

## 2.extra7.2. Теорема Банаха-Тарского: равносоставленность сферы и пары сфер

**Определение.** Назовём две фигуры *равносоставленными*, если каждую из них можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств, так, что количество подмножеств в обоих разбиениях одно и то же, а подмножества с одинаковыми номерами переводятся одно в другое движением (изометрией).

**Утверждение.** Равносоставленность – отношение эквиваленции.

Рефлексивность и симметричность очевидны.

Транзитивность: рассмотрим множества, получающиеся при попарных пересечениях множеств разбиений  $B$ , из которых получаются  $A$  и  $C$ .

Для доказательства теоремы потребуется определение из теории групп

**Определение.** Свободная группа – группа  $G$ , для которой существует подмножество  $S \subset G$  такое, что каждый элемент  $G$  записывается единственным образом как произведение конечного числа элементов  $S$  и их обратных. (Единственность понимается с точностью до тривиальных комбинаций наподобие  $st = su^{-1}ut$ ).

**Теорема (Банаха-Тарского).** Шар и два шара такого же радиуса равносоставлены.

*Доказательство.* Сначала покажем, что сфера и две таких же сферы равносоставлены.

I. Полезное замечание для свободных групп преобразований на сфере

Рассмотрим  $\varphi$  и  $\psi$  – преобразования на сфере, которые являются поворотами вокруг оси, проходящей через центр сферы, удовлетворяющие следующим свойствам:

- 1) Никакая степень  $\varphi$  и  $\psi$  не будет тождественным преобразованием
- 2) один из поворотов не переводит ось в себя

Тогда все повороты  $id, \varphi, \psi, \varphi^{-1}, \psi^{-1}, \varphi\psi, \psi\varphi, \varphi^2, \dots$  будут различными.

Значит, эти преобразования задают свободную группу движений сферы.

У каждой точки сферы возникает орбита – образы под действием соответствующих поворотов. У большинства точек орбита полная: для каждого элемента группы будет один образ, все эти образы разные.

Однако у некоторых точек орбита будет неполная: если под действием  $\varphi$  точка попала на ось  $\psi$  (или она там была с самого начала, то любое количество дальнейших поворотов  $\psi$  не изменят результат. Таких исключительных точек – счётное количество.

Идея состоит в следующем: можно из каждой орбиты взять по одной точке, тогда образы такого множества под действием всех поворотов покроют всю сферу (с точностью до неполных орбит – их точки будут покрыты несколько раз).

II. Доказательство утверждения про сферы

Для доказательства теоремы Банаха-Тарского возьмём следующие повороты:

$\varphi$  – поворот на 180, поэтому  $\varphi^2 = 1$ .

$\psi$  – поворот на 120, поэтому  $\psi^3 = 1$ .

Оси поворотов расположены в общем положении, так что других соотношений не возникает.

Такую орбиту можно разбить на 3 части  $A, B, C$ :

$A$  равносоставлено с  $B \cup C$ , то есть  $\varphi(A) = B \cup C$

$A$  равносоставлено с  $B$ , то есть  $\psi(A) = B$

$A$  равносоставлено с  $C$ , то есть  $\psi^2(A) = C$

На каждой "нормальной" орбите (где никакие дополнительные точки не склеиваются) выберем одну точку – по аксиоме выбора. Покрасим её в цвет  $A$ , остальные элементы – согласно вышеуказанным правилам.

Вся сфера разбилась на 4 множества:  $A, B, C$  и  $Q_1$  ( $Q_1$  – множество орбит со склейками).

$Q_1$  – счётное множество, так что его можно повернуть, получив  $Q_2$ , так что  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset, Q_2 \subset A \cup B \cup C$ .

Пусть  $Q'_2$  – множество, равносоставленное с  $Q_2$ , лежащее полностью в  $C$ . Это может быть сделано следующим образом:

Ту часть  $Q_2$ , которая лежит в  $B \cup C$ , отправим в  $A$ .

Ту часть, которая изначально лежала в  $A$ , отправим в  $B$ .

Ту часть, которая теперь лежит в  $A$ , отправим в  $C$ .

Получим множество целиком в  $B \cup C$ . отправим его в  $A$ , и, наконец, в  $C$ .

$$U = A \cup B \cup C \cup Q_1 = (A \cup Q_1) \cup (B \cup Q_2) \cup (C \setminus Q_2)$$

$$A \cup Q_1 \sim B \cup C \cup Q_1 \sim A \cup C \cup Q_1 \sim B \cup C \cup A \cup Q_1 = U$$

Аналогично,  $B \cup Q_2 \sim U$

Получаем, что  $U \sim U \cup U \cup (C \setminus Q_2)$

По теореме  $U \sim U \cup U$

Утверждение про сферы доказано.

### III. Доказательство утверждения про шары

Из этого будет следовать и теорема про два шара: шар без центра равносоставлен с двумя шарами без центра.

По транзитивности он равносоставлен и с тремя шарами без центра. – такое множество с двумя шарами с центром и одним шаром без центра и еще одной точки.

Тогда  $A$  – один шар,  $B$  – два шара,  $C$  – два шара и ещё шар без двух точек.

Поскольку  $A$  и  $C$  равносоставлены, то в силу утверждения  $A$  и  $B$  равносоставлены. ■