## 78 (36 на хор). Определение р.р. (mod 1) последовательности. Вывод интегрального признака из того, что последовательность р.р. (mod 1). Формулировка интегрального признака через комплекснозначную функцию (б/д).

## 79 (37 на хор). Определение р.р. (mod 1) последовательности. Вывод р.р. (mod 1) последовательности из интегрального признака. Формулировка интегрального признака через комплекснозначную функцию (б/д).

Послед-ность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - **равномерно распределена по модулю 1**, если:

$$\forall a, b \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \ldots, N : \{x_i\} \in [a, b)\}|}{N} = b - a$$

**Теорема об интегральном признаке**. $x_n$ - р.р. mod 1 $\Leftrightarrow \forall$ функции f, определённой и непрерывной на [0; 1] $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx$.

▲ Введём индикатор "попадания"в отрезок: $I_{[a;b)}(x) = 1$, если $x \in [a; b)$, 0 иначе. Но при этом $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} I_{[a;b)}(\{x_n\}) = b - a = \int_0^1 I_{[a;b)}(\{x\})dx$, если $x_n$ равномерно распределена.

$\Rightarrow$. 1) Пусть $x_n$ - равномерно распределена.

2) Разобьём отрезок [0; 1] точками $a_1, a_2, \ldots, a_m; a_0 = 0, a_{m+1} = 1$ на конечное число подотрезков: $[0; a_1) \cup [a_1; a_2) \cup \cdots \cup [a_m; 1)$. Рассмотрим индикатор каждой из частей и эти индикаторы сложим. $\sum_{i=1}^{m+1} c_i I_{[a_{i-1};a_i]}$ - ступенчатая функция.

3) Пусть g(x) - ступенчатая функция. Тогда с учётом пункта 1, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(\{x_n\}) = \int_0^1 g(x)dx$. Таким образом, мы доказали для индикатора и для линейной комбинации индикаторов (ступенчатой функции). Тогда мы фиксируем f определённую и непрерывную на [0; 1), фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists f_1, f_2$ - ступенчатые, такие, что $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) \forall x$, $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx < \varepsilon$.

4) Отсюда: $\int_0^1 f(x)dx - \varepsilon \leqslant \int_0^1 f_2(x)dx - \varepsilon \leqslant \int_0^1 f_1(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}) \leqslant \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \leqslant \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \leqslant$
$\leqslant \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(\{x_n\}) = \int_0^1 f_2(x)dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)dx + \varepsilon \leqslant \int_0^1 f(x)dx + \varepsilon$

5) Из рассуждения выше нижний и верхний предел лежат между $\int_0^1 f(x)dx - \varepsilon$ и $\int_0^1 f(x)dx + \varepsilon$, так как $\varepsilon$ - любой, то нижний и верхний пределы равны, значит, существует предел, равный $\int_0^1 f(x)dx$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall f$ выполняется условие. Тогда верны рассуждения из пункта 4, только в пункте 4 мы аппроксимировали непрерывную функцию индикаторами, а теперь мы хотим аппроксимировать индикатор непрерывными функциями: $\forall\varepsilon\ \exists g_1, g_2$ - непрерывные: $g_1(x) \leqslant I_{[a;b)} \leqslant g_2(x)$ и $\int_0^1 (g_2(x) - g_1(x))dx \leqslant \varepsilon$. Далее аналогично. ■

**Формулировка интегрального признака через комплекснозначную функцию.** $x_n$ - р.р. mod 1 $\Leftrightarrow \forall$ *комплекснозначной* функции f, имеющей период 1, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx$