16. Существование матриц Адамара при $n = 1$ и 2. Необходимость делимости на 4 при $n > 3$. Гипотеза Адамара. Комбинаторная переформулировка гипотезы (через систему подмножеств мощности $\frac{n}{2}$ в множестве из $n-1$ элемента). Утверждение о плотности матриц Адамара в натуральном ряде (б/д).

1. $n = 1$: (1)
2. $n = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Утверждение (задача 20.5): Если $n > 2$ - порядок матрицы Адамара, то $n \,\vdots\, 4$.

▲ Так как любую матрицу Адамара можно привести к каноническому виду, рассмотрим нормальную форму матрицы Адамара порядка n. Из того, что первая строка состоит только из единиц следует то, что во всех остальных строках будет $\frac{n}{2}$ единиц и $\frac{n}{2}$ минус единиц (иначе не будет ортагональности с первой строкой).

Рассмотрим две произвольные строчки. Пусть у них на одних и тех же местах стоят x единиц. Тогда мест где в первой строке стоит -1, а во второй 1: $\frac{n}{2} - x$ (столько же когда в первой строке 1, а во второй -1). Получается, что мест где в обоих строках стоит -1: $n - (\frac{n}{2} - x) - (\frac{n}{2} - x) - x = x$. Распишем скалярное произведение этих строк:

$1 \cdot 1 \cdot x + (-1) \cdot (-1) \cdot x + 1 \cdot (-1) \cdot (\frac{n}{2} - x) + (-1) \cdot 1 \cdot (\frac{n}{2} - x) = 4x - n = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{4} \Rightarrow n \,\vdots\, 4$ ■

Гипотеза Адамара: Матрица Адамара существует для любого числа вида $4k$.

Комбинаторная переформулировка: В множестве мощности n существует $n-1$ подмножество мощности $\frac{n}{2}$, такие что каждые 2 подмножества имеют ровно $\frac{n}{4}$ общих элементов.

Утверждение (о плотности в натуральном ряде): $\forall n$ на отрезке $[n; n + O(n^{0.525})]$ есть порядки матриц Адамара.