53. Матрицы Адамара. Кронекеровское произведение и общая формулировка про $A \cdot B$.

Определение: *Кронекеровским произведением* матриц $A \in M_{a\times a}$ и $B \in M_{b\times b}$ называется матрица

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \ (c_{kb+l,pb+q} = a_{kp}b_{lq})$$

Замечание 1: Равенство в скобках выполняется в 0-индексации

Замечание 2: Иногда определение вводят наоборот, то есть берут матрицу A и умножают ее на элементы из B (так вводилось на лекции), но для наших нужд не важно какое выбирать.

Утверждение (задача 20.6): Кронекеровское произведение матриц Адамара является матрицей Адамара.

▲ Рассмотрим две произвольные строки C с номерами $kb+l, pb+q$. Тогда их скалярное произведение равно

$$a_{k1}a_{p1}(b_l, b_q) + a_{k2}a_{p2}(b_l, b_q) + \ldots + a_{ka}a_{pa}(b_l, b_q) = (b_l, b_q)(a_k, a_p)$$

Так как мы берем 2 разные строчки, то либо $l \neq q$, либо $k \neq p$. Значит, так как A, B - матрицы Адамара либо $(b_l, b_q) = 0$, либо $(a_k, a_p) = 0 \Rightarrow (c_{kb+l}, c_{pb+q}) = 0 \ \forall kb + l \neq pb + q \Rightarrow$ C - матрица Адамара ■