3.3 (3) Теорема Поста: критерий разрешимости в терминах перечислимости множества и его дополнения.

Теорема: A разрешимо $\Leftrightarrow$ A и $\overline{A}$ перечислимы

▲ $\Rightarrow$: A можно перечислить даже по возрастанию. Запустим цикл по $n = 0, 1, \ldots$ Если $n \in A$ (вычислимо по определению разрешимого множества), то выводим n. Дополнение разрешимого множества также разрешимо, поэтому оно тоже перечислимо

$\Leftarrow$: Покажем как построить характеристическую функцию для A. Запускаем цикл по $n = 1, 2, \ldots$

1. Возвращаем 1, если x было перечислено в A на n-ом шаге
2. Возвращаем 0, если x было перечислено в $\overline{A}$ на n-ом шаге

Для любого x что-то будет выведено, так как оно лежит либо в A, либо в $\overline{A}$ и в силу их перечислимости будет перечислено на каком-то шаге $\Rightarrow$ A - разрешимо ■

3.4 (3) Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.

Проблема самоприменимости: по входу p нужно понять, определено ли $U(p, p)$.

Утверждение: это неразрешимая проблема, т.е. множество $\{p | U(p, p)$ определено$\}$ неразрешимо.

▲ Предположим, что это множество разрешимо. Тогда вычислима функция

$$d'(x) = \begin{cases} U(x, x) + 1 & U(x, x) \text{ определено} \\ 1 & U(x, x) \text{ не определено} \end{cases}$$

Тогда так как d' вычислима $\exists p \forall x\ d'(x) = U(p, x)$. Рассмотрим $U(p, p)$. Предположим, что она определена, тогда $U(p, p) = d'(p) = U(p, p) + 1$ - противоречие. Если предположим, что она не определена, получим $U(p, p) = d'(p) = 1$ - тоже противоречие $\Rightarrow$ это множество неразрешимо ■

Лемма: Область определения вычислимой функции перечислима

▲ Построим полухарактеристическую функцию. Запустим $f(x)$ и если оно остановится, вернем 1. Это и будет полухарактеристической функцией области определения (1 - если $f(x)$ определена, $\perp$ - если не определена) $\Rightarrow$ область определения перечислима ■

Замечание: Множество из проблемы самоприменимости перечислимо, как область определения вычислимой функции $d(x) = U(x, x)$

Проблема остановки (останова): по входу (p, k) нужно понять, определено ли $U(p, k)$.

Утверждение: эта проблема тоже неразрешима

▲ Пусть это не так и проблема разрешима. Тогда бы разрешима проблема самоприменимости, так как она является частным случаем проблемы остановки (при $k = p$). Получили противоречие $\Rightarrow$ эта проблема неразрешима ■