2-7. Теорема о делении с остатком вполне упорядоченных множеств.

Теорема $\forall \alpha, \beta \quad \exists! \gamma, \delta : \delta < \alpha$ и $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – ВУМы.

Доказательство:

1) Существование.
Рассмотрим ζ такое, что заведомо $\beta\zeta > \alpha$ (например, подойдет $\zeta = \alpha + 1$).

Это значит, что α равняется некоторому начальному отрезку $\beta\zeta$. Этот начальный отрезок представляется в виде $[0; q), q \in \beta\zeta$ и потому $q = (b, g), b \in \beta, g \in \zeta$

$\alpha \in [0; q) \Rightarrow \alpha = (s, t)$: либо $t < g$, а s любое из β, либо $t = g, s < b$.

Для каждого $t < g$ получаем экземпляр β, порядок на этих экземплярах взят с $[0; g)$
В итоге : $\gamma = [0; g), \delta = [0; b)$

2) Единственность.
Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то аналогично единственности вычитания. Если $\gamma_1 < \gamma_2$, то $\gamma_1 + 1 \leq \gamma_2$ и поэтому $\beta \cdot \gamma_1 + \delta_1 < \beta \cdot \gamma_1 + \beta = \beta \cdot (\gamma_1 + 1) \leq \beta \cdot \gamma_2 \leq \beta \cdot \gamma_2 + \delta_2$.