18. Операции над множествами (масками): объединение, пересечение, разность. Реализация в программе. Проверка, что одна маска является подмножеством другой. Проверка, что число является степенью двойки.

Идея ДП по маскам: пусть n какое-то небольшое число ($\leq$ 30-60), тогда мы можем эффективно закодировать все подмножества множества $\{0, ..., n-1\}$. Для этого рассматриваем маску. Она будет состоять из n символов, каждый из которых - единица или ноль. Единица на i-м месте в маске означает, что мы берем число i в подмножество, 0 - не берем в подмножество

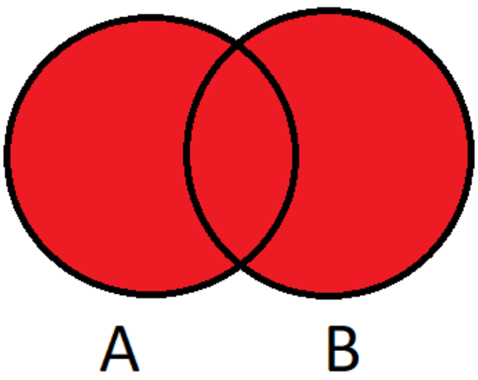
Операции над масками

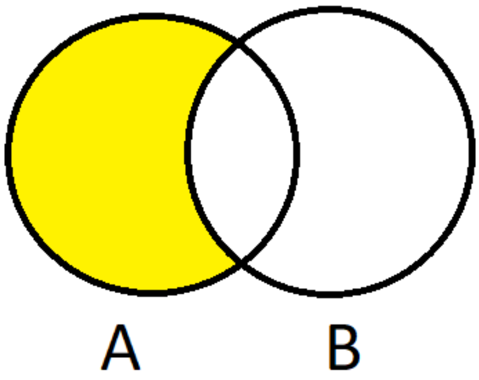
Пусть даны два множества A и B с соответсвующими им масками $mask_A$ и $mask_B$ ($\oplus$ = xor)

Объединение
$A \cup B = mask_A \mid mask_B$

Пересечение
$A \cap B = mask_A \ \& \ mask_B$

Разность $A \backslash B = (mask_A \mid mask_B) \ \oplus \ mask_B = mask_A \& (\sim mask_B)$.





$mask_A \mid mask_B$ $\qquad$ $(mask_A \mid mask_B) \ \oplus \ mask_B$

Проверка, что одна маска является подмножеством другой

Пусть даны две маски A и B. Утверждается, что $B \subset A \iff (A \& B) = B$

▲

$\rightarrow$ Пусть $B \subset A$, тогда если в маске B на месте i стоит единица, то и в маске A на месте i стоит единица, а значит, их побитовое "и"даст в точности B.

$\leftarrow$ Если $(A \& B) = B$, то в маске A единицы стоят как минимум на тех местах, что и в маске B, иначе их побитовое "и"не дало бы единицу на том же месте, что и в маске B. Это значит, что $B \subset A$ ■

Проверка, что число является степенью двойки.

Утверждается, что число a является степенью двойки $\iff a \& (a-1) = 0$

▲

$\rightarrow$ Рассмотрим двоичную запись числа a. Если a $= 2^n$, то a $= 1\underbrace{0...0}_{n} \implies a - 1 = \underbrace{1...1}_{n-1} \implies$ $a\&(a-1) = 0$

$\leftarrow$ Пусть $a \neq 1\underbrace{0...0}_{n}$, тогда $a = \underset{n}{1}...1\underbrace{...}_{i-1}$, т.е. существует единица на i-м месте в записи числа a, тогда $a - 1 = \underset{n}{1}\underbrace{...}_{n-1}$, т.е. старший бит не обнуляется, а значит, побитовое "и"не может равняться нулю. Противоречие. ■

19. Задача о самом дешёвом гамильтоновом пути: решение за O($2^n n^2$)

Запишем важную и полезную функцию, которая позволяет извлекать i-й элемент маски:

```
bool bit(long long mask, int pos) {
        return (mask >> pos) & 1;
}
```

Формулировка задачи
Дан полный, неориентированный, взвешанный граф.
Гамильтонов путь в графе - это путь, который начинается в какой-то вершине графа, проходит по всем вершинам и посещает все вершины графа ровно по одному разу
Среди всех таких путей нас интересует путь минимальной стоимости

Пусть у нас есть какой-то путь, проходящий по каким-то вершинам графа ровно один раз и заканчивающийся в вершинке v. Тогда для того, чтобы продолжить этот путь, нам необходимо знать, в какой вершинке мы находимся и маску посещенный вершин. Отсюда возникает dp:

1. dp[v][mask] - это стоимость минимального пути, который где-то начинается, посещает все вершины маски ровно по одному разу и заканчивается в v
2. База: Пути длины 0. Когда мы стоим в какой-то вершинке и еще никуда не пошли.
dp[v][2^v] = 0, все остальные значения положим $+\infty$
3. Переход: перебираем все ребра, исходящие из v, которые ведут в вершины, еще не посещенные (в маске на месте соответствующей вершины будет стоять 0), и смотрим, куда можем пойти.

(1«u)|mask - взять побитовое "или"числа 2^u и mask. Нетрудно заметить, что такая процедура просто ставит единичку на u-й бит маски

```
for (int mask = 0; mask < 2^n; ++mask){
    for(int v = 0; v < n; ++v){
        for(int u = 0; u < n; ++u){
            if(bit(mask,u)) continue;
            int newmask = (1<<u)|mask;
            dp[u][newmask] = max(dp[u][newmask], dp[v][mask] + cost[v][u]);
        }
    }
}
```

4. Ответ: Минимальное dp[u][2^n - 1]. То есть нас интересуют все пути, которые посещают все вершины, выбираем из них тот, что имеет минимальную стоимость

Асимптотика
За счет циклов O($2^n n^2$)

20. Задача о максимальной клике: решения за $\mathbf{O(2^n n^2)}, O(\mathbf{2^n n})$, $\mathbf{O(2^n)}$

Формулировка задачи
Дан неориентированный, взвешанный граф.
Кликой в неориентированном графе называется подмножество вершин, каждые две из которых соединены ребром графа.

Хотим найти максимальную по мощности клику в данном графе

$\mathbf{O(2^n n^2)}$

Перебираем все подмножества n и за n^2 перебором проверяем, что это клика

$\mathbf{O(2^n n)}$

1. Положим dp[mask] $\begin{cases} true, mask - klika \\ false, else \end{cases}$
2. Будем делать дп назад
3. dp[mask] - клика $\iff$ для любой вершины v из этой маски выполнено:

   1 dp$[mask \oplus 2^v]$ = true. $mask \oplus 2^v$ - на v-ое место маски ставит false. Здесь мы проверяем, что маска без этой вершинки v - клика

   2 v соединена со всеми вершинами маски

4. База: dp[0] = true
5. Ответ: максимальная по мощности маска, для которой dp[mask] = true

Асимптотика
Перебор всех масок: 2^n. Для каждой маски необходимо за линейное время определить какую-нибудь вершинку, которая входит в эту маску (просто пройтись по n битам и найти тот, для которого bit(mask, i) = true). Далее идем по маске и за линейное время определяем, связана ли вершинка, которую мы выбрали, со всеми остальными. Итого получаем $O(2^n n)$

$\mathbf{O(2^n)}$

Новый алгоритм - это оптимизация предыдущего.

1 Для каждой вершинки u посчитаем маску ее соседей. Пусть neigh[u] - маска соседей u. Сделаем это на этапе ввода графа.

2 Теперь бит v выбираем не произвольным образом. Это будем старший включенный бит маски. Почему старший? Его будет удобно насчитывать, что мы поймем дальше

Тогда проверка пункта 3.2(см. предыдущий алгоритм) будет проверяться за O(1):
dp$[mask \oplus 2^v] \subset neigh[v]$. Из 18 билета мы знаем, что $a \subset b \iff (a \ \& \ b) = a$. Значит, проверка: $(dp[mask \oplus 2^v] \ \& \ neigh[v]) = dp[mask \oplus 2^v]$

Теперь поймем, как хранить старший бит

```
int oldest_bit = -1;
for(int mask = 1; mask < 2^n; ++mask){
    if(mask & (mask - 1) == 0) ++oldest_bit;
    ...
}
```

Сначала отметим старший бит равным -1. Очевидно, что старший бит маски будет меняться только в том случае, если мы переходим через степень двойки ($mask \ \&(mask - 1) == 0$ - проверка на то, что mask - степень двойки, см. 18 билет)

Асимптотика
Таким образом, мы научились делать переход за O(1). Значит, итоговая асимптотика O(2^n)

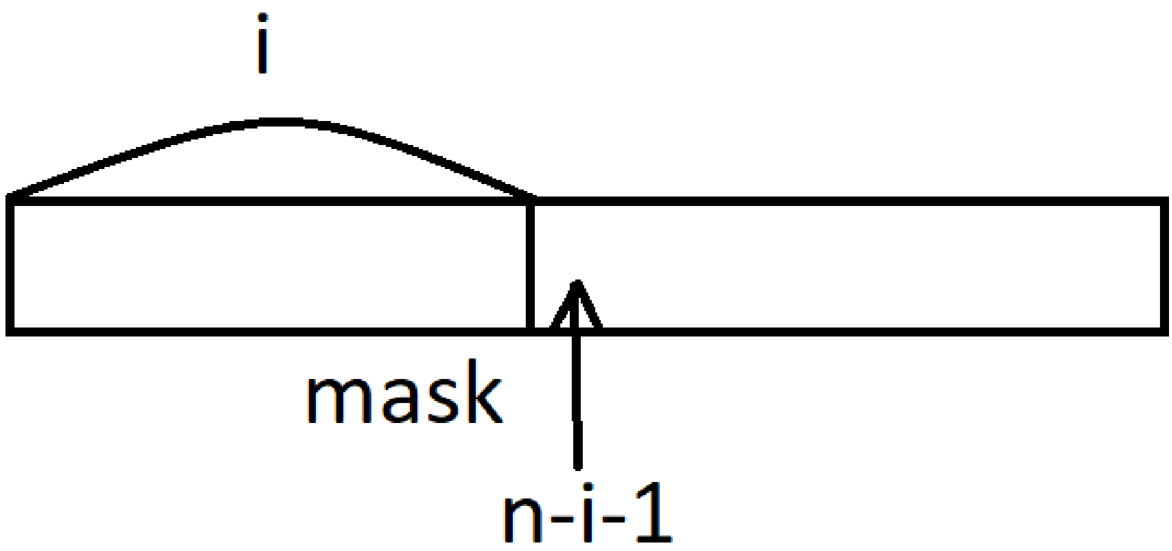
21. Подсчёт всех значений b(mask) = $\max\limits_{s \subset mask} a(s)$ для данного набора значений a(0), a(1)...a($2^n - 1$) за O($2^n n$)

Мы хотим для каждой из масок 0...$2^n - 1$ посчитать максимальное по мощности подмножество маски, являющееся кликой Пусть a(V) =

0, если V - не клика

|V|, если V - клика

Тоогда мы хотим найти b(mask) = $\max\limits_{V \subset mask} a(V)$. Будем делать это с помощью дп
1. dp[k][mask] = $\max\limits_{V \subset mask} a(V)$, где V - такое, что первые k битов V и mask совпадают
2. База dp[n][mask] = a(mask)
3. Переход. Будем ходить по подмаскам. Пусть нам известно dp[i+1][mask]. Научимся переходить к dp[i][mask]. Зафиксируем старшие i битиков, тогла номер у следующего, если считать от начала маски, n-i-1



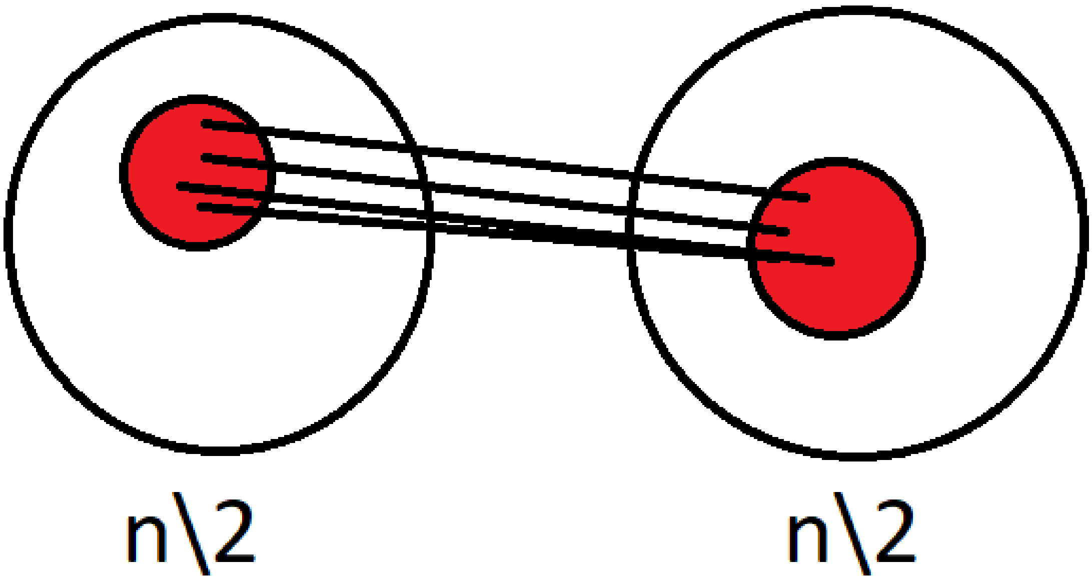
1 Если !bit(mask, n - i -1), то при переходе к подмаске мы не убрали ни одного элемента (т.к. при переходе к подмаске 0 не может стать единицей, значит, остается только 0), а значит, максимальная мощность подмножества, являющегося кликой, не изменилась, dp[i][mask] = dp[i+1][mask]

2 Если bit(mask, n -i-1), то у нас есть выбор, при переходе к подмаске оставить единицу на этом месте или превратить ее в ноль. Так как мы ищем максимальную мощность, то dp[i][mask] = max(dp[i+1][mask], dp[i][$mask \oplus 2^{n-i-1}$]

4. Ответ: b(mask) = dp[0][mask]
Асимптотика
1. Базу можно насчитать за O(2^n)
2. Перебираем все i = n-1...0, перебираем все маски, делаем переход за O(1)
Итог: O($2^n n$)

22. Задача о максимальной клике: решение за $O(2^{\frac{n}{2}}n)$.

Здесь будет использоваться идея meet-in-the-middle. Она заключается в том, что мы делим n пополам и получаем две маски длины $\frac{n}{2}$



Очевидно, что если маска является кликой, то, если мы распилим ее пополам, новые маски останутся тоже кликами.
Если мы нашли какую-то клику в одном из множеств, то, если мы дополним ее нулями, получится клика во множестве масок длины n.

Отсюда получаем, что все маски длины n можно разделить на 3 группы

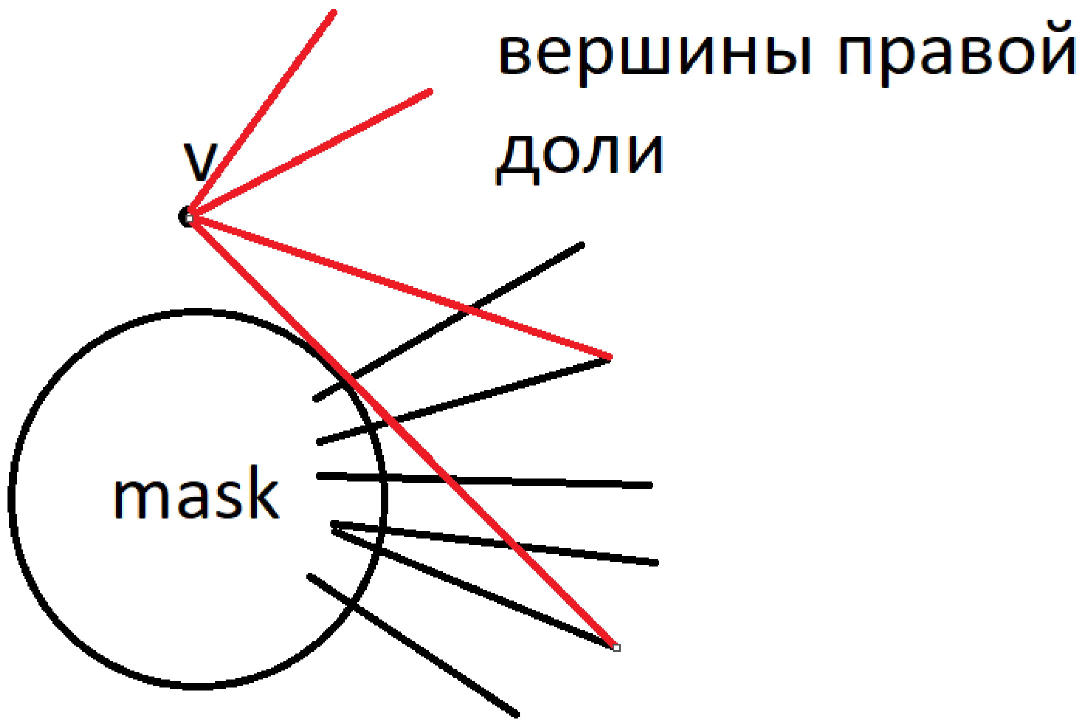
1 Правая часть - нули, левая - клика в левом множестве

2 Левая часть - нули, правая - клика в правом множестве

3 u (левая часть маски длины n) - клика в левом множестве, v (правая часть маски длины n) - клика в правом множестве

Алгоритм
Рассмотрим маску вершин левой доли mask. И запишем маску mask_right вершин правой доли, которые соединены со всеми вершинами из mask. (То есть перебираем все вершины правой доли, и если какая-то вершина соединена со всеми из mask, добавляем ее в маску mask_right)

Пусть dp1[mask] = mask_right, neigh'[v] - маска соседей v в правой доле (вершина v из левой доли), посчитать все neigh'[i] можно за квадрат простым перебором
1. dp1[0] - вся правая доля
2. Хотим добавить в маску вершинку v. $dp1[mask|2^v] = (dp1[mask]\&\ neigh'[v])$



В маску dp1[mask|2^v] входит персечение соседей v и соседей всех вершин mask. По определению пересечение всех соседей mask - это dp1[mask]

Зафиксируем множество U, являющееся кликой в левой доле. Тогда дополнение V множества U до клики во всем множестве - это некоторое подмножество dp1[U]. Поскольку U - клика, и из U проведены все ребра в вершины правой доли, то V - это максимальное подмножество dp1[U], которое является кликой (так как все остальные вершины соединены между собой, осталось найти множество вершин из dp1[U], которые соединены между собой).

Для любой маски mask правой доли найдем максимальное по мощности множество $V \subset mask$, являющееся кликой. Будем это делать, используя алгоритм из билета 21, за $2^{\frac{n}{2}}n$

Асимптотика

1. Насчитать dp1[mask] - перебор всех масок за $2^{\frac{n}{2}}$, для каждой маски проходимся по всем вершинам левой доли от $0 \ldots \frac{n}{2}$, проверяем, входит ли вершина в mask O(1), если не входит, то делаем переход по формуле за O(1). Тогда этот шаг за $O(2^{\frac{n}{2}}n)$
2. Насчитать для каждой маски mask правой доли максимальную клику a[mask], являющуюся подмаской за $O(2^{\frac{n}{2}}n)$
3. Перебираем все маски mask левого множества, являющиеся кликами(можно воспользоваться алгоритмом за 2^n или $2^n n$, там будет насчитано нужное dp), для каждого dp1[mask] максимальная клика в правом множестве - a[dp1[mask]], тогда искомое множество - объединение mask и a[dp1[mask]]. Мощность объединения можно посчитать за O(n), насчитывая количество единиц в двоичной записи масок. Третий шаг за $O(2^{\frac{n}{2}}n)$

Итоговая асимптотика: $O(2^{\frac{n}{2}}n)$

23. Симпатичные узоры: количество раскрасок таблицы n $\times$ m в два цвета без одноцветных квадратиков 2 $\times$ 2. Прямой профиль: решения за O($4^n(n+m)$) и O($8^n logm$)

O($4^n(n+m)$)

Формулировка
Дана таблица nxm и два цвета

1 - черный

2 - белый

Мы не хотим, чтобы в таблице были квадратики 2x2, расскрашенные в один цвет
Сколько есть таких раскрасок?

Предположим, мы уже раскрасили j столбцов. Что нам нужно знать для продолжения раскраски? Очевидно, нам нужно знать только цвета последнего столбца. Отсюда возникает динамика:

1. dp[j][mask] - сколько есть раскрасок j столбцов так, чтобы последний из них был в точности покрашен в mask
2. Переход: перебираем все маски, соответствующие расскраске следующего слолбца и смотрим, не нарушается ли симпатичность узора

Предподсчитаем корректность перехода между масками. Для этого перебираем все комбинации масок и проверяем, сравнивая их за O(n), корректен ли переход. асимптотика предподсчета O($4^n n$)
3.База: dp[1][mask] = 1
4.Ответ: сумма по всем i dp[m][i]

```
for (int j = 1; j <= m - 1; ++j) {
        for (long long mask = 0; mask < 2^n - 1; ++mask) {
                for (long long mask1 = 0; mask1 <  2^n - 1; ++mask1) {
                        if (ok[mask1][mask])
                                dp[j + 1][mask1] += dp[j][mask];
                }
        }
}
```

Асимптотика
За счет циклов O($4^n(m)$) + предподсчет O($4^n(m)$). Итого O($4^n(m+n)$)

O($8^n logm$)

Заметим, что значение dp[i][mask] = $\sum\limits_{mask1=0}^{2^n-1} ok[mask][mask1] * dp[i-1][mask1]$, значит,

$$\begin{pmatrix} dp[i][0] \\ dp[i][1] \\ ... \\ dp[i][2^n-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ok[0][0] & ok[0][1] & ... & ok[0][2^n-1] \\ ok[1][0] & ok[1][1] & ... & ok[1][2^n-1] \\ ... & ... & ... & ... \\ ok[2^n-1][0] & ok[2^n-1][1] & ... & ok[2^n-1][2^n-1] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} dp[i-1][0] \\ dp[i-1][1] \\ ... \\ dp[i-1][2^n-1] \end{pmatrix}$$

$$= \text{ok} * \begin{pmatrix} dp[i-1][0] \\ dp[i-1][1] \\ ... \\ dp[i-1][2^n-1] \end{pmatrix}$$

Тогда $\begin{pmatrix} dp[m][0] \\ dp[m][1] \\ ... \\ dp[m][2^n-1] \end{pmatrix} = ok^{m-1} * \begin{pmatrix} dp[1][0] \\ dp[1][1] \\ ... \\ dp[1][2^n-1] \end{pmatrix}$

Асимптотика

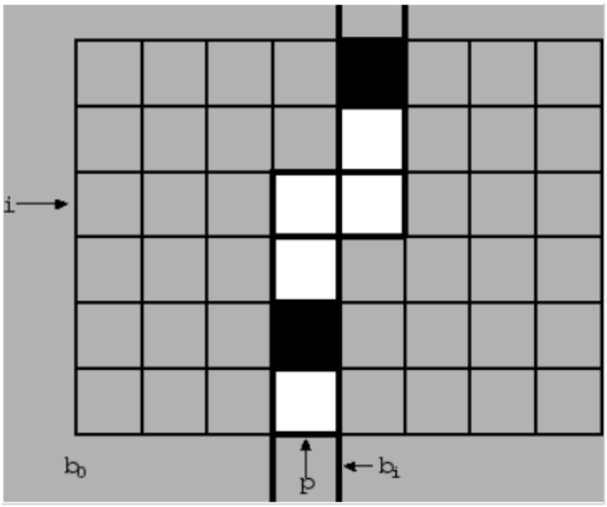
1. Матричное умножение $O((2^n)^3 log\ m) = O(8^n log\ m)$

Это хорошая асимптотика, если n $\leq$ 6, m$\leq 10^{100}$

24. Симпатичные узоры. Изломанный профиль: идея решения за O($2^n mn$)

Формулировка задачи та же самая

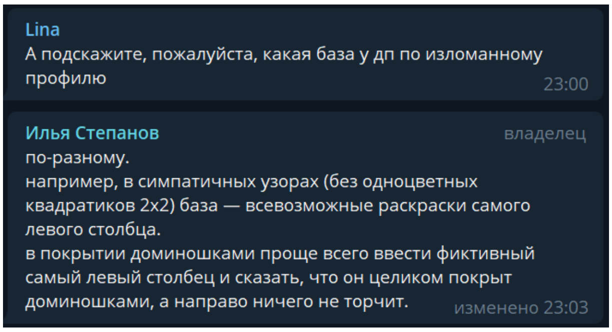
Теперь мы режем нашу табличку не по прямой, а по ломанной прямой. Берем некоторое количество элементов в начале рассматриваемого столбца, а остальные - из предыдущего



Хотим сделать то же самое: предполагая, что все левее разреза покрашено корректно, знать, как будем продолжать красить

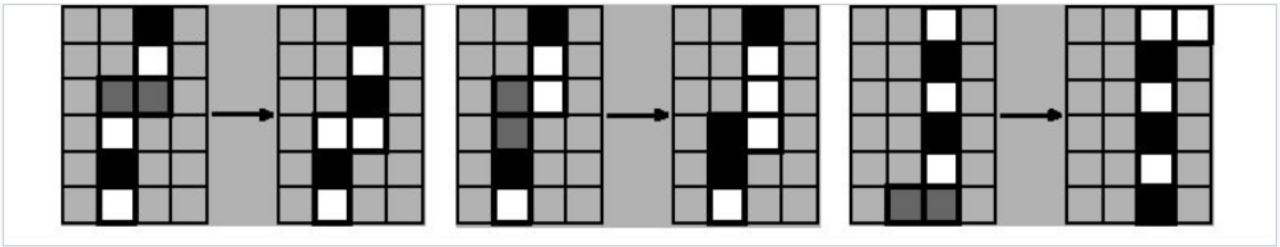
1. dp[j][i][mask] = сколько способов дойти до j столбца и i ячейки в нем, считая сверху, с маской mask у нас есть. (i+1,j) - излом, mask - соответственная маска вдоль этого излома (на картинке - раскрашенная полоска)

2. База:



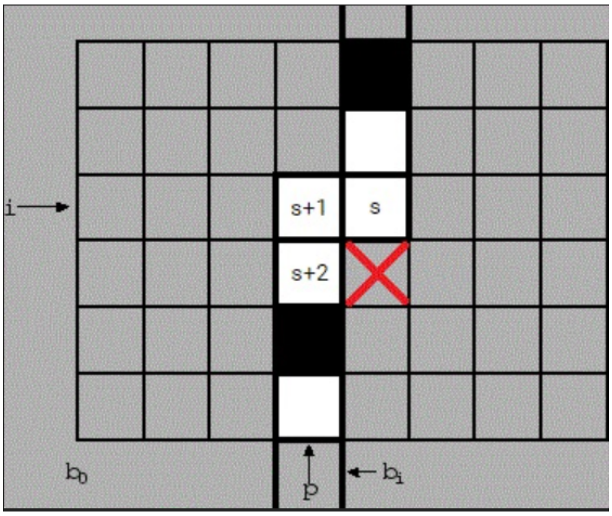
, все остальные - 0

3. Переход: Просчитываем, как можно изменить квадратик, стоящий на изломе (то есть он может быть 0 или 1). Если преход корректен,красим его в этот цвет, переходим к dp[j][i+1][newmask], где новая маска пересчитывается в соответствии с тем, как мы покрасили клетку. Заметим, что хотябы один переход возможен всегда



Возможные переходы

Чуть-чуть подробнее про переходы масок. Ячейки в маске нумеруются s-ками. Проталкивая разрез, меняем в маске s+1 ячейку на выбранную раскраску излома, новым изломом становится клеточка под крестиком



Алгоритм:

1 Цикл по j

2 Цикл по mask

3 Цикл по i

4 Просчитываем квадратик излома

   – Если можно поставить единичку или ноль, ставим, получаем newmask, dp[j][i+1][newmask] += dp[j][i][mask] (если дошли до конца столбца, переходим в dp[j+1][1][newmask]

Ответ: сумма по всем mask dp[m][n][mask]