3.5 (4) Несуществование универсальной тотально вычислимой функции.

Определение: $U : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \Rightarrow \{0,1\}^*$ называется *универсальной тотально вычислимой функцией*, если

1. U вычислима и всюду определена

2. Если f — всюду определённая вычислимая функция одного аргумента, то $\exists p \forall x U(p,x) = f(x)$

Теорема: Универсальной тотально вычислимой функции не существует

▲ Предположим, что такая функция существует. Тогда рассмотрим функцию $d(x) = U(x,x)$ - всюду определена и вычислима. Тогда функция $d'(x) = U(x,x) + 1$ также всюду определена и вычислима. Значит, по определению универсальной тотально вычислимой функции $\exists p \forall x U(p,x) = d'(x)$. Рассмотрим $U(p,p) = d'(p) = U(p,p) + 1$ - противоречие $\Rightarrow$ такой функции не существует ■

Замечание: Для обычных универсальных вычислимых функций такого противоречие не возникает, так как равенство $U(p,p) = U(p,p) + 1$ верно, если $U(p,p)$ не определена

3.6 (5) Неперечислимость и некоперечислимость множества всюду определённых программ.

▲ Пусть это множество перечислимо (обозначим его как A). Решим с его помощью проблему самоприменимости (см. билет 3.4). Пусть F - исследуемая функция, имеющая номер n в какой то главной универсальной вычислимой функции. Тогда

$$F'(x) = \begin{cases} x & \text{если } F(n) \text{ не завершилось за } x \text{ шагов} \\ \perp & \text{иначе не определена} \end{cases}$$

Значит F' всюду определена $\Leftrightarrow$ $F(n)$ не останавливается. Пусть F' имеет номер m. Тогда:

1. Запустить и сразу остановить $F(n)$

2. Проделать ещё 1 шаг в работе $F(n)$. Если $F(n)$ остановилось, вывести 1

3. Вывести перечисляющем алгоритмом ещё один элемент множества A. Если он равен m (то есть $F'(x) \in A$, а значит всюду определена) вывести 0

4. Вернуться ко второму шагу

Так как F или самоприменима, или несамоприменима (ее номер либо лежит в множестве из проблемы самоприменимости, либо нет), то или 1 или 2 шаг когда нибудь выведет результат, значит проблема самоприменимости решена, противоречие.

Коперечислимость решается аналогично, только $F'(x) = F(n)$ (получается F' не всюду определена (то есть лежит в дополнении к A) $\Leftrightarrow$ $F(n)$ не останавливается). Нам остается только заменить в нашем алгоритме третий шаг: будем перечислять $\overline{A}$. ■