3.10 (5). Теорема об арифметической иерархии: $\sum_n \neq \sum_{n+1}, \sum_n \neq \prod_n$

Опр *Классы арифметической иерархии*
Говорят, что множество A принадлежит классу Σ_n, если существует такое разрешимое множество $R \in \mathbb{N}^{k+1}$, что

$$x \in A \Longleftrightarrow \exists y_1\ \forall y_2\ \exists y_3 .... \mathcal{Q} y_n [(x, y_1, ..., y_k) \in R]$$

Аналогично, говорят, что A принадлежит классу Π_n, если существует такое разрешимое множество $R \in \mathbb{N}^{k+1}$, что

$$x \in A \Longleftrightarrow \forall y_1\ \exists y_2\ \forall y_3 .... \mathcal{Q} y_n [(x, y_1, ..., y_k) \in R]$$

Согласно этому определению, $\Sigma_0 = \Pi_0$(классы Σ_0 и Π_0 совпадают с классом всех разрешимых множеств)
Σ_1 - перечислимые, Π_1 - коперечислимые

Теорема 1. Для любого n в классе $\sum_n$ существует множество, универсальное для всех множеств класса $\sum_n$. (Его дополнение будет универсальным в классе $\prod_n$.)

Говоря об универсальном множестве из класса $\sum_n$, мы имеем в виду множество пар натуральных чисел, которое принадлежит классу $\sum_n$ и среди сечений которого встречаются все множества натуральных чисел, принадлежащие классу $\sum_n$.

▲ Для класса $\sum_1$ (перечислимых множеств) существование универсального множества мы уже обсуждали (билет xxx) С его помощью можно построить универсальные множества и для более высоких классов иерархии. (Начинать надо с первого уровня, так как на «нулевом» уровне не существует универсального разрешимого множества.)

По определению свойства класса $\prod_2$ имеют вид $\forall y \exists z R(x, y, z)$, где R — некоторое разрешимое свойство. Но их можно эквивалентно определить и как свойства вида $\forall y P(x, y)$, где P — некоторое перечислимое свойство. Теперь уже видно, как построить универсальное множество класса $\prod_2$. Возьмём универсальное перечислимое свойство U(n, x, y), из которого фиксацией различных n получаются все перечислимые свойства пар натуральных чисел. Тогда из свойства $T(n, x) = \forall y U(n, x, y)$ при различных натуральных n получаются все $\prod_2$-свойства натуральных чисел. С другой стороны, само свойство T по построению принадлежит классу $\prod_2$.

Дополнение к универсальному $\prod_2$-множеству будет, очевидно, универсальным $\sum_2$-множеством - так как отрицание чего-либо меняет все кванторы на противоположные, благодаря чему и само множество, и все его сечения по такому свойству также принадлежат $\sum_2$ - значит, это универсальное $\sum_2$-множество.

Аналогично можно действовать и для $\sum_n$- и $\prod_n$-множеств. ■

Теорема 2. Универсальное $\sum_n$-множество не принадлежит классу $\prod_n$. Аналогичным образом, универсальное $\prod_n$-множество не принадлежит классу $\sum_n$.

▲ Рассмотрим универсальное $\sum_n$-свойство $T(m, x)$. По определению это означает, что среди его сечений (получающихся, если зафиксировать m) есть все $\sum_n$-свойства. Пусть T принадлежит классу $\prod_n$. Тогда его диагональ, свойство $D(x) = T(x, x)$, также лежит в $\prod_n$ (например, потому, что $D \leqslant_m T$), а её отрицание, свойство $\neg D(x)$, принадлежит классу $\sum_n$. Но этого не может быть, так как $\neg D$ отлично от всех сечений свойства T (оно отличается от m-го сечения в точке m), а T универсально. ■

Если $\sum_n = \sum_{n+1}$, то $\prod_{n+1} = \prod_n$ (как отрицание $\sum_n$ и $\sum_{n+1}$). Т.к. $\sum_n \subset \prod_{n+1} = \prod_n$, а $\prod_n \subset \sum_{n+1} = \sum_n$, то $\sum_{n+1} = \prod_{n+1}$, что противоречит теореме выше. Основная теорема доказана.