70. Умение: решать уравнения Пелля.

Определение. Уравнение вида $x^2 - my^2 = 1$, где m – натуральное число, не являющееся точным квадратом, называется *уравнением Пелля.*
Решение $(1, 0)$ называется *тривиальным.*
Решение (x, y) называется *положительным*, если $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Замечание. *Уравнение вида $x^2 - my^2 = 1$ не является уравнением Пелля по этому определению. Однако теория по решению данного уравнения есть во второй теореме и во втором примере.*

Замечание 1. *Ввиду симметрии для решения уравнения достаточно найти все положительные решения.*

Замечание 2. *Если m является полным квадратом, то, очевидно, у уравнения нет решений, кроме тривиальных.*

Замечание. *Пара (x, y) в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ имеет вид $x + y\sqrt{m}$. Норма числа $a = x + y\sqrt{m}$ в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ это $N(a) = a \cdot \overline{a} = (x + y\sqrt{m})(x - y\sqrt{m}) = x^2 - my^2$. Норма обладает свойством: $N(a) \cdot N(b) = N(a \cdot b)$*

Утверждение. *Пара (x, y) является решением уравнения Пелля ($x^2 - my^2 = 1$) тогда и только тогда, когда норма числа $x + y\sqrt{m}$ в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ равна единице.*

▲.

$$N(x + y\sqrt{m}) = (x + y\sqrt{m})(x - y\sqrt{m}) = x^2 - my^2$$

■

Утверждение. *Пара (x, y) является решением уравнения $x^2 - my^2 = -1$ тогда и только тогда, когда норма числа $x + y\sqrt{m}$ в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ равна минус единице.*

Определение (Напоминание). $\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k], (k = 0, 1, ..., n)$ называется *k-ой подходящей дробью* к числу $[a_0; a1, a2, ..., a_n]$.

Теорема. *Если n – длина периода цепной дроби, соответствующей $\sqrt{m}$, то решениями уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$ являются в точности подходящие дроби числа $\sqrt{m}$ вида $\frac{P_{kn-1}}{Q_{kn-1}}$, где kn – чётно.*

Замечание. *Способы нахождения корней уравнения $x^2 - my^2 = -1$. (У автора конспекта нет уверенности, что данные способы находят все корни уравнения, однако других способов он не знает)*
Способ 1) Если n – длина периода цепной дроби, соответствующей $\sqrt{m}$, то решениями уравнения $x^2 - my^2 = -1$ являются подходящие дроби числа $\sqrt{m}$ вида $\frac{P_{kn-1}}{Q_{kn-1}}$, где kn – нечётно.
Способ 2) Находим a - минимальное положительное решение $x^2 - my^2 = 1$, находим b - тривиальное (самое простое) решение $x^2 - my^2 = -1$, тогда $\pm(a^p \cdot b^{2k+1})$ будут решениями $x^2 - my^2 = -1$ для $\forall p, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 1.
Найдите наименьшее положительное решение уравнения Пелля $x^2 - 6y^2 = 1$.
1) Найдём цепную дробь для $\sqrt{6}$:

$$\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$$

2) Длина периода цепной дроби $n = 2$, значит минимальное k, такое, что kn будет чётным, равно 1. Значит, минимальное решение – подходящие дроби вида $\frac{P_{kn-1}}{Q_{kn-1}} = \frac{P_1}{Q_1}$.

3) $\frac{P_1}{Q_1} = [2; 2] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
Получается, пара $(x, y) = (5, 2)$ является минимальным положительным решением уравнения Пелля.

Пример 2.
Найдите наименьшее положительное решение уравнения $x^2 - 2y^2 = -1$.
1) Найдём цепную дробь для $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$$

2) Длина периода цепной дроби $n = 1$, значит минимальное k, такое, что kn будет нечётным, равно 1. Значит, минимальное решение – подходящие дроби вида $\frac{P_{kn-1}}{Q_{kn-1}} = \frac{P_0}{Q_0}$.
3) $\frac{P_0}{Q_0} = [1] = \frac{1}{1}$.
Получается, пара $(x, y) = (1, 1)$ является решением уравнения (в данном случае оно является тривиальным).
4) Следующее решение $\frac{P_3}{Q_3} = [1; 2, 2] = \frac{7}{5}$.
Получается, пара $(x, y) = (7, 5)$ является решением уравнения.

Теорема. *Пусть $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{m}$ – наименьшее нетривиальное положительное решение уравнения $x^2 - my^2 = 1$, то все решения этого уравнения имеют вид $\pm(\alpha)^k, k \in \mathbb{Z}$.*

Следствие. В условиях предыдущей теоремы решениями уравнения Пелля будут пары:

$$\pm\left(\frac{(a_1 + b_1\sqrt{m})^k + (a_1 - b_1\sqrt{m})^k}{2}, \frac{(a_1 + b_1\sqrt{m})^k - (a_1 - b_1\sqrt{m})^k}{2\sqrt{m}}\right), k \in \mathbb{Z}$$

Пример 3.
Найдите все решения уравнения Пелля $x^2 - 6y^2 = 1$.
Из примера 1 мы знаем, что пара $(x, y) = (5, 2)$ является минимальным положительным решением уравнения Пелля.
Тогда общее решение имеет вид:

$$\pm\left(\frac{(5 + 2\sqrt{m})^k + (5 - 2\sqrt{m})^k}{2}, \frac{(5 + 2\sqrt{m})^k - (5 - 2\sqrt{m})^k}{2\sqrt{m}}\right), k \in \mathbb{Z}$$

Пример 4.
Решите уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$ в целых числах

$$x^2 - 6xy + y^2 = (x - 3y)^2 - 8y^2 = 1$$

Делаем замену $z = x - 3y$, и уравнение сводится к уравнению Пелля $z^2 - 8y^2 = 1$