15. Матрицы Адамара. Определение. Равносильность попарной ортогональности строчек и попарной ортогональности столбцов. Канонический вид (нормальная форма). Достижение верхней оценки в неравенстве Адамара.

Определение: *Матрицей Адамара* порядка n называется матрица H_n размера $n \times n$ такая, что все её элементы равны ± 1 и выполнено следующее свойство: $H_n H_n^T = nE_n$. Можно переформулировать так: матрица Адамара — это матрица из ± 1, у которой все строки попарно ортогональны.

Утверждение (задача 20.1): Ортогональность строк матрицы Адамара равносильна ортогональности ее столбцов

▲

$$H_n H_n^T = nE_n \Rightarrow \frac{H_n}{\sqrt{n}} \frac{H_n^T}{\sqrt{n}} = E_n$$

Получили, что $\frac{H_n}{\sqrt{n}}$ и $\frac{H_n^T}{\sqrt{n}}$ - взаимно-обратные $\Rightarrow$ их можно переставить местами. Условие $H_n^T H_n = nE_n$ равносильно ортогональности столбцов (в обратную сторону равносильность доказывается аналогично). ■

Замечание: строки/столбцы матрицы Адамара можно менять местами, умножать на -1, при этом она останется матрицей Адамара.

Определение: Матрицы Адамара, получаемые друг их друга многократным применением таких операций называются *эквивалентными*. *Каноническим видом (нормальной формой)* матрицы Адамара называется эквивалентная ей матрица, в которой первая строка и первый столбец состоят только из 1.

Неравенство Адамара: Если у действительной матрицы A размера $n \times n$ все элементы по модулю меньше 1, то $|\det A| \leq n^{n/2}$.

Утверждение (задача 20.2): Для матриц Адамара в этом неравенстве достигается верхняя оценка, то есть $|\det A| = n^{n/2}$

▲ $\det(nE_n) = \det(H_n H_n^T) = \det H \det H^T = (\det H)^2 \Rightarrow (\det H_n)^2 = n^n \Rightarrow \det H_n = n^{n/2}$ ■