3 Доп2 (6). Существование вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения.

Теорема 1. Существует вычислимая функция d (с натуральными аргументами и значениями), от которой никакая вычислимая функция f не может всюду отличаться: для любой вычислимой функции f найдётся такое число n, что f(n) = d(n) (последнее равенство понимается в том смысле, что либо оба значения f(n) и d(n) не определены, либо оба определены и равны).

▲ Такова диагональная функция d(n) = U(n, n) (здесь U — вычислимая функция двух аргументов, универсальная для класса вычислимых функций одного аргумента). Любая вычислимая функция f есть U_n при некотором n и потому $f(n) = U_n(n) = U(n, n) = d(n)$. ■

Теорема 2. Существует вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения.

▲ Пример: функция $d'(n) = d(n)+1$, где d — функция из предыдущей теоремы. В самом деле, любое её всюду определённое продолжение всюду отличается от d (в тех местах, где функция d определена, функция d' на единицу больше d и потому любое продолжение функции d' отличается от d; там, где d не определена, любая всюду определённая функция отличается от d). ■

P.S. Формально и сама d не имеет вычислимого всюду определённого продолжения.