

1.extra7.3. Построение программы, отличие которой ни от какой другой нельзя доказать в арифметике Пеано.

Определение. Две программы называются *различно доказуемыми*, если можно формально доказать (например, в формальной арифметике), что существует вход, на котором они дают разные результаты.

Теорема. *Можно построить программу p со свойством "никакая программа q не является доказуемо различной с p "*

Программа p является непознаваемой, так как если мы докажем любое свойство этой программы, то можно было бы отличить p от программы q , не обладающей этим свойством.

Доказательство. Существование непознаваемой программы p следует из теоремы о неподвижной точке. В самом деле, рассмотрим следующий преобразователь программ: получив на вход программу u , мы перебираем все программы v и все доказательства в формальной теории, пока не найдём некоторую программу v , доказуемо различную с u . Это программа v и будет результатом преобразования. Если бы непознаваемой программы не существовало, то этот преобразователь был бы вычислимой функцией, не имеющей неподвижной точки. ■

Можно отметить, что "на самом деле" наша непознаваемая функция нигде не определена, поскольку если бы она давала результат на каком-то входе, то она бы была доказуемо отлична от программы, дающей другой результат на этом же входе. Получается парадокс: с одной стороны, мы доказали, что наша функция отличается от всюду нулевой функции; с другой стороны, непознаваемость означает невозможность такого доказательства. Этот парадокс получается из-за неявно сделанных предположений (в частности, корректности формальной системы: по второй теореме Гёделя непротиворечимость формальной системы нельзя доказать её средствами).