

100 (16 на хор). Доказательство теоремы Минковского-Главки для октаэдра: переформулировка условия теоремы через Λ_a и неравенства на p и n . Сведение теоремы к неравенству

Теорема Минковского-Главки: $\frac{Vol\Omega}{\Delta(\Omega)} \geq 1$, где Ω - произвольное тело; мы работаем с ней для октаэдра, но не на классе ВСЕХ решёток (в критическом определителе у нас \inf по всем решёткам), а переформулируем:

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \exists \Lambda \subset \mathbb{R}^n : \Lambda \cap \Omega \setminus \{0\} = \emptyset$, а $\det \Lambda \leq (Vol\Omega)(1 + \varepsilon)$

Рассмотрим $\bar{a} = (a_1/p, a_2/p, \dots, a_n/p)$, p - простое число, $a_i \in \mathbb{Z}$. Берём $\langle \mathbb{Z}^n, \bar{a} \rangle = \{\bar{a}l + \bar{b} : l \in \mathbb{Z}, \bar{b} \in \mathbb{Z}^n\}$. Тогда $\Lambda_{\bar{a}} = \langle \mathbb{Z}^n, \bar{a} \rangle$ - это вот эта решётка. Б.о.о. $1 \leq a_i \leq p-1$.

Утверждение: $\det \Lambda_{\bar{a}} = \frac{1}{p}$

Переформулировка условия теоремы Минковского-Главки $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \exists \Lambda_{\bar{a}} \subset \mathbb{R}^n : \Lambda_{\bar{a}} \cap O^n \setminus \{0\} = \emptyset$ ($\Lambda_{\bar{a}}$ допустима относительно O^n , а $\det \Lambda_{\bar{a}} = \frac{1}{p} \leq (Vol O^n)(1 + \varepsilon) = \frac{2^n}{n!}(1 + \varepsilon)$), что, по сути, $p \geq \frac{n!}{2^n}(1 - \varepsilon)$

Билет 100 (продолжение)

Хотим найти, сколько точек $\Lambda_{\bar{a}}$ (в зав-ти от a) попадает в октаэдр.

$|\Lambda_{\bar{a}} \cap O^n|$ - ?

Вспомогательная ф-ция: $\delta(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{x} \in \mathbb{Z}^n \\ 0, & \text{если } \bar{x} \notin \mathbb{Z}^n \end{cases}$ (индикатор)

$\sum_{l=1}^p \sum_{\bar{x} \in (\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n \cap O^n)} \delta(\bar{a}l + \bar{x}) = |\Lambda_{\bar{a}} \cap O^n|$

это доказываем.

$\Lambda_{\bar{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{a}l + \bar{b} : l \in \mathbb{Z}, \bar{b} \in \mathbb{Z}^n \}$

$\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n \cap O^n \leftarrow$ здесь лежат все ненулевые $\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n$ векторы, т.е. $\Lambda_{\bar{a}}$ - подрешётка $\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n$

$\Lambda_{\bar{a}} \subset \frac{1}{p}\mathbb{Z}^n$

$\delta(\bar{a}l + \bar{x}) = 1 \Leftrightarrow \bar{a}l + \bar{x} = \bar{b} \in \mathbb{Z}^n$
 $\bar{x} = \bar{a} \cdot (-l) + \bar{b} \in \Lambda_{\bar{a}}$

\Downarrow
 рав-во доказано.

Возьмём среднее значение $|\Lambda_{\bar{a}} \cap O^n|$ по всем возможным \bar{a} .

Фиксируем $\varepsilon > 0$. мин. простое p : $p \geq \frac{n!}{2^n}(1 - \varepsilon)$

При $n \geq n_0$ $p \leq \frac{n!}{2^n}(1 - \frac{\varepsilon}{2})$

p выбираем, величину ε выбираем, усредняем по всем $1 \leq a_i \leq p-1$:

$\frac{1}{p^n} \cdot \sum_{a_i=1}^p \dots \sum_{a_n=1}^p |\Lambda_{\bar{a}} \cap O^n| < 1$

\Rightarrow одно из этих слагаемых < 1

\Rightarrow равно 0.

101 (17 на хор). Теорема Минковского-Главки для октаэдра (формулировка). Доказательство неравенства.

Билет 101. Продолжение док-ва.

$$\frac{1}{p^n} \sum_{a_1=1}^p \dots \sum_{a_n=1}^p |\Lambda_{\bar{a}} \cap O^n \setminus \{0\}| < 1.$$

$$\frac{1}{p^n} \sum_{a_1=1}^p \dots \sum_{a_n=1}^p \sum_{\bar{x} \in (\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n \cap O^n \setminus \{0\})} \delta(\bar{a}l + \bar{x}) = \frac{1}{p^n} \sum_{l=1}^p \sum_{x=1}^p \sum_{a_1=1}^p \dots \sum_{a_n=1}^p \delta(\bar{a}l + \bar{x})$$

переставляя
порядок сумм...

Фикс. $l, \bar{x} = (\frac{x_1}{p}, \dots, \frac{x_n}{p})$
 $\bar{a}l + \bar{x} = (\frac{a_1 l + x_1}{p}, \dots, \frac{a_n l + x_n}{p})$

$(v, v) = 1 \Rightarrow a_n + b_n v = 1$

$\frac{1}{p^n} \sum_{l=1}^p \dots$ можно просто взять $p-1$, т.к. если $l=p$, то $\bar{a}l \in \mathbb{Z}^n$ $\delta(\bar{a}l + \bar{x}) = 1 \Leftrightarrow \bar{x} \in \mathbb{Z}^n$
 но вектор $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$ — 2n штук: вершины октаэдра.

$\frac{2n}{p^n}$ — очень маленькая величина
 $\Rightarrow p, l$ взаимно просты. $\Rightarrow \exists: a_1 l + b_1 p = -x_1$
 $a_1 l + x_1 = -b_1 p$ — целое.

$$\ominus \frac{1}{p^n} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{\bar{x}} \sum_{a_1=1}^p \dots \sum_{a_n=1}^p \delta(\bar{a}l + \bar{x}) + \frac{2n}{p^n} \ominus$$

надо в каждом \sum в квадрате фикс. a_i : это важно

$$\ominus \frac{1}{p^n} \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{\bar{x}} 1 \right) + \frac{2n}{p^n} \leq$$

Оценим \rightarrow

$$\leq \frac{1}{p^n} \sum_{l=1}^{p-1} \frac{2^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{p}\right)^n + \frac{2n}{p^n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p^n} \cdot p \cdot \frac{2^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{p}\right)^n + \frac{2n}{p^n} \leq$$

но $\frac{n!}{2^n} \left(1 + \frac{2}{p}\right)^n \leq \frac{n!}{2^n} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\leq \frac{n!}{2^n} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{2^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{n!(1-\varepsilon)}\right)^n + \frac{2n}{p^n} < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{\frac{2}{1-\varepsilon}}\right) + \frac{\varepsilon}{4} = 1. \text{ Ура!}$$

$\rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

изображение октаэдра
 $\frac{1}{p^n}$ — объем
 фикс. a_i — это важно
 $\sum 1$ — не больше V
 большего октаэдра
 коэффициент
 ирон. для
 большего октаэдра.