Date

Билет 86.

Сравнения второй степени. Квадратичные вычеты и невычеты. Квадратичный закон взаимности (тождеством с суммой по $\left[\frac{ax}{p}\right]$ для нечетного a можно пользоваться без доказательства).

Квадратичный закон взаимности

Пусть p, q - простые нечётные. Тогда выполнено

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

▲ Введем обозначения: $p_1 = \frac{p-1}{2}$; $q_1 = \frac{q-1}{2}$.

Воспользуемся тождеством:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{qx}{p}\right]};\quad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{q_1}\left[\frac{px}{q}\right]}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\left(\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{qx}{p}\right]\right)+\left(\sum\limits_{y=1}^{q_1}\left[\frac{py}{q}\right]\right)}$$

Посчитаем кол-во пар (x, y) таких, что $x = 1, \dots, p_1$,
$y = 1, \dots, q_1$.

Их ~~р~~ $p_1 \cdot q_1$. Кроме того, их ровно столько же, сколько и пар (qx, py), $x = 1, \dots, p_1$
$y = 1, \dots, q_1$

(В силу того, что q и p взаимнопросты и p простое, qx даёт различные ~~ос~~ остатки для разных x; аналогично py, поэтому все те же пары рассматриваются, но в другом порядке)

Заметим, что $qx \neq py$, поэтому все такие пары можно разделить на две группы:

① $qx < py \Leftrightarrow x < \frac{py}{q}$, а т.к. x принимает целые значения ≥ 1, то их ровно $\left[\frac{py}{q}\right]$

Значит, пар такого типа ровно

$$\sum_{y=1}^{q_1} \left[\frac{py}{q}\right]$$

② $qx > py$.

Аналогично получим, что пар этого типа

$$\sum_{x=1}^{p_1} \left[\frac{qx}{p}\right]$$

Значит, $\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{p_1 q_1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ $\blacksquare$