2.extra7.2. Теорема Банаха-Тарского: равносоставленность сферы и пары сфер

Определение. Назовём две фигуры *равносоставленными*, если каждую из них можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств, так, что количество подмножеств в обоих разбиениях одно и то же, а подмножества с одинаковыми номерами переводятся одно в другое движением (изометрией).

Утверждение. *Равносоставленность – отношение эквиваленции.*
Рефлексивность и симметричность очевидны.
Транзитивность: рассмотрим множества, получающиеся при попарных пересечениях множеств разбиений B, из которых получаются A и C.

Для доказательства теоремы потребуется определение из теории групп

Определение. *Свободная группа* – группа G, для которой существует подмножество $S \subset G$ такое, что каждый элемент G записывается единственным образом как произведение конечного числа элементов S и их обратных. (Единственность понимается с точностью до тривиальных комбинаций наподобие $st = su^{-1}ut$).

Теорема (Банаха-Тарского)**.** *Шар и два шара такого же радиуса равносоставлены.*

Доказательство. Сначала покажем, что сфера и две таких же сферы равносоставлены.

I. Полезное замечание для свободных групп преобразований на сфере

Расмотрим φ и ψ – преобразования на сфере, которые являются поворотами вокруг оси, проходящий через центр сферы, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) Никакая степень φ и ψ не будет тождественным преобразованием
2) один из поворотов не переводит ось в себя

Тогда все повороты $id, \varphi, \psi, \varphi^{-1}, \psi^{-1}, \varphi\psi, \psi\varphi, \varphi^2, ...$ будут различными.

Значит, эти преобразования задают свободную группу движений сферы.

У каждой точки сферы возникает орбита – образы под действием соответствующих поворотов. У большинства точек орбита полная: для каждого элемента группы будет один образ, все эти образы разные.

Однако у некоторых точек орбита будет неполная: если под действием φ точка попала на ось ψ (или она там была с самого начала, то любое количество дальнейших поворотов ψ не изменят результат. Таких исключительных точек – счётное количество.

Идея состоит в следующем: можно из каждой орбиты взять по одной точке, тогда образы такого множества под действием всех поворотов покроют всю сферу (с точностью до неполных орбит – их точки будут покрыты несколько раз).

II. Доказательство утверждения про сферы

Для доказательства теоремы Банаха-Тарского возьмём следующие повороты:

φ – поворот на 180, поэтому $\varphi^2 = 1$.

ψ – поворот на 120, поэтому $\psi^3 = 1$.

Оси поворотов расположены в общем положении, так что других соотношений не возникает.

Такую орбиту можно разбить на 3 части A, B, C:
A равносоставлено с $B \cup C$, то есть $\varphi(A) = b \cup C)$
A равносоставлено с B, то есть $\psi(A) = B$
A равносоставлено с C, то есть $\psi^2(A) = C$

На каждой "нормальной"орбите"(где никакие дополнительные точки не склеиваются) выберем одну точку – по аксиоме выбора. Покрасим её в цвет A, остальные элементы – согласно вышеуказанным правилам.

Вся сфера разбилась на 4 множества: A, B, C и Q_1 (Q_1 – множество орбит со склейками).

Q_1 – счётное множество, так что его можно повернуть, получив Q_2, так что $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset, Q_2 \subset A \cup B \cup C$.

Пусть Q_2' – множество, равносоставленное с Q_2, лежащее полностью в C. Это может быть сделано следующим образом:
Ту часть Q_2, которая лежит в $B \cup C$, отправим в A.
Ту часть, которая изначально лежала в A, отправим в B.
Ту часть, которая теперь лежит в A, отправим в C.
Получим множество целиком в $B \cup C$. отправим его в A, и, наконец, в C.

$$U = A \cup B \cup C \cup Q_1 = (A \cup Q_1) \cup (B \cup Q_2) \cup (C \setminus Q_2)$$

$$A \cup Q_1 \sim B \cup C \cup Q_1 \sim A \cup C \cup Q_1 \sim B \cup C \cup A \cup Q_1 = U$$

Аналогично, $B \cup Q_2 \sim U$
Получаем, что $U \sim U \cup U \cup (C \setminus Q_2)$
По теореме $U \sim U \cup U$

Утверждение про сферы доказано.

III. Доказательство утверждения про шары

Из этого будет следовать и теорема про два шара: шар без центра равносоставлен с двумя шарами без центра.

По транзитивности он равносоставлен и с тремя шарами без центра. – такое множество с двумя шарами с центром и одним шаром без центра и еще одной точки.

Тогда A – один шар, B – два шара, C – два шара и ещё шар без двух точек.

Поскольку A и C равносоставлены, то в силу утверждения A и B равносоставлены. $\blacksquare$