Date

Билет 68.

Передоказательство теоремы Дирихле при помощи цепных дробей. Уточнение теоремы Дирихле (б/д). Зависимость качества аппроксимации от скорости роста неполных частных: существование чисел с заданным наперед качеством аппроксимации; золотое сечение как самое плохо приближаемое число (б/д).

- Докажем несколько утверждений о подходящих дробях.

Лемма 1. Если $\frac{p_k}{q_k}$ — k-я подходящая дробь, то:

(*) $$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$$

▲ Докажем (*) по индукции по кол-ву элементов

① База: $k = 2$

Проверяется просто руками

② Шаг: пусть верно для всех $k \le n$, докажем для $k = n+1$

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n+1}] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$$[a_1; a_2, \ldots, a_{n+1}] = \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_0 + \frac{q'_{n+1}}{p'_{n+1}} = \frac{a_0 p'_{n+1} + q'_{n+1}}{p'_{n+1}}$$

(**) $$\begin{cases} p_{n+1} = a_0 p'_{n+1} + q'_{n+1} \\ q_{n+1} = p'_{n+1} \end{cases}$$ (это верно для всех n, в том числе и для меньших)

Применим утв. индукции для $\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}$:

$$\begin{cases} p'_{n+1} = a_{n+1} p'_n + p'_{n-1} \\ q'_{n+1} = a_{n+1} q'_n + q'_{n-1} \end{cases}$$

Проверка базы:

$[a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0} \Rightarrow \begin{matrix} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{matrix}$

$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$

$\Rightarrow \begin{matrix} p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_1 = a_1 \end{matrix}$

$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} =$

$= \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$

$\Rightarrow \begin{matrix} p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2 \\ q_2 = a_1 a_2 + 1 \end{matrix}$

$a_2 p_1 + p_0 = a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0 = p_2$

$a_2 q_1 + q_0 = a_1 a_2 + 1 = q_2$

Из (**):

$$\begin{cases} q'_{n+1} = p_{n+1} - a_0 p'_{n+1} = p_{n+1} - a_0 q_{n+1} \\ p'_{n+1} = q_{n+1} \end{cases}$$

Тогда $q_{n+1} = p'_{n+1} \overset{\text{(индукция)}}{=} a_{n+1} p'_n + p'_{n-1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$.

Утв. для q_{n+1} доказано

$$p_{n+1} = a_0 p'_{n+1} + q'_{n+1} = \cancel{a_0 q_{n+1}}\ a_0 (a_{n+1} p'_n + p'_{n-1}) + a_{n+1} q'_n + q'_{n-1} =$$

$$= \underbrace{a_{n+1}(a_0 p'_n + q'_n)}_{p_n \text{ по } (**)} + \underbrace{(a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1})}_{p_{n-1} \text{ по } (**)} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$$

■

Перепишем ещё раз полученные соотношения.

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

Получим несколько следствий:

<u>Следствие 1.</u> (уничтожаем первое из двух слагаемых в каждом равенстве)

▲

$$\begin{cases} p_n \cdot q_{n-1} = a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-2} q_{n-1} \\ q_n \cdot p_{n-1} = a_n q_{n-1} p_{n-1} + q_{n-2} p_{n-1} \end{cases}$$

Вычтем из верхнего рав-ва нижнее:

$$\underbrace{p_n \cdot q_{n-1} - q_n p_{n-1}}_{\text{обозначим это за } b(n)} = \underbrace{p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1}}_{-b(n-1)}$$ ■

<u>Следствие 2</u>

▲ $b(n) = -b(n-1)$, а т.к. ~~b(1)~~ $b(1) = 1$ (легко проверить), то $b(n) = (-1)^{n+1}$

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$$ ■

<u>Следствие 3</u> (уничтожаем второе слагаемое в каждом рав-ве)

▲

$$\begin{cases} p_n q_{n-2} = a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} \\ q_n p_{n-2} = a_n q_{n-1} p_{n-2} + q_{n-2} p_{n-2} \end{cases}$$

Вычтем из первого рав-ва второе:

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = a_n (p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2})$$

В силу следствия 2

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = a_n \cdot (-1)^{n-2} = a_n (-1)^n$$ ■

Также перепишем рав-ва из следствия 2 и следствия 3 через дроби:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$ (следствие 2)

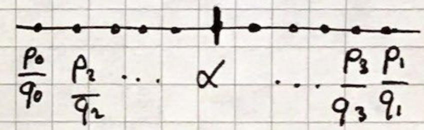
$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_n \cdot (-1)^n}{q_n q_{n-2}}$$ (следствие 3)

Утверждение 1. Подходящие дроби несократимы.

▲ Из следствия получим, что $(p_n, q_n) = 1$ ■

Утверждение 2. Четные подходящие дроби возрастают, а нечетные убывают

▲ Это утверждение вытекает из следствия 3, записанного через дроби ($\frac{a_n(-1)^n}{q_n q_{n-2}}$ положительно $\Leftrightarrow$ n четно) ■



! Теорема Дирихле через цепные дроби

Напомним формулировку: Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда существует бесконечно много различных несократимых рациональных дробей $\frac{p}{q}$ таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}$

▲

$$\left|\alpha - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right| < \left|\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right| = \frac{1}{q_{2n} q_{2n-1}} \le \frac{1}{q_{2n-1}^2}$$ ■

Date

- **Уточнение теоремы Дирихле (б/д)**

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда существует бесконечно много рациональных несократимых дробей $\frac{p}{q}$ таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$

Замечание: если $\forall \varepsilon$ заменить $\frac{1}{\sqrt{5}}$ на $\frac{1}{\sqrt{5}(1+\varepsilon)}$, то утв. будет неверно

- **Зависимость качества аппроксимации от скорости роста неполных частных: существование чисел с заданным наперед качеством аппроксимации.**

$\forall f(q) : \lim\limits_{q \to \infty} f(q) = +\infty$, где f монотонна

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и бесконечное кол-во несократимых рациональных дробей таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q f(q)}$

▲ $\alpha = [\underbrace{a_0; a_1}$

начнем с каких-то подходящих нам произвольных двух чисел (например, 1 и 1)

Пусть выбраны неполные частные $a_0, a_1, \ldots, a_k$.

Построим a_{k+1}.

Если взять $\forall a_{k+1}$, то итоговая дробь α:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_k(a_{k+1} q_k + q_{k-1})}$$

вспомним нерав-во из т-мы для подх. дроби

$$\left|\alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| \leq \frac{1}{q_{k+1}^2}$$

также в док-ве было

$$\left|\alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| \leq \frac{1}{q_{k+1} q_{k+2}}$$

(хочется: $\leq \frac{1}{q_k f(q_k)}$) $\Rightarrow$ нужно так подобрать a_{k+1}, чтобы было верно $a_{k+1} q_k + q_{k-1} \geq f(q_k)$

Тогда получим

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k f(q_k)}$$ ■

- **Утверждение** (б/д) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (золотое сечение) — самое плохо приближаемое число