37. Определение всюду плотности. Последовательность ln(n) всюду плотна на [0, 1].

38. Определение всюду плотности. Если последовательность равномерно распределена по модулю 1, то она и всюду плотна.

Последовательность x_n **всюду плотна на отрезке [a, b]**, если $\forall$ $[c, d] \subset [a, b]$ $\exists$ бесконечного много номеров N таких, что $\{x_N\} \in [c, d]$.

$\{ln(n)\}$ всюду плотна на [0; 1].

▲ Зафиксируем N. Тогда $[x_n] = k \in \{1, \ldots, [ln(N)]\}$. $\{ln(n)\} \in [c; d] \Leftrightarrow ln(n) \in [k + c; k + d] \Rightarrow n \in [e^{k+c}; e^{k+d}]$. Для N число подходящих n будет $\sum_{k=1}^{[ln(N)]}(e^{k+d} - e^{k+c}) = \frac{e(e^{ln(N)}-1)}{e-1}(e^d - e^c)\ N\frac{e(e^d-e^c)}{e-1} \to \infty$ ■

Теорема. Если последовательность x_n р.р. mod 1, то она всюду плотна на отрезке [0, 1].

▲ Из определения равномерной распределённости по модулю 1, $\forall c < d \in [0; 1]$ $\lim_{N\to\infty} \frac{|k|k\leqslant N, \{x_k\}\in[c;d]|}{N} = d - c$, т.е. для любого подотрезка $\exists$ бесконечное количество точек в нём. ■