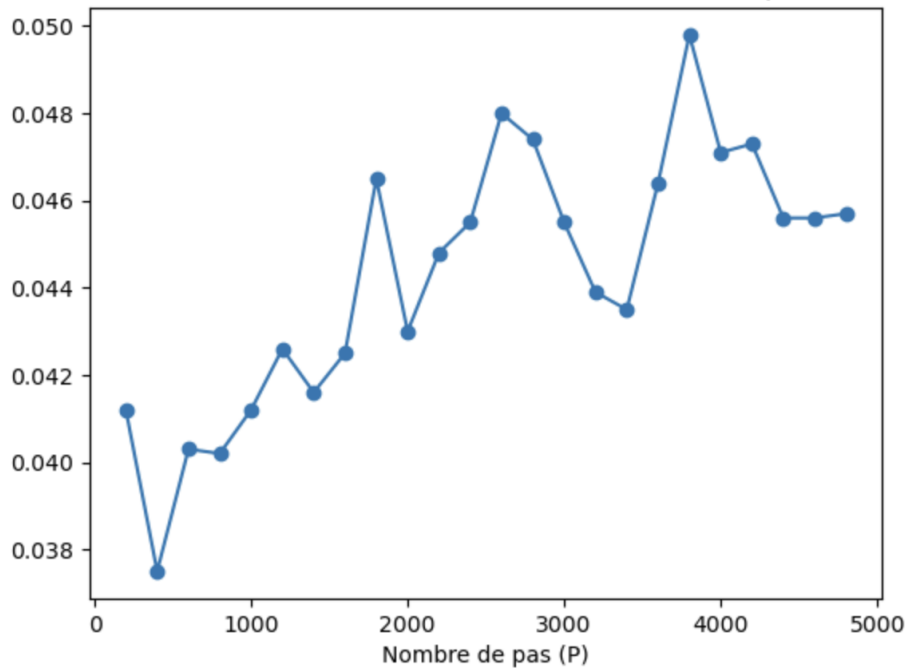


FIGURE 13 : Probabilité de défaillance d'au moins une institution en fonction du pas ($P(\delta)$).

On remarque une tendance à la hausse, ce qui est raisonnable puisque $\delta \rightarrow 0$ signifie qu'on fait fait un bilan d'insolvance plus souvent.

On remarque qu'en moyenne l'impact total reste inchangé en fonction de δ .

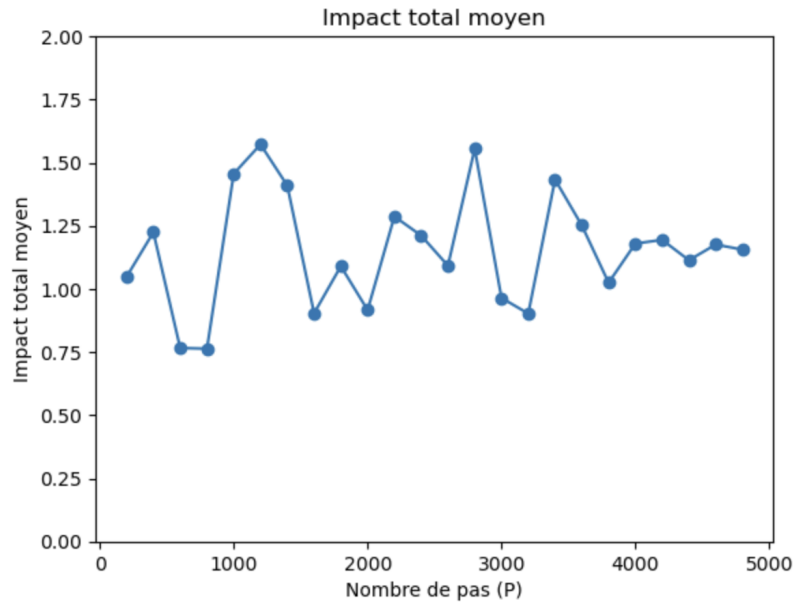


FIGURE 14 : Impact total estimé en fonction de $P(\delta)$.

Ainsi que la probabilité de défaillance du système entier :

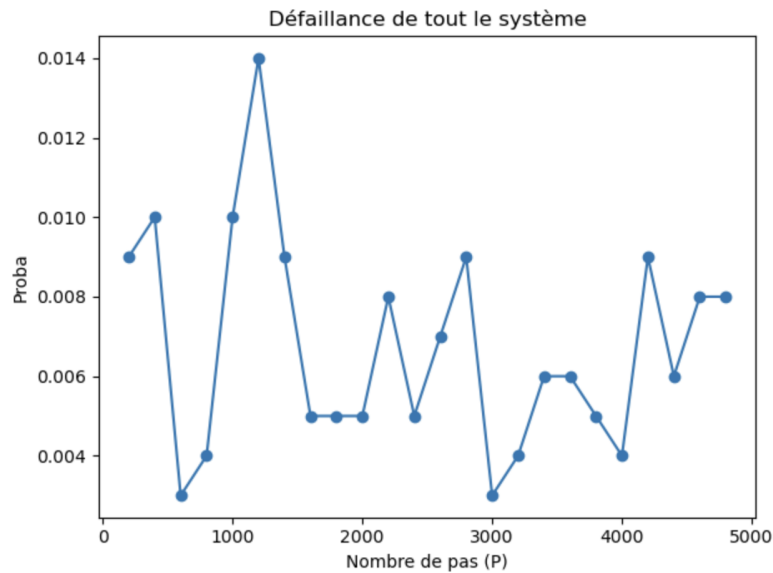


FIGURE 14 : Probabilité de défaillance du système estimé en fonction de $P(\delta)$.

On pourra interpréter ces deux phénomènes par le fait que quand $\delta \rightarrow 0$, les variables deviennent de plus en plus centrée autour de leurs moyennes, mais le fait qu'on a plus de variables compensent ce manque de variance...

3.2.2 • $n = 10$ ET $n = 20$

Dans cette sous partie, on étudie les mêmes quantités que dans la sous partie précédente mais cette fois en augmentant le nombre d'instituts en $n = 10$ puis $n = 20$.

► $n = 10$:

On prend :

$$E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 6 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

On a pris une matrice d'incidence aléatoire puis remplacer ces valeurs non nulles par des valeurs entre $1, \dots, 8$ de manière aléatoire.

Les autres paramètres (à part δ) reste constants, on obtient :

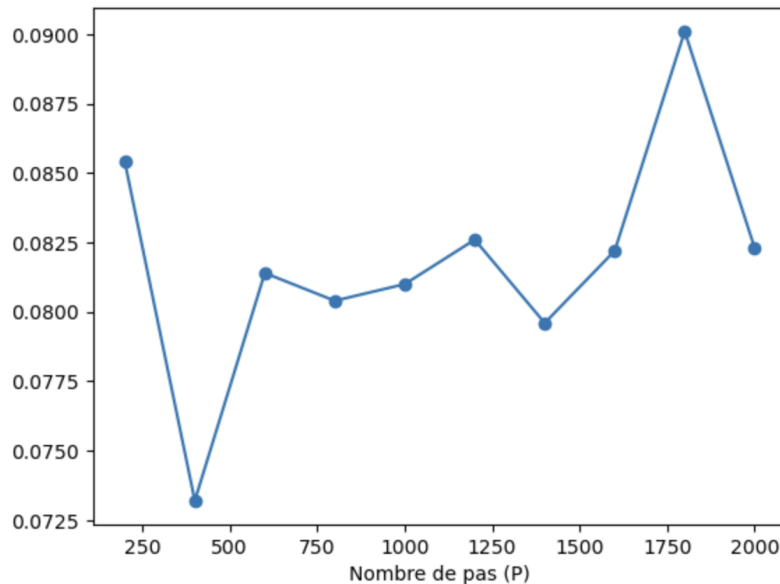
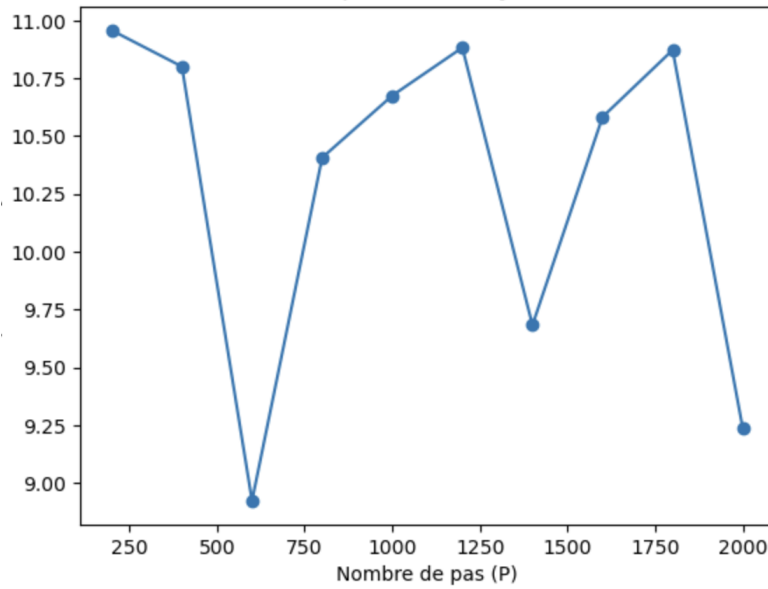


FIGURE 15 : Probabilité d'au moins une institution du système estimé en fonction de $P(\delta)$.

FIGURE 16 : Impact moyen en fonction de $P(\delta)$.

Quant à la probabilité de l'effondrement du système complet, on obtient une estimation nulle. Cela est dû au fait que la défaillance de 10 banques pendant le même intervalle de temps est un événement tellement rare que les 1000 simulations que nous avons simulé ne suffisent pas pour estimer cette probabilité, contrairement au cas $n=5$.

► $n = 20$:

On prend :

$$E_{20} = \begin{pmatrix} E_{10} & E_{10} \\ E_{10} & E_{10} \end{pmatrix}$$

Les autres paramètres (à part δ) reste constants, on obtient :

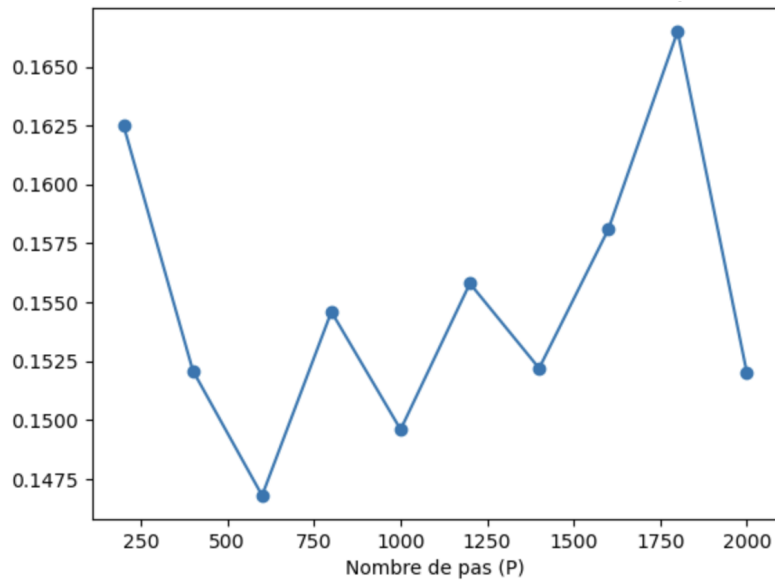
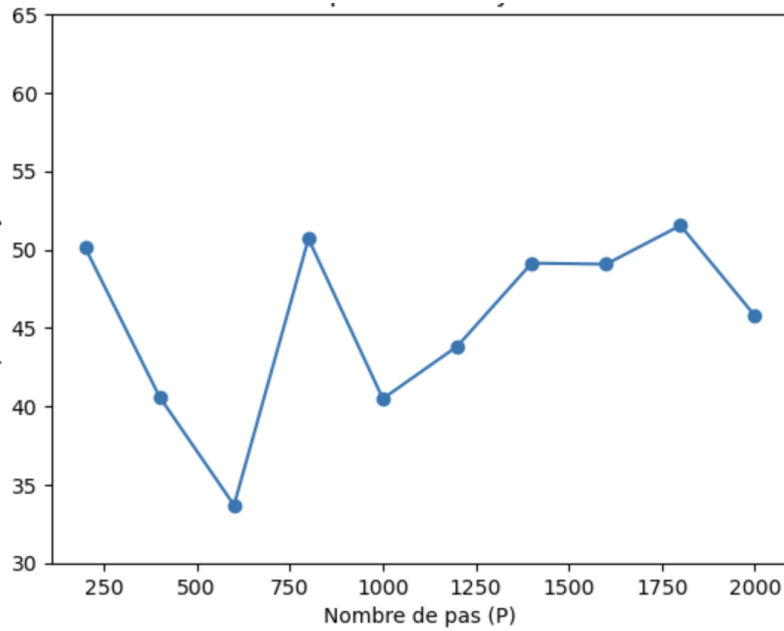


FIGURE 17 : Probabilité d'au moins une institution du système estimé en fonction de $P(\delta)$.

FIGURE 18 : Impact moyen en fonction de $P(\delta)$.

Quant à la probabilité de l'effondrement du système complet, on obtient une estimation nulle. Ce résultat est évident puisque le cas $n=10$ a abouti également à des probabilités nulles pour les même choix des pas.

3.3 ANALYSE DE RÉSULTAT ET CONCLUSION

En reprenant le cas $N = 20$ et $P \simeq 2000$, on remarque que la probabilité qu'au moins une institution fait faillite est de $\sim 16\%$. Or, ceci est très loin de ce qui se passe en réalité :

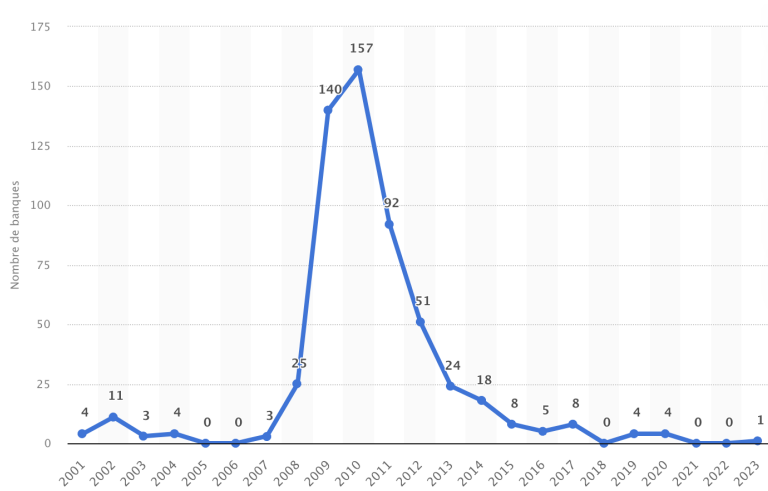


FIGURE 19 : Nombre de faillites bancaires aux États-Unis entre 2001 et le 10 mars 2023. [4]

À partir de ces statistiques appliqué sur le réseau bancaires entier des États-Unis fournit que la probabilité d'insolvance d'au moins d'une banque est en moyenne **très petit** devant les résultats de nos modèles. On pourra expliquer ceci par les raisons suivantes :

- On néglige l'influence des variables exogènes et des relations interbancaires dans le modèle des capitaux.
- Les données de la matrice E sont prises aléatoirement et ne représentent pas réellement des valeurs interbancaires. Ces informations sont souvent à usage interne.
- La relation définissant les capitaux suppose que les coefficients σ (volatilité), μ ('force de rappel') sont constant au cours du temps.

4

CONCLUSION

Le modèle développé dans ce projet offre une méthode quantitative utile pour estimer l'impact des défaillances bancaires. Il permet de simuler divers scénarios et de quantifier les effets de contagion dans un réseau bancaire. Ce modèle permet donc l'évaluation de la stabilité du modèle à partir de plusieurs caractéristiques du système financier étudié.

Cependant, nous trouvons dans le modèle des hypothèses qui le rend assez loin de la réalité. Par exemple, l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires $(W_k^i)_i$ simplifie excessivement la complexité des interactions financières entre les banques.

En effet, les chocs économiques et les comportements des acteurs financiers sont corrélés, ce qui peut amplifier les effets de contagion des défaillances.

Deuxièmement, l'absence de variables exogènes dans le modèle empêche de prendre en compte les influences externes, telles que les politiques monétaires, les régulations gouvernementales et les conditions économiques globales.

Par conséquent, pour améliorer la pertinence et l'exactitude du modèle, l'intégration de nouveaux paramètres tels que les variables exogènes et les chocs réguliers peut constituer une piste prometteuse pour mieux capturer les dynamiques complexes des systèmes financiers réels et renforcer ainsi la robustesse des analyses.

RÉFÉRENCES

- [1] Catalogue projets Simulation Numérique Aléatoire (SNA) autour des évènements rares - G. FORT, O. FORGHIERI, A. GUYADER, T. LELIÈVRE , C. REY, A. SINGH - Version 21 avril 2024
- [2] Statistique et Apprentissage - GERSENDE FORT, MATTHIEU LERASLE, ERIC MOULINES
- [3] Monte Carlo Methods in Financial Engineering - PAUL GLASSERMAN
- [4] STATISTICA : Nombre de faillites bancaires aux États-Unis entre 2001 et le 10 mars 2023 - MAXIME GAUTIER - Visité le 20 Mai 2024