Билет 48. Алгоритм Дейкстры. Условия применимости, доказательство корректности. Реализации за $O(n^2), O(m \log n), O(m$ $n \log n)$.

Алгоритм Дейкстры ищет кратчайшие пути в графе от заданной вершины до всех, если веса всех ребер неотрицательны.

В алгоритме поддерживается множество вершин U (использованных вершин), для которых уже вычислены длины кратчайших путей до них из s. На каждой итерации основного цикла выбирается вершина $u \notin U$, которой на текущий момент соответствует минимальная оценка кратчайшего пути. Вершина u добавляется в множество U и производится релаксация по всем исходящим из неё рёбрам. Релаксация — процесс, в котором мы обновляем расстояния до вершин, смежных с u и не принадлежащих U.

```
dist.assign(n, inf)
dist[s] = 0
while( есть неиспользованные вершины) {
  v - неисп. вершина с min dist[v]
  раскрываем v : dist[to] = min(dist[to], dist[v] + cost(v, to))
  помечаем v использованной
}
```

По сути, $0 - k - bfs$ работает точно так же.

В такой наивной реализации асимптотика $O(n^2)$, если искать минимальную неиспользованную вершину за линию.

Можно добиться $O(m \log n)$, используя двоичную кучу. А что нам, в сущности, нужно? Искать минимум на неиспользованных вершинах и уменьшать значения (extract min и decrease key). Куча такое как раз умеет.

С фиб. кучей асимптотика будет даже лучше. Будет $O(m + n \log n)$, поскольку в фиб куче decrease key выполняется амортизированно за 1.

Теорема (Корректность). *Докажем, что если v раскрываемая вершина, то $dist[v] = dist(s, v)$. Отсюда будет следовать корректность.*

Доказательство. Пусть это не так. Найдем первую вершину v, для которой это не выполняется. Это может быть только в случае, если $dist[v] > dist(s, v)$. Тогда исходя из алгоритма $dist[u] \geq dist[v]$ для всех неиспользованных u.

Как может выглядеть кратчайший путь от s до v? Он выглядит так. Мы сначала ходим по использованным вершинам, а потом прыгаем в некоторую вершину u из неиспользованных. А дальше идем в v. Пусть $u = v$. Тогда в этом случае такой путь должен был быть учтен в $dist[v]$, когда мы раскрывали вершину, из которой и совершается прыжок. Поэтому получаем, что кратчайший путь до v так выглядеть не может.

Значит, $u \neq v$. Тогда (исходя из предыдущих рассуждений) $dist(s, u) = dist[u] \geq dist[v] > dist(s, v) > dist(s, u)$. (Ведь $dist(s, v) = dist(s, u) + dist(u, v)$). Получаем противоречие. Ура. $\square$

Билет 49. Двусторонний алгоритм Дейкстры. Завершение алгоритма: почему достаточно реализовать алгоритм, почему нельзя обойтись меньшим числом действий (пример).

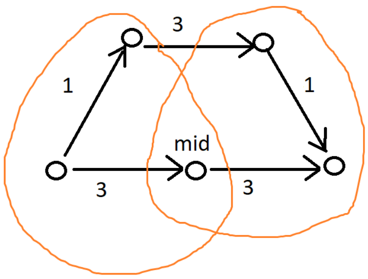
Нужно найти кратчайшее расстояние между s и t. Идея такая же, как в двустороннем bfs. Одновременно идем алгоритмом из вершины s и из вершины t (только в случае вершины t снова рассматриваем обратные ребра). Как только встретится общаа вершина, радуемся.

Собственно, для этих целей нам нужно завести две кучи – для s и для t. Каждый раз будем выбирать минимум из двух куч. Если минимум в куче вершины s, то делаем шаг алгоритма Дейкстры для нее, иначе – для t. Останавливаемся, когда какая-то вершина будет удалена из обеих куч.

Тонкость этого алгоритма заключается в том, что кратчайший путь $s \to t$ не обязательно пройдёт через вершину mid (которая будет удалена из обееих куч). Поэтому после остановки двунаправленного поиска, нам необходимо перебрать некоторое количество ребер. И ответ в этом случае будет $min\ dist_s[u] + cost(u, v) + dist_t[v]$ по ребрам $(u, v) \in E$, где имеет смысл перебирать только ребра между теми вершинами, которые были посещены во время нашего обхода (u посещалась алгоритмом для s, а v – для t).

На практике, такой двунаправленный поиск быстрее обычного алгоритма Дейкстры примерно в два раза.

Пример. Почему через mid не всегда проходит нужный путь.



Почему достаточно перебрать такие ребра.

Пусть $s \to u \to v \to t$ – путь, который нашел наш алгоритм. Где u – из "облачка"вершины s, а v – из "облачка"t. (Облачко – посещенные вершины).

mid – пересечение облачков.

Пусть мы не учли какой-то путь. Тогда он выглядится так. Мы пошли по вершинам из облачка s, дальше походили по вершинам, не принадлежащим никакому облачку, потом походили как-то еще, а потом прошлись по вершинам из облачка t. Пусть x и y – первая и последняя вершны не из облачков.

Тогда $dist(s, x) \geq dist(s, mid)$, $dist(y, t) \geq dist(mid, t)$. Значит, на самом деле, такой путь нам неинтересен.