

3.10 (5). Теорема об арифметической иерархии: $\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}, \Sigma_n \neq \Pi_n$

Опр Классы арифметической иерархии

Говорят, что множество $A \subset \mathbb{N}^k$ принадлежит классу Σ_n , если существует такое разрешимое множество $R \in \mathbb{N}^{k+1}$, что

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A \iff \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots Q y_n [(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) \in R]$$

Аналогично, говорят, что $A \subset \mathbb{N}^k$ принадлежит классу Π_n , если существует такое разрешимое множество $R \in \mathbb{N}^{k+1}$, что

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A \iff \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots Q y_n [(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) \in R]$$

Согласно этому определению, $\Sigma_0 = \Pi_0$ (классы Σ_0 и Π_0 совпадают с классом всех разрешимых множеств)

Σ_1 - перечислимые, Π_1 - коперечислимые

Теорема 1. Для любого n в классе Σ_n существует множество, универсальное для всех множеств класса Σ_n . (Его дополнение будет универсальным в классе Π_n .)

Говоря об универсальном множестве из класса Σ_n , мы имеем в виду множество пар натуральных чисел, которое принадлежит классу Σ_n и среди сечений которого встречаются все множества натуральных чисел, принадлежащие классу Σ_n .

▲ Для класса Σ_1 (перечислимых множеств) существование универсального множества мы уже обсуждали. С его помощью можно построить универсальные множества и для более высоких классов иерархии. (Начинать надо с первого уровня, так как на «нулевом» уровне не существует универсального разрешимого множества.)

По определению свойства класса Π_2 имеют вид $\forall y \exists z R(x, y, z)$, где R — некоторое разрешимое свойство. Но их можно эквивалентно определить и как свойства вида $\forall y P(x, y)$, где P — некоторое перечислимое свойство. Теперь уже видно, как построить универсальное множество класса Π_2 . Возьмём универсальное перечислимое свойство $U(n, x, y)$, из которого фиксацией различных n получаются все перечислимые свойства пар натуральных чисел. Тогда из свойства $T(n, x) = \forall y U(n, x, y)$ при различных натуральных n получаются все Π_2 -свойства натуральных чисел. С другой стороны, само свойство T по построению принадлежит классу Π_2 .

Дополнение к универсальному Π_2 -множеству будет, очевидно, универсальным Σ_2 -множеством.

Аналогично можно действовать и для Σ_n - и Π_n -множеств. ■

Теорема 2. Универсальное Σ_n -множество не принадлежит классу Π_n . Аналогичным образом, универсальное Π_n -множество не принадлежит классу Σ_n .

▲ Рассмотрим универсальное Σ_n -свойство $T(m, x)$. По определению это означает, что среди его сечений (получающихся, если зафиксировать m) есть все Σ_n -свойства. Пусть T принадлежит классу Π_n . Тогда его диагональ, свойство $D(x) = T(x, x)$, также лежит в Π_n (например, потому, что $D \leq_m T$), а её отрицание, свойство $\neg D(x)$, принадлежит классу Σ_n . Но этого не может быть, так как D отлично от всех сечений свойства T (оно отличается от m -го сечения в точке m), а T универсально. ■

Если $\Sigma_n = \Sigma_{n+1}$, то $\Pi_{n+1} = \Pi_n$ (как отрицание Σ_n и Σ_{n+1}). Т.к. $\Sigma_n \subset \Pi_{n+1} = \Pi_n$, а $\Pi_n \subset \Sigma_{n+1} = \Sigma_n$, то $\Sigma_{n+1} = \Pi_{n+1}$, что противоречит теореме выше. Основная теорема доказана.