35.Определение равномерной распределённой последовательности по модулю 1. Является ли $\sqrt{n}$ р.р. (mod 1) последовательностью?

Послед-ность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - **равномерно распределена по модулю 1**, если:

$$\forall a, b \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \ldots, N : \{x_i\} \in [a,b)\}|}{N} = b - a$$

или, что равносильно (по сути речь про вероятность, что дробная часть числа из первых N окажется на отрезке b - a):

$$\forall \gamma \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \ldots, N : \{x_i\} \leqslant \gamma\}|}{N} = \gamma$$

Пример: $\sqrt{n}$. Второе определение: Фиксируем γ и N. Последовательность: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{N}$. Пусть переменная k принимает значения целых частей, которые возникают в такой последовательности; k $\in \{1, [\sqrt{2}], [\sqrt{3}], \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots, [\sqrt{N}]\}$.

$\{x_n\} \leqslant \gamma$. Это может возникнуть, если число x_n имеет вид $k^2, k^2+1, \ldots, (k+\gamma)^2 = k^2 + 2k\gamma + \gamma^2$. Таких чисел с точностью до O(1) $2k\gamma$. Тогда общее количество таких n: $|\{n : \{\sqrt{n}\} \leqslant \gamma\}| = \sum_{k=1}^{[\sqrt{N}]}(2k\gamma + O(1)) = 2\gamma\frac{[\sqrt{N}][\sqrt{N}+1]}{2} + O(\sqrt{N}) = N\gamma + O(\sqrt{N})$. Тогда

$$\forall \gamma \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \ldots, N : \{x_i\} \leqslant \gamma\}|}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N\gamma + O(\sqrt{N})}{N} = \gamma$$

Отсюда эта последовательность р.р. (mod 1) по определению.