96 Теорема Лиувилля.

Пусть $\alpha-$ алгебраическое число степени d $>=$2. Тогда $\exists c = c(\alpha)$ неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c(\alpha)}{q^d} \forall p, q$

$\blacktriangle$БОО можно считать, что $q > 0$, тогда рассмотрим два случая:
1. $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq 1 \Longrightarrow$ подойдет $c = 1$
2. Считаем, что $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 1$
Заметим, что $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq |\frac{p}{q}| - |\alpha| \Longrightarrow |\frac{p}{q}| \leq |\alpha| + 1$
Рассмотрим многочлен, корнем которого является α: $a_d x^d + ... + a_0 = \phi(x)$. Этот многочлен не имеет рациональных корней, так как d - степень α. Из этого следует, что $\phi(\frac{p}{q}) \neq 0$
$\phi(\frac{p}{q}) = |a_d(\frac{p}{q})^d + a_{d-1}(\frac{p}{q})^{d-1} + ... + a_0| = |\frac{a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} q + ... + a_0 q^d}{q^d}| \geq \frac{1}{q^d}$.

Теперь рассмотрим над полем комплексных чисел
$\phi(\frac{p}{q}) = a_d(x-\alpha)\prod\limits_{i=2}^{d}(x-\alpha_i)$
$|\phi(\frac{p}{q})| = |a_d||\alpha - \frac{p}{q}|\prod\limits_{i=2}^{d}|\alpha_i - \frac{p}{q}| \leq |a_d||\alpha - \frac{p}{q}|\prod\limits_{i=2}^{d}(|\alpha_i| + |\frac{p}{q}|) \leq |a_d||\alpha - \frac{p}{q}|\prod\limits_{i=2}^{d}(|\alpha_i| + |\alpha| + 1) \Longrightarrow |\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^d}\frac{1}{|a_d|\prod\limits_{i=2}^{d}(|\alpha_i| + |\alpha| + 1)} = \frac{1}{q^d} * c(\alpha)$ $\blacksquare$

97-98 Доказательство трансцендентности e. Тождество Эрмита. Следствие из тождества Эрмита с использованием a_k (коэффициентов многочлена f(x) в предположении алгебраичности числа e). Определение многочлена f(t). Неравенство $\sum\limits_{x=0}^{m} a_x e^x \int_0^x f(t)e^{-t}dt < 1$ при n » 0. Определение многочлена f(t), определение F(x), свойства значений F(k), f(k), $f^{(l)}$(k) при k = 1, . . . , m, l = 0, 1, . . . , n 1. Неравенство $|-\sum\limits_{x=0}^{m} a_x F(x)| \geq 1$ при n » 0. Приведение к противоречию алгебраичности числа e.

Теорема
e иррационально
$\blacktriangle$ $e = \sum\limits_{n=0}^{\inf}\frac{1}{n!}$. Предположим, e $= \frac{\cdots}{k}$ (т.е что e рационально), тогда $Z \ni$e*k! $= A + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ...$.
Рассмотрим $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ...$ $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ... < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ... < 1 \Longrightarrow \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ... \in Q \Longrightarrow A + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ... \in Q$. Противоречие $\blacksquare$

Тождество Эрмита
Рассмотрим производные многочлена $f(x)$ степени ν.
Рассмотрим $\int_0^n f(t)e^{-t}dt$. Будем брать его по частям. $\int_0^n f(t)e^{-t}dt = -f(t)e^{-t}|_0^x + \int_0^n f'(t)e^{-t}dt = f(0) - f(x)e^{-x} + \int_0^n f'(t)e^{-t}dt = f(0) + f'(0) - (f(0) + f'(0))e^{-x} + \int_0^n f''(t)e^{-t}dt$. Заметим, что когда мы продифференцируем больше ν раз, интеграл обратится в ноль. Таким образом, получим: $\int_0^n f(t)e^{-t}dt = (f(0) + f'(0) + ... + f^{(\nu)}(0)) - (f(x) + f'(x) + ... + f^{(\nu)}(x))e^{-x} = F(0) - F(x)e^{-x}$, где F(x) $= f(x) + f'(x) + ... + f^{(\nu)}(x)$. То равенство, которое мы получили, называется тождством Эрмита

e - трансцендентно

Предположим, e - алгебраическое число, тогда существует многочлен $a_m x^m + ... + a_0, a_i \in Z$, корнем которого является e.

$e^x \int_0^n f(t)e^{-t}dt = e^x F(0) - F(x), x = 0, 1, 2, ..., m$

$\sum\limits_{x=0}^{m} a_x e^x \int_0^n f(t)e^{-t}dt = -\sum\limits_{x=0}^{m} a_x F(x)$. Воспользуемся тем, что в тождестве Эрмита мы можем использовать абсолютно любой многочлен. Давайте возьмем такой:

$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}((t-1)(t-2)(t-3)...(t-m))^n$

Рассмотрим левую часть равенства.

$|\sum\limits_{x=0}^{m} a_x e^x \int_0^n f(t)e^{-t}dt| \le \sum\limits_{x=0}^{m} |a_x| e^x \int_0^n |f(t)|e^{-t}dt \le \sum\limits_{x=0}^{m} |a_x| e^m \int_0^n |\frac{m^{mn+n-1}}{(n-1)!}|e^{-t}dt = \frac{e^m m^{n(m+1)-1}}{(n-1)!} \sum\limits_{x=0}^{m} |a_x| \int_0^x e^{-t} =$

$\frac{e^m m^{n(m+1)-1}}{(n-1)!} \sum\limits_{x=0}^{m} |a_x|(1 - e^{-x}) < \frac{e^m m^{n(m+1)-1}}{(n-1)!} \sum\limits_{x=0}^{m} |a_x| = c_0 \frac{(m^{m+1})^n}{(n-1)!} < 1, n \ge n_0$

Рассмотрим правую часть равенства

$| - \sum\limits_{x=0}^{m} a_x F(x)|$

$F(x) = f(x) + f'(x) + ... + f^{(\nu)}(x), \nu = n(m+1) - 1$

$F(0) = 0 + 0 + ... + 0$((n-1) раз. Покуда мы не возьмем n-1 производную, многочлен f(t) будет зануляться за счет множителя t^{n-1}) $+ (-1)^{mn}(m!)^n + n * A$(слагаемое после нулей получается за счет того, что мы избавились от $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, а следующее - за счет того, что мы берем производную и по второму множителю $((t-1)(t-2)(t-3)...(t-m))^n$, за счет чего возникает делимость на n)

Теперь рассмотрим F(x)

$\forall x = 1, 2..m$ $f(x) + f'(x) + ... + f^{(\nu)}(x)$ имеет первые n нулей по той же причине (пока мы не возьмем n производных, множитель $((t-1)(t-2)(t-3)...(t-m))^n$ будет обнулять функцию. А после производные будут делиться на n). Таким образом, $| - \sum\limits_{x=0}^{m} a_x F(x)| = |\sum\limits_{x=0}^{m} a_x F(x)| = |(-1)^{mn}(m!)^n * a_0 + nA + nB|$, $\exists n : n > |a_0|, n > n_0, (n, m!) = 1 \Longrightarrow |(-1)^{mn}(m!)^n * a_0 + nA + nB| \neq 0 \Longrightarrow |(-1)^{mn}(m!)^n * a_0 + nA + nB| \ge 1$

Таким образом, $\exists n : \forall N \ge n :$ Правая часть ≥ 1, левая часть $< 1 \Longrightarrow$ равенство не может быть достигнуто. Противоречие $\Longrightarrow e-$ трансцендентно■