72. Определения сети, потока, величины потока, остаточной сети. Пример, почему нельзя обойтись без обратных рёбер.

Определение: *Сеть* - это (G, s, t, c), где $G = (V, E)$ - ориентированный граф (без петель и кратных ребер), s, t - различные вершины из V (s - исток (source), t - сток (target)), $c : E \to \mathbb{Z}_+$ - пропускные способности (capacity) на каждом ребре.

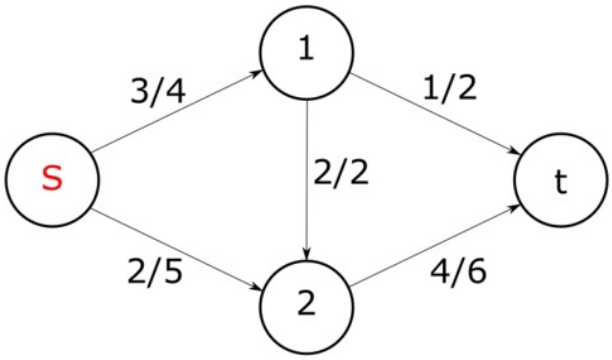
Определение: $f : V \times V \to \mathbb{Z}$ называется *потоком* в сети G, если выполняются следующие условия

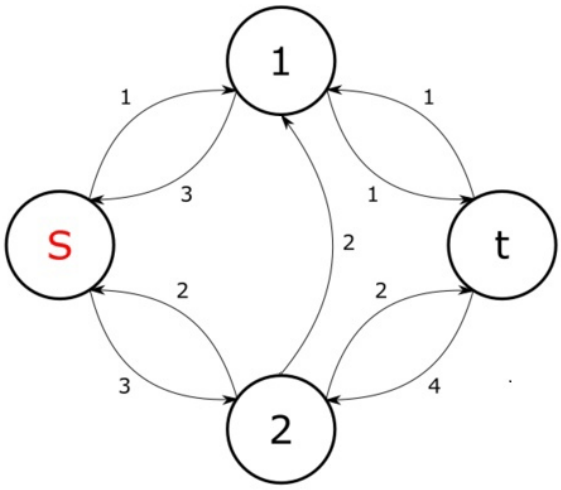
1. $\forall u \forall v \; f(u, v) \leq c(u, v)$ (если $(u, v) \notin E$, то $c(u, v) = 0$)
2. Сохранение потока (сколько втекло в вершину столько и вытечет): $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \hookrightarrow \sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v, w)$
3. Антисимметричность: $f(u, v) = -f(v, u)$

Определение: *Величиной потока* называется число $|f| = \sum_{v\in V} f(s, v)$

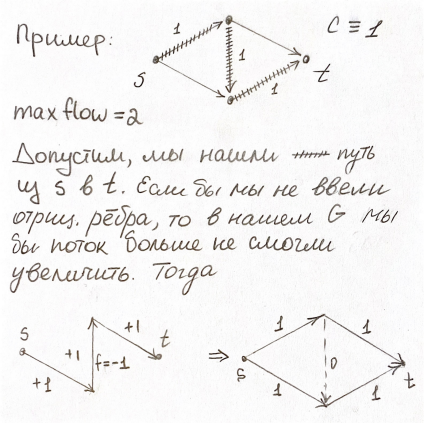
Определение: Пусть G - сеть, f - поток в ней. Тогда *остаточной сетью* G_f называется сеть с $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$

Пример: Слева граф, справа - его остаточная сеть.





Пример: Зачем нужны отрицательные ребра? Ответ: чтобы отменять действия, которые нам не нравятся



73. Определения разреза, величины разреза, величины потока через разрез. Лемма о равенстве величины потока и величины потока через разрез.

Определение: G - сеть. (S,T) - *разрез*, если $s \in S$, $t \in T$, $S \sqcup T = V$.

$$c(S,T) = \sum_{u \in s, v \in T} c(u,v) \text{ - величина разреза}$$

$$f(S,T) = \sum_{u \in s, v \in T} f(u,v) \text{ - величина потока через разрез}$$

Лемма: $\forall (S,T)$ - разрез выполнено $f(S,T) = |f|$
▲ Доказательство индукцией по величине S

1. $S = \{s\} \Rightarrow (\{s\}, V \setminus \{s\})$ - разрез

$$f(\{s\}, V \setminus \{s\}) = \sum_{v \in V \setminus \{s\}} f(s,v) = |f| \text{ (так как } f(s,s) = 0)$$

2. $S = \{s, v_1, \ldots, v_{i+1}\}$. Пусть $U = \{s, v_1, \ldots, v_i\}$ и $f(U, V \setminus U) = |f|$. Тогда при добавлении v_{i+1} часть ребер перестанут вносить вклад в величину разреза (из $u \in U$ в v_{i+1}), а часть - начнут (из v_{i+1} в $w \in V \setminus U \Leftrightarrow w \notin U$). Тогда

$$f(S, V \setminus S) = f(U, V \setminus U) - \sum_{u \in U} f(u, v_{i+1}) + \sum_{w \notin U} f(v_{i+1}, w) = |f| - \sum_{u \in U} f(u, v_{i+1}) + \sum_{w \notin U} f(v_{i+1}, w)$$

Покажем, что $\sum_{u \in U} f(u, v_{i+1}) = \sum_{w \notin U} f(v_{i+1}, w)$, тогда все будет доказано. Для этого распишем $\sum_{x \in V} f(v_{i+1}, x)$ двумя способами

$$\sum_{x \in V} f(v_{i+1}, x) = \sum_{x \in U} f(v_{i+1}, x) + \sum_{x \notin U} f(v_{i+1}, x) = \underbrace{-\sum_{x \in U} f(x, v_{i+1})}_{\text{антисимметричность}} + \sum_{x \notin U} f(v_{i+1}, x)$$

$$\underbrace{\sum_{x \in V} f(v_{i+1}, x) = \sum_{y \in V} f(y, v_{i+1})}_{\text{из сохранения потока}} = \sum_{y \in U} f(y, v_{i+1}) + \sum_{y \notin U} f(y, v_{i+1}) = \sum_{y \in U} f(y, v_{i+1}) \underbrace{- \sum_{y \notin U} f(v_{i+1}, y)}_{\text{антисимметричность}}$$

Тогда верно, что

$$-\sum_{x \in U} f(x, v_{i+1}) + \sum_{x \notin U} f(v_{i+1}, x) = \sum_{y \in U} f(y, v_{i+1}) - \sum_{y \notin U} f(v_{i+1}, y) \Rightarrow \sum_{x \in U} f(v_{i+1}, x) = \sum_{x \notin U} f(v_{i+1}, x) \blacksquare$$

74. Лемма о связи величины произвольного потока и величины произвольного разреза.

Лемма: Величина произвольного потока не превосходит величины произвольного разреза

▲

$$\underbrace{f(S',T') = |f| = f(S,T)}_{\text{см. билет 73}} = \sum_{u \in S, v \in T} f(u,v) \leq \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v) = c(S,T) \blacksquare$$

75. Теорема Форда—Фалкерсона.

Теорема: Следующие утверждения эквивалентны

1. f - максимальный поток
2. В G_f нет пути из s в t (то есть относительно f нет увеличивающего пути)
3. $\exists (S, T)$ - разрез, такой что $|f| = c(S, T)$

▲ 1 $\Rightarrow$ 2: От противного: пусть в G_f есть путь из s в t. Рассмотрим минимальную capacity на этом пути: такую величину потока можно по нему протолкнуть $\Rightarrow$ мы увеличили поток - противоречие с максимакльностью

2 $\Rightarrow$ 3: Пусть S - множество достижимых из s вершин в G_f, $t \notin S$ (так как иначе был бы путь из s в t). $T = V \setminus S$

Рассмотрим произвольное ребро e между S и T. Так как оно не лежит полностью ни там, ни там, то его нет в остаточной сети $\Rightarrow$ поток пропущенный по нему равен его capacity. Просуммируем все такие ребра и получим, что

$$c(S,T) = \sum_{(u,v)\in S\times T} c(u,v) = \underbrace{\sum_{(u,v)\in S\times T} f(u,v) = |f|}_{\text{лемма из билета 73}}$$

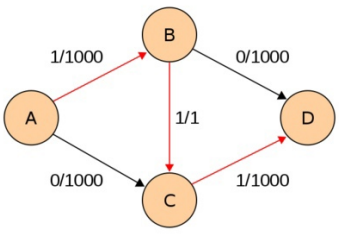
3 $\Rightarrow$ 1: По лемме из билета 74 любой поток меньше или равен любого разреза. Так как мы достигли равенства, увеличить его мы уже не сможем $\Rightarrow$ это максимальный поток ■

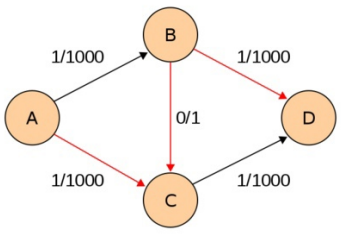
76. Алгоритм Форда—Фалкерсона. Корректность, асимптотика. Пример сверх-полиномиального (от размера входа) времени работы.

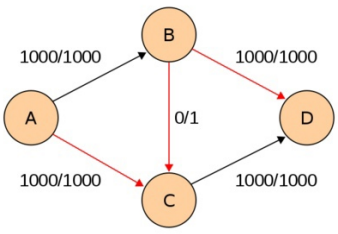
Алгоритм Форда-Фалкерсона: пока в G_f есть путь из s в t находим минимальную capacity на этом пути и проталкиваем такой поток по этому пути. После этого перестраиваем G_f

Корректность: очевидно следует из теоремы Форда-Фалкерсона (см. билет 75)

Пример: Посмотрим на рисунки приведенные ниже. Алгоритм может найти путь ABCD и пустить по нему единичку потока. После этого в остаточной сети появится ребро CB величины 1. Теперь алгоритм может найти путь ACBD и пустить по нему едиинчку потока. В итоге нам придется сделать примерно 2000 таких итераций







Асимптотика: $O(ans \cdot (n+m))$ - размер ответа (может быть что на каждой итерации проталкиваем по единице потока) умноженный на асимптотику поиска пути (DFS)

77. Алгоритм Эдмондса—Карпа. Корректность.

Алгоритм Эдмондса-Карпа: На каждой итерации алгоритма Форда-Фалкерсона находим путь, кратчайший по количеству ребер в нем.

Корректность: очевидно следует из теоремы Форда-Фалкерсона (см. билет 75)

78. Лемма о возрастании $dist(s, v)$ между последовательными итерациями алгоритма Эдмондса-Карпа.

Лемма: Пусть f и f' два последовательных потока в алгоритме. Пусть $d(v) = dist(s, v)$ в G_f, $d'(v) = dist(s, v)$ в $G_{f'}$. Тогда $\forall v \in V \hookrightarrow d'(v) \geq d(v)$

▲ Если $v = s$, то $d'(v) = 0 = d(v)$ и все доказано.

Пусть $v \neq s$. Среди всех v таких что выполнено $d'(v) < d(v)$ найдём v такую что $d'(v)$ минимально.

Пусть u - предпоследняя вершина на кратчайшем пути из s в v в $G_{f'}$. Тогда $d'(u) + 1 = d'(v)$ (1) $\Rightarrow d'(u) < d'(v) \Rightarrow$ так как $d'(v)$ - минимальное такое что $d'(v) < d(v)$, а $d'(u) < d'(v)$, то $d'(u) \geq d(u)$ (2).

Как ребро (u, v) оказалось в $G_{f'}$? Рассмотрим 2 случая

1. (u, v) было в G_f. Тогда $d(v) \leq d(u) + 1$ (кратчайший путь до v не больше чем путь до v через u) $\overset{(2)}{\leq} d'(u) + 1 \overset{(1)}{=} d'(v)$ - противоречие с выбором v.

2. (u, v) появилось только в $G_{f'}$. Значит оно появилось как обратное к ребру (v, u), по которому был пропущен поток, то есть оно лежало на кратчайшем пути из s в t в G_f $\Rightarrow d(v)+1 = d(u) \overset{(2)}{\leq} d'(u) \overset{(1)}{=} d'(v)-1 \Rightarrow d(v)+2 \leq d'(v) \Rightarrow d'(v) > d(v)$ - противоречие с выбором v

Так как в обоих случаях получили противоречие, то таких v не существует, а значит $\forall v \in V \hookrightarrow d'(v) \geq d(v)$ ■

79. Лемма о числе насыщений ребра в алгоритме Эдмондса-Карпа. Асимптотика этого алгоритма.

Лемма: Говорим, что ребро насыщается, если $f(u, v)$ становится равным $c(u, v)$. Тогда каждое ребро насыщается $O(V)$ раз.

▲ Пусть ребро (u, v) насытилось (назовем этот момент 1). Чтобы оно насытилось еще раз, его надо «разнасытить», то есть кратчайший путь из s в t должен проходить через (v, u) (обозначим этот момент как 2)

Пусть d - кратчайшее расстояние в момент 1, а d' - в момент 2. Тогда $d(v) = d(u) + 1$ (так как в момент 1 (u, v) лежало на кратчайшем пути из s в t), $d'(v) \geq d(v)$ (по прошлой лемме), $d'(u) = d'(v) + 1$ (так как ребро (v, u) в момент 2 лежало на кратчайшем пути из s в t). Получаем $d'(u) = d'(v) + 1 \geq d(v) + 1 = d(u) + 2 \Rightarrow$ чтобы (u, v) разнасытилось, $d(u)$ должно вырасти хотя бы на 2, $d(u) \leq V - 1 \Rightarrow$ это происходит $\leq \frac{V}{2}$ раз ■

Асимптотика: $O(VE^2)$ - всего $O(VE)$ итераций (ребер E, каждое насыщается $O(V)$ раз) на каждой итерации ищем кратчайший путь через BFS ($O(E)$)

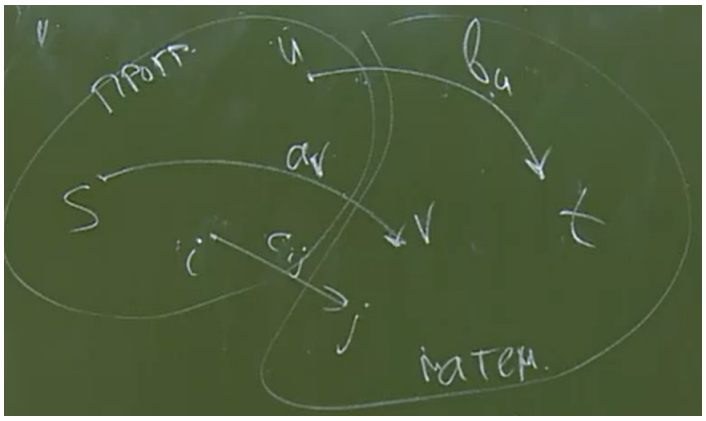
80. Задача о разбиении коллектива на две группы с минимизацией суммарного недовольства.

Формулировка задачи: Есть n людей, нужно разбить их на 2 группы: занимающихся математикой и программированием. Каждый из них имеет некоторое недовольство к математике (a_i) и к программированию (b_i). Также между некоторыми из них есть дружеские связи, при разрыве которых суммарное недовольство увеличивается (на c_{ij}). Необходимо найти такое разбиение, чтобы суммарное недовольство было минимальным.

Решение: Создадим по одной вершине для каждого человека и две вершины s и t. Для кадого i

1. Проведем ребро (s, i) с capacity a_i
2. Проведем ребро (i, t) с capacity b_i
3. Для каждого друга j проведем два ребра (i, j) и (j, i) с capacity c_{ij}

Искомому разбиению с минимальным недовольством будет соответствовать минимальный разрез в построенном графе (S - программисты, T - математики)



Из картинки видно почему это правда: для каждой вершины будет учтено недовольство своей текущей профессией, а также разорванные дружбы (будут учтены только один раз по определению величины разреза).

81. Алгоритм Эдмондса-Карпа с масштабированием, асимптотика.

Пусть C - верхнее ограничение на все capacity. Перебираем $k = \lceil \log_2 C \rceil \dots 0$, на k-ом шаге алгоритма рассматриваем сеть с $c'(e) = \lfloor \frac{c_f(e)}{2^k} \rfloor \cdot 2^k$, например

$c_f(e) < 2^k \Rightarrow c'(e) = 0$

$2^k \le c_f(e) < 2^{k+1} \Rightarrow c'(e) = 2^k$

Алгоритм: Перебираем $k = \lceil \log_2 C \rceil \dots 0$, находим и проталкиваем максимальный поток в сети $c'(e)$ (находим его Эдмондсом-Карпом, может быть проталкиваем по нескольким путям если получится).

Асимптотика: $O(E^2 \log C)$

▲ Понятно, что $\log C$ - это количество итераций. Покажем, что на каждой итерации мы находим $O(E)$ путей (из $O(E)$ на поиск одного пути как раз получится искомая асимптотика.

Пусть после рассмотрения k пропустили поток F_k. Рассмотрим разрез: в одной части все вершины достижимые из S по ребрам $\geq 2^k$, в другой - остальные. Тогда величина разреза $\leq 2^k E$ (все ребра между частями $< 2^k$) следовательно $F - F_k \leq 2^k E$, так как оставшийся поток не превосходит разреза.

Рассмотрим k-ый шаг. Заметим, что каждый раз когда мы увеличиваем поток, он увеличивается хотя бы на 2^k. Так как наш поток отличается от максимального на $\leq 2^k E$, то увеличить поток мы сможем $O(E)$ раз. Итог: на каждом шаге делаем DFS $O(E)$ раз. Таким образом, получаем асимптотику $O(E^2 \log C)$

Если нам удалось увеличить поток, то мы увеличили его хотя бы на 2^k. Из

82. Определение слоистой сети, блокирующего потока. Алгоритм Диница, доказательство корректности.

Определение: G - сеть, $V_i = \{v \mid dist(s, v) = i\}$ - слои. Тогда *слоистая сеть* построенная по G - сеть, в которой оставлены только ребра из меньших слоев в большие (ребра из больших слоев в меньшие и внутри слоев игнорируются)

Определение: Пусть G - сеть. Тогда *блокирующим потоком* в ней называется такой поток, который нельзя увеличить без введения обратных ребер.

Алгоритм Диница: Пока из s в t есть путь в G_f строим слоистую сеть и ищем в ней блокирующий поток.

Корректность: остановимся только когда нет пути из s в t в остаточной сети $\Rightarrow$ алгоритм корректен по теореме Форда-Фалкерсона

83. Реализация алгоритма Диница. Асимптотика.

Слоистая сеть строится просто через 1 BFS (запускаем и оставляем только те ребра, которые идут из расстояния i в $i + 1$)

Как же искать блокирующий поток? Рассмотрим одну вершину v каждое ребро выходящее из нее имеет смысл рассматривать только один раз: если мы нашли путь, то просто проталктваем туда поток, а если не нашли, то в будущем мы уже и не найдем, поэтому считаем его "неинтересным". Введем $ptr[v]$ - номер первого интересного ребра исходящего из v.

```
int dfs(int v, int flow) {
    if (v == t) return flow; // если уже дошли до стока - возвращаем ответ
    while (ptr[v] != g[v].size()) { // пока есть интересные ребра
        Edge e = g[ptr[v]]; // ptr[v]-ое ребро из v
        if (level[v] + 1 != level[e.to]) { // если это не ребро между слоями
            ++ptr[v]; // отмечаем ребро неинтересным
            continue; // переходим к следующей итерации
        }
        if (e.capacity == e.flow) { // если ребро уже насыщено
            ++ptr[v]; // отмечаем ребро неинтересным
            continue; // перейти к следующей итерации
        }
        int x = dfs(e.to, min(flow, e.capacity - e.flow)); // рекурсивно
    запускаемся от конца интересного ребра
        if (x > 0) { // если мы смогли протолкнуть ненулевой поток
            e.flow += x; // добавляем поток по e
```

```
            reverse_e.flow -= x; // отнимаем поток из обратного ребра
            return x; // возвращаем поток который смогли протолкнуть
        }
        ++ptr[v]; // иначе ребро неинтересно и переходим к следующему
    }
    return 0; // если ничего не получилось вернуть 0
}
```

Весь алгоритм Диница:

```
int findMaxFlow() {
    int maxFlow = 0;
    while (true) {
        bfs(); // строим слоистую сеть
        if (noPath(s, t)) break; // если t недостижимо из s то выходим из алгоритма
        flow = dfs(s, inf);
        while (flow > 0) { // иначе пока поток проталкивается
            maxFlow += flow; // добавляем его к общему потоку
            flow = dfs(s, inf); // пытаемся протолкнуть поток по другому пути
        }
    }
    return maxFlow;
}
```

Асимптотика: $O(V^2E)$

▲ Рассмотрим асимптотику операции $dfs(s, \infty)$. Если за время ее выполнения указатели интересных ребер сместились на k, то ее асимптотика - это $O(V + k)$. Действительно, все что мы делаем - это проходим по одному пути (максимальной длины V) и переключаем k указателей.

Тогда одна итерация алгоритма Диница работает за $O(V \cdot$(количество найденных путей)$+$ (суммарное изменение всех указателей)). Количество найденных путей не превосходит E, так как каждый новый путь насыщает хотя бы одно ребро. Суммарное изменение всех указателей также не превосходит E (так как всего ребер E) $\Rightarrow$ асимптотика одной итерации алгоритма Диница равна $O(VE)$.

Покажем, что после каждой итерации $dist'(s,t) > dist(s,t)$. После пропускания блокирующего потока в остаточной сети могли добавиться только ребра из i-го слоя в $i-1$-й, (так как поток пускаем только по ребрам из i-го в $i+1$-й). Очевидно, что такие ребра не могут сократить расстояние между s и t лежащими в 0 и l-ом слоях. Пусть $dist(s,t)$ остался таким же. Заметим, что у нас всего $dist(s,t)+1$ слоев и есть ребра либо вперед на один слой, либо назад на один слой. Очевидно, что чтобы получился путь длины $dist(s,t)$ мы можем прыгать только вперед на 1 слой. Следовательно, этот путь полностью лежит в нашей слоистой сети, а значит мы можем пустить по нему поток - противоречие с тем, что нашли блокирующий поток

Таким образом, так как расстояние между s и t постоянно растет в алгоритме Диница всего $O(V)$ итераций $\Rightarrow$ общая асимптотика равна $O(V^2E)$ ■

84. Первая теорема Карзанова о числе итераций алгоритма Диница.

Обозначения: для любой вершины v отличной от s и t введем следующие величины:

$$C_{in}(v) = \sum_{u \in V} c(u,v);\ C_{out}(v) = \sum_{w \in V} c(v,w) \text{ - входящая и исходящая capacity}$$

$$p(v) = \min(C_{in}(v), C_{out}(v)) \text{ - потенциал вершины}$$

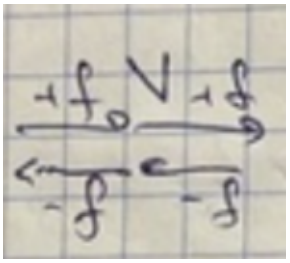
$$P = \sum_{v \in V \setminus \{s,t\}} p(v) \text{ - потенциал сети}$$

Замечание: Через v может протекать не больше чем $p(v)$ потока, так как потенциал вершины - это минимум из входящей и исходящей capacity и выполнен закон сохранения потока.

Лемма: Пусть $L = dist(s,t), F$ - максимальный поток. Тогда $L \leq \frac{P}{F} + 1$

▲ Так как $L = dist(s,t)$ в слоистой сети есть $L+1$ слой включая слои содержащие s и t (слоев без s и t - $L-1$). Обозначим $P_i = \sum_{v \in V_i} p(v)$. Через V_i протекает $\leq P_i$ потока, так как P_i - это сумма потенциалов всех вершин в слое $\Rightarrow F \leq P_i \Rightarrow (L-1)F \leq P_1 + \ldots + P_{l-1} \leq P \Rightarrow L \leq \frac{P}{F} + 1$ ■

Лемма: P не изменяется при проталкивании потока при переходе к остаточной сети.



▲ Пусть v лежит на пути, по которому протолкнули поток f. Тогда capacity ребер лежащих на этом пути уменьшилась на f, а обратных - увеличилась на f. После изображения такого изменения на картинке вижно, что C_{in} и C_{out} не поменялись, а значит и $p(v)$ не поменялся $\Rightarrow$ потенциал всей сети также не поменялся ■

Теорема (первая теорема Карзанова): Число итераций алгоритма Диница равно $O(\sqrt{P})$.

▲ Сделаем $\sqrt{P}$ итераций алгоритма Диница. Тогда $dist(s,t) = l_{new} \geq \sqrt{P}$ (так как доказали, что на каждой итерации $dist(s,t)$ увеличивается в билете 83). По лемме $\sqrt{P} \leq l_{new} \leq \frac{P}{F_{\text{ост}}} + 1 \Rightarrow \sqrt{P} - 1 \leq \frac{P}{F_{\text{ост}}} \Rightarrow F_{\text{ост}} \leq \frac{P}{\sqrt{P}-1} = O(\sqrt{P})$. Так как осталось пропустить $O(\sqrt{P})$ потока, то осталось найти $O(\sqrt{P})$ путей $\Rightarrow$ осталось $O(\sqrt{P})$ итераций. Так как до этого мы сделали ровно $\sqrt{P}$ итераций, то всего у нас тоже получается $O(\sqrt{P})$ итераций ■

Теорема (вторая теорема Карзанова): Число итераций алгоритма Диница равно $O(C^{1/3}V^{2/3})$, где C - ограничение сверху на все capacity (нет в программе, для общего развития).

85. Эффективность алгоритма Диница в единичных сетях.

Определение: *Единичная сеть* - сеть, в которой capacity принимают только значения 0 и 1

Замечание 1: В единичной сети $P \leq O(E)$

▲ Так как сеть единичная, то $C_{in}(v) = deg_{in}(v)$; $C_{out}(v) = deg_{out}(v)$, где deg_{in}, deg_{out} - входящая и исходящая степени вершины соответственно (то есть количество ребер входящих и выходящих из вершины). Тогда по определению $p(v) = \min(deg_{in}(v), deg_{out}(v)) \leq deg_{in}(v) + deg_{out}(v)$. Откуда получаем, что $P = \sum_{v \in V \setminus \{s,t\}} p(v) \leq \sum_{v \in V} deg_{in}(v) + \sum_{v \in V} deg_{out}(v) = 2E$ ■

Замечание 2: В единичной сети одна итерация алгоритма Диница работает за $O(E)$ так как за все dfsы ребро рассматривается максимум 1 раз (либо протолкнем по нему поток, либо выкинем из рассмотрения как неинтересное).

Вывод: В единичной сети алгоритм Диница работает за $O(E\sqrt{E})$