1.3.9 Арифметичность предикатов «n — степень шестёрки» и "n = 2^k"

Опр Предикат P: $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ называется *арифметичным*, если он выразим в стандартной интерпретации арифметики $\{\mathbb{N}, +, *, =\}$. Функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется *арифметичной*, если арифметичен предикат $P_f : \mathbb{N}^{k+1} \to \{0,1\}$, где $P_f(x,y) = 1 \leftrightarrow f(x) = y$

Степень шестерки
Степень шестерки можно выразить с использованием квантора по конечному множеству
$\exists D(x \in D \land \forall y \in D(y = 1 \lor (y \vdots 6 \land \frac{y}{6} \in D)))$
У нас есть $x, \frac{x}{6}, \frac{x}{36}, \frac{x}{216}, ..., 1$. Этакий мешок с числами. И если в нем есть x, то есть и $\frac{x}{6}$ и т.д., а остановиться это все может только на единице. Соответственно, если x - не степень шестерки, то возникнет не единица, и оба условия будут нарушены.

Через обычные предикаты эта функция выражается с помощью кодирования Смаллиана. Оно лучше применимо для описания конечных множеств. В чем суть:
Берем и вводим предикат $S(a,b,x)$, которые отвечает следующим свойствам:

1 $\forall a, b\{x : S(a,b,x) = 1\}$ - конечно

2 Для любого конечного S найдутся такие a и b, что $S = \{x : S(a,b,x) = 1\}$

Теперь записанную нами формулу $\exists D....x \in D....$ можно переписать следующим образом:
$\exists a, \exists b(S(a,b,x) \land \forall y(S(a,b,y) \to (y = 1 \lor (y \vdots 6 \land \exists z(y = 6 * z \land S(a,b,z))))))$
Что поменялось? Заменили $\exists D$ на $\exists a, \exists b$. И $x \in D$ на $S(a,b,x)$, получили формулу первого порядка

Степень двойки
$x = 2^k$ можно выразить с использованием квантора по конечной последовательности
$\exists\{a_i\}(a_0 = 1 \land a_k = x \land \forall i \in [0; k-1] \ a_{i+1} = a * a_i)$

Через обычные предикаты это выражается с использованием β-функции Гёделя.
Тут вводится арифметическая функция $\beta(a,b,i)$ со следующим свойством:

$\forall[x_0, ..., x_n]$ найдутся такие a,b, что $\forall i \in [0,n] \ x_i = \beta(a,b,i)$

Теперь в формуле, которая имеет вид $\exists\{x_i\}......x_j......$ можно заменить на такую: $\exists a \exists b......\beta(a,b,j)......$

Применим полученные знания к нашему предикату и получим:
$x = 2^k \iff \exists a, b \ (\beta(a,b,0) = 1 \land \beta(a,b,k) = x \land \forall i \in [0,...,k-1] \ \beta(a,b,i+1) = 2 * \beta(a,b,i)$

1.3.10 Вывод коммутативности сложения в арифметике Пеано

Хотим получить: $\forall x \forall y x + y = y + x$
Будем доказывать в три этапа

$I)\ \forall x\, 0+x=x$

1) $\forall x\, x+0=x$ − аксиома

2) $0+0=0$ − подстановка $x=0$, будет базой индукции

3) $\forall x \forall y\, x+Sy=S(x+y)$

4) $0+Sx=S(0+x)$ − подстановка $x=0$, $y=x$

5) $\forall x \forall y\, (x=y \to Sx=Sy)$ − аксиома равенства

6) $0+x=x \to S(0+x)=Sx$ − подстановка $x := 0+x$, $y := x$

7) $0+x=x \to 0+Sx=Sx$ − транзитивность + силлогизм

8) $\forall x\, (0+x=x \to 0+Sx=Sx)$ − правило обобщения

9) $(0+0=0 \wedge \forall x\, (0+x=x \to 0+Sx=Sx)) \to \forall x\, 0+x=x$ − принцип индукции

10) $\forall x\, 0+x=x$ − два раза *modus ponens*

$II)\ \forall x \forall y\, Sx+y=S(x+y)$

1) $\forall x\, x+0=x$

2) $x+0=x$ − подстановка $x := x$

3) $Sx+0=Sx$ − постановка $x := Sx$

4) $\forall x \forall y\, (x=y \to Sx=Sy)$

5) $x+0=x \to S(x+0)=Sx$

6) $S(x+0)=Sx$ − по *modus ponens*

7) $Sx+0=S(x+0)$ − по транзитивности

8) $\forall x \forall y\, x+Sy=S(x+y)$ − аксиома

9) $Sx+Sy=S(Sx+y)$

10) $x+Sy=S(x+y)$

11) $S(x+Sy)=SS(x+y)$

12) $(Sx+y=S(x+y)) \to (Sx+Sy=S(Sx+y)=SS(x+y)=S(x+Sy))$

т.е. $(Sx+y=S(x+y)) \to (Sx+Sy=S(x+Sy))$

13) $\forall y\, ((Sx+y=S(x+y)) \to (Sx+Sy=S(x+Sy)))$

14) по принципу индукции из $Sx+0=S(x+0)$ и $\forall y\, ((Sx+y=S(x+y)) \to (Sx+Sy=S(x+Sy)))$ получается $\forall y\, Sx+y=S(x+y)$

15) по правилу обобщения $\forall x \forall y\, Sx+y=S(x+y)$

$III)\ \forall x \forall y\, x+y=y+x$

1) $\forall x\, x+0=x$

2) $\forall x\, 0+x=x$

3) $x+0=x$

4) $0+x=x$

5) $x+0=0+x$

6) $\forall x\, x+0=0+x$

7) $Sy+x=S(y+x)$ − из формулы II

8) $x+Sy=S(x+y)$ − из аксиомы

9) $x+y=y+x \to x+Sy=Sy+x$ − из аксиом равенства

10) $\forall y\, (x+y=y+x \to x+Sy=Sy+x)$

11) по принципу индукции из $x+0=0+x$ и $\forall y\, (x+y=y+x \to x+Sy=Sy+x)$ получаем $\forall y\, (x+y=y+x)$

12) по правилу обобщения $\forall x \forall y\, (x+y=y+x)$

1.3.11-1.12 Множество замкнутых формул, истинных в N, неперечислимо. Первая теорема Гёделя о неполноте.Теорема Тарского о неарифметичности множества истинных арифметических формул

Множество замкнутых формул, истинных в N, неперечислимо: :(

Опр Множество А $\subset \mathbb{N}^k$ называется *арифметическим*, если существует арифметическая формула α с параметрами $x_1, ..., x_k$, которая его представляет в следующем смысле: $< n_1, ..., n_k >$ принадлежит множеству А тогда и только тогда, когда формула α истинна при значениях параметров $x_1 = n_1, ..., x_k = n_k$.

Любое перечислимое множество арифметично

Лемма1
Всякое арифметическое множество лежит в классе Σ_n или Π_n для некоторого n (и, естественно, для всех б ольших n).
▲ Формулу, задающую арифметическое множество, приведём к предварённой нормальной форме (вынеся кванторы наружу). Ясно, что бескванторная часть задаёт разрешимое множество, поэтому исходное множество принадлежит какому-то из классов Σ_n или Π_n. Можно и не использовать предварённой нормальной формы, а применить индукцию по длине формулы и сослаться на то, что пересечение, объединение и дополнение, а также проекция не выводят за пределы арифметической иерархии (объединения всех классов Σ_n и Π_n). ■

Рассмотрим теперь множество T, элементами которого являются все истинные арифметические формулы без параметров (точнее, их номера в какой-то вычислимой нумерации всех формул

— это значит, что по формуле можно алгоритмически получить её номер и наоборот).

Лемма2

Любое арифметическое множество m-сводится к множеству T.

▲ Пусть A — произвольное арифметическое множество. Пусть α(x) — формула с одной переменной, которая выражает принадлежность множеству A. Это означает, что α(n) истинно при тех и только тех n, которые принадлежат A. Тогда вычислимая функция n $\rightarrow$ (номер формулы, которая является результатом подстановки константы n в α(x)) m-сводит A к T. ■

Теорема Тарского

Истинность арифметической формулы нельзя выразить арифметическим выражением. То есть не существует формулы True(x), которая истинна тогда и только тогда, когда формула с номером x истинна. (Множество T не арифметично.)

▲ Если бы T было арифметическим, то оно лежало бы в некотором конкретном классе . Поскольку всякое арифметическое множество сводится к T, то все арифметические множества лежали бы в этом классе. Но мы знаем, что множества из более высоких классов иерархии тоже арифметичны, но в Σ_n не лежат.■

Первая теорема Гёделя о неполноте

Множество T арифметических истин неперечислимо.

▲ Это следует из того, что если бы T было перечислимо, оно было бы арифметично, что противоречит теореме Тарского ■