1 Доп1 (7). Теорема Чёрча о неразрешимости множества общезначимых формул.

Теория полугрупп. Её сигнатура состоит из равенства и единственного двуместного функционального символа, называемого умножением; результат умножения x и y мы будем обозначать (xy).

Теория состоит из аксиом равенства (в них входит корректность умножения: $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 = x_2)^{(} y_1 = y_2) \to (x_1 y_1 = x_2 y_2)$ и аксиомы ассоциативности $\forall x \forall y \forall z ((xy)z = x(yz))$.

Нормальные модели этой теории называются *полугруппами*.

Теорема 69. Множество теорем теории полугрупп (то есть множество замкнутых формул указанной сигнатуры, истинных во всех полугруппах) неразрешимо.

$\triangleleft$ Нам понадобится конкретный способ задания полугрупп с помощью образующих и соотношений. Пусть фиксировано некоторое конечное множество, называемое *алфавитом*. Элементы его называют *буквами*, а конечные последовательности букв — *словами* (данного алфавита). На словах определена операция соединения (приписывания), относительно которой они образуют полугруппу, которая называется *свободной полугруппой*. Эта полугруппа имеет нейтральный элемент — пустое слово, приписывание которого к любому слову не меняет последнего.

Пусть фиксирован алфавит A, а также конечное число пар слов $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ этого алфавита. Два слова алфавита A назовём эквивалентными, если одно можно превратить в другое, многократно делая замены подслов вида $X_i \leftrightarrow Y_i$. Легко проверить, что получается отношение эквивалентности и что операция приписывания корректно определена на классах эквивалентности и ассоциативна. Получается полугруппа. Её называют полугруппой с *образующими* из A и *соотношениями* $X_i = Y_i$.

141. Сколько элементов в полугруппе с образующими a и b и соотношениями $a^2 = \Lambda$, $b^2 = \Lambda$, $ab = ba$ (через Λ мы обозначаем пустое слово)? (Ответ: 4; это группа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.)

Известно, что существуют такие образующие и соотношения, при которых проблема равенства слов (выяснить, принадлежат ли два данных слова одному классу эквивалентности) является алгоритмически неразрешимой (подробнее см. в [5]). Мы сейчас покажем, что этот вопрос можно свести к вопросу о выводимости некоторой формулы в теории полугрупп, так что если бы она была разрешимой, то получилось бы противоречие.

Построение такой формулы происходит весьма естественным образом; мы поясним его на примере. Пусть мы хотим узнать, будут ли слова bb и a равны в полугруппе с образующими a и b и соотношениями $ab = aa$ и $bab = b$. (Другими словами, мы хотим узнать, можно ли из слова bb получить слово a с помощью замен подслов $ab \leftrightarrow aa$ и $bab \leftrightarrow b$.) Как сформулировать этот вопрос в терминах формул? Напишем такую формулу:

$$\forall a \forall b\,((ab = aa) \wedge (bab = b) \to (bb = a)).$$

Она является теоремой теории полугрупп (истинна во всех полугруппах, выводима из аксиом полугрупп) тогда и только тогда, когда слова bb и a эквивалентны в указанной полугруппе, заданной образующими и соотношениями. В самом деле, если одно слово можно получить из другого заменами, то эти замены (в предположении $ab = aa$ и $bab = a$) ничего не меняют и $bb = a$, так что написанная формула истинна во всех полугруппах.

Напротив, если слово a не получается из bb заменой, то существует полугруппа, в которой эта формула не истинна: надо взять как раз полугруппу с образующими a и b и соотношениями $ab = aa$ и $bab = b$, значением переменной a считать класс слова a, а значением переменной b считать класс слова b. Тогда значением терма ab будет класс слова ab, равный классу слова aa по построению полугруппы. Аналогичным образом при такой оценке будет истинно и равенство $bab = b$. А равенство $bb = a$ не будет истинно, так как значение терма bb есть класс слова bb, значение терма a есть класс слова a, а эти классы различны по предположению.

Таким образом, любой алгоритм, проверяющий истинность формул в классе всех полугрупп, можно было бы использовать для проверки равенства двух слов в полугруппе, заданной образующими и соотношениями. А среди таких полугрупп есть неразрешимые. $\triangleright$

Теорема Чёрча. Не существует алгоритма, проверяющего общезначи- мость формул первого порядка.

В этой формулировке не ограничивается сигнатура (от алгоритма требуется, чтобы он определял общезначимость формулы с произвольным числом предикатных и функциональных символов). На самом деле неразрешимость возникает уже в совсем простых сигнатурах, как видно из доказательства.

▲ Поскольку теория полугрупп конечно аксиоматизируема, то выводимость формулы F в этой теории равносильна общезначимости формулы $A \to F$, где A — конъюнкция всех аксиом теории полугрупп. ■