3.15 (6) Построение комбинаторов взятия предыдущего и вычитания для нумералов Чёрча в λ-исчислении (с доказательством корректности).

1. $Pair = \lambda xyp.pxy$

   $Left = \lambda p.p\,True$

   $Left\,(Pair\;x\;y) = (\lambda p.p\,True)(\lambda p.pxy) = (\lambda p.pxy)True = True\,xy = x$

   $Right = \lambda p.p\,False$ (доказательство аналогично)

2. $Decfn = \lambda fp.Pair(f(Left\,p))(Left\,p)$ - по (x,x) получаем $(f(x),x)$

   $Dec = \lambda nfx.Right(n(Decfn\;f)(Pair\;xx))$

   Корректность: Рассмотрим 2 случая

   (a) $Dec\,\overline{0} = \lambda fx.Right((\lambda fx.x)(Decfn\;f)(Pair\;xx)) = \lambda fx.Right(Pair\;xx) =$
   $= \lambda fx.x = \overline{0}$

   (b) Идея: $(x,x) \to (f(x),x) \to \ldots \to (f^n(x), f^{n-1}(x))$
   $Dec\,\overline{n+1} = \lambda fx.Right([\lambda fx.\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\text{ раз}}x)\ldots))](Decfn\;f))(Pair\;xx)) =$
   $= \lambda fx.Right(\underbrace{(Decfn\;f)(\ldots((Decfn\;f)}_{n\text{ раз}}(Pair\;xx))\ldots)) =$
   $= \lambda fx.Right(Pair\;\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\text{ раз}}x)\ldots)\;\;\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n-1\text{ раз}}x)\ldots)) =$
   $= \lambda fx.\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n-1\text{ раз}}x)\ldots) = \overline{n-1}$

3. $Sub = \lambda mn.n\;Dec\;m$ $(\max\{m-n, 0\})$.

   ВАЖНО: скобок нет!!! Dec подставится в нумерал Черча n и у нас получится, что Dec применится к m n раз

   $Sub\,\overline{m}\,\overline{n} = (\lambda fx.\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\text{ раз}}x)\ldots)))Dec\,\overline{m} = \underbrace{Dec(Dec(\ldots(Dec}_{n\text{ раз}}\,\overline{m})\ldots)) = \max\{\overline{m-n}, \overline{0}\}$