81 Сумма Гаусса

Для начала узнаем, чему равны следующие суммы:
$\sum\limits_{x=1}^{k} e^{2\pi i}$
Она с очевидностью равна k, т.к. $e^{2\pi i} = 1 \; \forall x \in N$
Теперь рассмотрим такую сумму:
$\sum\limits_{x=1}^{k} e^{2\pi i \frac{ax}{q}}$, где $(a, q) = 1$
$\sum\limits_{x=1}^{k} e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = e^{2\pi i \frac{a}{q} * (\frac{e^{2\pi i a}-1}{e^{\frac{2\pi i a}{q}}-1})} = 0$
Таким образом, если a и q взаимнопросты, сумма равна 0, иначе - k

Суммой Гаусса называется сумма вида $S = \sum\limits_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}$. Посчитаем, чему равен ее модуль
$|S|^2 = S * \overline{S} = \sum\limits_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}} \sum\limits_{y=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{ax^2}{q}}$.
Заметим, что суть данной суммы - суммирование по окружности через равные промежуточки. Поэтому разницы нет, начнем мы из точки "y"или из какой-то другой, полученной из "y"сдвигом по этой окружности. Результат не изменится. Поэтому давайте заменим по второй сумме "y"на "x + y". Продолжаем равенство:
$= \sum\limits_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}} \sum\limits_{y=1}^{q} e^{-2\pi i * \frac{ay^2+2axy+ax^2}{q}} = \sum\limits_{x=1}^{q}\sum\limits_{y=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{ay^2+2axy}{q}} = \sum\limits_{y=1}^{q}\sum\limits_{x=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{ay^2+2axy}{q}} = \sum\limits_{y=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{ay^2}{q}} \sum\limits_{x=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{2axy}{q}}$
Обозначим $b = -2ay$ $\sum\limits_{x=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{2axy}{q}} = \sum\limits_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{bx}{q}} (*)$
Рассмотрим, каким может быть q;

- Пусть q - нечетное. Тогда 2a не делится на q, а y делится на q только при y = q. $\Longrightarrow$ (*) = 0 $\forall y \neq q$. При y = q; $|S|^2 = e^{-2\pi i a q} * q = q$
- Пусть q - четное. Тогда b делится на q $\Longleftrightarrow y = q, \frac{q}{2}$
  $|S|^2 = 1 * q + e^{-2\pi i \frac{a}{q} * \frac{q^2}{4}} * q - q + q * e^{\frac{-\pi i a}{2} * q} = \begin{cases} 2q & q \equiv 0(4) \\ 0 & q \equiv 2(4) \end{cases}$

Таким образом,

$$|S| = \begin{cases} \sqrt{q} & \text{q - нечетное} \\ \sqrt{2q} & q \equiv 0(4) \\ 0 & q \equiv 2(4) \end{cases}$$