1.extra7.2. Элементарная эквивалентность упорядоченных множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ (если используется игра Эренфойхта, нужно доказать теорему в нужную сторону).

Определение. Пусть заданы две интерпретации одной и той же сигнатуры. Тогда они эквивалентны, или изоморфны. если существует изоморфизм.

M - интерпретация$\langle f_1, \ldots, f_m, P_1, \ldots, P_k\rangle 1$

K - интерпретация $\langle f_1, \ldots, f_m, P_1, \ldots, P_k\rangle$

Изоморфизм — биекция $\phi : M \to K$. т.ч.

1) $f_i(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_q)) = \phi(f_i(x_1, \ldots, x_q))$ для всех $i : 1, ..., m$

2) $P_j(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = 1 \Leftrightarrow P_j(x_1, \ldots, x_q) = 1$

Можно сказать, что изоморфные интерпретации это одна и та же интерпретация с разными "метками"на элементах

Две интерпретации элементарно эквивалентны, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы.

Основная идея игры Эренфойхта. Основная идея игры заключается в том, что мы имеем две структуры (A и B) и два игрока (Новатор и Консерватор). Новатор из хочет показать, что эти две структуры отличны, в то время как другой игрок хочет показать, что они элементарно эквивалентны. Игра ведётся поочерёдно по раундам. В начале проводится подготовительный раунд: Новатор объявляет число ходов ("Я докажу, что интерпретации разные, не более чем за k ходов"). Остальные раунды протекают следующим образом: Сначала первый игрок Новатор выбирает любой элемент из одной из структур, а другой игрок выбирает элемент из другой структуры. Целью второго игрока всегда является выбор элемента, который (по его мнению) соответствует элементу, выбранному Новатором.

Новатор выигрывает, на одном из k раундов Консерватор для какого-то предиката P из сигнатуры и каких-то $i_1, ..., i_q$ $P(a_{i_1}, ..., a_{i_q}) \neq P(b_{i_1}, ..., b_{i_q})$. Если по прошествии k раундов Новатор не победил, то побеждает Консерватор.

Теорема.Теорема Эренфойхта

Две интерпретации элементарно эквивалентны $\Leftrightarrow$ в соответсвующей игре побеждает Консерватор.

Утверждение. Упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ элементарно эквивалентны.

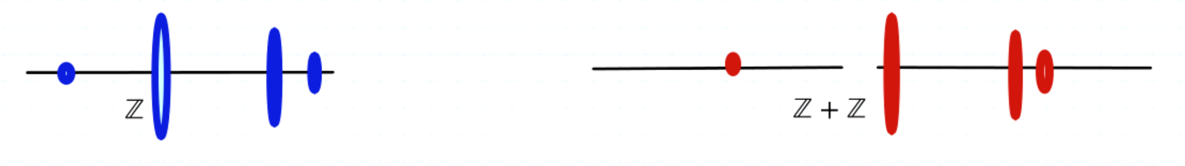
Доказывается через игру Эренфойхта. В данном примере важно, что Новатор заранее ограничивает число своих ходов.

(Идея нетривиальная. Но думаю, что на экзамене не составит труда самостоятельно придумать стратегию для Консерватора. Стратегия для Консерватора в описанном ниже решении мне не кажется всегда выполнимой, но выводы Даниил Владимирович делает правильные)

Идея от Мусатова: Консерватор не отличает бесконечные отрезки (отрезки, у которых концы находятся в разных множествах $\mathbb{Z}$) от "очень длинных"(определены ниже). Поддерживает некоторый инвариант: порядок на отмеченных элементах один и тот же, расстояния между соответствующими элементами либо маленькие и одинаковые, либо большие. В конце игры важен только порядок, так что если Консерватору удастся поддерживать этот инвариант, то он выиграет.

За m раундов до конца будем называть "очень длинным"любой отрезок длины $\geq 2^m$. Если Новатор отмечает точку внутри очень длинного длинного отрезка, то из образованных (делением отрезка точкой) отрезков хотя бы один тоже будет очень длинным на следующей стадии (когда m на 1 меньше). Действительно, если каждый из них короче 2^{m-1}, то изначальный был бы короче 2^m. В любом случае Консерватор сможет повторить этот ход:

либо с одной стороны образовать короткий отрезок той же длины, либо разделить на два очень длинных. Если Новатор отмечает точку внутри короткого отрезка, то Консерватор сможет повторить такой ход. В любом случае Консерватор сможет поддержать инвариант. Следовательно, Консерватор победит. Следовательно, упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ элементарно эквивалентны.



Стратегия для Консерватора от автора конспекта:

Первый ход Консерватор делает как угодно.

Путь было сделано n ходов. В одном множестве отмечены элементы $a_1, \ldots, a_n$, в другом $b_1, \ldots, b_n$, причём $\forall i$ a_i соответствует b_i и $a_i < a_{i+1}$, соответственно $b_i < b_{i+1}$. Новатор выбирает элемент k между a_i и a_{i+1} (Не важно $[a_i, a_{i+1}]$ конечный или бесконечный). Если отрезок $[b_i, b_{i+1}]$ конечный, то консерватор отмечает элемент в середине этого отрезка. Если отрезок $[b_i, b_{i+1}]$ бесконечный, то консерватор отмечает любую точку между b_i и b_{i+1}. Порядок сохранился. Сделаем перенумерацию и переходим к следующему шагу. Так как между любыми двумя отмеченными объектами континуальное или бесконечное количество точек, то Консерватор в любом случае сможет поддержать инвариант. Следовательно, Консерватор победит. Следовательно, упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ элементарно эквивалентны.