82. Асимптотическая оценка $[1, 2, \ldots, n]$ снизу. Более грубая оценка, верная для $n > 7$. (б/д)

Лемма: $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$

▲ 1. База $m = 1$: $1 \geq \frac{1}{e}$

2. Пусть для m верно. Покажем для $m+1$. Заметим, что $\left(\frac{m}{m+1}\right)^m$ убывает (так как $\frac{m}{m+1} < 1$) и стремится к e^{-1}

$$(m+1)! = (m+1)\left(\frac{m}{e}\right)^m = (m+1)\left(\frac{m}{m+1}\right)^m\left(\frac{m+1}{e}\right)^m > \frac{m+1}{e}\left(\frac{m+1}{e}\right)^m = \left(\frac{m+1}{e}\right)^{m+1} \blacksquare$$

Утверждение: НОК$(1, \ldots, n) := [1, \ldots, n] \geq e^n$

▲

$$[1, \ldots, n] \geq \prod_{p \text{ - простое}, p \leq n} p$$

Количество простых чисел $\leq n : \pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}, p_k \geq k$. Тогда

$$[1, \ldots, n] \geq \left[\frac{n}{\ln n}(1 + o(1))\right]!$$

Так как по лемме $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$, получаем

$$[1, \ldots, n] \geq \left(\frac{n}{e \ln n}(1 + o(1))\right)^{\frac{n}{\ln n}(1+o(1))} = e^{\ln\left(\frac{n}{e \ln n}(1+o(1))\right)\frac{n}{\ln n}(1+o(1))}$$

Распишем большой логарифм из степени

$$\ln\left(\frac{n}{e \ln n}(1 + o(1))\right) = \ln n - 1 - \ln\ln n + \ln(1 + o(1)) = \ln n\left(1 - \frac{1}{\ln n} - \frac{\ln\ln n}{\ln n} + \frac{\ln(1 + o(1))}{\ln n}\right)$$

Функция в последней скобки стремится к 1 при $n \to \infty \Rightarrow$ этот логарифм равен $\ln n(1 + o(1))$

Подставив все назад в степень получаем

$$[1, \ldots, n] \geq e^{n(1+o(1))^2} = e^{n(1+o(1))} \blacksquare$$

Утверждение (б/д): $[1, \ldots, n] \geq 2^n, n > 7$