Список аксиом :

Во всех аксиомах A, B, C — произвольные формулы

1) $A \to (B \to A)$ — истина следует из чего угодно

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ — левая дистрибутивно импликации относительно себя

Если из двух посылок следует заключение и из первой посылки следует вторая, то из первой следует заключение

3) $(A \wedge B) \to A$

4) $(A \wedge B) \to B$

5) $A \to (B \to (A \wedge B))$

6) $A \to (A \vee B)$

7) $B \to (A \vee B)$

8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ — правило разбора случаев

9) $\neg A \to (A \to B)$ — из лжи следует что угодно

Из двух противоположных утверждений следует любое

10) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ — правило рассуждения от противного

Если из A можно вывести два противоположных утверждения, то A неверно

11) $A \vee \neg A$ — закон исключённого третьего

Список аксиом :

1) Все аксиомы ИВ и ИП

2) Аксиомы равенства.

Рефлексивность, симметричность и транзитивность — равенство является отношением эквивалентности.

Подстановка равного элемента вместо другого не меняет значение выражения.

$\forall x \forall y \ (x = y \ \to \ Sx = Sy)$

$\forall x \forall y \forall z \forall t \ ((x = y \ \wedge \ z = t) \to (x + z = y + t))$

И т.д.

3) Собственно аксиомы арифметики (Пеано)

Правила вывода — из ИП : *mosud ponens* и 2 правила Бернайса.

Аксиомы, связанные с порядком:

1) $\neg \exists x \ Sx = 0$

2) $\forall x \forall y \ (Sx = Sy \ \to \ x = y)$

3) Принцип индукции $(\phi(0) \wedge \forall x \ (\phi(x) \to \phi(Sx))) \to \forall x \ \phi(x)$

Принцип первого порядка: эта формула верна, если вместо ϕ подставить какую-нибудь формулу с одной свободной переменной

Принцип второго порядка: ϕ — произвольный предикат, по нему стоит квантор всеобщности.

Мы будем изучать арифметику первого порядка.

Аксиомы, связанные с арифметическими действиями:

1) $\forall x \ x + 0 = x$

2) $\forall x \forall y \ x + Sy = S(x + y)$

3) $\forall x \ x \cdot 0 = 0$

4) $\forall x \forall y \ x \cdot Sy = x \cdot y + x$

1.3.9 Арифметичность предикатов «n — степень шестёрки» и "n $= 2^k$"

Опр Предикат P: $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ называется *арифметичным*, если он выразим в стандартной интерпретации арифметики $\{\mathbb{N}, +, *, =\}$. Функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется *арифметичной*, если арифметичен предикат $P_f : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0, 1\}$, где $P_f(x, y) = 1 \leftrightarrow f(x) = y$

Степень шестерки

Степень шестерки можно выразить с использованием квантора по конечному множеству
$\exists D(x \in D \wedge \forall y \in D(y = 1 \vee (y \vdots 6 \wedge \frac{y}{6} \in D)))$
У нас есть $x, \frac{x}{6}, \frac{x}{36}, \frac{x}{216}, ..., 1$. Этакий мешок с числами. И если в нем есть x, то есть и $\frac{x}{6}$ и т.д., а остановиться это все может только на единице. Соответственно, если x - не степень шестерки, то возникнет не единица, и оба условия будут нарушены.

Через обычные предикаты эта функция выражается с помощью кодирования Смаллиана. Оно лучше применимо для описания конечных множеств. В чем суть:
Берем и вводим предикат $S(a, b, x)$, которые отвечает следующим свойствам:

1 $\forall a, b\{x : S(a, b, x) = 1\}$ - конечно

2 Для любого конечного S найдутся такие a и b, что $S = \{x : S(a, b, x) = 1\}$

Теперь записанную нами формулу $\exists D....x \in D....$ можно переписать следующим образом:
$\exists a, \exists b(S(a, b, x) \wedge \forall y(S(a, b, y) \to (y = 1 \vee (y \vdots 6 \wedge \exists z(y = 6 * z \wedge S(a, b, z))))))$
Что поменялось? Заменили $\exists D$ на $\exists a, \exists b$. И $x \in D$ на $S(a, b, x)$, получили формулу первого порядка

Степень двойки
$x = 2^k$ можно выразить с использованием квантора по конечной последовательности
$\exists\{a_i\}(a_0 = 1 \wedge a_k = x \wedge \forall i \in [0; k-1]\ a_{i+1} = a * a_i)$

Через обычные предикаты это выражается с использованием β-функции Гёделя.
Тут вводится арифметическая функция $\beta(a, b, i)$ со следующим свойством:

$\forall[x_0, ..., x_n]$ найдутся такие a,b, что $\forall i \in [0, n]\ x_i = \beta(a, b, i)$

Теперь в формуле, которая имеет вид $\exists\{x_i\}......x_j......$ можно заменить на такую: $\exists a \exists b......\beta(a, b, j)......$

Применим полученные знания к нашему предикату и получим:
$x = 2^k \iff \exists a, b\ (\beta(a, b, 0) = 1 \wedge \beta(a, b, k) = x \wedge \forall i \in [0, ..., k-1]\ \beta(a, b, i+1) = 2 * \beta(a, b, i))$

1.3.10 Вывод коммутативности сложения в арифметике Пеано

Хотим получить: $\forall x \forall y x + y = y + x$
Будем доказывать в три этапа

I) $\forall x\, 0 + x = x$
1) $\forall x\, x + 0 = x$ – аксиома
2) $0 + 0 = 0$ – подстановка $x = 0$, будет базой индукции
3) $\forall x \forall y\, x + Sy = S(x + y)$
4) $0 + Sx = S(0 + x)$ – подстановка $x = 0$, $y = x$
5) $\forall x \forall y\, (x = y \to Sx = Sy)$ – аксиома равенства
6) $0 + x = x \to S(0 + x) = Sx$ – подстановка $x := 0 + x$, $y := x$
7) $0 + x = x \to 0 + Sx = Sx$ – транзитивность + силлогизм
8) $\forall x\, (0 + x = x \to 0 + Sx = Sx)$ – правило обобщения
9) $(0 + 0 = 0 \wedge \forall x\, (0 + x = x \to 0 + Sx = Sx)) \to \forall x\, 0 + x = x$ – принцип индукции
10) $\forall x\, 0 + x = x$ – два раза *modus ponens*

II) $\forall x \forall y\, Sx + y = S(x + y)$
1) $\forall x\, x + 0 = x$
2) $x + 0 = x$ – подстановка $x := x$
3) $Sx + 0 = Sx$ – постановка $x := Sx$
4) $\forall x \forall y\, (x = y \to Sx = Sy)$
5) $x + 0 = x \to S(x + 0) = Sx$
6) $S(x + 0) = Sx$ – по *modus ponens*
7) $Sx + 0 = S(x + 0)$ – по транзитивности
8) $\forall x \forall y\, x + Sy = S(x + y)$ – аксиома
9) $Sx + Sy = S(Sx + y)$
10) $x + Sy = S(x + y)$
11) $S(x + Sy) = SS(x + y)$
12) $(Sx + y = S(x + y)) \to (Sx + Sy = S(Sx + y) = SS(x + y) = S(x + Sy))$
т.е. $(Sx + y = S(x + y)) \to (Sx + Sy = S(x + Sy))$
13) $\forall y\, ((Sx + y = S(x + y)) \to (Sx + Sy = S(x + Sy)))$
14) по принципу индукции из $Sx + 0 = S(x + 0)$ и $\forall y\, ((Sx + y = S(x + y)) \to (Sx + Sy = S(x + Sy)))$
получается $\forall y\, Sx + y = S(x + y)$
15) по правилу обобщения $\forall x \forall y\, Sx + y = S(x + y)$

$III)\ \forall x \forall y\ x + y = y + x$

1) $\forall x\ x + 0 = x$

2) $\forall x\ 0 + x = x$

3) $x + 0 = x$

4) $0 + x = x$

5) $x + 0 = 0 + x$

6) $\forall x\ x + 0 = 0 + x$

7) $Sy + x = S(y + x)$ – из формулы II

8) $x + Sy = S(x + y)$ – из аксиомы

9) $x + y = y + x \ \to x + Sy = Sy + x$ – из аксиом равенства

10) $\forall y\ (x + y = y + x \ \to x + Sy = Sy + x)$

11) по принципу индукции из $x + 0 = 0 + x$ и $\forall y\ (x + y = y + x \ \to x + Sy = Sy + x)$ получаем $\forall y\ (x + y = y + x)$

12) по правилу обобщения $\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$

1.3.11-1.12 Множество замкнутых формул, истинных в N, неперечислимо. Первая теорема Гёделя о неполноте.Теорема Тарского о неарифметичности множества истинных арифметических формул

Опр Множество A $\subset \mathbb{N}^k$ называется *арифметическим*, если существует арифметическая формула α с параметрами $x_1, ..., x_k$, которая его представляет в следующем смысле: $< n_1, ..., n_k >$ принадлежит множеству A тогда и только тогда, когда формула α истинна при значениях параметров $x_1 = n_1, ..., x_k = n_k$.

Любое перечислимое множество арифметично

Лемма1
Всякое арифметическое множество лежит в классе Σ_n или Π_n для некоторого n (и, естественно, для всех б ольших n).
▲ Формулу, задающую арифметическое множество, приведём к предварённой нормальной форме (вынеся кванторы наружу). Ясно, что бескванторная часть задаёт разрешимое множество, поэтому исходное множество принадлежит какому-то из классов Σ_n или Π_n. Можно и не использовать предварённой нормальной формы, а применить индукцию по длине формулы и сослаться на то, что пересечение, объединение и дополнение, а также проекция не выводят за пределы арифметической иерархии (объединения всех классов Σ_n и Π_n). ■

Рассмотрим теперь множество T, элементами которого являются все истинные арифметические формулы без параметров (точнее, их номера в какой-то вычислимой нумерации всех формул — это значит, что по формуле можно алгоритмически получить её номер и наоборот).

Лемма2
Любое арифметическое множество m-сводится к множеству T.
▲ Пусть A — произвольное арифметическое множество. Пусть α(x) — формула с одной переменной, которая выражает принадлежность множеству A. Это означает, что α(n) истинно при тех и только тех n, которые принадлежат A. Тогда вычислимая функция n $\to$ (номер формулы, которая является результатом подстановки константы n в α(x)) m-сводит A к T. ■

Теорема Тарского
Истинность арифметической формулы нельзя выразить арифметическим выражением. То есть не существует формулы True(x), которая истинна тогда и только тогда, когда формула с номером x истинна. (Множество T не арифметично.)
▲ Если бы T было арифметическим, то оно лежало бы в некотором конкретном классе . По-

скольку всякое арифметическое множество сводится к T, то все арифметические множества лежали бы в этом классе. Но мы знаем, что множества из более высоких классов иерархии тоже арифметичны, но в Σ_n не лежат.■

Первая теорема Гёделя о неполноте
Множество T арифметических истин неперечислимо.
▲ Это следует из того, что если бы T было перечислимо, оно было бы арифметично, что противоречит теореме Тарского ■

Множество замкнутых формул, истинных в N, неперечислимо
Если множество перечислимо, то оно лежит в арифметической иерархии, что противоречит теореме Тарского