

70. Умение: решать уравнения Пелля.

Определение. Уравнение вида $x^2 - my^2 = 1$, где m – натуральное число, не являющееся точным квадратом, называется *уравнением Пелля*.

Решение $(1, 0)$ называется *тривиальным*.

Решение (x, y) называется *положительным*, если $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Замечание 1. Ввиду симметрии для решения уравнения достаточно найти все положительные решения.

Замечание 2. Если m является полным квадратом, то, очевидно, у уравнения нет решений, кроме тривиальных.

Утверждение. Пара (x, y) является решением уравнения Пелля тогда и только тогда, когда норма числа $x + y\sqrt{m}$ в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ равна единице.

▲.

$$N(x + y\sqrt{m}) = (x + y\sqrt{m})(x - y\sqrt{m}) = x^2 - my^2$$

■

Определение (Напоминание). $\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$, $(k = 0, 1, \dots, n)$ называется k -ой подходящей дробью к числу $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Теорема. Если n – длина периода цепной дроби, соответствующей \sqrt{m} , то решениями уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$ являются в точности подходящие дроби числа \sqrt{m} вида $\frac{P_{kn-1}}{Q_{kn-1}}$, где kn – чётно.

Пример 1.

Найдите наименьшее положительное решение уравнения Пелля $x^2 - 6y^2 = 1$.

1) Найдём цепную дробь для $\sqrt{6}$:

$$\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$$

2) Длина периода цепной дроби $n = 2$, значит минимальное k , такое, что kn будет чётным, равно 1. Значит, минимальное решение – подходящие дроби вида $\frac{P_{kn-1}}{Q_{kn-1}} = \frac{P_1}{Q_1}$.

3) $\frac{P_1}{Q_1} = [2; 2] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Получается, пара $(x, y) = (5, 2)$ является минимальным положительным решением уравнения Пелля.

Теорема. Пусть $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{m}$ – наименьшее нетривиальное положительное решение уравнения $x^2 - my^2 = 1$, то все решения этого уравнения имеют вид $\pm(\alpha)^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Следствие. В условиях предыдущей теоремы решениями уравнения Пелля будут пары:

$$\pm \left(\frac{(a_1 + b_1\sqrt{m})^k + (a_1 - b_1\sqrt{m})^k}{2}, \frac{(a_1 + b_1\sqrt{m})^k - (a_1 - b_1\sqrt{m})^k}{2\sqrt{m}} \right), k \in \mathbb{Z}$$

Пример 2.

Найдите все решения уравнения Пелля $x^2 - 6y^2 = 1$.

Из примера 1 мы знаем, что пара $(x, y) = (5, 2)$ является минимальным положительным решением уравнения Пелля.

Тогда общее решение имеет вид:

$$\pm \left(\frac{(5 + 2\sqrt{6})^k + (5 - 2\sqrt{6})^k}{2}, \frac{(5 + 2\sqrt{6})^k - (5 - 2\sqrt{6})^k}{2\sqrt{6}} \right), k \in \mathbb{Z}$$

Пример 3.

Решите уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$ в целых числах

$$x^2 - 6xy + y^2 = (x - 3y)^2 - 8y^2 = 1$$

Делаем замену $z = x - 3y$, и уравнение сводится к уравнению Пелля $z^2 - 8y^2 = 1$