3.8 (5) Теорема Райса–Успенского о неразрешимости нетривиальных свойств вычислимых функций.

Теорема Райса-Успенского: Пусть $A \subset \mathcal{F}$ — произвольное нетривиальное свойство вычислимых функций (нетривиальность означает, что есть как функции, ему удовлетворяющие, так и функции, ему не удовлетворяющие, то есть что множество A непусто и не совпадает со всем $\mathcal{F}$). Пусть U — главная универсальная функция. Тогда не существует алгоритма, который по U-номеру вычислимой функции проверял бы, обладает ли она свойством A. Другими словами, множество $S_a = \{n | U_n \in A\}$ неразрешимо.

▲ Пусть $\zeta(x)$ — нигде не определённая функция. Без ограничения общности $\zeta \in \overline{A}$ (иначе получим неразрешимость $\overline{A}$, которая влечёт неразрешимость A)

Пусть $\xi(x)$ — какая-то функция из A. Пусть K — какое-то перечислимое неразрешимое множество (например, из проблемы самоприменимости)

Рассмотрим

$$V(n,x) = \begin{cases} \xi(x) & n \in K \\ \zeta(x) & n \in \overline{K} \end{cases}$$

Тогда V — вычислимая функция. Программа, вычисляющая V: запустить перечисление K, ожидать появления n. Если появилось, вернуть $\xi(x)$.

По определению главной универсальной вычислимой функции (ГУВФ) существует всюду определённая s, такая что $\forall n \forall x V(n,x) = U(s(n),x)$

1. Если $n \in K$, то $V(n,x) = \xi(x) = U(s(n),x) \Rightarrow s(n)$ - номер функции из A
2. Если $n \in \overline{K}$, то $U(s(n),x) = \zeta(x)$, т.е. $s(n)$ — номер функции из $\overline{A}$.

Получаем $n \in K \Leftrightarrow s(n) \in S_a$. При этом s вычислима и всюду определена, так что ситуация подходит под определение m-сводимости (см. определения) $\Rightarrow K \leq_m S_a$. Так как K неразрешимо, то и S_a неразрешимо ■

3.9 (5) Теорема Клини о неподвижной точке. Построение программы, на любом входе печатающей некоторый собственный номер.

Теорема Клини о неподвижной точке: Пусть U — ГУВФ, h — всюду определённая вычислимая функция. Тогда существует p, т.ч. при всех x верно $U(p,x) = U(h(p),x)$

▲ Пусть $V(x,y) := U(U(x,x),y)$. В силу главности U существует вычислимая всюду определенная s, такая что $\forall x, y\, V(x,y) = U(s(x),y)$.

Рассмотрим $t(x) = h(s(x))$ - вычислима и всюду определена как композиция вычислимых всюду определенных. Значит $\exists p \forall x\, t(x) = U(p,x)$. Тогда

$$U(s(p),y) = V(p,y) = U(U(p,p),y) = U(t(p),y) = U(h(s(p)),y) \Rightarrow U(s(p),y) = U(h(s(p)),y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s(p) \text{ - неподвижная точка } ■$$

Замечание: в условии некоторый собственный номер означает какой-то свой номер в ГУВФ (какой-то так как у каждой функции бесконечное количество номеров)

Утверждение: Пусть $U(n,x)$ — главная вычислимая универсальная функция для класса всех вычислимых функций одного аргумента. Тогда существует такое число p, что $U(p,x) = p$ для любого x.

▲ Рассмотрим $V(n,x) = n$. Так как U - ГУВФ, то существует вычислимая всюду определенная функция s такая что $U(s(n),x) = V(n,x)$. Тогда по теореме Клини о неподвижной точке существует p такое что $\forall x\, U(p,x) = U(s(p),x) = V(p,x) = p$ ■