41. Определение равномерной распределённой последовательности по модулю 1. Пусть последовательность x_n р.р. (mod 1) и m — фиксированное целое число, не равное нулю. Докажите, что последовательность mx_n также р.р. (mod 1). Верно ли, что если m — не целое, то это не верно?

Послед-ность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - **равномерно распределена по модулю 1**, если:

$$\forall a, b \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \dots, N : \{x_i\} \in [a,b)\}|}{N} = b - a$$

Теорема. Если последовательность x_n р.р. (mod 1) и m — фиксированное целое число, не равное нулю, то последовательность mx_n также р.р. (mod 1).

▲ x_n равномерно распределено по модулю 1 по критерию Вейля равносильно тому, что:

$$\forall h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi h x_n} \to 0$$

Критерий Вейля для mx_n, где m - целое число, отличное от 0:

$$\forall h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi h(mx_n)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi (hm)x_n} \to 0$$

Это верно, так как hm - подмножество целых чисел, т.е. для них это выполнялось по критерию Вейля для x_n. Виват! ■

Контрпример к важности целостности коэффициента. См. билет 39: αn, где α - иррациональное - равномерно распределённая последовательность. Тогда можно взять последовательность $\sqrt(2)n$, она будет равномерно распределённой, и домножить её на нецелое $m = \sqrt(2)$, получить последовательность $2n$, которая не является равномерно распределённой.