3.7 (4) Существование главной универсальной вычислимой функции.

Теорема 1: Существует вычислимая функция двух аргументов, являющаяся универсальной функцией для класса вычислимых функций одного аргумента.

▲ Запишем все программы, вычисляющие функции одного аргумента, в вычислимую последовательность $p_0, p_1, \ldots$ (например, в порядке возрастания их длины). Положим $U(i,x)$ равным результату работы i-ой программы на входе x. Тогда функция U и будет искомой вычислимой универсальной функцией. ■

Теорема 2: Существует главная универсальная функция.

▲ Заметим сначала, что существует вычислимая функция трёх аргументов, универсальная для класса вычислимых функций двух аргументов, то есть такая функция T, что при фиксации первого аргумента среди функций $T_n(u,v) = T(n,u,v)$ встречаются все вычислимые функции двух аргументов.

Такую функцию можно построить так. Фиксируем некоторую вычислимую нумерацию пар, то есть вычислимое взаимно однозначное соответствие $(u,v) \leftrightarrow [u,v]$ между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$; число $[u,v]$, соответствующее паре (u,v), мы будем называть номером этой пары.

Если теперь R — двуместная вычислимая универсальная функция для вычислимых одноместных функций (существует по теореме 1), то вычислимая функция T, определённая формулой $T(n,u,v) = R(n,[u,v])$, будет универсальной для вычислимых двуместных функций. В самом деле, пусть F — произвольная вычислимая функция двух аргументов. Рассмотрим вычислимую одноместную функцию f, определённую соотношением $f([u,v]) = F(u,v)$. Поскольку R универсальна, найдётся число n, для которого $R(n,x) = f(x)$ при всех x. Для этого n выполнены равенства $T(n,u,v) = R(n,[u,v]) = f([u,v]) = F(u,v)$. Итак, универсальная функция трёх аргументов построена.

Теперь используем её для определения главной универсальной функции U двух аргументов. Положим $U([n,u],v) = T(n,u,v)$ и проверим, что функция U будет главной. Для любой вычислимой функции V двух аргументов можно найти такое n, что $V(u,v) = T(n,u,v)$ (так как T - универсальна) для всех u и v. Тогда $V(u,v) = U([n,u],v)$ для всех u и v и потому функция s, определённая формулой $s(u) = [n,u]$, удовлетворяет требованиям из определения главной универсальной функции. ■