93. Определение дерева, его свойства (б/д). Определение диаметра дерева. Алгоритм поиска диаметра в дереве.

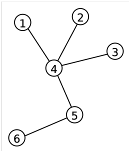

Рис. 1: Пример дерева

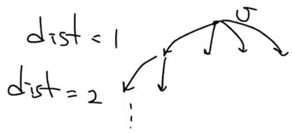

Рис. 2: DFS в дереве

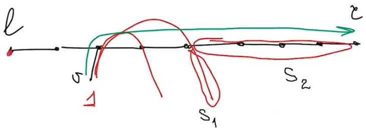

Рис. 3: Корректность поиска диаметра

G - **дерево**, если G - неориентированный связный граф без циклов.
E(G) - рёбра графа/дерева (edges), V(G) - вершины дерева.
Свойства деревьев:

1. $|E(G)| = |V(G)| - 1$; количество рёбер на один меньше количества вершин дерева.
2. $\forall u, v \exists!$ простой путь из u в v.

Пусть G - неориентированный невзвешенный граф. $dist(s,t)$ - кратчайшее расстояние между вершинами s и t. **Диаметр G** - такой путь между вершинами u и v, что $dist(u,v) = max_{s,t}(s,t)$. Обозначение: diam(G).

Тезис: многие задачи на графах являются очень трудными/np-трудными, а на деревьях решаются быстро. Пример 1: Поиск максимальной клики. Пример 2: Нахождение диаметра. Произвольный граф: Флойд - за $O(n^3)$. В дереве ищется за $O(n)$.

Алгоритм поиска диаметра в дереве:

Поиск самой далёкой вершины: "подвесим"дерево за v, дальше запускаем dfs. В силу вида дерева (см. рис. 2) мы не можем подняться на другой слой/попасть в вершину, которую мы уже посещали. Победа! - x - вершина с самого низкого уровня.

1) Пусть v - произвольная вершина. Найдём l - самую далёкую вершину от v.

2) Теперь r - самая далёкая вершина от l. Тогда (l, r) - это диаметр.

Асимптотика: $O(n)$

Корректность:

Посмотрим на рисунок три. Мы выбрали максимальный путь. По сути мы к каждой вершине подвесили своё дерево. Однако максимальные глубины подвешенных поддеревьев меняются в следующей последовательности: $0, 1, 2, \ldots, 2, 1, 0$ (так как иначе можно найти более длинный путь). Получается, для нашей произвольной v $s_1 \leqslant s_2$. Тогда самый длинный путь из v имеет ту же длину, что путь от v до r (или до l, надо выбрать максимум). Но тогда найденная вершина находится от l на таком же расстоянии, как и r. Таким образом, мы нашли какой-то диаметр (не обязательно именно тот, который мы выбрали в начале, когда подвешивали деревья к вершинам).

Альтернативный алгоритм: подвесим дерево за произвольную v, среди всех деревьев-детей v выбираем самые глубокие, вершины на низших слоях этих поддеревьев будут искомыми концами диаметра.

94. Определение центроида в дереве. Алгоритм поиска центроида в дереве. Лемма о количестве центроидов (б/д).

Пусть G - дерево, $v \in V(G)$. Тогда v - **центроид**, если после удаления v дерево распадается на несколько компонент, размером не более $\frac{n}{2}$

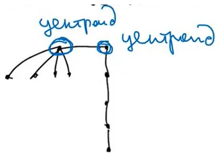

Рис. 4: Пример центроидов

Рис. 5: Алгоритм поиска центроида: шаг 1

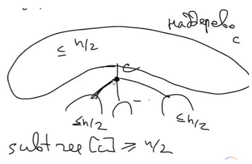

Рис. 6: Наддерево: шаг 2

Утверждение 1. В любом дереве есть центроид.

Утверждение 2 (б/д). В любом дереве либо один центроид, либо центроидов два и они соедины ребром (см. рис. 4)

Алгоритм поиска центроида за $O(n)$.

1. Пусть r - произвольный корень; subtree[v] = размер поддерева вершины v, включая v - это обычная динамика, dfs; subtree[r] = n.

1.5. Цель: найти такую вершину s, размеры всех поддеревьев детей которой не больше n/2, но subtree[s] $\geqslant \frac{n}{2}$. (Наддерево также станет одним из деревьев, образованных после удаления вершины; поддерево + наддерево = всё дерево)

P.S. Дабы избавиться от бед с округлениями, лучше сравнивать не так, как записано выше, а 2subtree[s] $\geqslant n$.

2. Спускаемся от корня вниз к ребёнку с размером поддерева subtree$\cdot 2 \geqslant n$, пока можем. Как только такого ребёнка нет - вершина, где мы закончились, - центроид.