63. Алгоритм Борувки: выбор минимального ребра из нескольких, корректность, реализация, асимптотика.

Algorithm.

Начало:

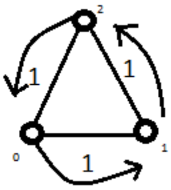
1) Изначально в лесу каждое дерево – одна вершина. Каждая вершина — отдельное дерево.

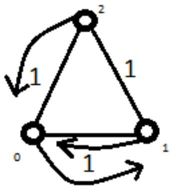
Итерация:

1) Для каждого дерева T_i из леса T выбираем самое легкое ребро, соединяющее T_i с остальным графом. Добавляем найденные ребра в лес, объединяя связанные им деревья.

Замечание:

Важно аккуратно выбирать минимальные рёбра для каждого дерева, чтобы в случае, когда из вершин исходит несколько рёбер наименьшего веса, не возникла ситуация, как на первой картинке (появился цикл). Избежать проблемы возможно, если из наименьших рёбер выбирать ребро с минимальным номером.





Теорема. Алгоритм Борувки корректен.

Доказательство:

- Будет построено дерево. Предположим, что это не так. (Будем проводить каждое неориентированное ребро от дерева, в котором оно выбрано, ко второй вершине.) Тогда на некотором шаге будет построен простой цикл (хотя бы на 3-х вершинах), рёбра в котором были построены в одном направлении цикла (как пример - первая картинка выше). Если в цикле рёбра разной длины, то найдётся дерево, в котором было выбрано не минимальное по длине ребро. Если в цикле рёбра одной длины, то найдётся дерево, для которого было выбрано ребро большего номера, чем то, которое в него пришло. Противоречие. Следовательно, построено дерево.

- Будет построено дерево минимального веса. От противного. По аналогии с теоремой о разрезе рассмотреть первое добавленное ребро, не принадлежащее мин.остову.

Утверждение. Алгоритм Борувки работает за $O(ElogV)$

Доказательство: На каждом шаге алгоритма добавляется количество ребер равное n - количеству деревьев в лесу. Рёбра не образуют циклов, а мест, где произошли совпадения рёбер не более $\frac{n}{2}$. Следовательно, количество деревьев в лесу уменьшается как минимум в два раза. Следовательно, количество итераций не больше $logV$. Один шаг выполняется за $O(E)$. Общее время работы — $O(ElogV)$. ■

64. Определение паросочетания в произвольном графе, двудольного графа, увеличивающего пути.

Определение. Двудольный граф — это граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет каждую вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует рёбер между вершинами одной и той же части графа.

Определение. Паросочетание в (обычном неориентированном) графе - произвольное множество ребер, такое что никакие два ребра не имеют общей вершины.

Определение. Паросочетание M в двудольном графе - произвольное множество рёбер двудольного графа, такое что никакие два ребра не имеют общей вершины.

Определение. Вершина v насыщена (инцидентна, покрыта) ребрами из паросочетания M, если v лежит в одном из рёбер M. Остальные вершины называются ненасщенными (свободными).

Определение. Рёберное покрытие графа — множество рёбер, в котором каждая вершина графа инцидентна по меньшей мере одному ребру покрытия.

Определение. *Максимальное* паросочетание — это паросочетание в графе G, содержащее максимальное количество ребер

Определение. Паросочетание называется совершенным(полным), если оно покрывает все вершины графа

Определение. Чередующаяся цепь (путь) - цепь в двудольном графе, для любых двух соседних рёбер которой верно, что одно из них принадлежит паросочетанию, а другое нет

Определение. Увеличивающая цепь (путь) в G относительно паросочетания M - чередующаяся цепь, у которой оба конца свободны.

65. Лемма об устройстве неориентированного графа, в котором степени всех вершин не превосходят двух.

Теорема. Неориентированный граф, в котором степени всех вершин не превосходят двух, состоит из цепей и циклов.

Очевидно. Доказывается проходом по графу.

66. Теорема Бержа.

Теорема. (Бержа) Паросочетание M в двудольном графе G является максимальным тогда и только тогда, когда в G нет дополняющей цепи.

Доказательство:

$\Rightarrow$

Пусть в двудольном графе G с максимальным паросочетанием M существует дополняющая цепь. Тогда пройдя по ней и заменив вдоль неё все рёбра, входящие в паросочетание, на не входящие и наоборот, мы получим большее паросочетание. То есть M не являлось максимальным. Противоречие.

$\Leftarrow$

От противного. Пусть M – не максимальное. Пусть M' – другое паросочетание, $|M'| > |M|$. Рассмотрим их симметрическую разницу. В таком графе все вершины имеют степень не больше 2 (т.е. все компоненты будут цепями или циклами). Найдется компонента, в которой ребер M' больше. Это будет увеличивающей цепью для M, а не циклом, так как в цикле всегда одинаковое количество рёбер из M и M'. А это противоречие к условию отсутствия для M увеличивающих цепей.

67. Алгоритм Куна. Корректность, реализация, асимптотика.

Алгоритм Куна.

Задан граф $G\langle V, E\rangle$, про который известно, что он двудольный, но разбиение не задано явно. Требуется найти наибольшее паросочетание в нём

Алгоритм можно описать так: сначала возьмём пустое паросочетание, а потом — пока в графе удаётся найти увеличивающую цепь, — будем выполнять чередование паросочетания вдоль этой цепи, и повторять процесс поиска увеличивающей цепи. Как только такую цепь найти не удалось — процесс останавливаем, — текущее паросочетание и есть максимальное.

В массиве `matching` хранятся ребра паросочетания: $(v, \texttt{matching}[v])$ (v - вершина левой доли, $\texttt{matching}[v]$ - вершина правой доли) (Если паросочетания с вершиной v не существует, то $\texttt{matching}[v] = -1$). А *used* — обычный массив "посещённостей"вершин в обходе в глубину (он нужен, чтобы обход в глубину не заходил в одну вершину дважды). Функция dfs возвращает *true*, если ей удалось найти увеличивающую цепь из вершины v, при этом считается, что эта функция уже произвела чередование паросочетания вдоль найденной цепи.

Внутри функции $dfs(v)$, где v - вершина левой доли, просматриваются все рёбра, исходящие из вершины v, и затем проверяется: если это ребро ведёт в ненасыщенную вершину to, то возвращаем true. Если эта вершина to насыщена, но удаётся найти увеличивающую цепь рекурсивным запуском из $\texttt{matching}[to]$ (т.е. $dfs(\texttt{matching}[to]) = true$), то мы говорим, что мы нашли увеличивающую цепь. Производим чередование в текущем ребре: перенаправляем ребро, смежное с to, в вершину v, возвращаем $true$.

В основной программе сначала указывается, что текущее паросочетание — пустое (массив `matching` заполняется числами -1). Затем перебирается все вершины левой доли, и из них запускается обход в глубину dfs, предварительно обнулив массив *used*.

Немного корректности:

Из теоремы в следующем билете следует, что если из вершины x не существует увеличивающей цепи относительно паросочетания M, тогда из x не существует увеличивающей цепи в M' (паросочетание M' получается из M изменением вдоль увеличивающей цепи).

Следовательно, если от вершины v запускался хоть раз dfs, то из v больше никогда нельзя будет провести удлиняющую цепь.

Так как любая удлиняющая цепь имеет концы в разных долях, то после запуска dfs из всех вершин левой доли в графе не останется удлиняющих цепей. Следовательно, мы получим максимальное паросочетание.

Реализация:

```
bool dfs(int м) {
    if (used[v]) return false;
    used[v] = true;
    for (to : g[v]) {
        if (matching[to] == -1 || dfs(matching[to])) {
            matching[to] = v;
```

```
            return true;
        }
    }
    return false;
}

int main() {
    matching.assign(n, -1); \\ где n - количество вершин левой доли.
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        used.assign(n, false);
        dfs(i);
    }
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (matching[i] != -1) {
            cout << i << " " << matching[i] << endl;
        }
    }
}
```

Асимптотика:

Можно явно задано разбиение графа размера n на две доли размером n_1 и n_2. Алгоритм Куна можно представить как серию из n_1 запусков обхода в глубину на всём графе. Следовательно, всего этот алгоритм исполняется за время $O(n_1 m)$ (или $O(nm)$), где m — количество рёбер.

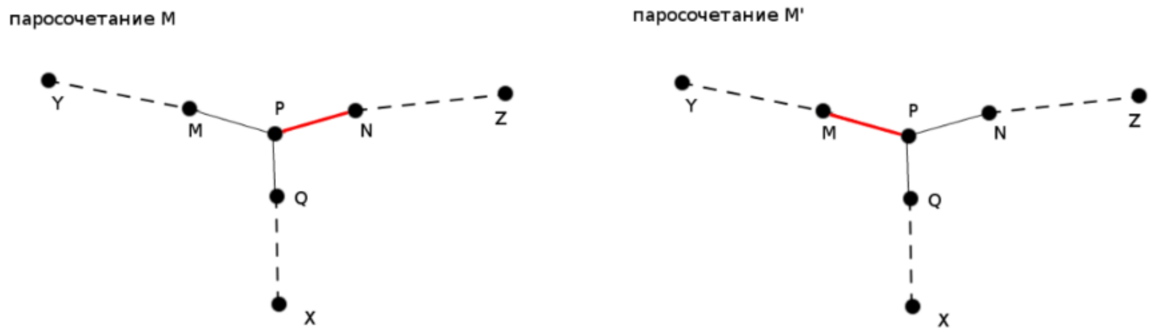
68. Лемма об отсутствии увеличивающих путей из вершины при отсутствии таких путей относительного меньшего паросочетания.

Теорема. Если из вершины x не существует увеличивающей цепи относительно паросочетания M, тогда из x не существует увеличивающей цепи в M' (паросочетание M' получается из M изменением вдоль увеличивающей цепи).

Доказательство:

Доказательство от противного.

Допустим в паросочетание внесли изменения вдоль дополняющей цепи $(y \rightsquigarrow z)$ (цепь из y в z) и из вершины x появилась дополняющая цепь. Заметим, что эта дополняющая цепь должна вершинно пересекаться с той цепью, вдоль которой вносились изменения, иначе такая же дополняющая цепь из x существовала и в исходном паросочетании.



Пусть p – ближайшая к x вершина, которая принадлежит и новой дополняющей цепи и цепи $(y \rightsquigarrow z)$. Тогда MP – последнее ребро на отрезке $(y \rightsquigarrow p)$ цепи $(y \rightsquigarrow z)$, NP – последнее ребро на отрезке $(z \rightsquigarrow p)$ цепи $(y \rightsquigarrow z)$, QP - последнее ребро лежащее на отрезке $(x \rightsquigarrow p)$ новой дополняющей цепи.

Допустим MP принадлежит паросочетанию M', тогда NP ему не принадлежит. (Случай, когда NP принадлежит паросочетанию M' полностью симметричен.)

Поскольку паросочетание M' получается из M изменением вдоль дополняющей цепи $(y \rightsquigarrow z)$, в паросочетание M входило ребро NP, а ребро MP нет. Кроме того, ребро QP не лежит ни в исходном паросочетании M, ни в паросочетании M', в противном случае оказалось бы, что вершина p инцидентна нескольким рёбрам из паросочетания, что противоречит определению паросочетания.

Тогда заметим, что цепь $(x \rightsquigarrow z)$, полученная объединением цепей $(x \rightsquigarrow p)$ и $(p \rightsquigarrow z)$, по определению будет дополняющей в паросочетании M, что приводит к противоречию, поскольку в паросочетании M из вершины x не существует дополняющей цепи. (по условию задачи)

69. Определения независимого множества, вершинного покрытия. Связь определений.

Определение. Подмножество вершин графа G называется независимым множеством, если не существует ребра графа соединяющего какие-либо две из них.

Определение. Подмножество вершин графа G называется вершинным покрытием G, если любое ребро графа содержит вершину из этого множества.

Связь. Подмножество вершин является независимым множеством тогда, и только тогда когда его дополнение является вершинным покрытием.

(лемма следует из определения)

Утверждение. Подмножество вершин является максимальным независимым множеством тогда, и только тогда когда его дополнение является минимальным вершинным покрытием.

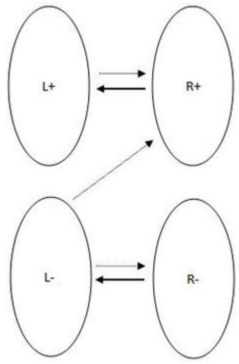
70. Алгоритм поиска максимального независимого множества и минимального вершинного покрытия в двудольном графе с помощью разбиения на доли $L^-; L^+; R^-; R^+$ (с доказательством).

Пусть G - двудольный, в нём M - максимальное паросочетание. Строим D - граф G, в котором рёбра из M ориентированы справа налево, а остальные слева направо. Пусть L, R - множество вершин левой и правой доли соответственно. Запустим обход из всех ненасыщенных вершин левой доли. Пусть L^- - посещённые обходом вершины левой доли, L^+ - не посещённые вершины левой доли. Для правой доли аналогично. Тогда

$$L^- \cup R^+ - \text{минимальное вершинное покрытие}$$

$$L^+ \cup R^- - \text{максимально независимое множество}$$

Корректность:



Понятно, что не могут быть рёбра из L^+ в R^- и из R^+ в L^-. Также нет рёбер из R^- в L^+. Предположим противное и существует такое ребро из u в v. Это ребро ведёт справа налево, следовательно, оно из M, тогда v насыщена и из неё не запускали обход, но v была посещена ($v \in L^+$). Следовательно, существует путь до v из какой-нибудь ненасыщенной вершины левой доли w. Но единственный способ попасть в вершину v из правой доли это ребро (u, v). При этом вершина v была посещена обходом, а u нет ($u \in R^-$). Противоречие. Следовательно, нет рёбер из R^- в L^+

По картинке видно, что $L^+ \cup R^-$ – независимое множество, а $L^- \cup R^+$ – вершинное покрытие.

Осталось доказать, что $L^- \cup R^+$ – минимальное вершинное покрытие. Покажем, что $|L^- \cup R^+| \leq |M|$:

1) В L^- лежат только насыщенные паросочетанием M вершины.

2) В R^+ лежат только насыщенные вершины (иначе есть увеличивающий путь)

3) $\forall (u, v) \in M : u \notin L^-$ или $v \notin R^+$.

Показали.

Покажем, что мощность вершинного покрытия не меньше мощности максимального паросочетания:

Понятно, что каждое ребро M будет покрыто хотя бы одной вершиной из вершинного покрытия.

Показали оценку снизу, показали оценку сверху. Следовательно, $|VC| \geq |M| \geq |L^- \cup R^+| \geq |VC|$, где VC - минимальное вершинное покрытие. Следовательно,

$$L^- \cup R^+ \text{ – минимальное вершинное покрытие}$$

$$L^+ \cup R^- \text{ – максимально независимое множество}$$

71. Алгоритм поиска максимального независимого множества и минимального вершинного покрытия в двудольном графе с помощью задачи 2SAT.

В предыдущем доказательстве мы показали, что мощность минимального вершинного покрытия (МВП) равна мощности максимального паросочетания (МП), т.е. |МВП| = |МП|. Следовательно, каждая вершина из МВП лежит на ребре максимального паросочетания и ровно одна на каждом ребре. Значит нам необходимо решить задачу: какую вершину каждого ребра МП нужно выбрать для МВП. Введём обозначения: переменная $x_1 = 1$, если вершина МВП может лежать на правой стороне первого ребра максимального паросочетания, и $x_1 = 0$, если вершина МВП может лежать на левой стороне ребра. Для остальных рёбер максимального паросочетания вводим аналогичные переменные. Далее для каждого ребра графа выписываем логическую формулу, так чтобы в любой ситуации удовлетворяющей формуле хотя бы одна вершина МВП покрыла данное ребро. Получили систему логических формул, решив которую получим искомое минимальное вершинное покрытие. Систему можно решить с помощью алгоритма 2SAT. Свели.