100. Heavy-light decomposition. Тяжёлые и лёгкие рёбра. Лемма о числе лёгких рёбер на пути между двумя вершинами. Решение задачи обновления на ребре и суммы на пути за $O(log^2(n))$ на запрос.

Heavy-light decomposition. Пулл задач: как на ДО, только в роли отрезков - пути в дереве. Числа написаны на каждом ребре.

Подвесим дерево за произвольную вершину r. Насчитаем размеры всех поддеревьев: subtree (см. предыдущие билеты на центроиды). Ребро из u в v - **тяжёлое**, если subtree[v] $\geqslant \frac{1}{2}$subtree[u]. Замечание: из каждой вершины выходит не более одного тяжёлого ребра. Вот эти тяжёлые рёбра можно склеить в пути; все остальные рёбра лёгкие.

Идея: разбили дерево на тяжёлые пути, между ними лёгкие рёбра. Тогда если мы хотим обновлять значение в ребре и находить сумму на пути между двумя вершинами, то мы хотим выстроить на тяжёлых путях деревья отрезков (котировать их как массивы, всё находить), а количество лёгких путей, которые надо будет доставить, будет немного.

Лемма (о числе лёгких рёбер на пути между двумя вершинами). На пути от u до v ($\forall u, v$ количество лёгких рёбер равно $O(log(n))$).

▲ Как устроен путь от u до v? Это путь от u до LCA и путь от LCA до v. Лёгкие рёбра, если мы проходим снизу вверх, увеличивают размер поддерева не менее, чем в два раза - в силу определения тяжёлого ребра, если бы это было неправдой, то мы только что прошли по тяжёлому ребру; отсюда на первом пути максимум логарифм лёгких рёбер; аналогичные рассуждения о пути вниз. ■

Следствие: путь от u до v пересекает $O(log(n))$ тяжёлых путей.

Тогда обновление значения в ребре либо изменяет ДО на тяжёлом пути (если ребро тяжёлое), либо ребро лёгкое и ничего не меняется; первое делается за $O(log(n))$, второе - за $O(1)$.

Сумма ищется за $O(log(n) \cdot log(n) + 1 \cdot log(n))$, где первое слагаемое - это из работы с тяжёлыми путями (тяжёлых путей логарифм, на каждом из них сумма ищется за логарифм), правая - работа с лёгкими путями (лёгких путей логарифм, работаем с ними за единицу). Тогда итоговая асимптотика - это лишь первое слагаемое, $O(log^2(n))$

101. Центроидная декомпозиция. Подсчёт числа объектов, обладающих заданным свойством.

Задача: найти число объектов со свойством α. Например, количество троек вершин, которые находятся на одном и том же расстоянии x друг от друга. Или количество путей, на которых сумма хорошая. Или на рёбрах написаны скобки, найти количество путей, образующих ПСП.

Решение в общем виде: Пусть C - центроид дерева T.

1.Находим его за линейное время. Подвесим дерево за центроид, все размеры не больше половины исходного. Найдём количество объектов, для которых свойство α пропадёт, если удалить вершинку C. Как именно это сделать? Зависит от задачи.

2. Если $T_1, \ldots, T_k$ - поддеревья, которые остались после удаления центроида - запускаемся рекурсивно от них (с удалённой вершинкой C). Таким образом, при запуске рекурсии мы минимум в два раза уменьшаем количество вершин в дереве на каждом шаге, значит, глубина рекурсии не превышает логарифм. Тогда если, например, пункт 1 реализован за $O(n)$, то суммарная сложность - $O(nlog(n))$

Ответ - рекурсия, количество искомых свойств, на которых влияет удаление центроида плюс количество искомых свойств, на которых влияет удаление центроида из поддеревьев-детей предыдущего центроида и так далее. По сути мы просто разбили все искомые объекты так, чтобы их было проще считать.

102. Центроидная декомпозиция. Задача о перекрашивании синих вершин в красный цвет и поиска расстояния до ближайшей красной вершины.

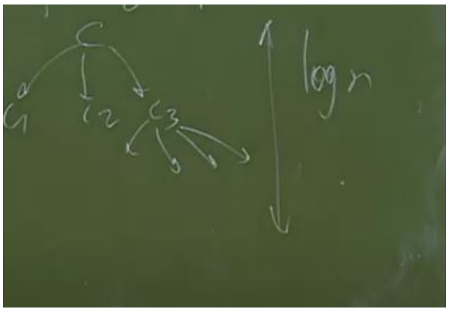


Рис. 1: Изображение дерева центроидов - 1.

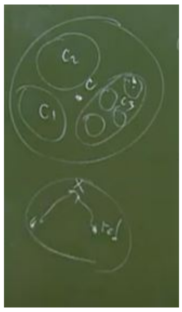


Рис. 2: Дерево центроидов 2 + поиск красной вершины.

Задача. Дано дерево. Каждая вершина либо синяя, либо красная. Дано два типа запросов:

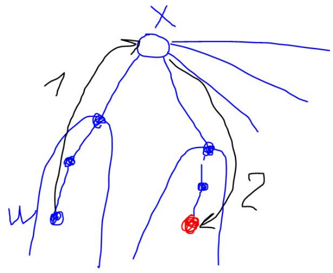
- перекрасить синюю v в красный цвет.

- для данной вершины u сообщить расстояние до ближайшей красной.

Дерево центроидов - корень дерева - исходный центроид, его дети - центроиды в поддеревьях, на которые мы разбились при рекурсии. Глубина дерева - максимум логарифм.

Запрос типа 2: искомая вершина лежит в одном из бОльших поддеревьев (наддеревьев). Она там лежит, так как по сути мы просто поднимаемся в более верхнее дерево, которое было до этого разбито на поддеревья, и когда-то поднимемся до всего дерева. Значит, в каком-то из наддеревьев лежит эта вершина. Соотвественно, на произвольном шаге, где центроид x, хочется найти ближайшую к x красную вершину и сказать, что она же ближайшая к u, просто надо сначала дойти до x, потом до u. (см. рис. 2)

Доказательство: рассматриваем дерево, в котором лежат обе вершины (u и ближайшая к ней красная), а в следующих поддеревьях - не лежат, но тогда расстояние от u до красной - это расстояние до центроида + расстояние от центроида до красной.



Пусть T_v - поддерево с центроидом v. Для каждой v находим ближайшую красную в T_v: closest[v] $= min_{r \in T_V} dist(v, r)$, где r - красная. Тогда ответ на запрос 2 типа - min по всем v - предки в деревне центроидов от $dist(u, v) + closest[v]$. Первое слагаемое вычисляется за логарифм (потому что мы умеем искать LCA за логарифм), значит, всё в итоге делается за $O(log^2(n))$.

Для запроса первого типа надо обновить closest для тех вершин v, для которых r стало лежать в T_v: в точности все предки вершины r. По всем v - предкам r в дереве центроидов берём новый closest - минимум из старого и нового. Время: $O(log^2(n))$, т.к. для каждого предка за логарифм обновляем расстояния до красной точки.