Билет 1-4. Теорема о полноте метода резолюций: из невыполнимой КНФ всегда можно вывести $\perp$.

Метод резолюций всегда заканчивает свою работу, причём для невыполнимых КНФ выводится $\perp$ (полнота), а для выполнимых не выводится (корректность).

Для полноты мы докажем обратное свойство: если $\perp$ не выводится, то КНФ выполнима. Будем строить выполняющий набор рекурсивно, поддерживая следующий инвариант: после i-го шага значения $x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i$ выбраны так, что истинны все дизъюнкты, содержащие только переменные $x_1, \ldots, x_i$. Отсутствие $\perp$ даёт нам базу индукции: выполнены все дизъюнкты, не зависящие ни от каких переменных (т.к. таких дизъюнктов нет). Переход: пусть уже заданы значения $x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i$. Рассмотрим все дизъюнкты, зависящие от x_{i+1} и, возможно, каких-то из переменных $x_1, \ldots, x_i$, но

не переменных $x_{i+2}, \ldots, x_n$. Некоторые из них уже истинны благодаря выбору предыдущих значений. Исключим их из рассмотрения. Если в оставшиеся входит только литерал x_{i+1}, то положим $x_{i+1} = 1$, инвариант будет соблюдён. Если в оставшиеся входит только литерал $\neg x_{i+1}$, то положим $x_{i+1} = 0$, и инвариант тоже будет соблюдён. Осталось исключить случай, когда в какой-то дизъюнкт входит x_{i+1}, а в какой-то другой $\neg x_{i+1}$. Действительно, пусть такие дизъюнкты нашлись: $D_1 = (x_{i+1} \vee D_1')$ и $D_0 = (\neg x_{i+1} \vee D_0')$, где D_1' и D_0' зависят только от $x_1, \ldots, x_i$. По предположению D_0' и D_1' должны быть ложны на значениях $x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i$, иначе мы бы исключили D_0 или D_1. Но резольвентой D_0 и D_1 будет дизъюнкт $(D_0' \vee D_1')$, который тоже должен быть ложен при $x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i$. Но тогда предположение индукции нарушено. Значит, последний случай невозможен, и потому исходная формула выполнима. $\square$