20. Распределение простых чисел в натуральном ряде. Функции $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$. Теорема о равенстве нижних и верхних пределов (формулировка). Неравенство $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Постулат Бертрана (б/д). Теорема Адамара, Валле-Пуссена (б/д). «Дырки» между соседними простыми числами (б/д).

Распределение простых чисел в натуральном ряде
Определение.

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 \text{— количество простых чисел, не превосходящих x.}$$
$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} ln(p)$$
$$\psi(x) = \sum_{(\alpha,p):p^\alpha\leq x} ln(p)$$

Теорема.(о равенстве верхних и нижних пределов (формулировка))

$$\lambda_1 = \overline{\lim_{x\leftarrow\infty}} \frac{\theta(x)}{x}, \lambda_2 = \overline{\lim_{x\leftarrow\infty}} \frac{\psi(x)}{x}, \lambda_3 = \overline{\lim_{x\leftarrow\infty}} \frac{\pi(x)}{x/ln(x)}$$

За μ_i обозначим соответствующие нижние пределы.
Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.
Утверждение. $\lambda_1 \leq \lambda_2$
▲

$$\lambda_1 = \overline{\lim_{x\leftarrow\infty}} \frac{\theta(x)}{x} = \overline{\lim_{x\leftarrow\infty}} \frac{\sum\limits_{p\leq x} ln(p)}{x} \leq \overline{\lim_{x\leftarrow\infty}} \frac{\sum\limits_{(\alpha,p):p^\alpha\leq x} ln(p)}{x} = \overline{\lim_{x\leftarrow\infty}} \frac{\psi(x)}{x} = \lambda_2$$

■
Теорема.(Постулат Бертрана (формулировка))
$\forall x\ \exists p : p \in [x, 2x]$
Теорема.(Адамара, Валле-Пуассена)

$$\pi(x) \sim \frac{lnx}{x}$$

«Дырки» между соседними простыми
Теорема.(Чебышёв) $\exists a, b : 0 < a < b < \infty$ такие, что $\frac{ax}{ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{bx}{ln(x)}$
На лекции Райгородский указал конкрутные границы: $a = ln(2), b = 4ln(2)$