25. Определения неориентированного и ориентированного графов, пути, (вершинно) простого пути, рёберно простого пути. Связь вершинной и рёберной простоты. Определение цикла, рёберно простого цикла, (вершинно) простого цикла. Определение достижимости между вершинами, простота пути. Определение связности.

Определение *Ориентированным графом* G называется пара G=(V,E), где V — множество вершин , а $E \subset V \times V$ — множество рёбер.

Определение *Неориентированным графом* G называется пара G=(V,E), где V — множество вершин, а E ⊂{{v,u}:v,u∈V} — множество рёбер. (Под {v,u} понимается неупорядоченная пара)

Определение *Путём* в графе называется последовательность вида $v_0 v_1 ... v_k$, где $e_i \in E$, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$

Определение Путь называется *реберно-простым*, если в нем нет повторяющихся пар ребер

Определение Путь называется *вершинно-простым*(простым), если в нем нет повторяющихся вершин

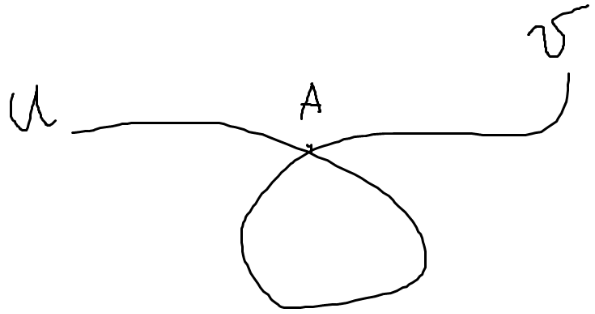
Замечание
Если путь вершинно-простой, то он и реберно-простой
▲ Если путь вершинно-простой, то в нем нет повторяющихся вершин, значит, и повторяющегося ребра возникнуть не может, так как для того, чтобы возникло повторяющееся ребро, необходима пара повторяющихся вершин ■

Определение Цикл называется *вершинно-простым* (простым), если в нем нет повторяющихся вершин (кроме начальной и конечной)

Определение Цикл называется *реберно-простым*, если в нем нет повторяющихся пар ребер

Определение Пусть u, v $\in V(G)$, тогда говорим, что из *u достижима v*, если из u есть путь в v

Замечание Если из u есть путь в v,то из u есть простой путь в v
▲



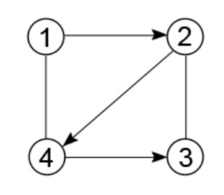
Если пути пересекаются в какой-то точке A, можем игнорировать тот участок пути, который проходит от первого попадания в A на пути до последнего попадания в A, и пойти дальше до v. Таким образом можно избавиться от всех повторяющихся в пути вершин и сделать путь простым ■

Определение Неориентированный граф называется *связным*, если между любыми двумя вершинами графа есть путь

26. Три способа хранения графа в памяти компьютера, их преимущества и недостатки.

1 **Матрица смежности**

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	1	0	1	0



- это матрица nxn, где n = |V|. На пересечении i строки и j столбца матрицы стоит 1 тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро между вершиной i и вершиной j

+ За O(1) узнать, есть ли ребро между вершинами в графе
- Занимает n^2 памяти

2 **Список ребер** - просто хранить список ребер, как пары

+ Более естественный способ задания
- Неудобно работать. Не можем быстро проверить ни наличие ребра, ни узнать степень вершины и т.д.

3 **Список смежности** - храним массив из n элементов $l_1, ..., l_n$, где l_i - список всех соседей вершины i

+ Хранится в памяти за O(n + m), так как всего у нас n списков, в которых суммарно не более 2m элементов
+ Знаем список соседей каждой вершины
- Нельзя за O(1) узнать, есть ли ребро в графе (но можно использовать FixedSet, который занимает столько же памяти и позволяет узнать, есть ли ребро в графе. То есть этот минус можно обойти, использовав такую структурку)

27. Поиск в глубину: алгоритм dfs на ориентированном графе. Лемма о белых путях

```
vector<vector<int>> g; \\ просто наш граф
vector<int> tin, tout; \\ время входа и выхода для каждой вершинки
int timer = 0;
vector<string> color(n, "white"); \\ будем красить вершины по мере посещения в три цвета
vector<int> parent;
```

```
void dfs(int v, int p = -1){
tin[v] = timer++; \\ заходим в в вершину, увеличиваем таймер
parent[v] = p; \\ проставляем родителя посещенной вершины
color[v] = "gray"; \\ красим вершину в цвет 1, помечая, что начинаем ее
                      использовать
for(int to: g[v]){ \\ выбираем, куда можно пойти из текущей вершины
    if(color[to]!= "white") continue; \\ если вершина, которую мы хотим посетить,
                                        уже начинала использоваться, ее цвет
                                        не белый, то есть в нее мы пойти не
                                        можем
    dfs(to,v); \\ если вершина не использована, мы в нее идем
}
tout[v] = timer++; \\ перебрали все вершины, в которые можно попасть из v,
                      записываем время выхода
color[v] = "black"; \\ помечаем, что вершина использована
}
```

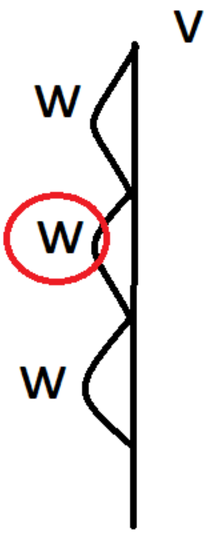
Лемма о белых путях

Все пути, бывшие белыми в момент tin[v] и начинающиеся в v, станут черными в момент tout[v]

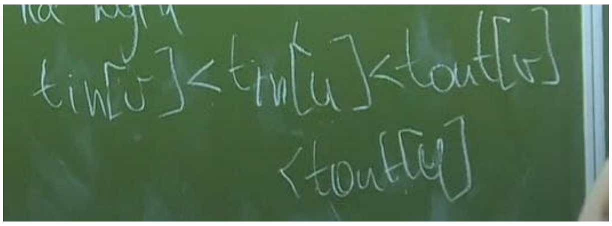
▲ Индукция в порядке убывания tin[v].

1 База. tin[v] = max
Если tin[v] = max, то из вершины v в принципе нет белых путей. В противном случае мы пошли бы в какую-то вершинку впервые, и время входа в нее было бы больше, чем tin[v], что противоречит условию. Значит, к моменту tout[v] все пути из v будут покрашены в черный

2 Переход. Пусть есть какая-то вершина v и белый путь из нее к моменту времени tin[v].



Пусть не все вершины из v к коменту времени tout[v] покрасилось в черный. Рассмотрим вершинку, которая будет самой верхней на пути из v, не покрашенной в черный. Пусть это вершина u. Рассмотрим вершину, которая выше u. Она покрашена в черный, значит, dfs перебрал все вершины, исходящие из нее, и в том числе он сходил в u, значит, u может быть только серой вершиной. Но и такого не может быть, поскольку для того, чтобы выйти из рекурсии на более высоком уровне(в вершине, из которой мы сходили в u) dfs должен выйти из рекурсии на более низком уровне, то есть, u должна покраситься в черный. Противоречие



■

28. Поиск в глубину: множество посещаемых вершин, поиск цикла, достижимого из s, проверка на ацикличность

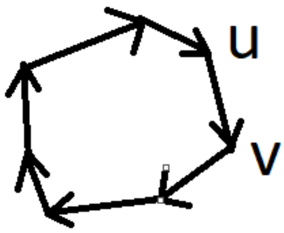
Следствие Из леммы о белых путях следует, что если вызвать dfs(s) из main, то все вершины, достижимые из s, посетятся

▲ Это очевидно, поскольку изначально все пути белые, а значит, все пути, которые только можно пройти, будут покрашены в черный, то есть все достижимые вершины посетятся ■

Следствие В графе есть цикл, достижимый из s $\Longleftrightarrow$ dfs когда-нибудь найдет ребро в color[to] = "gray"

▲

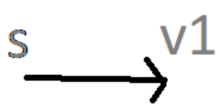
- $\rightarrow$ Пусть C - цикл, достижимый из s. Тогда при запуске dfs(s) мы обязательно посетим этот цикл. Пусть v - первая вершина цикла, которую мы посетим при обходе. Тогда к времени tin[v] весь остальной цикл еще белый, а значит, к моменту tout[v] мы пройдем весь цикл. В частности, посетится вершина u, являющаясь предыдущей для v в этом цикле. Значит,

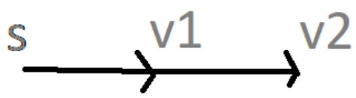
  

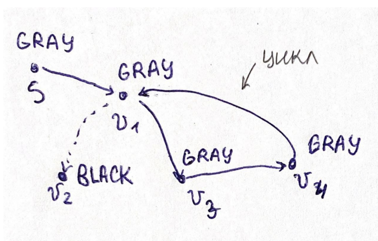
  искомое ребро в серую вершину - (u,v)

- $\leftarrow$ Стек рекурсии - это путь из серых вершин. Заметим, что наш dfs работает так:

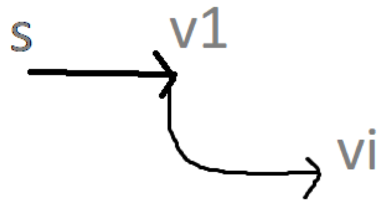
  – Запускаемся из s, красим ее в серый, перебираем ребра из нее. Выбираем какую-то вершинку, красим ее в серый и так далее

  – Если мы походили-походили, не наткнулись на серую вершину и возвращаемся назад, вынимаем вершину из стека рекурсии и ищем новое ребро



Отсюда следует, что если мы в какой-то момент наткнулись на серую вершину, то образуется цикл

■

Замечание
Сам цикл можно восстановить, переходя по родителям до того момента, как мы окажемся в вершинке, откуда начался цикл

Определение Граф называется *ациклическим*(DAG - directed acyclic graph), если в нем нет циклов

Проверка графа на ацикличность совершается следующим образом. Произведём серию поисков в глубину в графе. Т.е. из каждой вершины, в которую мы ещё ни разу не приходили, запустим поиск в глубину, который будет искать цикл. Если цикл найден, возвращаем false. Если все вершины покрашены в черный, а цикл не найден - true