

86. Алгоритм Хопкрофта—Карпа поиска максимального паросочетания в двудольном графе. Корректность и асимптотика.

Алгоритм Хопкрофта—Карпа - поиск максимального паросочетания в двудольном графе. Эта задача сводится к потоковой задаче: вводим искусственно вершинки s и t , а дальше делаем сеть: из всех вершин левой доли проводим в s рёбра капасити 1, из всех вершин правой доли - в t рёбра капасити 1, все рёбра исходного графа ориентируем слева направо и ставим капасити 1. $\text{MaxFlow} = \text{MaxMatching}$.

Асимптотика: используем алгоритм Диница, где все капасити - 1, в этой сети потенциал $p = V$, \Rightarrow Диниц работает за $O(E\sqrt{V})$.

Корректность: рассмотрим устройство потока в такой сети.



Все пути имеют именно такой вид: одно ребро от s до левой доли, от левой доли до правой, от правой доли до t . Все такие пути не пересекаются \Rightarrow ну а тогда мы получили из центральных рёбер паросочетания. Отсюда $\text{MaxFlow} \leq \text{MaxMatching}$. Но и обратное так же верно: по максимальному паросочетанию можно достроить поток, так что $\text{MaxMatching} \leq \text{MaxFlow}$. Отсюда следует это равенство.