2 Доп4 (7). Возведение вполне упорядоченных множеств в степень: определение и свойства. Счётный ординал в счётной степени счётен.

Возведение в целую положительную степень: (α^n есть произведение n сомножите- лей, равных α). Другими словами, если A упорядочено по типу α, то множество A^n последовательностей длины n с элементами из A с обратным лексикографическим порядком (сравнение справа налево) упорядочено по типу α^n.

Следующий шаг — определить α^ω. Первая идея, приходящая в голову — взять множество $A^{\mathbb{N}}$ бесконечных последовательностей и определить на нём полный порядок. Но как его ввести — неясно. Поэтому можно попробовать определить возведение в степень индуктивно с помощью следующих соотношений: $\alpha^0 = 1; \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha; \alpha^\gamma = sup\{\alpha^\beta | \beta < \gamma\}$ для предельного $\gamma \neq 0$.

Теорема о трансфинитной рекурсии гарантирует, что эти соотношения однозначно определяют некоторую операцию над ординалами, которая и называется **возведением в степень**.

Как вообще работает возведение в степень?

Как выглядят элементы ω^ω? Как многочлены от ω, в которых слагаемые отсортированные по убыванию степени, коэффициенты стоят справа.

Как сравнивать, какой элемент больше?

1) Если максимальная степень больше, то и элемент больше

2) Если максимальная степень такая же, а коэффициент больше, то и элемент больше

3) Если и коэффициент такой же, то сравниваем следующий коэффициент

4) И т.д., пока не найдём различие

Можно представить иначе:

Вместо многочлена рассмотрим последовательность коэффициентов по степеням ω

В ней конечное число ненулевых элементов.

Если максимальный индекс ненулевого элемента больше, то вся последовательность больше

Если такой же, то сравниваем сами элементы

Если и элементы равны, то сравниваем следующие

И так далее

Получается обратный лексикографический порядок

ω^2 – на самом деле аналогично, только последовательность не счётная, а из 2 элементов

Для произвольных α и β тоже можно определить α^β

Определение α^β для произвольных α и β

Элементы α^β – это функции из β в α с конечным носителем, т.е. такие функции, у которых только в конечном числе точек значение отлично от нуля.

Элементы сравниваются по обратному лексикографическому порядку, т.е.

1) Сравниваем максимальные элементы, на которых значение не равно нулю. Если у одной из функций такой элемент больше, то и вся функция больше.

2) Если эти элементы равны, то сравниваем значения на этих элементах.

3) Если и значения равны, то сравниваем следующие по величине элементы, на которых функция не равна нулю.

4) Если и они равны, то сравниваем значения.

5) И так далее, пока не найдём различия

Например, элементы ω^ω можно рассматривать не только как многочлены, но и как функции из ω в ω с конечным носителем, а именно: значение функции на числе n равняется коэффициенту при ω^n.

Свойства:

1. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$;
2. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$

3. Если $\alpha > 1$, $\beta > 1$ то $\alpha^\beta > \alpha$.

▲ 1, 2: из индуктивного определения степени. Например, для 2: Для непредельного элемента - из определения, для предельного верно: $(\alpha^\beta)^\gamma = sup\{(\alpha^\beta)^\xi | \xi < \gamma\} = sup\{\alpha^{(\beta\xi)} | (\beta\xi) < \beta\gamma\} = \alpha^{\beta\gamma}$. Ура!

3:

Почему если $\alpha > 1$, $\beta > 1$, то $\alpha^\beta > \alpha$? Если $\beta > 1$, то $\beta = 1 + \gamma$, $\gamma > 0$.
Тогда $\alpha^\beta = \alpha^{1+\gamma} = \alpha \cdot \alpha^\gamma$. Если $\gamma > 0$, то $\gamma = 1 + \delta$, $\alpha^\beta = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha^\delta$, поскольку $\alpha^\delta \geq 1$, то $\alpha^\beta \geq \alpha \cdot \alpha \geq \alpha \cdot 2$ (т.к. $\alpha > 1$).
Осталось доказать, что $\alpha \cdot 2 > \alpha$. Это верно, т.к. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha > \alpha + 1 > \alpha$

■

Теорема. Если α и β — счётные ординалы, то α^β счётный.

▲ Если мы пронумеровали все элементы вполне упорядоченных множеств A и B, то любой элемент множества $[B \to A]$ может быть задан конечным списком натуральных чисел (носитель и значения на элементах носителя), а таких списков счётное число. ■