3.12. Построение комбинаторов логических значений, булевых функций, операций с параметрами, проверки на ноль для нумералов Чёрча (с доказательством корректности)

Определение. *Комбинатором* называется замкнутый λ-терм (без свободных переменных).

Представление логических значений и булевых функций

Пусть

$$False = \lambda xy.y (= \overline{0})$$

$$True = \lambda xy.x$$

Получается, что

$$True\;M\;N = M$$

$$False\;M\;N = N$$

Тогда логические функции выражаются следующим образом:

$$And = \lambda pq.pqp$$

$$Or = \lambda pq.ppq$$

$$Not = \lambda p.p\;False\;True$$

Доказательство. *
1) $And = \lambda pq.pqp$
Если $p = 0$, то $p \wedge q = 0 = p$
Если $p = 1$, то $p \wedge q = q$
2) $Or = \lambda pq.ppq$
Если $p = 0$, то $p \vee q = q$
Если $p = 1$, то $p \vee q = 1 = p$
3) $Not = \lambda p.p\;False\;True$
Если $p = False$, то $FalseFalseTrue = True$ Если $p = True$, то $TrueFalseTrue = False$ ■

Представление арифметических опреаций на нумералах Чёрча

1) Inc – прибавление единицы ($Inc\overline{n} = \overline{n+1}$)

$Inc = \lambda nfx.f(nfx)$

Доказательство. $Inc\overline{n} = (\lambda nfx.f(nfx))\overline{n} = \lambda fx.f(\overline{n}fx) = \lambda fx.f(\lambda gy.\underbrace{g(g(g(...)))}_{n\text{раз}}fx) = \lambda fx.\underbrace{f(f(f(...(f(fx))...)))}_{n+1\text{раз}} = \overline{n+1}$ ■

2) Add – сложение

$Add = \lambda mnfx.mf(nfx)$

Доказательство. *
$Add\,\overline{m}\,\overline{n} = (\lambda mnfx.mf(nfx))\,\overline{m}\,\overline{n} = \lambda fx.\overline{m}f(\overline{n}fx) = \lambda fx.(\lambda gy.\underbrace{g(g(g(...)))}_{m\text{раз}})f(\underbrace{f(f(...))}_{n\text{раз}}) =$
$\lambda fx.\underbrace{f(f(f(...)))}_{m+n\text{раз}} = \overline{m+n}$ ■

3) $Mult$ – умножение

$Mult = \lambda mnfx.m(nf)x$

Доказательство аналогично.

Проверка на ноль для нумералов Чёрча

$$IsZero = \lambda n.n(\lambda x.False)True$$

Проверим для нуля:

$$IsZero\overline{0} = \overline{0}(\lambda x.False)True = True$$

Любое число, кроме нуля представимо в виде: $\overline{n+1}$. Проверим $IsZero$ для таких чисел:

$IsZero(\overline{n+1}) = \overline{n+1}(\lambda x.False)True = (\lambda fx.f(...))(\lambda x.False)True = ((\lambda x.False)(...)) = False$