

81 Сумма Гаусса

Для начала узнаем, чему равны следующие суммы:

$$\sum_{x=1}^k e^{2\pi i x}$$

Она с очевидностью равна k , т.к. $e^{2\pi i x} = 1 \quad \forall x \in N$

Теперь рассмотрим такую сумму:

$$\sum_{x=1}^k e^{2\pi i \frac{ax}{q}}, \text{ где } (a, q) = 1$$

$$\sum_{x=1}^k e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = e^{2\pi i \frac{a}{q}} * \left(\frac{e^{2\pi i a} - 1}{e^{2\pi i \frac{a}{q}} - 1} \right) = 0$$

Таким образом, если a и q взаимнопросты, сумма равна 0 , иначе - k

Суммой Гаусса называется сумма вида $S = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}$. Посчитаем, чему равен ее модуль

$$|S|^2 = S * \bar{S} = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}} \sum_{y=1}^q e^{-2\pi i \frac{ay^2}{q}}.$$

Заметим, что суть данной суммы - суммирование по окружности через равные промежутки. Поэтому разницы нет, начнем мы из точки "у" или из какой-то другой, полученной из "у" сдвигом по этой окружности. Результат не изменится. Поэтому давайте заменим по второй сумме "у" на "х + у". Продолжаем равенство:

$$= \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}} \sum_{y=1}^q e^{-2\pi i \frac{ay^2 + 2axy + ax^2}{q}} = \sum_{x=1}^q \sum_{y=1}^q e^{-2\pi i \frac{ay^2 + 2axy}{q}} = \sum_{y=1}^q \sum_{x=1}^q e^{-2\pi i \frac{ay^2 + 2axy}{q}} = \sum_{y=1}^q e^{-2\pi i \frac{ay^2}{q}} \sum_{x=1}^q e^{-2\pi i \frac{2axy}{q}}$$

$$\text{Обозначим } b = -2ay \sum_{x=1}^q e^{-2\pi i \frac{2axy}{q}} = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{bx}{q}} (*)$$

Рассмотрим, каким может быть q ;

- Пусть q - нечетное. Тогда $2a$ не делится на q , а y делится на q только при $y = q$. $\implies (*) = 0 \quad \forall y \neq q$. При $y = q$; $|S|^2 = e^{-2\pi i a} * q = q$

- Пусть q - четное. Тогда b делится на $q \iff y = q, \frac{q}{2}$

$$|S|^2 = 1 * q + e^{-2\pi i \frac{a}{q} * \frac{q^2}{4}} * q - q + q * e^{-\frac{\pi i a}{2} * q} = \begin{cases} 2q & q \equiv 0(4) \\ 0 & q \equiv 2(4) \end{cases}$$

Таким образом,

$$|S| = \begin{cases} \sqrt{q} & q - \text{нечетное} \\ \sqrt{2q} & q \equiv 0(4) \\ 0 & q \equiv 2(4) \end{cases}$$