1.extra7.2. Элементарная эквивалентность упорядоченных множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ (если используется игра Эренфойхта, нужно доказать теорему в нужную сторону).

Определение. Пусть заданы две интерпретации одной и той же сигнатуры. Тогда они эквивалентны, или изоморфны. если существует изоморфизм.

M - интерпретация$\langle f_1, \ldots, f_m, P_1, \ldots, P_k\rangle 1$

K - интерпретация $\langle f_1, \ldots, f_m, P_1, \ldots, P_k\rangle$

Изоморфизм — биекция $\phi : M \to K$. т.ч.

1) $f_i(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_q)) = \phi(f_i(x_1, \ldots, x_q))$ для всех $i : 1, ..., m$

2) $P_j(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = 1 \Leftrightarrow P_j(x_1, \ldots, x_q) = 1$

Можно сказать, что изоморфные интерпретации это одна и та же интерпретация с разными "метками"на элементах

Две интерпретации элементарно эквивалентны, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы.

Основная идея игры Эренфойхта. Основная идея игры заключается в том, что мы имеем две структуры (A и B) и два игрока (Новатор и Консерватор). Новатор из хочет показать, что эти две структуры отличны, в то время как другой игрок хочет показать, что они элементарно эквивалентны. Игра ведётся поочерёдно по раундам. В начале проводится подготовительный раунд: Новатор объявляет число ходов ("Я докажу, что интерпретации разные, не более чем за k ходов"). Остальные раунды протекают следующим образом: Сначала первый игрок Новатор выбирает любой элемент из одной из структур, а другой игрок выбирает элемент из другой структуры. Целью второго игрока всегда является выбор элемента, который (по его мнению) соответствует элементу, выбранному Новатором.

Новатор выигрывает, на одном из k раундов Консерватор для какого-то предиката P из сигнатуры и каких-то $i_1, ..., i_q$ $P(a_{i_1}, ..., a_{i_q}) \neq P(b_{i_1}, ..., b_{i_q})$. Если по прошествии k раундов Новатор не победил, то побеждает Консерватор.

Доказательство игры Эренфойхта.

Приведённые примеры делают правдоподобной связь между наличием формулы, различающей интерпретации, и выигрышной стратегии для **Н**. При этом число ходов, которое понадобится Новатору, соответствует *кванторной глубине* различающей интерпретации формулы. Кванторная глубина формулы определяется так:

- Глубина атомарных формул равна нулю.
- Глубина формул $\varphi \vee \psi$ и $\varphi \wedge \psi$ равна максимуму глубин формул φ и ψ.
- Глубина формулы $\neg\varphi$ равна глубине формулы φ.
- Глубина формул $\exists\xi\,\varphi$ и $\forall\xi\,\varphi$ на единицу больше глубины формулы φ.

Другими словами, глубина формулы — это наибольшая «глубина вложенности» кванторов (максимальная длина цепочки вложенных кванторов).

Рассмотрим позицию, которая складывается в игре после k ходов **Н** и **К** (перед очередным ходом **Н**) и за l ходов до конца игры (таким образом, общая длина игры есть $k+l$). В этот момент в каждой из интерпретаций совместными усилиями **Н** и **К** выбрано по k элементов. Пусть это будут элементы $a_1, \ldots, a_k$ в одной интерпретации (назовём её A) и $b_1, \ldots, b_k$ в другой (B).

Лемма. Если есть формула глубины l с параметрами $x_1, \ldots, x_k$, отличающая $a_1, \ldots, a_k$ от $b_1, \ldots, b_k$, то в указанной позиции **Н** имеет выигрышную стратегию; в противном случае её имеет **К**.

Поясним смысл условия леммы. Пусть φ — формула глубины l, все параметры которой содержатся в списке $x_1, \ldots, x_k$. Тогда имеет смысл ставить вопрос о её истинности в интерпретации A при значениях параметров $a_1, \ldots, a_k$, а также в интерпретации B при значениях параметров $b_1, \ldots, b_k$. Если окажется, что в одном случае формула φ истинна, а в другом ложна, то мы говорим, что φ отличает $a_1, \ldots, a_k$ от $b_1, \ldots, b_k$.

Пусть такая формула φ существует. Она представляет собой логическую (бескванторную) комбинацию некоторых формул вида $\forall\xi\, \psi$ и $\exists\xi\psi$, где ψ — формула глубины $l-1$. Хотя бы одна из формул, входящих в эту комбинацию, должна также отличать $a_1, \ldots, a_k$ от $b_1, \ldots, b_k$. Переходя к отрицанию, можно считать, что эта формула начинается с квантора существования. Пусть формула φ, имеющая вид

$$\exists x_{k+1}\psi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}),$$

истинна для $a_1, \ldots, a_k$ и ложна для $b_1, \ldots, b_k$. Тогда найдётся такое a_{k+1}, для которого в A истинно

$$\psi(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}).$$

Это a_{k+1} и будет выигрывающим ходом Новатора; при любом ответном ходе b_{k+1} Консерватора формула

$$\psi(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1})$$

будет ложной. Таким образом, некоторая формула глубины $l-1$ отличает $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ от $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}$; рассуждая по индукции, мы можем считать, что в оставшейся $(l-1)$-ходовой игре **Н** имеет выигрышную стратегию. (В конце концов мы придём к ситуации, когда некоторая бескванторная формула отличает $k+l$ элементов в A от соответствующих элементов в B, то есть **Н** выиграет.)

Обратное рассуждение (если наборы не отличимы никакой формулой глубины l, то **К** имеет выигрышную стратегию в оставшейся l-ходовой игре) чуть более сложно. Здесь важно, что по существу есть лишь конечное число различных формул глубины k.

Точнее говоря, будем называть две формулы (с параметрами) эквивалентными, если они одновременно истинны или ложны в любой интерпретации на любой оценке. Поскольку сигнатура конечна, существует лишь конечное число атомарных формул, все параметры которых содержатся среди $u_1, \ldots, u_s$. Существует лишь конечное число булевых функций с данным набором аргументов, поэтому существует лишь конечное число неэквивалентных бескванторных формул, все параметры которых содержатся среди $u_1, \ldots, u_s$. Отсюда следует, что существует лишь конечное число неэквивалентных формул вида

$$\exists u_s\, \psi(u_1, \ldots, u_s),$$

и потому лишь конечное число неэквивалентных формул глубины 1, параметры которых содержатся среди $u_1, \ldots, u_{s-1}$. (Здесь мы снова используем утверждение о конечности числа булевых функций с данным конечным списком аргументов, а также возможность переименовывать переменную под квантором, благодаря которой мы можем считать, что эта переменная есть u_s.) Продолжая эти рассуждения, мы заключаем, что для любого l и для любого набора переменных $u_1, \ldots, u_n$ существует лишь конечное число неэквивалентных формул глубины l, все параметры которых содержатся среди $u_1, \ldots, u_n$. (Здесь мы существенно используем конечность сигнатуры.)

Вернёмся к игре Эренфойхта. Пусть элементы $a_1, \ldots, a_k$ нельзя отличить от элементов $b_1, \ldots, b_k$ с помощью формул глубины l. Опишем выигрышную стратегию для **К**. Пусть **Н** выбрал произвольный элемент в одной из интерпретаций, скажем, a_{k+1}. Рассмотрим все формулы глубины $l-1$ с $k+1$ параметрами (с точностью до эквивалентности их конечное число); некоторые из них будут истинны на $a_1, \ldots, a_{k+1}$, а некоторые ложны. Тогда формула, утверждающая существование a_{k+1} с ровно такими свойствами (после квантора существования идёт конъюнкция всех истинных формул и отрицаний всех ложных) будет формулой глубины l, истинной на $a_1, \ldots, a_k$. По предположению эта формула должна быть истинной и на $b_1, \ldots, b_k$, и потому существует b_{k+1} с теми же свойствами, что и a_{k+1}. Этот элемент b_{k+1} и должен пометить **К**. Теперь предположение индукции позволяет заключить, что в возникшей позиции (где до конца игры $l-1$ ходов) у **К** есть выигрышная стратегия.

Лемма доказана. Её частным случаем является обещанный критерий элементарной эквивалентности:

Теорема 41. Интерпретации A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда в соответствующей игре Эренфойхта выигрывает Консерватор.

Теорема. Теорема Эренфойхта

Две интерпретации элементарно эквивалентны $\Leftrightarrow$ в соответсвующей игре побеждает Консерватор.

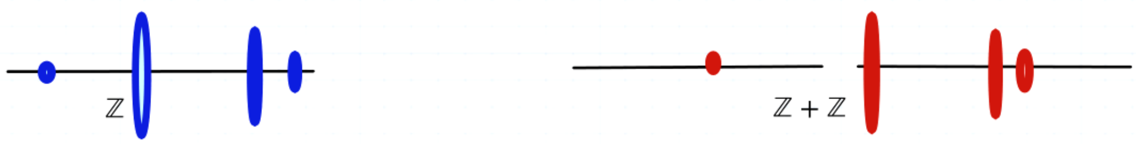
Утверждение. Упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ элементарно эквивалентны.

Доказывается через игру Эренфойхта. В данном примере важно, что Новатор заранее ограничивает число своих ходов.

(Идея нетривиальная. Но думаю, что на экзамене не составит труда самостоятельно придумать стратегию для Консерватора.)

Идея от Мусатова: Консерватор не отличает бесконечные отрезки (отрезки, у которых концы находятся в разных множествах $\mathbb{Z}$) от "очень длинных"(определены ниже). Поддерживает некоторый инвариант: порядок на отмеченных элементах один и тот же, расстояния между соответствующими элементами либо маленькие и одинаковые, либо большие. В конце игры важен только порядок, так что если Консерватору удастся поддерживать этот инвариант, то он выиграет.

За m раундов до конца будем называть "очень длинным"любой отрезок длины $\geq 2^m$. Если Новатор отмечает точку внутри очень длинного длинного отрезка, то из образованных (делением отрезка точкой) отрезков хотя бы один тоже будет очень длинным на следующей стадии (когда m на 1 меньше). Действительно, если каждый из них короче 2^{m-1}, то изначальный был бы короче 2^m. В любом случае Консерватор сможет повторить этот ход: либо с одной стороны образовать короткий отрезок той же длины, либо разделить на два очень длинных. Если Новатор отмечает точку внутри короткого отрезка, то Консерватор сможет повторить такой ход. В любом случае Консерватор сможет поддержать инвариант. Следовательно, Консерватор победит. Следовательно, упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ элементарно эквивалентны.



Стратегия для Консерватора от автора конспекта:

Первый ход Консерватор делает как угодно.

Путь было сделано n ходов. В одном множестве отмечены элементы $a_1, \ldots, a_n$, в другом $b_1, \ldots, b_n$, причём $\forall i$ a_i соответствует b_i и $a_i < a_{i+1}$, соответственно $b_i < b_{i+1}$. Новатор выбирает элемент k между a_i и a_{i+1} (Не важно $[a_i, a_{i+1}]$ конечный или бесконечный). Если отрезок $[b_i, b_{i+1}]$ конечный, то консерватор отмечает элемент в середине этого отрезка. Если отрезок $[b_i, b_{i+1}]$ бесконечный, то консерватор отмечает любую точку между b_i и b_{i+1}. Порядок сохранился. Сделаем перенумерацию и переходим к следующему шагу. Так как между любыми двумя отмеченными объектами континуальное или бесконечное количество точек, то Консерватор в любом случае сможет поддержать инвариант. Следовательно, Консерватор победит. Следовательно, упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ элементарно эквивалентны.