

36. Определение равномерной распределённой последовательности по модулю 1. Является ли р.р. (mod 1) последовательность a^n при $a < 1$?

Последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - равномерно распределена по модулю 1, если:

$$\forall a, b \in [0, 1] \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{i = 1, \dots, N : \{x_i\} \in [a, b)\}|}{N} = b - a$$

или, что равносильно (по сути речь про вероятность, что дробная часть числа из первых N окажется на отрезке $b - a$):

$$\forall \gamma \in [0, 1] \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{i = 1, \dots, N : \{x_i\} \leq \gamma\}|}{N} = \gamma$$

a^n при $a < 1$ не является р.р. (mod 1).

▲ Очевидно, что $\{a^n\} = a^n$. Возьмём $\gamma = a + \varepsilon < 1$. Тогда $\forall n \ a^n < a < \gamma$; для этого γ :
 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{i=1, \dots, N : \{x_i\} \leq \gamma\}|}{N} = 1 \neq \gamma$ ■