Билет 80

Теорема Вейерштрасса про приближение непрерывной функции тригонометрическим многочленом (б/д). Равносильность критерия Вейля и интегрального признака.

Теорема Вейерштрасса

Если $f \in C([0;1))$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$\sup_{x \in [0;1]} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равносильность критерия Вейля и интегрального признака.

Напомним:

- критерий Вейля

Последовательность x_n равномерно распределена по модулю $1 \Leftrightarrow$ $\forall h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \hookrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi h x_n} \to 0$ при $N \to \infty$

- интегральный признак.

Последовательность x_n равномерно распределена по модулю $1 \Leftrightarrow$ $\forall f \in C([0;1])$ верно, что

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Заметим, что при $x_n \in [0;1]$: $x_n = \{x_n\}$

▲ 1 интегральный признак $\Rightarrow$ критерий Вейля

Если раскрыть экспоненту по ф-ле Эйлера ~~получим~~ $(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$

Теорема 2. Пусть x_n р.р. mod 1 $\Leftrightarrow$ $\forall$ комплекснозначн. функции f, имеющей период 1 $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\left(\begin{aligned} & e^{i\pi} = -1 \\ & \int_0^1 e^{2\pi i x}\,dx = \frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i x}\Big|_0^1 = 0 \end{aligned} \right)$$

В эту сторону получаем просто как следствие т-мы 2.
(которая следует из инт. признака)

② критерий Вейля $\Rightarrow$ интегральный признак

Фикс. $\varepsilon > 0$. Берем $T(x)$

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\,dx \right| =$$

(хотим получить, что эта штука при достаточно больших N меньше ε)

$$= \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T(x_n) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T(x_n) - \int_0^1 T(x)\,dx + \int_0^1 T(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \big(f(x_n) - T(x_n)\big) \right| + \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T(x_n) - \int_0^1 T(x)\,dx \right| + \left| \int_0^1 \big(T(x) - f(x)\big)\,dx \right| \le$$

$$\le \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| f(x_n) - T(x_n) \right|}_{\le \varepsilon} + \varepsilon + \underbrace{\int_0^1 \left| T(x) - f(x) \right| dx}_{\le \varepsilon} \le 3\varepsilon$$

■