Билет 65.

Бесконечные цепные дроби. Утверждение о том, что значение бесконечной цепной дроби является иррациональным числом.

Опр. Пусть $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ (для $i>0$). Тогда бесконечная цепная дробь выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

, чья каноническая запись имеет вид $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$

Опр. Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ называются элементами цепной дроби (неполными частными)

Опр. $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ – к-я подходящая дробь

Опр.
Величиной бесконечной цепной дроби называют предел её подходящих дробей $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k}$

Т-ма. Значение бесконечной дроби – иррациональное число.

▲ Т.к. дробь бесконечна, то кол-во различных подходящих дробей также бесконечно. ~~У рациональной же дроби их кол-во конечно, поэтому соответствующая ей цепная дробь конечна.~~

Заметим, что среди этих дробей бесконечное кол-во дробей, удовлетворяющих неравенству Дирихле. ~~теорем~~

Чтобы это доказать, докажем лемму:

Лемма Если $\frac{p_n}{q_n}$ $(n>1)$ – подходящая дробь к числу α, то имеет место по крайней мере одно из неравенств

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2}, \quad \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{2q_{n-1}^2}$$

Date

Δ От противного. Пусть это не так

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \geq \dfrac{1}{2q_n^2} \\ \left|\alpha - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \geq \dfrac{1}{2q_{n-1}^2} \end{cases}$$

Сложим неравенства:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n-1}^2}\right)$$

Т.к. $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ — соседние подходящие дроби, то они лежат по разные стороны от α, т.е.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{q_n q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

$$\frac{2q_n q_{n-1}}{q_n^2 q_{n-1}^2} \geq \frac{q_n^2 + q_{n-1}^2}{q_n^2 q_{n-1}^2} \Rightarrow 2q_n q_{n-1} \geq q_n^2 + q_{n-1}^2$$

Но $q_n^2 + q_{n-1}^2 \geq 2q_n q_{n-1}$, поэтому $q_n^2 + q_{n-1}^2 = 2q_n q_{n-1}$

$\Rightarrow q_n = q_{n-1}$, противоречие $\square$

Значит, среди подходящих дробей бесконечно много тех, что удовлетворяют нерав-ву из т-мы Дирихле. Для рациональных чисел такое кол-во конечно $\blacksquare$