

37. Определение всюду плотности. Последовательность $\ln(n)$ всюду плотна на $[0, 1]$.

38. Определение всюду плотности. Если последовательность равномерно распределена по модулю 1, то она и всюду плотна.

Последовательность x_n **всюду плотна на отрезке** $[a, b]$, если $\forall [c, d] \subset [a, b] \exists$ бесконечного много номеров N таких, что $x_N \in [c, d]$.

$\{\ln(n)\}$ всюду плотна на $[0; 1]$.

▲ Зафиксируем N . Тогда $[x_n] = k \in \{1, \dots, [\ln(N)]\}$. $\{\ln(n)\} \in [c; d] \Leftrightarrow \ln(n) \in [k + c; k + d] \Rightarrow n \in [e^{k+c}; e^{k+d}]$. Для N число подходящих n будет $\sum_{k=1}^{[\ln(N)]} (e^{k+d} - e^{k+c}) = \frac{e(e^{\ln(N)} - 1)}{e-1} (e^d - e^c) N \frac{e(e^d - e^c)}{e-1} \rightarrow \infty$ ■

Теорема. Если последовательность x_n р.р. mod 1, то она всюду плотна на отрезке $[0, 1]$.

▲ Из определения равномерной распределённости по модулю 1, $\forall c < d \in [0; 1] \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|k|k \leq N, \{x_k\} \in [c; d]|}{N} = d - c$, т.е. для любого подотрезка \exists бесконечное количество точек в нём. ■