## 3.3 (3) Теорема Поста: критерий разрешимости в терминах перечислимости множества и его дополнения.

**Теорема:** $A$ разрешимо $\Leftrightarrow$ $A$ и $\overline{A}$ перечислимы

▲ $\Rightarrow$: $A$ можно перечислить даже по возрастанию. Запустим цикл по $n = 0, 1, \ldots$ Если $n \in A$ (вычислимо по определению разрешимого множества), то выводим $n$. Дополнение разрешимого множества также разрешимо (возьмем характеристическую функцию $A$ и поменяем местами значения 0 и 1), поэтому оно тоже перечислимо

$\Leftarrow$: Покажем как построить характеристическую функцию для $A$. Запускаем цикл по $n = 1, 2, \ldots$

1. Возвращаем 1, если $x$ было перечислено в $A$ на $n$-ом шаге
2. Возвращаем 0, если $x$ было перечислено в $\overline{A}$ на $n$-ом шаге

Для любого $x$ что-то будет выведено, так как оно лежит либо в $A$, либо в $\overline{A}$ и в силу их перечислимости будет перечислено на каком-то шаге $\Rightarrow$ $A$ - разрешимо ■

## 3.4 (3) Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.

Пусть $U$ - универсальная вычислимая функция

**Проблема самоприменимости:** по входу $p$ нужно понять, определено ли $U(p, p)$.

**Утверждение:** это неразрешимая проблема, т.е. множество $\{p | U(p, p) \text{ определено}\}$ неразрешимо.

▲ Предположим, что это множество разрешимо. Тогда вычислима функция

$$d'(x) = \begin{cases} U(x,x) + 1 & U(x,x) \text{ определено} \\ 1 & U(x,x) \text{ не определено} \end{cases}$$

Тогда так как $d'$ вычислима, то по определению $U$ $\exists p \forall x\ d'(x) = U(p, x)$. Рассмотрим $U(p, p)$. Предположим, что она определена, тогда $U(p, p) = d'(p) = U(p, p) + 1$ - противоречие. Если предположим, что она не определена, получим $U(p, p) = d'(p) = 1$ - тоже противоречие $\Rightarrow$ это множество неразрешимо ■

**Лемма:** Область определения вычислимой функции перечислима

▲ Построим полухарактеристическую функцию. Запустим $f(x)$ и если оно остановится, вернем 1. Это и будет полухарактеристической функцией области определения (1 - если $f(x)$ определена, $\perp$ - если не определена) $\Rightarrow$ область определения перечислима ■

**Замечание:** Множество из проблемы самоприменимости перечислимо, как область определения вычислимой функции $d(x) = U(x, x)$

**Проблема остановки (останова):** по входу $(p, k)$ нужно понять, определено ли $U(p, k)$.

**Утверждение:** эта проблема тоже неразрешима

▲ Пусть это не так и проблема разрешима. Тогда бы разрешима проблема самоприменимости, так как она является частным случаем проблемы остановки (при $k = p$). Получили противоречие $\Rightarrow$ эта проблема неразрешима ■