

1.1 Теорема об однозначном представлении булевой функции многочленом Жегалкина.

Теорема (Жегалкина): Каждая булева функция единственным образом представляется в виде полинома Жегалкина.

▲ Заметим, что различных булевых функций от n переменных 2^{2^n} штук. При этом конъюнкций вида $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ существует ровно 2^n , так как из n возможных сомножителей каждый или входит в конъюнкцию, или нет. В полиноме у каждой такой конъюнкции стоит 0 или 1, то есть существует 2^{2^n} различных полиномов Жегалкина от n переменных.

Теперь достаточно лишь доказать, что различные полиномы реализуют различные функции. Предположим противное.

Тогда приравняв два различных полинома и перенеся один из них в другую часть равенства, получим полином, тождественно равный нулю и имеющий ненулевые коэффициенты. Тогда рассмотрим слагаемое с единичным коэффициентом наименьшей длины, то есть с наименьшим числом переменных, входящих в него (любой один, если таких несколько). Подставив единицы на места этих переменных и нули на места остальных, получим, что на этом наборе только одно это слагаемое принимает единичное значение, то есть нулевая функция на одном из наборов принимает значение 1. Противоречие. Значит, каждая булева функция реализуется полиномом Жегалкина единственным образом. ■