3.18 (7) Построение комбинатора, возвращающего n-е простое число (для нумералов Чёрча).

1. $Inc = \lambda nfx.f(nfx)$ $Inc\,\overline{n} = (\lambda nfx.f(nfx))\overline{n} = \lambda fx.f(\overline{n}fx) =$
   $= \lambda fx.f((\lambda gy.\underbrace{g(g(\ldots(g}_{n \text{ раз}}y))\ldots)fx) = \lambda fx.f(\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ раз}}x))\ldots) = \overline{n+1}$

2. $False = \lambda xy.y$; $True = \lambda xy.x$

   $Not = \lambda p.p\,False\,True$ (если p, то выводим $False$, иначе $True$)

   $And = \lambda pq.pqp$ (если p, то выводим q, иначе - p)

3. $IsZero = \lambda n.n(\lambda x.False)True$

   $IsZero\,\overline{0} = \overline{0}(\lambda x.False)True = (\lambda fx.x)(\lambda x.False)True = True$

   $IsZero\,\overline{n+1} = (\lambda fx.f(\ldots))(\lambda x.False)True = (\lambda x.False)(\ldots) = False$

4. $Pair = \lambda xyp.pxy$

   $Left = \lambda p.p\,True$

   $Left\,(Pair\,x\,y) = (\lambda p.p\,True)(\lambda p.pxy) = (\lambda p.pxy)True = True\,xy = x$

   $Right = \lambda p.p\,False$ (доказательство аналогично)

5. $Decfn = \lambda fp.Pair(f(Left\,p))(Left\,p)$ - по (x, x) получаем $(f(x), x)$

   $Dec = \lambda nfx.Right(n(Decfn\,f)(Pair\,xx))$ (применим f n раз и возьмем правую часть, которая равна $f(f(\ldots(fx)\ldots))$, то есть f примененную $n-1$ раз). Чтобы полностью доказать корректность, нужно проверить, что при $n = \overline{0}$ все работает (очевидно).

   $Sub = \lambda mn.n\,Dec\,m$ ($\max\{m-n, 0\}$).

   ВАЖНО: скобок нет!!! Dec подставится в нумерал Черча n и у нас получится, что Dec применится к m n раз

6. $GE = \lambda mn.IsZero(Sub\,n\,m)$ ($\geq$)

   $LT = \lambda mn.Not(GE\,m\,n)$ (less then, то есть $<$)

   $IsEqual = \lambda mn.And(GE\,m\,n)(GE\,n\,m)$

7. $Modfn = \lambda fmn.(LT\,m\,n)m(f(Sub\,m\,n)n)$

   $Mod = Y\,Modfn$ (Y - комбинатор неподвижной точки) - деление с остатком

   $IsDivisible = \lambda nm.IsZero(Mod\,n\,m)$ (n кратно m)

8. Выразим терм $IsPrime$. Это индикатор того, что n не делится на числа $2, \ldots, n-1$. Выразим терм "число n не делится на числа $m, \ldots, n-1$"

   $NoDivsfn = \lambda fmn.(IsEqual\,n\,m)\overline{1}((IsDivisible\,n\,m)False(f(Inc\,m)))$

   $IsPrime = \lambda n.And(GE\,n\,\overline{2})((Y\,Nodivsfn)\overline{2})$

9. Перейдем к выражению искомого терма. Вспомогательный терм: идем по числам, рассмотрели k, нашли m простых

   $NthPrimefn = \lambda fkm.(IsPrime\,k)((IsEqualn(Inc\,m))k(f(Inc\,k)(Inc\,m))(f(Inc\,k)m)$

   Смысл: если k - простое, то если нашли все числа, возвращаем k, иначе переходим к следующим m и k. Если k не простое, то просто переходим к следующему k.

   $NthPrime = \lambda n.(Y\,NthPrimefn)\overline{0}\,\overline{0}$