1.5 (3). Устойчивость выразимых предикатов при автоморфизмах интерпретаций.

Пусть есть две интерпретации одной и той же сигнатуры $\langle P_1, \dots, P_k, f_1, \dots, f_m \rangle$, где $P_1, \dots, P_k$ — это предикатные символы, а $f_1, \dots, f_m$ — функциональные символы. Носители этих интерпретаций обозначим A и B (соответственно)

Определение 54: Гомоморфизм *обозначается $\alpha: \ A \to B$, причем α называется гомоморфизмом, если верно следующее:*

1. $P_i(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_l)) = P_i(a_1, \dots, a_l)$ *при* $i = 1, \dots, k$, *причем* $a_i \in A$.
2. $f_j(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) = \alpha(f_j(a_1, \dots, a_n))$, *при* $j = 1, \dots, n$, *причем* $a_i \in A$. ♣

Здесь используется свойство линейности:

$$\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y).$$

4. ***Автоморфизм*** *— это гомоморфизм в случае, если α является биекцией, а также $A = B$.*

k-местный предикат P - устойчивыq относительно α, если

$P(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) \Leftrightarrow P(m_1, ..., m_k)$ для любых элементов $m_1, \dots, m_k \in M$. Далее, k-местная функция f называется *устойчивой* относительно α, если $f(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = \alpha(f(m_1, \dots, m_k))$.

Теорема. Любой предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно её автоморфизмов.

▲ Проведём доказательство этого (достаточно очевидного) утвер- ждения формально. Пусть π — некоторая оценка, то есть отображение, ставящее в соответствие всем индивидным переменным некоторые элементы носителя. Через $\alpha \circ \pi$ обозначим оценку, которая получится, если к значению каждой переменной применить отображение α; другими словами, $\alpha \circ \pi(\xi)$ для любой переменной ξ.

Первый шаг состоит в том, чтобы индукцией по построению терма t доказать такое утверждение: значение терма t при оценке $\alpha \circ \pi$ получается применением α к значению терма t при оценке π: $[t](\alpha \circ \pi) = \alpha([t](\pi))$.

Для переменных это очевидно, а шаг индукции использует устойчивость всех функций интерпретации относительно α. Теперь индукцией по построению формулы φ легко доказать такое утверждение: $[\varphi](\alpha \circ \pi) = [\varphi](\pi)$

Мы не будем выписывать эту проверку; скажем лишь, что взаимная однозначность α используется, когда мы разбираем случай кванторов. (В самом деле, если с одной стороны изоморфизма берётся какой-то объект, то взаимная однозначность позволяет взять соответствующий ему объект с другой стороны изоморфизма.) ■

1.6 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: расширение любого непротиворечивого множества до полного и экзистенциально полного.

См. следующий вопрос до леммы 9.

1.7 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: построение модели из замкнутых термов у любого непротиворечивого, полного и экзистенциально полного множества.

Теория - любое множество замкнутых формул (то есть формул, не имеющих параметров).

Модель теории - это любая интерпретация, в которой все формулы из данной теории истинны.

Совместная теория - теория, имеющая модель.

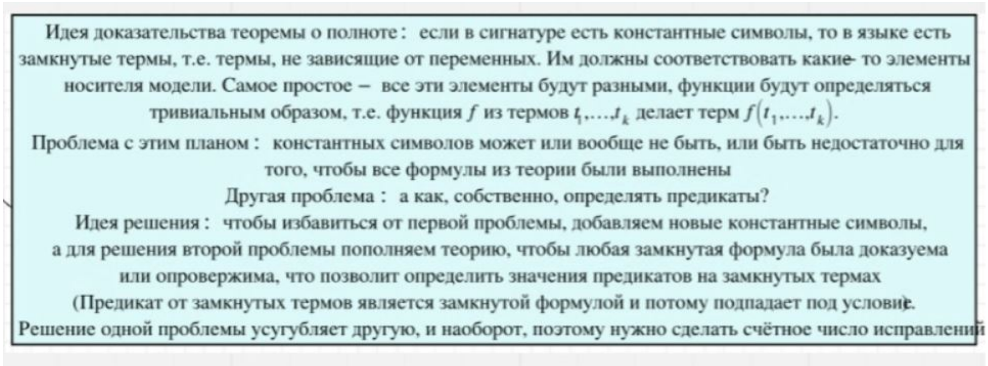
Противоречивая теория - теория, из которой выводится противоречие.

Непротиворечивая теория - теория, из которой нельзя вывести противоречие

Теорема Гёделя, о полноте исчисления предикатов: Если φ общезначима, то она выводима в исчислении предикатов. Пользуясь данной терминологией, можно сформулировать теорему, из которой будет следовать теорема Гёделя.

Теорема: Если теория непротиворечива, то она совместна (имеет модель).

Доказательство: 1. Мы хотим расширить не противоречивую Γ так, чтобы она была полной (если φ - замкнутая формула, то $\Gamma \vdash \varphi$ или $\Gamma \vdash \neg\varphi$) и экзистенциально полной (т.е. если $\Gamma \vdash \exists x \varphi$, то $\Gamma \vdash \varphi(t/x)$, где t - замкнутый терм.



Лемма 9. Любую непротиворечивую теорию можно расширить до непротиворечивой, полной и экзистенциально полной теории.

Доказательство было приведено выше.

Лемма 10.

Любая непротиворечивая, полная, экзистенциально полная теория совместна, то есть имеет модель.

Последняя лемма : любая полная, непротиворечивая и экзистенциально полная теория Γ имеет модель из замкнутых термов.

Носитель – все замкнутые термы

$$[f](t_1,\ldots,t_k) = f(t_1,\ldots,t_k)$$

$$[P](t_1,\ldots,t_k) = \begin{vmatrix} 1, \text{ если } \Gamma \vdash P(t_1,\ldots,t_k) \\ 0, \text{ иначе} \end{vmatrix}$$

Нужно доказать, что если $\Gamma \vdash \phi$, то ϕ истинно в этой модели

Можно считать, что ϕ замкнуто (иначе навесим $\forall$ по правилу обобщения)

Для замкнутых в силу полноты Γ будем доказывать следующее:

Если $\Gamma \vdash \phi$, то ϕ истинна в модели, а если $\Gamma \vdash \neg\phi$. то ϕ ложна в модели

Индукция по логической глубине формулы.

Если ϕ атомарная, то по определению $[P]$

Если $\phi = \neg\psi$, то для ψ всё доказано, для ϕ тоже получается.

Если $\phi = (\psi \wedge \xi)$ или для другой связки, то из утверждений для ψ и ξ всё выводится

Если $\phi = \exists x\ \psi$, то по экзистенциальной полноте $\Gamma \vdash \psi(t/x)$, это более простая формула, поэтому $\psi(t/x)$ истинна в модели, поэтому $\exists x\ \psi$ тоже истинна в модели

С другой стороны, если $\exists x\ \psi$ истинна в модели, то $\psi(t/x)$ истинна в модели, по предположению индукции $\Gamma \vdash \psi(t/x)$, поэтому $\Gamma \vdash \exists x\ \psi$

$\forall x\ \psi$ можно заменить на $\neg\exists x\ \neg\psi$ как с точки зрения выводимости, так и с точки зрения истинности

Все формулы исходного Γ_0 будут лежать в Γ и потому быть выводимы, так что мы построили действительно модель исходной теории

1.8 (5). Представимость конечных последовательностей в арифметике при помощи β - функции Гёделя.

Лемма 1: $\forall n \forall c \exists b > c$ такое, что $b+1, 2b+1, \ldots, nb+1$ - взаимно просты

▲ Рассмотрим $b = n!$ НОД$(kb+1, lb+1) = d > 1 \Rightarrow (k-l)b$ делится на d. Тогда т.к. $b = n!$ и $k - l < n$, получаем, что любой простой делитель числа $(k-l)b$ должен быть меньше n (Строго меньше, т.к. $kb+1, lb+1$ не делятся на n).

У d есть простой делитель $p < n$.

$lb + 1$ делится на p.

$lb + 1 - l \cdot n!$ делится на p. !!!!! $\Rightarrow d = 1$ ■

Лемма 2 $(x_1, ...x_n) \exists a, b \forall i\ amod(b \cdot i + 1) = x_i$ ▲ Выберем по Лемме 1 $b > max\{x_i\}$

Тогда a найдётся по *китайской теореме об остатках*: Если натуральные числа попарно взаимно просты, то для любых $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i < a_i$ при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется число N, которое при делении на a_i дает остаток r_i при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Более того, если найдутся два таких числа N_1 и N_2, то $N_1 = N_2 (moda_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n)$.

Положим $\beta(a, b, i) = amod(b \cdot i + 1)$

β арифметична: $r = xmodq \Leftrightarrow r < q \cap \exists s : x = s \cdot q + r$ ■