# Сборник распространенных вопросов, примеров и контрпримеров по курсу математического анализа 2 семестра

Коллектив 1 курса ФБМФ

1 июня 2020 г.

# Содержание

# 1 Многомерный анализ

## 1.1 Множества в $R^n$

1. **Приведите примеры разных метрик в $\mathbb{R}^n$**

Метрическое пространство - упорядоченная пара из линейного пространства и метрики, заданной на нём. Метрика - это достаточно произвольная функция, для неё требуется лишь выполнение 4 аксиом метрики:
1. $\rho(x,y) \geqslant 0 \quad \forall (x,y) \in M \times M$
2.$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3.$\rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall (x,y) \in M \times M$
4.$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)\ \forall x,y,z \in M$

- Обычная метрика:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

- Метрика городских кварталов - такая, в которой расстояния считаются параллельно осям:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$$

  Для этой метрики очевидно выполнение первых трёх аксиом, докажем четвёртую: $\rho(x,z) = |x_1 - z_1| + \ldots + |x_n - z_n| \leqslant (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|) + \ldots + (|x_n - y_n| + |y_n - z_n|) = (|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|) + (|y_1 - z_1| + \ldots + |y_n - z_n|) = \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow$ 4-я аксиома выполняется.

- Ещё один вариант метрики: $\rho(x,y) = \max_{k\in\{1,\cdots,n\}}(|x_k - y_k|)$ - для него 4-я аксиома проверяется аналогично.

- Также существует тривиальный пример дискретной метрики: $\rho(x,y) = 0$, если $x = y$, и $\rho(x,y) = 1$ во всех остальных случаях - легко убедиться, что все аксиомы верны.

*Определение 1. Пусть $X-$ некоторое множество точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой этого множества (относительно пространства $\mathbb{R}^n$), если существует $\varepsilon$-окрестность этой точки, содержащаяся в множестве $X$, т. е. суоествует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(x) \subset X$.*

2.**Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств, и объединение счетного числа открытых множеств открыты. Всегда ли открыто пересечение счетного числа открытых множеств?**

Пускай $G_1, \dots, G_m$ - конечный набор открытых множеств, докажем что $G = \bigcap_{i=1}^{m} G_i$ открыто. Возьмём произвольную точку $x \in G$, тогда по определению пересечения $x \in G_i \; \forall i \in \{1, \cdots, n\}$, а по определению открытого множества в каждое из $G_i$ $x$ входит с некоторой окрестностью, т.е. $\forall i = \{1, \dots, m\} \forall x \in G_i \quad \exists \varepsilon_i > 0 \quad U_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$. Т.к. набор конечен, из $\varepsilon_i$ можно выбрать минимальную $\varepsilon_0$, и тогда x входит в G с $\varepsilon_0$-окрестностью, что в силу произвольности выбора x и даёт то, что G открыто.

Доказательство для объединения даже проще - $\forall x \in G \; \exists i : x \in G_i$, причём по определению открытого множества $\exists \varepsilon : U_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$. Но эта же окрестность принадлежит и объединению - а значит, оно открыто.

Важно помнить, что утверждение неверно для счётного пересечения - выберем $G_n = (-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n})$, тогда пересекая по всем $n \in \mathbb{N}$ получаем отрезок $[0, 1]$ - а он, очевидно, открытым множеством не является (концевые точки входят без своих окрестностей).

Дадим ещё некоторые определения:

- Определение 2. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называют точкой прикосновения множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \bigcap X \neq \emptyset$

- Определение 3. Границей множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $\partial X = \bar{X} \setminus \operatorname{int} X$. Точки множества $\partial X$ называются граничными точками множества $X$

- Определение 4. Точку $x_0$ называют предельной для множества X, если $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \bigcap X \neq \emptyset$

- Определение 5. Точку $x_0$ называют изолированной точкой множества X, если $\exists \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(x) \cap X = x$

3.**Докажите, что любая изолированная точка множества X является точкой прикосновения, но не является предельной, верно и обратное**

Доказательство следует напрямую из определений - если точка изолированная, то существует такая её окрестность, которая пересекается с X лишь по самой точке x - а значит, пересечение любой окрестности x с

X непусто, а пересечение хотя бы некоторой проколотой окрестности - пусто.

Определение 6. Множество $G \in \mathbb{R}^n$ называют замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

4.**Докажите, что объединение конечного числа и пересечение счётного числа замкнутых множеств замкнуто. Верно ли это для объединения счётного числа замкнутых множеств?**

Обозначим $F = \bigcup_{k=1}^{m} F_k$, где $F_k$ замкнуты $\forall k \in \{1, ..., m\}$. Возьмём произвольную предельную точку x множества F, докажем что оно её содержит. Действительно, по определению предельной точки построим $\{x_n\} \subset F$ т.ч. $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Так как в объединении содержится лишь счётное количество множеств, хотя бы из одного $F_k$ мы сможем выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, целиком лежащую в $F_k$, и сходящуюся к x по свойству подпоследовательности (предположим что мы этого сделать не сможем, тогда получим что в $\{x_n\}$ лишь конечное число элементов - а это противоречит счётности $\mathbb{N}$). Но т.к. $F_k$ замкнуто, то $x \in F_k$, а значит и $x \in F$, чтд.

Для пересечения доказательство проще - так же выберем последовательность, сходящуюся к x, но по определению пересечения она лежит во всех множествах из пересечения, а значит получаем что x лежит во всех множествах пересечения(т.к. все множества из пересечения замкнуты), то есть лежит и в F, чтд.

В случае объединения счетного числа множеств легко построить похожий с п.2 пример: возьмём $F_n = [1/n; 1 - 1/n]$, и при объединении по всем $n \in \mathbb{N}$ получим (0,1), не являющийся замкнутым множеством (легко проверить что 0 - предельная точка, но при этом во множестве не лежит).

5. **Верно ли, что любая окрестность граничной точки множества G содержит в себе как внутренние точки самого G, так и внутренние точки его дополнения?**

Нет, неверно. Во-первых, можно взять изолированную точку y - тогда по определению некоторая её окрестность в пересечении с G будет содержать лишь y - а значит, никаких внутренних точек G в ней нет.

Можно привести и менее тривиальный пример: $G = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Во-первых, любая его точка является граничной, и это само по себе довольно интересно. Более того, для любой точки G никакая её окрестность не содержит внутренних точек ни самого G, ни его дополнения!(это легко показать, используя всюду плотность рациональных чисел в действительных)

6.**Существует ли множество, состоящее только из изолиро-**

**ванных точек, но имеющее предельную?**

Да, существует. Это множество $G = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$. Очевидно, что все его точки изолированные, а точка 0 является предельной(причём по теореме о единственности предела других предельных точек у этого множества нет).

7.**Существует ли открытое множество, не совпадающее с внутренностью своего замыкания?**

Да, существует. Например, круг в $\mathbb{R}^2$ с выколотым центром и границей - его замыкание это целиковый круг с границей, а внутренность замыкания - круг без границы, но содержащий центр.

8.**Существует ли множество, не открытое и не замкнутое?**

Да, это то же самое $G = (0,1)\cap\mathbb{Q}$. Возьмем точку 0 - она является предельной(к ней стремится последовательность $\frac{1}{n}$, лежащая в G), но сама в G не лежит. А точка $\frac{1}{2}$, к примеру, лежит в множестве, но не является внутренней(в любой окрестности есть иррациональные числа, в G не лежащие). Таким образом G не является ни открытым, ни замкнутым.

9.**Равномощны ли множества [0,1] и (0,1) $\subset \mathbb{R}$?**

Да, равномощны: рассмотрим отдельно множества рациональных и иррациональных точек каждого из интервалов. Очевидно, что множества иррациональных точек попросту совпадают, а множества рациональных оба счётны по теореме, доказанной в первом семестре, т.е. равномощны $\mathbb{N}$, а значит и друг другу.

10.**Существует ли несчётное, замкнутое множество, мера Лебега которого равна нулю?**

Да, и это крайне интересный пример - Канторово множество. Строится оно следующим образом: определим $K_0 = [0,1]$, $K_1 = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$, и дальнейшие множества по индукции - каждое следующее получается выкидыванием центральной трети каждого из отрезков без граничных точек. А само K определим как $K = \bigcap_{i=0}^{\infty} K_i$. Легко посчитать, что мера Жордана каждого $K_i$ равна $(\frac{2}{3})^n$, а потому мера (но уже Лебега, т.к. объединение счётного числа множеств) самого K равна нулю.

Докажем, что K несчётно. Заметим, что на каждом шаге мы делим отрезок на два, будем называть один из них левым, а другой правым. Любую граничную точку $K_i$ можно задать последовательностью переходов влево и вправо, т.е. на i-м шаге таких точек $2^i$. Но это значит что само K равномощно $2^{\mathbb{N}}$, т.е. несчётно, чтд.

Наконец, K действительно замкнуто, т.к. каждое $K_i$ замкнуто, а по пункту 4 пересечение счётного числа замкнутых множеств также замкнуто.

Отметим ещё интересные факты про K: оно не содержит в себе никакого отрезка(действительно, на некотором шаге он был бы разбит), все его точки граничные(в этом смысле оно похоже на $[0,1]\cap\mathbb{Q}$), а внутренность его замыкания пуста.

11.**Пусть $A$– множество изолированных точек некоторого множества $X\subset\mathbb{R}^n$. Доказать, что если множество $A$ бесконечно и ограничено, то оно не является замкнутым.**

Предельная точка множества А не может быть изолированной точкой множества $X$, т. к. в любой ее проколотой окрестности есть точки множества $A$, т. е. точки множества $X$.

12. **Может ли множество изолированных точек некоторого множества $X\subset\mathbb{R}^n$ быть несчётным?**

Нет. Пусть - множество изолированных точек $X$. Точка множества $A$ имеет проколотую окрестность, в которой нет точек $A$. Выберем в этой проколотой окрестности точку с рациональными координатами. Множество таких точек не более чем счетно, а значит и А тоже не более чем счётно.

13.**Может ли для двух множеств $X$ и $Y$ из $\mathbb{R}^n$ быть так, что $X\subset Y$, но $\partial Y\subset\partial X$, причем оба включения строгие?**

Да, может: $X=[0,1]\cap\mathbb{Q}, Y=[0,1], \partial X=[0,1], \partial Y=\{0;1\}$.

14.**Что представляет из себя замыкание графика $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ на $(0,1)$?**

Рассмотрим некоторую точку на $Oy$ с координатой t, где $-1\le t\le 1$. Для неё определён $\arcsin t$, причём уравнение $\frac{1}{x}=\arcsin t+2\pi k, k\in\mathbb{N}$ имеет бесконечно много решений, т.е. есть счётное число точек графика, из которых можно построить последовательность, сходящуюся к $(0,t)$. Значит, весь отрезок $Oy[-1;1]$ входит в замыкание(очевидно, в него входит также весь исходный график).

15.**Является ли замыкание из предыдущего пункта линейно связным?**

Нет, не является. Предположим противное: пускай мы можем соединить какую-либо точку $(0,t)$ с точкой с ненулевой координатой непрерывной кривой. Но т.к. при $x\neq 0$ она должна совпадать с графиком функции, получаем $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=t$, а это неверно - противоречие!

## 1.2 Предел функции многих переменных

1. **Возможно ли такое, что у функции в точке существуют и равны оба повторных предела, а "настоящего"не существует?**

Да, возможно. Так,

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Но в то же время, перейдя к полярным координатам, получим что "настоящего"предела нет:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \sin\varphi\cos\varphi$$

Более простой пример: - функция равна 1 на осях и 0 во всех остальных точках.

2.**Возможно ли такое, что функция в точке имеет "настоящий"предел, но не имеет повторных?**

Да, возможно и такое:

$$g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, т.к. g - произведение ограниченной функции $\sin\frac{1}{x}$ на бесконечно малую $(x^2+y^2)$, но повторного предела тут не существует, т.к.

$$\nexists \lim_{x\to 0} y^2\sin\frac{1}{x}$$

Похожий пример, когда не существуют даже оба повторных предела, но существует настоящий:

$$u(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$$

Замечание: по теореме о повторных пределах если $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и $\forall y$ из некоторой окрестности $(x_0,y_0)$ $\exists \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$, то повторный предел $\lim_{y\to y_0}\psi(y)$ существует и равен "настоящему". И следствие из неё: если оба повторных предела существуют(это важно!), но различны - "настоящего"предела точно нет! Пример такой функции:

$$z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0, \\ 0,\ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} z(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} z(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

3. **Пускай функция имеет "настоящий"предел в точке. Может ли она не иметь предела по какому либо направлению, или**

**иметь, но отличный?**
Нет, согласно теореме из курса если есть "настоящий"предел, то есть и по любому направлению, причём их значения совпадают.
4.**Пускай функция имеет в точке совпадающие пределы по всем направлениям. Может ли она не иметь "настоящего"предела?**
Да, может:

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi} = 0 \ \ \forall\varphi$$

Но если взять предел вдоль кривой $y = x^2$, получим $\frac{1}{2}$, а значит настоящего предела нет.
Более простой пример:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, \ y = x^2, \\ 0, \ y \neq x^2 \end{cases}$$

5. **Как соотносится предел функции вдоль кривой и "настоящий"предел?**
Если у функции есть совпадающие пределы по всем кривым, тогда, конечно, есть и настоящий, но проверить такое условие не представляется возможным.
В то же время можно придумать довольно хитрую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}, \ y \neq 0, \\ 0, \ y = 0 \end{cases}$$

Можно показать, что предел в нуле вдоль любой кривой вида $x = \alpha t^n, y = \beta t^m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ равен нулю, а "настоящего"всё равно не существует.
6. **А почему тогда работает переход к полярным координатам? В чём отличие от простого предела по направлениям?**

При переходе к полярным координатам мы оцениваем супремум значения функции по всем $\varphi$, в то время как при поиске предела по направлению смотрим на каждый угол по отдельности.

$$f(x,y) = \frac{|x|^{1/3}|y|^{3/4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \rho^{1/12}\cdot|\sin\varphi|^{1/3}|\cos\varphi|^{3/4} \leq \rho^{1/12} \longrightarrow 0$$

Тут смогли ограничить выражением, не зависящим от $\varphi$, и всё получилось. А тут не сможем:

$$g(x,y) = \frac{x^3}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \rho\frac{\cos^3\varphi}{\sin\varphi}$$

Синус сколь угодно мал, и ограничение не получается. Несмотря на то, что для каждого отдельно взятого угла предел равен нулю, вдоль кривой $y = x^3$ получим бесконечность, то есть "настоящего"предела нет.

7. **Верно ли, что любое о-малое от $\rho$ является о-малым от x?** Нет, неверно. Например (в нуле):

$$\frac{y^2}{\rho} \leq \frac{y^2}{y} = y \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Но

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} \nexists$$

## 1.3 Дифференцируемость функции многих переменных

1. **Следует ли из наличия частных производных непрерывность функции?**

Нет, не следует. Контрпример:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \neq 0, \\ 0, & else \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция не непрерывна, т.к. её предел в нуле по направлению x=y равен 1, и не совпадает со значением в нуле. Но при этом легко по определению посчитать её частные производные, и они будут существовать и равняться нулю.

Более того, существует пример функции, разрывной в каждой точке, но всё равно имеющей частные производные в нуле:

$$z(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \times (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \\ 1, & else \end{cases}$$

Легко показать, что:

$$z'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{z(x,0)-z(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x} = 0$$

2.**Следует ли из непрерывности наличие частных производных?**

Нет, не следует - пример $|x|$ в нуле, точно такой же как для функций одной переменной.

3.**Следует ли из наличия частных производных и непрерывности дифференцируемость?**

Нет, не следует. Контрпример:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Функция непрерывна:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho} = 0$$

И имеет обе частные производные:

$$g'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x\cdot 0}{\sqrt{x^2+0^2}}}{x} = 0$$

Но при этом не дифференцируема:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - g'_x(0,0) - g'_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho^2} \nexists$$

4.**А какое же тогда условие всё-таки является достаточным для дифференцируемости функции в точке?**

Согласно доказанной в курсе теореме, если функция определена в некоторой окрестности точки, и имеет в каждой точке этой окрестности (!) ограниченные частные производные, которые при том непрерывны в данной точке, тогда функция в точке дифференцируема.

*Замечание: это условие является достаточным, но не необходимым - см. пункт 6*

5. **А из дифференцируемости следует непрерывность и наличие частных производных?**

Да, следует - это доказывается в соответствующих теоремах курса.

6.**Из дифференцируемости функции в точке следует её непрерывная дифференцируемость?**

Нет, не следует. Контрпример:

$$h(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0),\\ \hfill 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю легко доказать, что в нуле функция имеет обе частные производные и они равны нулю, но она ещё к тому же и дифференцируема. Но если мы посчитаем частную производную по x в любой другой точке(пользуясь обычными правилами дифференцирования), получим что она не непрерывна в нуле:

$$h'_x(x,y)=2x(\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{\cos\frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2})$$

Докажем, что эта функция не имеет предела в нуле, по Гейне. Возьмём $(x_n,y_n)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},0)$ - последовательность Гейне в нуле, и для неё получим отсутствие предела:

$$h'_x(x_n,y_n)=2x_n(\sin(2\pi n)-2\pi n\cos(2\pi n))=-2\sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n)=-2\sqrt{2\pi n}(-1)^n$$

6.1.**Можно ли считать частные производные во всех точках просто "по формулам"? Если нет, то почему?**

Легко убедиться, что это часто не работает (к примеру для нашей функции g(x,y)), и производные в особых точках нужно считать по определению. Ведь если мы считаем производную по формуле и потом подставляем значение аргументов в особой точке, мы тем самым считаем эту производную непрерывной(т.е. считаем что её значение в этой точке совпадает с её пределом), а это далеко не всегда верно - как мы убедились в этом примере, даже из дифференцируемости может не следовать непрерывная дифференцируемость, не говоря уж о том чтобы она следовала просто из наличия частных производных.

7.**Что такое инвариантность формы дифференциала? Обладают ли ей первый и второй дифференциалы функции многих переменных?**

Инвариантностью формы дифференциала называют независимость формы его записи от того, зависит ли функция от независимого аргумента x, или от другой функции x(t). Этим свойством, как и в случае функций одной переменной, обладает первый дифференциал, но не обладает второй и более высоких порядков(т.к. при втором дифференцировании появляется слагаемое $d^2x$, равное нулю в случае независимой переменной, но принимающее различные ненулевые значения в случае функции).

*Замечание: если замена переменных линейная, то $d^2x_i = 0$, и второй дифференциал, как и все последующие, также обладает инвариантностью формы.*

8.**Обязательно ли равны смешанные частные производные 2-го порядка функции, взятые в разном порядке?**

Нет, необязательно. Контрпример("пример Шварца"):

$$w(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Легко доказать, что у данной функции $w'_x(0,y) = -y \ \forall y \in \mathbb{R}$; $w'_y(x,0) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$, и отсюда $w''_{xy}(0,0) = -1$; $w''_{yx}(0,0) = 1$.

9.**Когда смешанные частные производные функции 2-го порядка всё же равны?**

Согласно теореме, доказанной в курсе, если функция определена в некоторой окрестности точки, имеет в этой окрестности вторые частные производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$, которые непрерывны в данной точке, то в этой точке их значения совпадают.

10. **Верно ли, что существование дифференциала функции в точке эквивалентно её дифференцируемости в этой точке?**

Да, эти понятия просто определяются одно через другое, и потому эквивалентны.

Для запоминания необходимых условий и достаточных условий дифференцируемости, а также соответствующих контрпримеров полезна следующая схема (см. рис. 10.2):

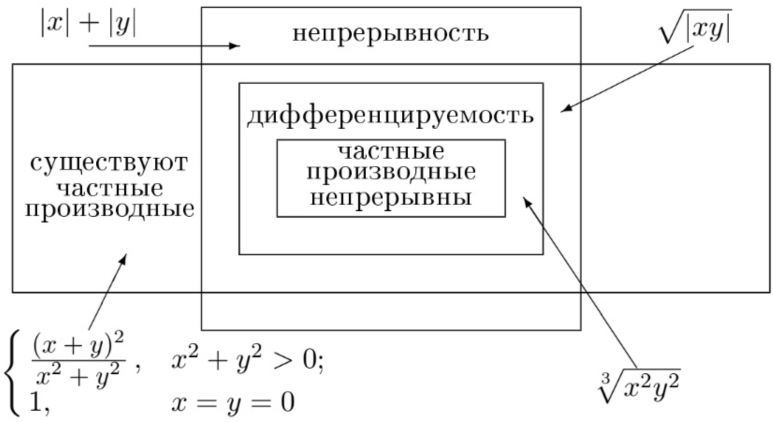


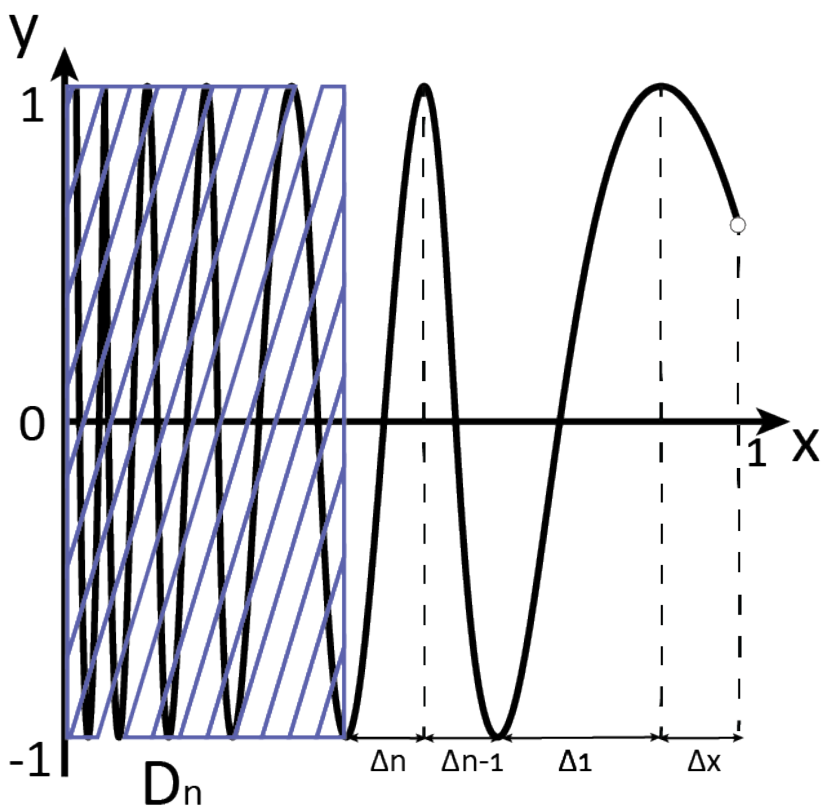

Рис. 10.2

## 1.4 Мера Жордана

1.**Измеримо ли по Жордану множество $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$?**
Нет, неизмеримо. Докажем, что его верхняя мера Жордана $\geq 1$. Действительно, пусть мы покрыли X семейством отрезков так, что их суммарная длина меньше 1. Но тогда получили хотя бы один непокрытый интервал - а в нём по теореме о всюду плотности рациональных чисел есть элементы X - противоречие! Теперь докажем, что его нижняя мера Жордана ноль. Действительно, пусть в X содержится хоть один отрезок ненулевой длины - но тогда в нём есть иррациональные числа - противоречие! Значит, верхняя и нижняя меры Жордана не совпадают, и множество неизмеримо.

*Замечание: X измеримо по Лебегу, причём его мера равна нулю.*

2. **Пусть Г - график $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Измеримо ли по Жордану а)Г; б)замыкание Г?**



а)Рассмотрим f(x) на $\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi}\right) = [a, b)$.

На нем f(x) монотонна. Разобьем [a, b) на k равных частей: $X_i = [e_{i-1}, e_i) \times [f(c_{i-1}), f(c_i)]$

Так как $\mu^*(c_i - c_{i-1})(f(c_{i-1}) - f(c_i)) = \frac{b-a}{k}(f(c_{i-1}) - f(c_i))$

то $\mu^*(\Gamma_{\frac{f(x)}{\Delta}}) \leq \sum_{i=0}^{k} \mu^*(x_i) = \frac{b-a}{k} \times (\sum_{i=0}^{k}(f(c_{i-1}) - f(c_i))) = \frac{b-a}{k}(f(c_{i-1}) - f(c_i)) = 2\frac{b-a}{k}$

Так как $\lim_{x\to a} \frac{b-a}{k} = 0$, то $\mu^*(\Gamma_{\frac{f(x)}{\Delta}}) = 0 => \mu(\Gamma_{\frac{f(x)}{\Delta}}) = 0$

Аналогично на промежутке $\Delta^*[\frac{\pi}{2}, 1]\mu(\Gamma_{\frac{f(x)}{\Delta}}) = 0$

б) $D_n = (0, \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}) \times [-1, 1]$

Получим: $\Gamma_{f(x)} \subset D_n \cup (\bigcup_0^n \Gamma_{\frac{f(x)}{\delta_i}})$

При этом $\mu^*(D_n \cup \bigcup_0^n \Gamma_{\frac{f(x)}{\delta_i}}) = \mu^*(D_n) \to 0 => \mu^*(\Gamma_{f(x)} = 0) => \mu_*\Gamma_{f(x)} = \mu^*\Gamma_{f(x)} = \mu\Gamma_{f(x)} = 0 => \Gamma_{f(x)}$ - измеримо по Жордану

$\Gamma_{f(x)}$ измерим по Жордану и его мера $= 0$. Множество $x = 0 : -1 \leq y \leq 1$(оно входит в замыкание - см. пример 14 пункта 1) измеримо по Жордану и его мера также равна 0, так как клетка в $R^2$ - прямоугольник. Так как эти два множества не имеют общих точек, то замыкание, являющееся объединением этих множеств тоже измеримо по Жордану и его мера равна 0.

3.**Измеримо ли множество членов сходящейся последовательности?**

Пусть $\{x_k\}_i^\infty$ сходящаяся последовательность точек $x_k \longrightarrow a$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\Omega$ множество, состоящее из членов этой последовательности. Тогда множество $\Omega$ измеримо и $\mu(\Omega) = 0$. В качестве множества $A$ можно выбрать пустое множество $\emptyset$. Множество $B$ строится следующим образом (см. рис 2). Согласно определению предела:

$$\forall\varepsilon_1 > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N \implies \rho(x_k, a) < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2},$$

начиная с некоторого номера, все члены последовательности за исключением, быть может, конечного числа, содержатся в шарике радиуса $\frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}$ который, в свою очередь, можно вписать в клетку со стороной $\sqrt[n]{\varepsilon}$ и, следовательно, мерой $\varepsilon$. Каждую из оставшихся $N$ точек можно заключить в клетку с центром в этой точке и мерой $a$. Значение для меры этой клетки $a$ выбирается исходя из условия $a \cdot N_\varepsilon = \varepsilon$. В качестве множества $B$ теперь можно выбрать объединение всех вышеназванных клеток. Таким образом, выполняется оценка:

$$\mu(B) \leq \varepsilon + a \cdot N = 2\varepsilon.$$

$\Omega$ измеримо согласно определению измеримого множества:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A = \emptyset, B : A \subset \Omega \subset B \qquad \mu(B) - \mu(A) \leq \varepsilon_1.$$

4.**Существенно ли в предыдущем пункте требование существования предела?**

Да, существенно. Например, множество $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ имеет ту же мощность(оно счётно), но не имеет предела, и оно оказывается неизмеримо(см. пример 1).

5.**Доказать, что спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^n$ измерима по Жордану, причём её мера ноль.**

Поскольку кривая спрямляемая, согласно определению, её длина $s$ определена и конечна. Пусть теперь зафиксировано некоторое натуральное число $n$. На кривой можно отметить точки так, чтобы каждая следующая точка находилась на расстоянии $\frac{s}{n}$ вдоль кривой от предыдущей (первая точка располагается в начале кривой). Таким образом кривая будет поделена этими точками на $n$ одинаковых дуг длины $\frac{s}{n}$. Для каждой из $n+1$ точек рассматривается квадрат со стороной $\frac{2s}{n}$ с центром в этой точке. Каждый такой квадрат полностью содержит дугу кривой, выходящую из его центра. Множество $B$ полагается равным объединению всех квадратов, содержит внутри себя всю кривую, а также

$$\mu(B) \leq \left(\frac{2s}{n}\right)^2 (n+1) \to 0, n \to \infty.$$

Множество $A = \emptyset$. В таком случае несложно проверить определение измеримого множества с $\mu = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \exists A, B : \qquad A \subset \Omega \subset B \implies \quad \mu(B) - \mu(a) < \varepsilon.$$

6.**Верно ли, что если верхняя мера Жордана некоторого множества равна нулю, то оно измеримо по Жордану?**

Да, верно. Нижняя мера всегда не больше верхней, и при этом неотрицательна - а значит, она тоже равна нулю, т.е. верхняя и нижняя меры совпадают, а значит множество измеримо по Жордану и его мера ноль.

7.**Доказать, что нижняя мера Жордана множества, содержащего хоть одну внутреннюю точку, строго положительна.**

Раз точка $a$ внутренняя для $X$, то $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon a \subset X$. Нижняя мера - супремум мер клеточных множеств, содержащихся в данном, а в окрестность всегда можно вписать ненулевую клетку, поэтому такой супремум строго положителен.

# 2 Интегралы

## 2.1 Неопределённый интеграл

1.**Что называют первообразной функции?**

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке $X$ если функция $F(x)$ непрерывна на $X$ и $\forall x \in X \exists F'(x) = f(x)$ (в концах промежутка, если они принадлежат ему, производная предполагается односторонней, т.е. для всех $x \in (a, b)$ существует $F'(x) = f(x)$, а на концах отрезка $[a, b]$ значения функции $f$ равны односторонним производным функции $F : f(a) = F'_+(a) = \lim_{x\to a+0} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$; $f(b) = F'_-(b) = \lim_{x\to b-0} \frac{F(x)-F(b)}{x-b}$

2. **Верно ли, что неопределённый интеграл есть первообразная плюс число?**

Нет, неверно - неопределённый интеграл есть множество всех первообразных функции, а не какая-то конкретная из них.

3.**Следует ли из следующих формул:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$$

что $\arcsin x = -\arccos x$?

Очевидно, это неверно - пример показывает, что не стоит забывать о том, что C - не конкретное число, а переменная, пробегающая все действительные числа, и в данном случае на самом деле $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

4.**Возможно ли такое, что константа C различается на разных промежутках интегрирования?**

Да, у некоторых функций с особенностями первообразную "склеивают"из двух отдельных, и это может привести к тому, что константы различаются, так $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ на промежутке $(0; +\infty)$ и $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$ на промежутке $(-\infty; 0)$. Эти две записи объединяются одной формулой $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Понимать ее нужно так: $\int \frac{dx}{x} = \{\ln x + C_1\}$ если $x > 0$ и $\{\ln(-x) + C_2\}$ если $x < 0$.

На этот счёт есть очень интересный пример, в котором легко сделать ошибку: найти $\int e^{-|x|}dx$. Решим эту задачу для двух промежутков по отдельности: на $(-\infty, 0)$ $\int e^x dx = e^x + C_1$, на $(0, +\infty)$ $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_2$. Если забыть про константы и записать просто $\int e^{-|x|}dx = sign(x)e^{-|x|} + C$, получим разрывную в нуле функцию, которая не может быть первообразной! Достаточно лишь устранить разрыв, подняв левую ветку на 2:

$\int e^{-|x|}dx = sign(x)e^{-|x|} - sign(x) + C$. Эта функция непрерывна и, как несложно проверить, дифференцируема в нуле.

Очень похожа задача найти $\int \max(1;x^2)\,dx$ - тут также смысл в том, чтобы состыковать первообразные разных участков в одну непрерывную.

5. **Найти интеграл:** $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$

Представим $x^2$ так:

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1$$

Поэтому

$$\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}} = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{dx}{(1-x)^{98}} - 2\int \frac{dx}{(1-x)^{99}} +$$

$$+\int \frac{dx}{(1-x)^{100}} = \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C, \quad x \neq 1$$

(формально это разложение функции $x^2$ по степеням (1-x))

6. **Найти интеграл:** $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$

Выполнив тригонометрическую замену $x = a\sin t$(она корректна, т.к. $|x| \leq |a|$), получим:

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C, \quad |x| \leqslant a$

*Замечание: для интеграла* $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$ *метод решения похожий, но т.к. в этом случае* $|x| \geq |a|$*, тригонометрическая замена не подходит, а вместо неё используется гиперболическая* $x = a \cdot cht$

## 2.2 Интеграл Римана

1. **Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке [a,b]. Верно ли, что она имеет на этом отрезке первообразную?**

Нет, неверно. Контрпример: $f(x) = signx$ на [-1,1] - очевидно, функция интегрируема, но "кандидат"на первообразную |x| не дифференцируем в нуле, и избавиться от этого никак невозможно.

2.**Пусть функция f имеет первообразную на [a,b]. Верно ли, что она интегрируема по Риману на этом отрезке?**

Нет, неверно. Контрпример:

$$g(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

Прямым дифференцированием легко убедиться, что функция

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

является первообразной g(x), но при этом g(x) неограничена на [0,1] и, следовательно, не интегрируема по Риману.

3.**Верно ли, что любая сумма Римана может быть ограничена сверху суммой Дарбу?**

Да, верно - слагаемые суммы Римана включают в себя в качестве множителей значения функции в какой-то точке интервала разбиения, а слагаемые верхней суммы Дарбу по тому же разбиению супремум этих значений, а потому всегда ограничивают сумму Римана сверху.

4.**Верно ли, что дифференцируемая на множестве функция интегрируема на нём по Риману?**

Нет, это верно лишь для ограниченных функций - тогда из дифференцируемости следует непрерывность, и доопределив функцию до непрерывной на замкнутом множестве получим, что она интегрируема по достаточному условию. Но, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ дифференцируема на (0,1], но на нём не интегрируема, т.к. даже не ограничена.

5.**Верно ли, что любое произведение интегрируемых по Риману функций интегрируемо ли по Риману?**

Да, верно. Пусть $f$ и $g$ ограничены константой $M$. Если выполняется

$$\Omega(f, \tau) < \varepsilon, \Omega(g, \tau) < \varepsilon$$

то из неравенства $|ab - cd| \leqslant |b| \cdot |a - c| + |c| \cdot |b - d|$ следует

$$\Omega(fg, \tau) \leqslant M\Omega(f, \tau) + M\Omega(g, \tau) \leqslant 2M\varepsilon$$

где $\Omega$ - интегральная сумма колебаний(сумма произведений модулей колебания на длины соответствующих отрезков разбиения)

$$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \omega(f, \Delta)|\Delta|$$

где $\omega$ - модуль колебания (разность между максимумом и минимумом функции на промежутке)

$$w(f; [a, b]) := \sup_{x', x'' \in [a,b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$$

6.**Интегрируемы ли функции Дирихле и Римана?**

У функции Дирихле все нижние интегральные суммы Дарбу равны нулю, а верхние 1, такк как на любом интервале можно найти как рациональную точку, так и иррациональную. Следеовательно, функция Дирихле неитегрируема.

Все нижние интегральные суммы функции Римана равны нулю, а верхние положительны. Утверждается, что $\forall Q \in \mathbb{N}$ найдется верхняя сумма, которая меньше, чем $\frac{2}{Q}$. Для этого возьмем разбиение, отрезки которого, содержащие конечное множество $\frac{p}{q}|0 \leq p \leq q, 1 \leq q \leq Q\Big\}$ имеют суммарную длину $\frac{1}{Q}$. Вклад этих отрезков в верхнюю интегральную сумму не превосходит $\frac{1}{Q} \cdot \max f = \frac{1}{Q}$. Вклад остальных отрезков разбиения ( каким бы оно ни было ) в верхнюю интегральную сумму не превосходит $\frac{1}{Q}$, поскольку на них $\max f \leq \frac{1}{Q}$ Искомое разбиение построено. Следовательно, функция Римана интегрируема по Риману, и притом её интеграл по любому конечному промежутку равен нулю.

7.**Верно ли, что композиция интегрируемых по Риману функций интегрируема?**

Нет, неверно. Возьмём $f(x) = 0, x = 0$ и $1, x \in (0, 1]$ - она имеет лишь один разрыв и ограничена, а потому интегрируема. В качестве $g(x)$ возьмём функцию Римана - как доказано в предыдущем пункте, она интегрируема. Но $f(g(x))$ - не что иное как функция Дирихле, а она уже не интегрируема!

*Замечание: для интегрируемости композиции достаточно, чтобы функция $g(x)$ была интегрируема, а $f(x)$ - непрерывна.*

8.**Чему равен интеграл нечетной функции на отрезке [-a,a]?**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} -f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

9.**Верно ли, что для любой непрерывной на [a,b] функции существует точка с $a \leq c \leq b$ такая, что: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$?**

Да, верно. Этот факт называется теоремой о среднем значении.

Из неравенства $m \leq f(x) \leq M$ по свойству монотонности интеграла имеем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Обозначим $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Так определённое число $\mu$ называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, откуда и название теоремы. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то в качестве $m$ и $M$

можно взять её наибольшее и наименьшее значения (которые, по теореме Вейерштрасса, достигаются), тогда по известной теореме существует такая точка $\epsilon \in [a;b]$, что $f(c) = \mu$, поэтому утверждение теоремы можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

10. **Интегрируема ли по Риману функция $\sin\frac{1}{x}$, доопределенная в нуле как 0, на отрезке [0,1]?**

Да, несмотря на разрыв второго рода в нуле, функция всё же интегрируема. Докажем это: выберем произвольную $\varepsilon > 0$, и разобъём отрезок [0,1] на $[0, \frac{\varepsilon}{4}], [\frac{\varepsilon}{4}, 1]$. На втором функция непрерывна, а потому интегрируема по достаточному условию, значит $\exists T_1$ - разбиение второго отрезка такое, что $S(T_1) - s(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. На первом же промежутке колебания функции хоть и велики, но по модулю не превышают $(1-(-1)) \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$, значит добавляя этот отрезок к разбиению второго получим разбиение T, для которого $S(T) - s(T) < \varepsilon$, а значит функция интегрируема согласно критерию интегрируемости.

11.**Верно ли, что если ограниченная функция имеет на отрезке лишь конечное число разрывов, то она интегрируема на нём по Риману?**

Да, верно - доказательство можно провести абсолютно аналогично с п.10, обобщая на конечное число точек разрыва.

12.**Верно ли то же утверждение для произвольной функции?**

Нет, неверно - разрыв 2 рода может привести к неограниченности функции(например $\frac{1}{x}$ в нуле), а тогда функция не интегрируема, т.к. не выполнено необходимое условие.

13.**Сформулируйте теорему о замене переменного в определенном интеграле.**

Если

$$\alpha_0 \in (\alpha;\beta), \quad \beta_0 \in (\alpha;\beta), \quad a_0 = \varphi(\alpha_0), \quad b_0 = \varphi(\beta_0)$$

То имеет место формула

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

14.**Пусть $f \in C([0,+\infty))$ и существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Чему равен $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx$?**

Сделаем замену $t = nx; dx = \frac{1}{n}dt$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{f(t)}{n}dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(t)dt$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x > \delta \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^\delta f(t)dt + \frac{1}{n}\int_\delta^T (f(t) - A)dt + \frac{1}{n}\int_\delta^n Adt \leqslant$$

Первый интеграл не зависит от n, а потому ограничим его сверху некоторой константой C, и получим, выбрав нужную $\delta$:

$$\leqslant \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon(T-\delta)}{n} + \frac{A(n-\delta)}{n} \leqslant A + 3\varepsilon \to A$$

## 2.3 Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

1.**Можно ли утверждать, что $\int_a^{x_0} f(t)dt$ есть первообразная для $y = f(t)$?**

Да, если $f(t)$ непрерывна в точке $x_0$.

Доказательство. Вычитая из $\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}$ предполагаемый предел $f(x_0)$, имеем при $x_0 + \Delta x \in [a, b]$

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\, dt$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности $f$ в точке $x_0$

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) : |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ если } t \in [a, b], |t - x_0| < \delta$$

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta$ и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ $\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant$
$\leqslant \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\, dt \leqslant \varepsilon \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1 \cdot dt = \varepsilon$

С помощью этого утверждения доказывается формула Ньютона-Лейбница.

2.**Пусть функция $f$ интегрируема на $[a, b]$ и имеет первообразную $F$ на отрезке $[a, b]$. Доказать, что верно равенство $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.**

Этот очень важный пример - обобщение формулы Ньютона-Лейбница на функцию не непрерывную, но всё же имеющую некоторую первообразную. Важно понимать, что тут нельзя пользоваться дифференцируемостью интеграла с переменным верхним пределом, потому что она имеет место лишь для непрерывной подынтегральной функции.

Произвольным образом разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots$ $b$ По теореме Лагранжа о среднем (можем применить к F, т.к. первообразная по своему определению дифференцируема):

$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = f(\xi_n)\Delta x_n, \text{ где } \xi_n \in [x_{n-1}; x_n]$$

Тогда:

$$F(b)-F(a)=\left(F\left(x_n\right)-F\left(x_{n-1}\right)\right)+F\left(x_{n-1}\right)-\ldots-F\left(x_1\right)+\left(F\left(x_1\right)-F\left(x_0\right)\right)= \\ =\sum_{i=1}^n f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x)dx,$$

3.**Верно ли, что если функция $f(x)$ ограничена на отрезке [a,b], то и функция $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, t\leq b$ ограничена на этом отрезке?**

Да, верно. Несложно заметить, что если $f(x)\leq C$, то $F(x)\leq C\cdot(b-a)\in\mathbb{R}$.

4.**Верно ли то же для полуинтервала, возможно бесконечного?**

Нет, для бесконечного полуинтервала это уже неверно: легко привести пример константы, ограниченной на любом отрезке, интеграл с переменным верхним пределом от которой, безусловно, ограниченным не является.

5.**Верно ли, что если $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ всюду дифференцируема, то $F'(x)=f(x)\forall x$?**

Нет, это неверно - рассмотрим функцию Римана, как ранее доказано, она интегрируема, причём интеграл от неё - тождественный ноль, таким образом $F(x)\equiv 0$, и $F'(x)\equiv 0$, но $f(x)\not\equiv 0$.

6.**Найти** F′(x), **где** $F(x)=\int_2^x \frac{e^t}{t^2+1}dt.$ $\left(f(t)=\frac{e^t}{t^2+1}\right)$

Можно, конечно, взять определенный интеграл, и уже потом взять производную от полученной функции, но это нерационально. Сделаем проще, с помощью свойства интеграла с переменным верхним пределом:

$$F'(x)=f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$$

7.**Найти** F′(x), **где** $F(x)=\int_2^{\sin x} \frac{e^t}{t^2+1}dt.$ $\left(f(t)=\frac{e^{\sin t}}{\sin^2 t+1}\right)$.

На этот раз на верхнем пределе не просто $x$, а $\sin x$. Значит, $F'(x)$ это уже производная сложной функции:

$$(F(x))'=(F(x))'_{\sin x}\cdot(\sin x)'=f(\sin x)\cdot\cos x=\frac{e^{\sin x}}{\sin^2 x+1}\cdot\cos x$$

## 2.4 Геометрические приложения определённого интеграла

1. **Как вычислить площадь фигуры?**

Плошадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$ и кривыми $y = f_1(x), \quad y = f_2(x)$ такими, что для любых $a \leqslant x \leqslant b \quad f_1(x) \leqslant x \leqslant f_2(x)$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Пусть функция $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, где $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, непрерывна и неотрицательна на $[\alpha; \beta]$. Плоицадь сектора, ограниченного графиком функции $r(\varphi)$ в полярных координатах и соответствуюшими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$$

Пример: Круг $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ измерим и имеет меру (площадь) $\pi r^2$

Доказательство. Заметим, что полукруг $C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$ является криволинейной трапецией: $C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$ Поэтому $\mu(C_+) = \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - x^2}$. Производя замену $x = r \sin \varphi$, получаем $\mu(C_+) = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi r^2}{2}$ В силу симметрии нижний полукруг $C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \ \leq r^2, y \geq 0\}$ имеет ту же меру: $\mu(C_-) = \frac{\pi r^2}{2}$ Поскольку эти два полукруга не имеют обших внутренних точек, то $\mu(C) = \mu(C_- \bigcup C_+) = = \mu(C_-) + \mu(C_+) = \pi r^2$

2.**Как вычислить длину кривой?**

$y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

При параметрическом задании $x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leqslant t \leqslant b$

$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Если кривая задана в полярных координатах $\rho = f(\varphi) \ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$$

3.**Как вычислить объем тела вращения?**

Объем тела, полученного вращением кривой $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$ вокруг оси $Ox$

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx$$

Если площадь сечения тела, перпендикулярного оси $Oz$ и отстоящего от начала координат на расстояние $z$, равно $S(z)$ $a \leqslant z \leqslant b$, его объем

$$V = \int_a^b S(z)dz$$

Аналогичные формулы имеют место, если вместо оси $Oz$ взять ось $Ox$ или $Oy$

4.**Как вычислить площадь тела вращения?**

При $y = y(x)$

$$S = 2\pi \int_0^b |y(x)|\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

При $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta]$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

## 2.5 Несобственный интеграл от знакопостоянных функций

1.**Пускай интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходятся. Что можно сказать о сходимости интеграла $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$?**

Такой интеграл может как расходиться, так и сходиться. Легко привести довольно тривиальные примеры: в первом случае $f = g = \frac{1}{x}$, во втором $f = \frac{1}{x}, g = -\frac{1}{x}$.

2. **Используя критерий Коши сходимости несобственного интеграла, доказать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.**

Вспомним критерий Коши при $b = +\infty$: если функция $f$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b^{'}]$, где $b^{'} > a$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \to \exists \Delta > a : \forall b', b'' > \Delta \to \left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Из отрицания условия Коши, расходимость интеграла означает то, что:

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall \Delta > a \to \exists b', b'' > \Delta : \quad \left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Так как $\int_{b'}^{b''} \frac{dx}{x} = \ln \frac{b''}{b'}$, то возьмём $b'' = 2b', b' = n$, $b'' = 2n$. Тогда $\exists \varepsilon = \ln 2 : \forall \Delta > 1 \rightarrow \exists b' = n > \Delta, \exists b'' = 2n > \Delta : \left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| = \varepsilon$. Значит, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится по критерию Коши.

3. **Если функция $f$ неотрицательна при $x \geqslant a$, и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то: а) обязательно ли функция $f$ ограничена; б) обязательно ли функция $f$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ в) каков будет ответ на эти вопросы, если дополнительно потребовать, что функция $f$ была строго положительна при $x \geqslant a$?**
В отличие от рядов, с интегралами условия а и б не являются необходимыми даже в случае знакопостоянных функций, хотя интуитивно представить себе это довольно сложно. Для примера нам придётся построить достаточно хитрую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} N^2, \ x \in [N; N + \dfrac{1}{N^4}]; N \in \mathbb{N} \\ 0, \ else \end{cases} \tag{1}$$

Полученную функцию несложно представить - она представляет собой совокупность прямоугольников, появляющихся на каждом натуральном числе, и с увеличением номера все более высоких и более узких. Для вычисления интеграла воспользуемся его геометрическим смыслом - площадь под графиком. Ширина каждого прямоугольника равна $\frac{1}{N^4}$, а высота $N^2$. Поэтому его площадь $\frac{1}{N^2}$, а интеграл сводится к сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который, как известно, сходится.

Этот пример можно дополнить и чтобы он подходил под в - вместо нуля задать функцию равной, например, $\frac{1}{N^4}$, и несложно проверить что интеграл в таком случае всё равно сойдётся.

4. **Сходится ли** $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$?
Нет. Сперва может показаться, что это интеграл есть ноль, однако в несобственном смысле этот интеграл расходится. Действительно, $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$. Здесь каждый интеграл, очевидно, расходится, а значит по определению не может сходиться и исходный.

*Замечание: этот интеграл всё же сходится в смысле главного значения Коши:*

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

*и в этом смысле он, как и кажется интуитивно, равен нулю.*

## 2.6 Несобственный интеграл от знакопеременных функций

1. **Известно, что интегралы $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ сходятся условно. Может ли интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ а)сходиться абсолютно; б)сходиться условно; в)расходиться?**

Да, все эти случаи возможны:

а)

$$f = g = \frac{\sin x}{x}, fg = \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

б)

$$f = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, g = \frac{2\cos x}{\sqrt{x}}, fg = \frac{\sin 2x}{x}$$

в)

$$f = g = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, fg = \frac{\sin^2 x}{x}$$

2.**Известно, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится условно, а интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ сходится абсолютно. Может ли интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ а)сходиться абсолютно; б)сходиться условно?**

Да, оба случая возможны:

а)

$$f = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, g = \frac{1}{x^2}, fg = \frac{\sin x}{x^{5/2}}$$

б)

$$f = x^3 \sin x^5, g = \frac{1}{x^2}, fg = x \sin x^5$$

- убедиться в условной сходимости $f$ и $fg$ легко, сделав замену $t = x^5$.

3.**Интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится условно, интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Может ли интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ а)сходиться условно; б)сходиться абсолютно?**

Да, может. К примеру:

а)

$$f = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; \quad g = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad fg = \frac{\sin x}{x}$$

б)

$$f = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; \quad g = \frac{1}{x}; \quad fg = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$$

4.**Интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, интеграл $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Может ли интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ а)сходиться абсолютно; б)сходиться условно; в)расходиться?**

Да, может. К примеру:

а)

$$f = \frac{1}{x^3}; \quad g = x\sin x; \quad fg = \frac{\sin x}{x^2}$$

б)

$$f = \frac{1}{x^2}; \quad g = x\sin x; \quad fg = \frac{\sin x}{x}$$

в)

$$f = \frac{1}{x^2}; \quad g = x^3\sin x; \quad fg = x\sin x$$

5.**Интегралы $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ сходятся абсолютно. Может ли интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ а)расходиться; б)сходиться условно?**

В отличие от рядов, с интегралами такая ситуация возможна, хотя интуитивно и кажется неправдоподобной.

а)возьмём $g(x) = f(x)$ из примера 3 в знакопостоянных интегралах, тогда оба интеграла сходятся. Но для произведения получим:

$$f(x)g(x) = \begin{cases} N^4, \ x \in [N; N + \dfrac{1}{N^4}]; N \in \mathbb{N} \\ 0, \ else \end{cases}$$

Применяя тот же алгоритм вычисления, получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot n^4 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ - расходится!

б)в качестве g(x) возьмём функцию похожую на f(x), но принимающую значения $(-1)^N N$. Аналогично легко показать, что интеграл от g(x) сходится абсолютно, а для интеграла от произведения имеем:

$$f(x)g(x) = \begin{cases} N^3(-1)^N, \ x \in [N; N + \dfrac{1}{N^4}]; N \in \mathbb{N} \\ 0, \ else \end{cases}$$

Применяя наш алгоритм, сводим интеграл к сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который по признаку Лейбница сходится условно.

6.**Как связаны интегрируемость функции и её модуля в случае несобственных интегралов? А в случае обычных?**

Для несобственных интегралов из интегрируемости модуля следует интегрируемость функции (см. теорему о том что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится), а обратное неверно - например $\frac{\sin x}{x}$ Для обычных интегралов Римана с точностью до наоборот - из интегрируемости функции следует интегрируемость модуля, а обратное неверно - например, $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$, где $D(x)$ - функция Дирихле, не интегрируема, а её модуль, равный $\frac{1}{2}$, очевидно, интегрируем.

7.**Почему вообще возможна условная сходимость?**

Геометрически это можно объяснить тем, что "отрицательные"площади под Ох компенсируют "положительные"над ней, из-за чего интеграл может сойтись, хотя сумма всех площадей с плюсом и стремится к бесконечности.

8.**Можно ли использовать признак Дирихле или Абеля для доказательства расходимости несобственного интеграла?**

Нет, нельзя. Если условия признака выполняются, то можно говорить о сходимости интеграла, но обратное не верно – если условия признака не выполняются, интеграл всё равно может сходиться. Таким образом, признаки Дирихле и Абеля являются достаточными условиями сходимости, но не необходимыми. Для доказательства расходимости интеграла можно воспользоваться, например, отрицанием критерия Коши или методом выделения главной части.

9.**Будет ли сходиться абсолютно, условно или расходиться** $\int_a^b (f(x)+ g(x))dx$, **если А)** $\int_a^b f(x)dx$ **и** $\int_a^b g(x)dx$ **сходятся абсолютно; Б)один из интегралов сходится условно, другой абсолютно; В)оба интеграла сходятся условно**?

А)сходится абсолютно (это следует из неравенства треугольника и признаков сравнения)
Б)сходится условно (от противного с использованием пункта А)
В)может сходиться как условно:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

так и абсолютно:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{-\sin x}{x} dx = \int_1^{+\infty} 0 dx$$

10.**Все ли условия признаков Дирихле и Абеля являются обязательными?**

Оказывается, что условие непрерывной дифференцируемости g(x) не является необходимым, оно нужно лишь для упрощения доказательств.

11.**Известно, что $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится. Следует ли из этого то, что $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} dx$ сходится?**

Нет, не следует. Сначала рассмотрим два ошибочных решения, затрагивающие важные аспекты признаков сходимости:

Во-первых, на это примере видно, что для знакопеременных интегралов не работают признаки сравнения: легко видеть, что $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$. Но из этого нельзя сделать вывода об их одинаковой сходимости, т.к. функции знакопеременны!

Во-вторых, можно ошибочно применить признак Дирихле, сказав что $\sin x$ имеет ограниченную первообразную, а $\frac{1}{\sqrt{(x)}+\sin(x)}$ стремится к нулю - признак тут не работает, т.к. вторая функция не монотонна(это легко проверить вычислением производной), а это условие важно!

Как же правильно исследовать этот интеграл на сходимость? Воспользуемся методом выделения главной части:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Интеграл от первого слагаемого сходится условно, от второго расходится, а от третьего сходится абсолютно - значит, интеграл от суммы расходится!

12.**Известно, что $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Следует ли из этого, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?**

Нет, это условие является необходимым в случае рядов, а для интегралов верно лишь для монотонных знакопостоянных функций. Легко построить знакопеременный контрпример (хотя на самом деле можно даже знакопостоянный, и он приведён в пункте 5):

$$f(x) = x\sin(x^3) \tag{2}$$

$$\int_1^{+\infty} x\sin(x^3)dx = \int_1^{+\infty} t^{\frac{1}{3}}\sin(t)t^{-\frac{2}{3}}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}}dt$$

Несмотря на то, что $f(x)$ неограничена в окрестности $+\infty$ и даже не стремится ни к какому пределу, интеграл сходится как эталонный.

# 3 Ряды

## 3.1 Знакопостоянные числовые ряды

1.**Верно ли, что если ряд абсолютно сходится, то и ряды из квадратов и кубов его членов тоже сходятся?**

Да, верно: т.к. ряд сходится, согласно необходимому условию $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, а значит согласно определению предела с некоторого номера N верно $|a_n| < 1$, а значит с этого же номера $|a_n^3| < |a_n^2| < |a_n|$. Т.к. ряд сходится абсолютно, то ряд из модулей его членов сходится, а значит по признаку сравнения знакопостоянных рядов сходятся и ряды из квадратов и кубов.

2.**Сходимость телескопического ряда**

Пусть дана посл-ть $\{b_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Тогда $\exists$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с последовательностью $\{a_k\} : \{b_n\}$ — посл-ть частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ : $a_1 = b_1, \forall n = 2, 3,\ a_k = b_n - b_{n-1}$.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$, тогда $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n \Rightarrow$ ряд сх-ся к 1.

3.**Верно ли, что если член ряда стремится к нулю, то ряд сходится?**

Нет, неверно - это условие является необходимым, но не достаточным: так, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится.

4.**Верно ли, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится и $a_n \geq b_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится?**

Нет, не следует забывать что признак сравнения применим лишь для модулей членов знакопостоянных рядов, а в такой формулировке легко привести контрпример:

$$a_n = 0,\ b_n = -\frac{1}{n}$$

5.**Верно ли, что если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$, то он является сходящимся?**

Нет, неверно. Вспомним критерий Коши:

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ — сх-ся $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}\ \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \epsilon$.

Тут важно, что $n$ и $p$ подбираются исходя из N, а в нашей формулировке сначала фиксируется $p$, а уже затем берётся предел - и это совсем не то же самое, легко проверить, что такому условию соответствует расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

6.**Приведите примеры сходящегося и расходящегося ряда, для которых предел отношения соседних членов равен единице или вовсе не существует**

Вспомним признак Даламбера: пусть $a_n > 0 \ \ \forall n$. Тогда если $\exists N \in \mathbb{N} \exists q \in (0,1) : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq N$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сх-ся. А если $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то он расх-ся.

Следствие: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся, если $0 \leq p < 1$, и расх-ся, если $p > 1$.

При $p = 1$ возможно всё: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сх-ся, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расх-ся.

Если предел не существует:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \ldots \quad \text{— сх-ся}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n} = 2^2 + 2^1 + 2^4 + \ldots \quad \text{— расх-ся}$$

7.**Приведите пример, когда неприменим обычный признак Коши в предельной форме, но применим усиленный.**

Вспомним формулировку признака Коши: пусть $\exists N \in \mathbb{N},\ \exists q > 0 : \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q$. Тогда если $q \in (0,1)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся. Пусть $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх-ся.

В предельной форме если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, то ряд сх-ся при $0 \leq c < 1$, расх-ся при $c > 1$.

Бывают случаи, когда обычный признак Коши в предельной форме не работает, зато можно применить усиленный - с верхним пределом вместо настоящего:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ т.к. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$ - сх-ся.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{n}$ расх-ся, т.к. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 3$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 2$.

8.**Приведите пример, когда эффективен признак Коши, но не Даламбера.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ : $\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} \to 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ сх-ся

По признаку Даламбера же определить сходимость не получится, т.к. предела отношения соседних членов не существует: $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}$

9.**Приведите пример положительной непрерывной при $x > 1$ функции такой, что $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сх-ся, а $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ — расх-ся**

Вспомним интегральный признак: пусть $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ неотрицательна и монотонно убывает, тогда эквивалентны:

1) $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сх-ся

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сх-ся

Тут важно условие монотонности: положим $g(n) \equiv 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, а на $[n - \frac{1}{n^2}, n]$ и $[n, n + \frac{1}{n^2}]$ $g$ — линейная ф-ция $= 0$ в концевых нецелых точках. В тех точках $x \geq 1$, где $g(x)$ не определена $g(x) \equiv 0$. $f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$ — положительна и непрерывна для $x \geq 1$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, а $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сх-ся

10.**Приведите пример положительной непрерывной при $x \geq 1$ функции такой, что $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ — расх-ся, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ — сх-ся.**

Для $n > 1 \quad g(n) = 0$. На $[n - \frac{1}{n}, n]$ $[n, n + \frac{1}{n}]$ — линейная ф-ция $= 1$ в нецелых концевых точках. В точках $x \geq 1$, где $g(x)$ не определена положим $= 1$. $f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$ — положительна и непрерывна при $x \geq 1$.

$\int\limits^{+\infty} 1 f(x)dx = +\infty \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

11.**Известно, что $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится?**

Нет, не следует, к примеру $a_n = \frac{1}{n\ln(1+n)}$.

## 3.2 Знакопеременные числовые ряды

1.**Верно ли, что из условной сходимости ряда следует абсолютная сходимость?**

Нет, здесь важно вспомнить определение условно сходящегося ряда - это значит, что он сходится, но НЕ сходится абсолютно.

2.**Верно ли, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится и $|a_n| \geq |b_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится?**

Нет, в такой формулировке ряд $a_n$ может быть знакопеременным и сходиться:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \; b_n = \frac{1}{n}$$

3.**Известно, что $a_n = o(b_n)$ при $n \to \infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Верно ли, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится?**

Нет, неверно. Например, $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

4.**Известно, что $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится?**

Нет, неверно - важно понимать, что этот признак работает лишь для знакопостоянных рядов, а для знакопеременных легко привести контрпример: $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

5.**Возможно ли такое, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится условно, последовательность $\{c_n\}$ стремится к нулю, а при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ расходится?**

Да, возможно - возьмём $z_n = c_n = \frac{(-1)^n}{n}$, тогда исходный ряд сходится условно по признаку Лейбница, а ряд из произведений расходится, как гармонический.

6.**Возможно ли выкидыванием бесконечного числа членов сделать из сходящегося ряда расходящийся?**

Да, возможно. Возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, сходящийся по признаку Лейбница, и выкинем из него все нечётные члены - получим расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

7.**Возможно ли выкидыванием бесконечного числа членов сделать из расходящегося ряда сходящийся?**

Да, возможно. Возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, и выкинем из него все члены, номер которых не является квадратом какого-то числа. Получим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

8.**Всегда ли интеграл и ряд от одной и той же функции сходятся или расходятся одновременно?**

Нет, это верно только для знакопостоянных и монотонных функций. Приведём пример:

$$\int_1^{+\infty} x \sin(x^3) dx \text{ сходится (см. пример 12 в знакопеременных интегралах)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\sin(n^3)$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие

## 3.3 Перестановки членов ряда. Перемножение рядов

1.**Верно ли, что при перемене мест слагаемых сумма ряда не изменяется?**

Нет, неверно - см. теорему Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Впрочем, утверждение всё же верно для абсолютно сходящихся рядов.

2.**Верно ли, что значения частичных сумм абсолютно сходящегося ряда не меняются при перестановках его членов?**

Очевидно, неверно - достаточно рассмотреть первую частичную сумму исходного ряда и ряда, полученного перестановкой 1 и 2 членов.

3.**Пускай ряд из $a_k$ сходится условно. Обозначим $A_+ = \{n \in \mathbb{N}, a_n \le 0\}, A_- = \{n \in \mathbb{N}, a_n < 0\}$. Что можно сказать о множествах $A_+$ и $A_-$?**

Оба эти множества счётны. Предположим противное - пускай какое-то из них конечно, тогда сумма соответствующих членов ряда конечна. Пускай другая сумма тоже конечна - тогда исходный ряд сходится абсолютно. Если же она равна $+\infty$, то исходный ряд расходится - ведь добавка конечного числа к бесконечности ничего не изменит. Получили противоречие.

4.**Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?** Этот ряд сходится абсолютно, т.к. последовательность его частичных сумм ограничена и монотонна:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

Более того, в курсе доказана куда более сильная теорема: пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно. Тогда ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$, составленный из всевозможных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно, а его сумма равна произведению сумм исходных. *Замечание: важно понимать, что аналогичное утверждение для интегралов неверно, см. пример 5 в теме знакопеременные интегралы.*

5.**Известно, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся условно. Может ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ а)сходиться абсолютно; б)сходиться условно; в)расходиться?** Да, все три случая возможны, и примеры абсолютно аналогичны соответствующим для несобственных интегралов - см. пример 1 в теме знакопеременные интегралы.

6.**Укажите перестановку членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ такую, что его сумма равна а)-100; б)$-\infty$.**
Решение следует из алгоритма доказательства теоремы Римана: сначала будем складывать нечётные члены до тех пор, пока не получим -100 или меньше (это можно сделать, т.к. ряд условно сходится, а потому ряды, составленные по отдельности из его положительных и отрицательных членов, расходятся - значит, их частичные суммы неограничены и мы можем набрать из них любое число, которое нам захочется), затем будем прибавлять четные, пока не перескочим -100 в обратном направлении, и так далее. Таким образом, мы гарантированно задействуем все члены, а полученный ряд действительно будет сходиться к -100, т.к. модули членов исходного ряда стремятся к нулю(из необходимого условия), а потому отклонения от -100 будут становиться всё меньше и меньше.
Чтобы получить $-\infty$, немного изменим алгоритм: будем сначала действовать как в прошлом случае, но получая -1. Когда перескочим его вверх, будем получать уже -2, и так далее на каждом шаге всё увеличивая это число, получим сколько угодно большую по модулю отрицательную частичную сумму.

## 3.4 Функциональные последовательности

1.**Обязана ли $g_n(x)\ :\ \lim_{n\to\infty}\frac{g_n(x)}{f_n(x)}=1$, где $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}f(x)$, тоже сходится к $f(x)$ на $X$ ?**

Нет, например, $X=(0,1)$, $\quad f_n(x)=\frac{1}{n}$, $\quad g_n(x)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2x}$, тогда

$$\forall x\in(0,1)\hookrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{g_n(x)}{f_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)=1$$

При этом $f_n(x)\underset{(0,1)}{\rightrightarrows}0$ при $n\to\infty$, но $g_n(x)$ не стремится равномерно к 0 на $X$, так как $g_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}+1\nrightarrow 0$ при $n\to\infty$.

2.**Можно ли заменять общий член функциональной последовательности на эквивалентный?**

Нет, при исследовании на равномерную сходимость не проводят замену на эквивалент, так как неизвестно, каким образом ведут себя отброшенные $o$-малые на $X$ - это видно на предыдущем примере, ведь $\frac{1}{n^2x}=o(\frac{1}{n}),n\to 0$. Вместо этого используют разложение по Тейлору с остаточным членом в форме Лагранжа.

3.**Множество E состоит из конечного числа точек. Функциональная последовательность $f_n(x)\underset{E}{\to}f(x)$. Что можно сказать о раввномерной сходимости на E?**

Так как E состоит из конечного числа точек, из $N(\varepsilon, x)$ из определения поточеченой сходимости можно выбрать максимальное, иными словами $\exists N_1(\varepsilon) = max N(\varepsilon, x)$. Его можно выбрать в качестве общего для всех $x$ и использовать в определении равномерной сходимости:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1 \quad \forall x \epsilon E \quad \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

что и доказывает наличие равномерной сходимости на множестве E.

## 3.5 Функциональные ряды

1.**Следует ли из равномерной сходимости функционального ряда его абсолютная сходимость?**

Нет, можно привести довольно тривиальный контрпример:

$$a_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} \forall x \in \mathbb{R}$$

Тогда ряд $a_k(x)$ сходится, причём равномерно(т.к. зависимости от x просто нет), но ряд из модулей расходится, т.к. это гармонический ряд.

2.**Будет ли верен признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов, если из него убрать условие монотонности?**

Нет, не будет. Рассмотрим пример $a_k(x) = (-1)^k$ (посл-ть частичных сумм равномерно ограничена), $b_k(x) = \frac{(-1)^k}{k}$ ($b_k(x) \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$). Но $b_k(x)$ не является монотонной, и ряд из произведений расходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

3.**Будет ли верен признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов, если в нём условие монотонности заменить следующим условием: $\forall x \in X \exists N : \forall k \geq N \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leqslant b_k(x)$?**

Нет, не будет. Рассмотрим $X = [1; +\infty); a_k(x) = (-1)^k$ - част. суммы ограничены.

$$b_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, x \leq k \\ \frac{(-1)^k}{k}, x > k \end{cases}$$

Заметим, что $\forall x \in X \exists N = [x] + 1 : \forall k \geqslant N \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$, т.е. наша замена условия монотонности выполнена. Обозначим $c_k(x) =$

$a_k(x) \cdot b_k(x)$, докажем что ряд $c_k(x)$ расходится. Используем для этого отрицание условия Коши равномерной сходимости ряда:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \exists p \in \mathbb{N} \exists x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) \right| > \varepsilon$$

Положим $n = p = N, x = 2N+1$. Тогда $\forall k \in \{N+1, \ldots, 2N\} c_k(x) = \frac{1}{k}$. Имеем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \right| = \left| \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{2N} \right| \geqslant \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

Итого, взяв $\varepsilon = \frac{1}{2}$, получаем отрицание условия Коши.

4.**Будет ли верен признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов, если в нём условие монотонности заменить условием $\exists N : \forall x \in X \forall k \geq N \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$?**

Да, будет - согласно аналогу принципа локализации для интегралов, мы можем рассматривать сходимость ряда не с единицы, а с любого фиксированного $N \in \mathbb{N}$, и в нашем случае для ряда от $N$ до $+\infty$ выполнены все условия признака Дирихле, а потому ряд сходится равномерно.

5.**Известно, что функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходятся равномерно на E. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$?**

Покажем, что этот ряд может даже расходиться. Возьмём $E = \mathbb{R}$, $u_n(x) = v_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ - оба таких ряда сходятся равномерно по признаку Дирихле, а ряд из их произведений - гармонический, и он расходится.

6.**Верно ли, что если $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X : \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_k)$ расходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ не сходится равномерно на $X$?**

Нет, неверно - приведём контрпример: $X = [1; +\infty)$,

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \ x \in [n; n+1) \\ 0, \ else \end{cases}$$

Заметим, что в каждой точке отличен от нуля лишь один член этого ряда, и потому верно:

$$\sup_X |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Значит, ряд сходится равномерно. Но при этом можем подобрать $x_n = n$, для которой $u_n(x_n) = \frac{1}{n}$, и ряд расходится, как гармонический. Таким образом, важно помнить, что в отрицании определения и необходимого условия сходимости важно, чтобы x не зависело от n!

7.**Исследовать на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+k^4}$.**

Заметим, что $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$, значит $x^4 + k^4 \geq 2x^2k^2$, и

$$\frac{x^2}{x^4 + k^4} \leq \frac{x^2}{2x^2k^2} = \frac{1}{2k^2}$$

Значит, функциональный ряд сходится равномерно по призанку Вейерштрасса.

8.**Верно ли, что если функциональный ряд сходится, а последовательность его членов равномерно стремится к нулю, то он сходится равномерно?**

Нет, неверно. Приведём контрпример: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ на $X = [0, 1)$. Для последовательности его членов верно:

$$\left|\frac{x^n}{n}\right| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

При этом поточечно ряд сходится, т.к. его члены мажорируются членами сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, но равномерной сходимости нет: выберем $x_N = 2^{-\frac{1}{N}}, n_N = N$, тогда по отрицанию условия Коши легко доказать, что ряд сходится неравномерно.

## 3.6 Непрерывность и дифференцируемость функций, заданных как пределы функциональных последовательностей и суммы функциональных рядов

1.**Верно ли, что равномерная сходимость возможна только к непрерывной функции?** Нет, это верно только если члены самой функциональной последовательности непрерывны, а в противном случае предельная функция может быть разрывной - легко просто составить такую функцию, например сделав у непрерывной функции и равномерно сходящейся к ней последовательности в какой-то точке сдвиг на единицу.

2.**Верно ли, что последовательность разрывных функций может равномерно сходиться к непрерывной?**

Да, верно - можно привести довольно тривиальный пример:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Очевидно, данная функция сходится к $f(x)=0$, причём равномерно на $\mathbb{R}$, т.к. супремум $|f_n(x)-f(x)|$ по всем $x \in \mathbb{R}$ равен $\frac{1}{n}$, и он стремится к нулю.

3.**Можно ли в условии теоремы о непрерывности предельной функции заменить равномерную сходимость поточечной?**

Нет, нельзя. Контрпример: $f_n(x)=x^n$ на $X=[0,1]$ сходится неравномерно к

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x \in [0,1), \\ 1, \ x=1\end{cases}$$

Очевидно, эта функция является разрывной.

4.**Является ли условие равномерной сходимости необходимым для непрерывности предельной функции?**

Нет, не является - возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)xe^{-(n+1)x}-nxe^{-nx}\right)$. Рассмотрим последовательность частичных сумм нашего ряда.

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)xe^{-(k+1)x}-kxe^{-kx}\right)=$$
$$=2xe^{-2x}-xe^{-x}+3xe^{-3x}-2xe^{-2x}+\ldots+(n+1)xe^{-(n+1)x}-nxe^{-nx}$$

Видим что соседние члены посокращаются, и останется только первый и последний:

$$S_n(x)=-xe^{-x}+(n+1)xe^{-(n+1)x}$$

Исследуем функциональную последовательность $S_n(x)$ на поточечную сходимость. Видно, что при фиксированном $x$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=-xe^{-x}=:S(x)$$

Эта функция и есть сумма ряда. Она непрерывна в каждой точке как произведение непрерывных функций.
Докажем теперь, что функциональная последовательность $S_n(x)$ не сходится равномерно (а значит, и ряд не сходится равномерно). Возьмем $\forall N \in \mathbb{N} x_N=\frac{1}{N+1}; n_N=N$

$$\left|S_N\left(x_N\right)-S\left(x_N\right)\right|=\left|(N+1)x_Ne^{-(N+1)x_N}\right|=e^{-1}\not\to 0$$

5.**Можно ли в теореме об интегрировании функциональной последовательности заменить условие равномерной сходимости условием поточечной?** Нет, нельзя. Контрпример:

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, \ x\in[0,1\dfrac{1}{n}], \\ 2n-n^2x, \ x\in(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}] \\ 0, \ x\in(\dfrac{2}{n},1] \end{cases}$$

Функция представляет собой для каждого n треугольник, высота которого увеличивается с ростом n, а ширина уменьшается, причём она подобрана так, что площадь его остается постоянной и равной единице. Таким образом,

$$\int_0^1 f_n(x) = 1 \forall N \in \mathbb{N}$$

но функция неравномерно сходится к $f(x) = 0$, интеграл от которой равен нулю - интегралы не совпали!

6.**Является ли условие равномерной сходимости необходимым для того, чтобы ряд можно было интегировать почленно?**

Нет, не является. Приведём контрпример: $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2(n+1)} - x^{2n}$ сходится неравномерно на $[-1;1]$, т.к. легко вычислить его частичную сумму $S_n(x) = -x^2 + x^{2(n+1)}$, она сходится к функции

$$S(x) = \begin{cases} -x^2, \ x \in (-1,1), \\ \quad 0, \ x \in \{-1,1\} \end{cases}$$

которая является разрывной, в то время как все члены ряда непрерывны. Но тем не менее:

$$\int_{-1}^{1} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n+2} - x^{2n} \right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = -\frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_{-1}^{1} (x^{2n+2} - x^{2n}) dx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{2(n+1)+1} - \frac{2}{2n+1} \right) = -\frac{2}{3}$$

Таким образом, несмотря на отсутствие равномерной сходимости, значения интегралов совпадают.

7.**Верно ли, что если функциональная последовательность равномерно сходится на $[a,b]$ и $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f_n(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то $\forall x \in [a,b] \hookrightarrow (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to+\infty}(f_n(x)')$?**

Нет, неверно - в условии теоремы важна равномерная сходимость производных, а из равномерной сходимости самой функции равенства производных может и не следовать. Приведём контрпример:

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n}$$

$|f_n(x)| \le \frac{\pi}{2n} \to 0$, значит $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[-1;1]$, тогда $(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))'$=0. Но если вычислить производные отдельных функций, получим:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1+(nx)^2} = \frac{1}{1+(nx)^2}$$

Значит, при $x = 0$ $f_n'(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, значит производная предела и предел производных не совпадают!

8.**Может ли быть такое, что функциональная последовательность расходится, а последовательность из производных её членов сходится равномерно?**

Да, пример довольно тривиален: $f_n(x) = n$ - расходится; $f_n'(x) = 0$ - сходится.

## 3.7 Комплексные степенные ряды

1. **Как выглядит область сходимости степенного ряда? Может ли это быть, к примеру, квадрат?**

Рассмотрим один простой, но важный, пример так называемого геометрического ряда; его частичные суммы при $z \neq 1$ можно записать в виде:

$$S_n(z) = 1 + z + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Заметим, что в случае $|z| < 1$ предел частичных сумм существует и равен

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \frac{1}{1-z}$$

В случае $|z| \geq 1$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда и геометрический ряд расходится. Оказывается, что такая ситуация в определенном смысле типична для степенных рядов: их область сходимости - только круг, и ничего другого (точка и вся плоскость - вырожденные случаи).

2.**Каков характер сходимости ряда в круге сходимости?**

В круге сходимости $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_{cx}\}$ ряд может сходиться неравномерно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

По формуле Коши-Адамара $R_{cx} = 1$ , но на границе круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ не выполняется даже необходимое условие сходимости. Действительно, $\sup\limits_{z\in Z}|z^n| = 1 \nrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ , следовательно, $z^n$ не сходится равномерно на $Z$ к нулю при $n \longrightarrow \infty$

*Замечание: не стоит путать данное утверждение со второй теоремой Абеля.*

3.**Что можно сказать о сходимости ряда на границе круга сходимости?**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

По формуле Коши-Адамара для радиуса сходимости $R_{cx}$ имеем

$$\frac{1}{R_{cx}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-\ln(n+1)}{n}} = e^0 = 1$$

При $z = 1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, т.е. это гармонический ряд, который расходится. При $z = -1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ - и сходится в силу признака Лейбница

*Таким образом , в граничных точках ряд может как сходиться, так и расходиться*

4.**Приведите примеры рядов, которые сходятся в одной точке и на всей комплексной плоскости**

Ряд, сходящийся в одной точке $z = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n(n+1)^n = u_n(z)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(z)} = \begin{cases} 0, & \text{if } z = 0 \\ +\infty, & \text{if } z \text{ isn't } 0 \end{cases}$$

Ряд, сходящийся на всей комплексной плоскости(док-во аналогично):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^n} \tag{3}$$

Также существуют ряды Тейлора (см. следующий раздел), сходящиеся к своей функции на всей комплексной плоскости (такие функции называют голоморфными (регулярными) в $\mathbb{C}$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{4}$$

5.**Назовите связь между экспонентной и тригонометрическими функциями**

Одним из преимуществ комплексного анализа является то, что в нем наиболее полно раскрываются связи между элементарными функциями.

В связи с этим оправдано также введение тригонометрических функций посредством равенств, называемых формулами Эйлера (иногда название относят только к последней):

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

6.**Может ли степенной ряд равномерно сходиться на некоторой дуге границы своего круга сходимости?**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi k}}{k} (e^{i\varphi} = z)$$

Исследовать ряд на равномерную сходимость на дуге $D = \{\varphi \in [\delta, 2\pi - \delta]\}$, где $\delta \in (0, \pi)$

$R_{cx} = 1 \Rightarrow$ область сходимости $|z| < 1$

По формуле Эйлера $|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$

Отметим, что при $\varphi = 0$ ряд расходится (гармонический ряд).

Таким образом, наша дуга и представляет собой границу круга сходимости.

Представим ряд как сумму двух рядов(по формуле Эйлера).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos(\varphi k)}{k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(\varphi k)}{k}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} cos(\varphi k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} sin(\varphi k)$ имеют ограниченные частичные суммы , а $\frac{1}{k}$ монотонно стремится к нулю при $k \longrightarrow \infty \Rightarrow$ ряды сходятся равномерно по признаку Дирихле.

Таким образом, исследуемый ряд равномерно сходится на заданной дуге.

7.**Найдите радиус сходимости ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^n}$$

Несмотря на то, что коэффициенты при нечетных степенях равны нулю, мы ищем $\overline{\lim}$, поэтому радиус сходимости равен $\sqrt{3}$

8.**Каков может быть радиус сходимости суммы рядов, радиусы сходимости которых равны между собой?**

При сложениирядов может получиться ряд, сходящийся в большей области , чем общая часть кругов сходимости двух исходных рядов, но только при равных радиусах: $R \geq r$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}-1\right)z^n, R_1=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}}{2^n}+1\right)z^n, R_1=1$$

При суммировании получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}}{2^n}-\frac{(-1)^{n}}{3^n}\right), R_{cx}=2$$

Если взять ряд и такой же ряд, но с минусом , получим $R_{cx}=\infty$

*Замечание: в ТФКП доказывается , что на границе круга сходимсоти степенного ряда лежит хотя бы одна "особая"точка его суммы $f(z)$, в которой ряд расходится. Отсюда следует,что радиус степенного ряда равен расстоянию от точки а до ближайшей к а особой точки функции $f(z)$.*

## 3.8 Действительные степенные ряды. Ряды Тейлора

1.**Опишите сходимость степенного ряда на числовой прямой.**

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$, имеющий радиус сходимости R, сходится абсолютно при всех $x:|x|<R$ (это следует из первой теоремы Абеля), расходится при всех $x:|x|>R$, а при $x=R$ может расходиться, сходиться условно или абсолютно. Кроме того, на любом отрезке $[x_0-r, x_0+r]$, где $0<r<R$, ряд сходится равномерно (важно, что на $[x_0-R, x_0+R]$ ряд может и не сходиться равномерно!).

2.**Известно, что про формальном интегрировании и дифференцировании степенного ряда радиус его сходимости не меняется. А может ли меняться характер сходимости в крайних точках?**

Да, может. Приведём пример:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, R=1, \text{сходится на}(-1;1)$$

Проинтегрируем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, R = 1, \text{сходится на}[-1;1)$$

При $x = 1$ получаем гармонический ряд (расходится), а вот при $x = -1$ получаем ряд Лейбница, который сходится по признаку Лейбница.

Ещё раз проинтегрируем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, R = 1, \text{сходится на}[-1;1]$$

Получаем, что при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно, как эталонный.

3.**Сформулируйте определение аналитической функции. Приведите пример функции, бесконечное число раз дифференцируемой, но аналитической не являющейся.**

Функция $f(x), x \in \mathbb{R}$, наз. аналитической в $x_0$, если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$.

Если функция в точке является аналитической, то она в ней бесконечное число раз дифференцируема, и коэффициенты $a_k$ совпадают с коэффициентами разложения по формуле Тейлора: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{x_k}$ Тогда соответствующий ряд называют рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Но из одной лишь бесконечной дифференцируемости не следует аналитичность функции: ряд Тейлора может даже сходиться на всей числовой прямой, но не к "своей"функции, а к чему-то другому! Приведём канонический пример:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim_{t \to +\infty} t^{k/2} e^{-t} = 0$. Отсюда по следствию из теоремы Лагранжа получаем:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Это легко обобщить по индукции и на все следующие производные:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{3n}(1/x) e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Таким образом, в нуле функция бесконечное число раз дифференцируема, но все её производные равны нулю, и её ряд Тейлора попросту нулевой - т.е. он сходится на всей числовой прямой, но не к "своей"функции, а к нулю.

*Замечание 1: достаточным условием аналитичности функции в точке является существование такой её окрестности, в которой все производные функции определены и ограничены.*
*Замечание 2: в курсе доказывается, что большинство "нормальных"функций - экспонента, гиперболические и тригонометрические функции($R = +\infty$), $\ln(x+1)$ и $(1+x)^{\alpha}$ ($R = 1$) - являются аналитическими в точке $x = 0$.*

4.**Разложите по Маклорену $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.**
В этом примере важно вспомнить, что разложение ведётся в окрестности нуля, а потому неправильно написать что $f(x) = \ln(x-2) + \ln(x-1)$, эта сумма не определена при $x < 2$! Правильно написать $f(x) = \ln(2-x) + \ln(1-x)$, дальнейшее разложение уже никакой сложности не представляет.

# Источники

1. В.Ж.Сакбаев - лекции, прочитанные в МФТИ в 2020 г.

2. В.Ж.Сакбаев, С.В.Резниченко, С.В.Иванова, А.А.Скубачевский - семинары в МФТИ, 2020 г.

3. Г.Е.Иванов "Лекции по математическому анализу 2017

4. Л.Д.Кудрявцев "Курс математического анализа"

5. Б.Гелбаум, Дж.Олстед "Контрпримеры в анализе"

По вопросам, в связи с опечатками и пожеланиями обращаться:
Чернов Никита, Б06-902
Волкова Анна, Б06-903
Сазонов Павел, Б06-907

В создании принимали участие:
Кузьмиченко Полина, Б06-901
Яковлев Виктор, Б06-901
Виноградова София, Б06-902
Владимирцев Дмитрий, Б06-902
Облаков Даниил, Б06-902
Потёмкина Алёна, Б06-902
Гордийчук Маргарита, Б06-903
Калужский Иван, Б06-903
Набережная Елизавета, Б06-903
Обухова Анастасия, Б06-903
Хомутов Андрей, Б06-903
Маликов Артур, Б06-906
Эрихман Мая, Б06-906
Богдан Елизавета, Б06-907
Закирова Марфа, Б06-907
Захаржевский Марк, Б06-907
Сергеева Юлия, Б06-907