Билеты 66-67

Бесконечные цепные дроби. Представление иррационального числа в виде бесконечной цепной дроби, его единственность.

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

алгоритм (описание)

$$\alpha = \underbrace{[\alpha]}_{a_0} + \{\alpha\} = \underbrace{[\alpha]}_{a_0} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\{\alpha\}}\right)} = \underbrace{[\alpha]}_{a_0} + \frac{1}{\underbrace{\left[\frac{1}{\{\alpha\}}\right]}_{a_1} + \left\{\frac{1}{\{\alpha\}}\right\}} = \ldots$$

На каждом шаге находим следующее a_i, причем единственным образом в силу единственности „целой части".

На n шаге α выглядит как

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \varepsilon_n}}}$$

, где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, где $i > 0$

$0 < \varepsilon_n < 1$

$\uparrow$ в силу иррациональности α.

▲ По индукции поймём, что каждое неполное частное определяется однозначно.

① a_0 понятно, т.к. $0 < \alpha - a_0 < 1$

② Если $a_0, \ldots, a_n$ определены однозначно, то ε_n также определен однозначно.

~~Откуд~~ $0 < \frac{1}{\varepsilon_n} - a_{n+1} < 1 \Rightarrow$ и a_{n+1} определено однозначно ■