76 (34 на хор). Равномерно распределенные последовательности (mod 1): три эквивалентные формулировки.

Теорема. Следующие условия (условие равномерной распределённости mod 1) для последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ эквивалентны:

$$1)\ \forall a, b \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \ldots, N : \{x_i\} \in [a, b)\}|}{N} = b - a$$

$$2)\ \forall \gamma \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \ldots, N : \{x_i\} < \gamma\}|}{N} = \gamma$$

$$3)\ \text{Отклонение } D_N = \sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1} |\frac{|\{n | n \leqslant N, \alpha \leqslant \{x_n\} < \beta\}|}{N} - (\beta - \alpha)|,\ \lim_{N\to\infty} D_N = 0$$

▲

1) $\Rightarrow$ 2): a $=$ 0.

2) $\Rightarrow$ 3): $D_N = \sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1} |\frac{|\{n|n\leqslant N, \alpha\leqslant\{x_n\}<\beta\}|}{N} - (\beta - \alpha)| \leqslant \sup_\beta |\frac{|\{i=1,\ldots,N:\{x_i\}<\beta\}|}{N} - \beta| + \sup_\alpha |\frac{|\{i=1,\ldots,N:\{x_i\}<\alpha\}|}{N} - \alpha|$ (по неравенству треугольника). Из п. 2) оба слагаемых стремятся к нулю $\Rightarrow \lim_{N\to\infty} D_N = 0$

3) $\Rightarrow$ 1) Условие (3) подразумевает, что если sup по a и b так стремится, то это выполняется для любых a, b, что равносильно, что для любых a, b предел равен b - a.

■