54. Матрицы Адамара. (Первая) конструкция Пэли с квадратичными вычетами при $n = p + 1, p = 4m + 3$.

Определение: Для простого p определим $p \times p$ *матрицу Якобсталя* Q формулой $Q_{jl} = (\frac{j-l}{p})$ (это символ Лежандра).

I конструкция Пэли: Пусть $p \equiv 3 \pmod 4$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & e^T \\ e & Q - E_p \end{pmatrix}$$

где e — столбец из единиц, а E_p — единичная матрица, является матрицей Адамара порядка $p + 1$.

▲ Рассмотрим скалярное произведение строк a_1 и a_2 матрицы Q

$$\sum_{b=1}^{p} \left(\frac{a_1 - b}{p}\right) \left(\frac{a_2 - b}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p} \left(\frac{x}{p}\right) \left(\frac{c + x}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) \left(\frac{x \cdot x^{-1}(x + c)}{p}\right) =$$

$$= \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right)^2 \left(\frac{1 + x^{-1}c}{p}\right) = \sum_{x \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)} \left(\frac{1 + x^{-1}c}{p}\right) = \sum_{y \not\equiv 1 (\operatorname{mod} p)} \left(\frac{y}{p}\right) = 0 - \left(\frac{1}{p}\right) = -1$$

Рассмотрим скалярное произведение строк искомой матрицы. По сравнению со скалярным произведением строк Q добавится слагаемое 1 и вычтутся $\left(\frac{a_1 - a_2}{p}\right)$ и $\left(\frac{a_2 - a_1}{p}\right)$. Они отличаюся в $\left(\frac{-1}{p}\right)$ раз. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4m+2}{2}} = (-1)^{2m+1} = -1 \Rightarrow$ слагаемые с символом Лежандра сократятся $\Rightarrow$ скалярное произведение любых двух строк искомой матрицы равно $(-1) + 1 = 0 \Rightarrow$ это матрциа Адамара ■