90 Постулат Бертрана для n » 0.

Начнем

Постулат Бертрана

Для любого натурального n > 2 найдётся простое число на интервале (n, 2n).

▲

1. Поскольку n » 0, можно считать, что n >= 4000 (Для меньших проверяется следующей последовательностью: 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001 - все простые и для любого n на (n, 2n) найдется простое число (берем максимальное число из ряда, меньшее n, тогда 2p < 2n. При этом n < 2p, т.к. мы формируем ряд так, чтобы следующее за p число было меньше 2p))

2. Докажем следующее утверждение: $\prod\limits_{p \le x} p \le 4^{x-1}$

Будем доказывать по индукции. Заметим, что x можно рассматривать как простое число, потому что если мы берем произвольный x, то очевидно между ближайшим снизу простым числом и x никаких новых множителей не добавится.

1 База: x = 2; 2 < 4 -> верно

2 В силу того, что x - простое, оно нечетно. Тогда пусть x = 2m + 1, тогда $\prod\limits_{p \le 2m+1} p = \prod\limits_{p \le m} p \prod\limits_{m < p \le 2m+1} p <= 4^m * C_{2m+1}^m \le 4^m * 2^{2m} = 4^{2m}$

3. Положим, $\nu_p(x) = max\{k : x \vdots p^k\}$, тогда $\nu_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\frac{n}{p^k}],\ \nu_p(C_{2n}^n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\frac{2n}{p^k}] - 2[\frac{n}{p^k}]$

$[\frac{2n}{p^k}] - 2[\frac{n}{p^k}] < \frac{2n}{p^k} - 2(\frac{n}{p^k} - 1) = 2 \implies [\frac{2n}{p^k}] - 2[\frac{n}{p^k}] \le 1$. Если $p^k > 2n$, то слагаемые равны 0. $\implies \nu_p(C_{2n}^k) \le max\{r : p^r \le 2n\} \le 2n$ Если $p > \sqrt{2n}$ $\nu_p(C_{2n}^k) \le 1$. Иначе возведем в квадрат, получим, $p^2 = 2n < 2n$

4. Еще одно утверждение: Если $\frac{2n}{3} < p < n$, то $\nu_p(C_{2n}^n) = 0$

$3p > 2n \implies (3p)! > (2n)!$. В силу того, что $2p < 2n < 3p$, в (2n)! на p делятся только множители p и 2p $\implies \nu_p((2n)!) = 2, \nu_p(n!) = 1 \implies \nu_p(C_{2n}^n) = 0$.

5. $\frac{4^n}{2n} \le C_{2n}^n \le \prod\limits_{p \le \sqrt{2n}} 2n \prod\limits_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2n}{3}} p \prod\limits_{\frac{2n}{3} < p \le 2n} p$. Рассмотрим последние два произведения. Они верны в силу п4, п3(Если $\sqrt{2n} < p$, то $\nu_p(C_{2n}^k) \le 1$)$\implies$ оценка верна

$$4^n \le (2n)^{1+\sqrt{2n}} \prod\limits_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2n}{3}} p \prod\limits_{\frac{2n}{3} < p \le 2n} p = (2n)^{1+\sqrt{2n}}\, \Pi_1\, \Pi_2$$

Если мы докажем, что $\Pi_2 \ne 1$, то между n и 2n есть простое число. Будем доказывать от противного. Пусть $\Pi_2 = 1$, тогда

$4^n \le (2n)^{1+\sqrt{2n}}\, \Pi_1 \le /\text{п.1}/ (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{\frac{2n}{3}} \implies 4^{\frac{n}{3}} \le (2n)^{1+\sqrt{2n}}$

$2n = ((2n)^{\frac{1}{6}})^6 \le ([(2n)^{\frac{1}{6}}] + 1)^6$

Заметим, что a + 1 $\le 2^a \implies 2n \le 2^{[(2n)^{\frac{1}{6}}]6} \le 2^{(2n)^{\frac{1}{6}}6}$

$4^n = 2^{2n} \le 2n^{3(1+\sqrt{2n})} \le (2^{(2n)^{\frac{1}{6}}6})^{3(1+\sqrt{2n})} = 2^{(2n)^{\frac{1}{6}}18(1+\sqrt{2n})}$

Теперь воспользуемся тем, что $18 \le 2\sqrt{2n} \implies 2^{(2n)^{\frac{1}{6}}18(1+\sqrt{2n})} = 2^{(2n)^{\frac{1}{6}}(18+18\sqrt{2n})} \le 2^{(2n)^{\frac{1}{6}}(20\sqrt{2n})} = 2^{(2n)^{\frac{2}{3}}20} \implies 2n < (2n)^{\frac{2}{3}}20 \implies (2n)^{\frac{1}{3}} < 20 \implies 2n < 8000 \implies n < 4000$. Противоречие ■