69. Алгебраические и трансцендентные числа. Существование трансцендентных чисел (из соображения мощности). Теорема Лиувилля (б/д). Конструкция трансцендентного числа с помощью цепной дроби и теоремы Лиувилля. Сводка результатов о трансцендентности: $e, \pi, e+\pi, \pi+e^\pi, \alpha^\beta$ (теорема Гельфонда), вывод про e^π из теоремы Гельфонда.

Определение. α - *алгебраическое число*, если существует многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого служит α.

Определение. *Степень алгебраического числа* - это минимальная степень уравнения, корнем которого является это число.

$\mathbb{A}$ - множество алгебраических чисел.

Заметим, что $\mathbb{A}$ - счётное множество (доказывалось на матлогике), но $\mathbb{C}$ континуально. Отсюда следует, что есть не алгебраические числа.

Определение. $\alpha \in \mathbb{C}$ - *трансцендентное*, если оно не является алгебраическим.

Теорема.(Лиувилль) Пусть α - алгебраическое степени d. Тогда $\exists c = c(\alpha)$, что неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| \le \frac{c}{q^d}$ имеет лишь конечное число решений в $\frac{p}{q}$. (Если уменьшить c, то вообще не будет решений)

Конструкция трансцендентного числа с помощью цепной дроби и теоремы Лиувилля:

Теорема.$\forall \psi(q) \to +\infty\ \exists \alpha$: неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q\psi(q)}$ имеет б.м. решений в $\frac{p}{q}$.

Как пример можно взять $\psi(q) = e^q$. Из предыдущей теоремы возьмём число α. Предположим α - алгебраическое число, тогда $\exists d \in \mathbb{N} : |\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^d}$ выполняется для $\forall p, q$. Что противоречит предыдущей теореме (неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q\psi(q)}$ имеет б.м. решений в $\frac{p}{q}$).

То есть мы совершенно явно, с помощью аппарата цепных дробей, построили трансцендентное число α.

Сведения о некоторых числах: $e, \pi, \pi + e^\pi$ являются трансцендентными. Про $e + \pi$ на данный момент ничего неизвестно.

Теорема.(Гельфонд) Пусть α, β алгебраические, при этом β иррациональное, а $\alpha \notin \{0, 1\}$. Тогда α^β трансцендентно.

Утверждение. e^π трансцендентно.

▲ Предположим противное: e^π - алгебраическое. Заметим, что i - алгебраическое. Пусть $\alpha = e^\pi, \beta = i = \sqrt{-1} \Rightarrow \alpha^\beta = e^{i\pi}$, но $\alpha^\beta = e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \alpha^\beta$ - алгебраическое. Противоречие с теоремой Гельфонда. ■