33. Постановка и решение задачи 2SAT (применение алгоритма выделения компонент сильной связности).

Пусть дана 2-КНФ, формула вида $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee y) \wedge (y \vee \overline{z})$. Будем считать, что дизъюнктов вида $(p \wedge \overline{p}), (p \wedge p)$ нет.
Вопрос: выполнима ли эта формула?
Поступим следующим образом:

1 Для каждой переменной, входящей в КНФ, запишем саму переменную и ее отрицание

2 Для каждой скобки вида $(x \vee y)$ проведем ориентированное ребро между $\overline{x}$ и y, $\overline{y}$ и x. В логическом смысле каждая такая скобка будет эквиваленнтна ($\overline{x} \to$ y) $\wedge(\overline{y} \to x)$.

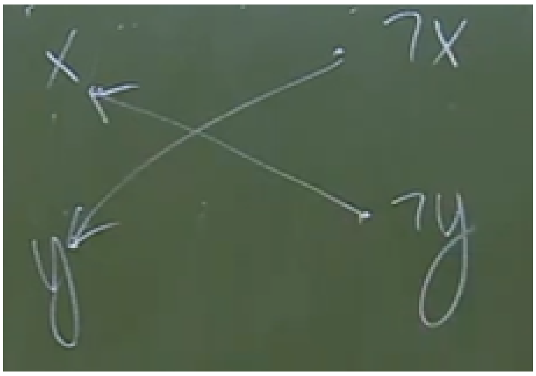
Утверждается, что формула выполнима тогда и только тогда, когда $\forall p$, p и ее отрицание не лежат в одной компоненте сильной связности. Почему это так?

$\to$ Пусть они лежат в одной компоненте сильной связности. Тогда какое значение может принимать p? Пусть единица. Тогда по построению все элементы КСС должны быть равны 1, тогда и $\overline{p} = 1$. Противоречие. Аналогично p не может принимать значение 0.

$\leftarrow$ Пусть выполнено условие. Покажем, как построить выполняющий набор для формулы. Вспомним алгоритм Косарайю. Он выделяет КСС в каком-то порядке. Пусть C(v) - номер КСС вершины v в этом порядке.
Набор:

- p = 1 $\iff C(p) > C(\overline{p})$
- p = 0 $\iff C(p) < C(\overline{p})$

Пусть этот набор не выполним, тогда существует ложный дизъюнкт $(x \vee y) = 0$, а значит, x = 0, y = 0 $\iff C(x) < C(\overline{x}), C(y) < C(\overline{y})$. Если у нас есть такой дизъюнкт, то в графе есть ребра
$\overline{x} \to y$
$\overline{y} \to x$



$tout[\overline{y}] \geq tout[x]$, а значит $C(\overline{y}) \leq C(x) < C(\overline{x}) \leq C(y)$ - противоречие

Асимптотика
O(n + m).
1. Строим граф с 2n вершинами и 2m ребрами
2. Запускаем алгоритм Косарайю
3. Узнаем номера КСС для всех пар (переменная, ее отрицание), проверяем, что они различны
4. Строим набор по правилу, описанному в доказательстве выше