## 3.5 (4) Несуществование универсальной тотально вычислимой функции.

**Определение:** $U : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \Rightarrow \{0,1\}^*$ называется *универсальной тотально вычислимой функцией*, если

1. $U$ вычислима и всюду определена
2. Если $f$ — всюду определённая вычислимая функция одного аргумента, то $\exists p \forall x U(p,x) = f(x)$

**Теорема:** Универсальной тотально вычислимой функции не существует

▲ Предположим, что такая функция существует. Тогда рассмотрим функцию $d(x) = U(x,x)$ - всюду определена и вычислима. Тогда функция $d'(x) = U(x,x)+1$ также всюду определена и вычислима. Значит, по определению универсальной тотально вычислимой функции $\exists p \forall x U(p,x) = d'(x)$. Рассмотрим $U(p,p) = d'(p) = U(p,p)+1$ - противоречие $\Rightarrow$ такой функции не существует ■

**Замечание:** Для обычных универсальных вычислимых функций такого противоречие не возникает, так как равенство $U(p,p) = U(p,p)+1$ верно, если $U(p,p)$ не определена

## 3.6 (5) Неперечислимость и некоперечислимость множества всюду определённых программ.

▲ Пусть это множество перечислимо (обозначим его как $A$). Решим с его помощью проблему самоприменимости. Пусть $F$ - исследуемая функция, имеющая номер $n$ в какой то главной универсальной вычислимой функции. Тогда

$$F'(x) = \begin{cases} x & \text{если } F(n) \text{ не завершилось за } x \text{ шагов} \\ \perp & \text{иначе не определена} \end{cases}$$

Значит $F'$ всюду определена $\Leftrightarrow$ $F(n)$ не останавливается. Пусть $F'$ имеет номер $m$. Тогда:

1. Запустить и сразу остановить $F(n)$
2. Проделать ещё 1 шаг в работе $F(n)$. Если $F(n)$ остановилось, вывести 1
3. Вывести перечисляющем алгоритмом ещё один элемент множества $A$. Если он равен $m$ (то есть $F'(x) \in A$, а значит всюду определена) вывести 0
4. Вернуться ко второму шагу

Так как $F$ или самоприменима, или несамоприменима, то или 1 или 2 шаг когда нибудь выведет результат, значит проблема самоприменимости решена, противоречие. Коперечислимость решается аналогично, только $F'(x) = F(n)$ (получается $F'$ не всюду определена $\Leftrightarrow$ F(n) не останавливается). ■