

1 Доп1 (7). Теорема Чёрча о неразрешимости множества общезначимых формул.

Теория полугрупп. Её сигнатура состоит из равенства и единственного двуместного функционального символа, называемого умножением; результат умножения x и y мы будем обозначать (xy) .

Теория состоит из аксиом равенства (в них входит корректность умножения: $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 = x_2) (y_1 = y_2) \rightarrow (x_1 y_1 = x_2 y_2)$) и аксиомы ассоциативности $\forall x \forall y \forall z ((xy)z = x(yz))$.

Нормальные модели этой теории называются *полугруппами*.

Теорема Чёрча. Не существует алгоритма, проверяющего общезначимость формул первого порядка.

В этой формулировке не ограничивается сигнатура (от алгоритма требуется, чтобы он определял общезначимость формулы с произвольным числом предикатных и функциональных символов). На самом деле неразрешимость возникает уже в совсем простых сигнатурах, как видно из доказательства.

▲ Поскольку теория полугрупп конечно аксиоматизируема, то выводимость формулы F в этой теории равносильна общезначимости формулы $A \rightarrow F$, где A — конъюнкция всех аксиом теории полугрупп. ■