

1.5 (3). Устойчивость выразимых предикатов при автоморфизмах интерпретаций.

Пусть есть две интерпретации одной и той же сигнатуры $\langle P_1, \dots, P_k, f_1, \dots, f_m \rangle$, где P_1, \dots, P_k — это предикатные символы, а f_1, \dots, f_m — функциональные символы. Носители этих интерпретаций обозначим A и B (соответственно)

Определение 54: Гомоморфизм обозначается $\alpha : A \rightarrow B$, причем α называется гомоморфизмом, если верно следующее:

1. $P_i(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_l)) = P_i(a_1, \dots, a_l)$ при $i = 1, \dots, k$, причем $a_i \in A$.
2. $f_j(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) = \alpha(f_j(a_1, \dots, a_n))$, при $j = 1, \dots, m$, причем $a_i \in A$. ♣

Здесь используется свойство линейности:

$$\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y).$$

4. **Аutomорфизм** — это гомоморфизм в случае, если α является биекцией, а также $A = B$.

k -местный предикат P — устойчивый относительно α , если

$P(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) \Leftrightarrow P(m_1, \dots, m_k)$ для любых элементов $m_1, \dots, m_k \in M$. Далее, k -местная функция f называется устойчивой относительно α , если $f(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = \alpha(f(m_1, \dots, m_k))$.

Теорема. Любой предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно её автоморфизмов.

▲ Проведём доказательство этого (достаточно очевидного) утверждения формально. Пусть π — некоторая оценка, то есть отображение, ставящее в соответствие всем индивидуальным переменным некоторые элементы носителя. Через $\alpha \circ \pi$ обозначим оценку, которая получится, если к значению каждой переменной применить отображение α ; другими словами, $\alpha \circ \pi(\xi)$ для любой переменной ξ .

Первый шаг состоит в том, чтобы индукцией по построению терма t доказать такое утверждение: значение терма t при оценке $\alpha \circ \pi$ получается применением α к значению терма t при оценке π : $[t](\alpha \circ \pi) = \alpha([t](\pi))$.

Для переменных это очевидно, а шаг индукции использует устойчивость всех функций интерпретации относительно α . Теперь индукцией по построению формулы φ легко доказать такое утверждение: $[\varphi](\alpha \circ \pi) = [\varphi](\pi)$

Мы не будем выписывать эту проверку; скажем лишь, что взаимная однозначность α используется, когда мы разбираем случай кванторов. (В самом деле, если с одной стороны изоморфизма берётся какой-то объект, то взаимная однозначность позволяет взять соответствующий ему объект с другой стороны изоморфизма.) ■

1.6 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: расширение любого непротиворечивого множества до полного и экзистенциально полного.

См. следующий вопрос до леммы 9.

1.7 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: построение модели из замкнутых термов у любого непротиворечивого, полного и экзистенциально полного множества.

Теория - любое множество замкнутых формул (то есть формул, не имеющих параметров).

Модель теории - это любая интерпретация, в которой все формулы из данной теории истинны.

Совместная теория - теория, имеющая модель.

Противоречивая теория - теория, из которой выводится противоречие.

Непротиворечивая теория - теория, из которой нельзя вывести противоречие

Теорема Гёделя, о полноте исчисления предикатов: Если φ общезначима, то она выводима в исчислении предикатов. Пользуясь данной терминологией, можно сформулировать теорему, из которой будет следовать теорема Гёделя.

Теорема: Если теория непротиворечива, то она совместна (имеет модель).

Доказательство: 1. Мы хотим расширить не противоречивую Γ так, чтобы она была полной (если φ - замкнутая формула, то $\Gamma \vdash \varphi$ или $\Gamma \vdash \neg\varphi$) и экзистенциально полной (т.е. если $\Gamma \vdash \exists x\varphi$, то $\Gamma \vdash \varphi(t/x)$, где t - замкнутый терм).

Идея доказательства теоремы о полноте: если в сигнатуре есть константные символы, то в языке есть замкнутые термы, т.е. термы, не зависящие от переменных. Им должны соответствовать какие-то элементы носителя модели. Самое простое — все эти элементы будут разными, функции будут определяться тривиальным образом, т.е. функция f из термов t_1, \dots, t_k делает терм $f(t_1, \dots, t_k)$.
Проблема с этим планом: константных символов может и вообще не быть, или быть недостаточно для того, чтобы все формулы из теории были выполнены.
Другая проблема: а как, собственно, определять предикаты?
Идея решения: чтобы избавиться от первой проблемы, добавляем новые константные символы, а для решения второй проблемы пополняем теорию, чтобы любая замкнутая формула была доказуема или опровержима, что позволит определить значения предикатов на замкнутых термах.
(Предикат от замкнутых термов является замкнутой формулой и потому подпадает под условие).
Решение одной проблемы усугубляет другую, и наоборот, поэтому нужно сделать счётное число исправлений

Лемма 9. Любую непротиворечивую теорию можно расширить до непротиворечивой, полной и экзистенциально полной теории.

Доказательство было приведено выше.

Лемма 10.

Любая непротиворечивая, полная, экзистенциально полная теория совместна, то есть имеет модель.

Последняя лемма : любая полная, непротиворечивая и экзистенциально полная теория Γ имеет модель из замкнутых термов.

Носитель – все замкнутые термы

$$[f](t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k)$$

$$[P](t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Gamma \vdash P(t_1, \dots, t_k) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Нужно доказать, что если $\Gamma \vdash \phi$, то ϕ истинно в этой модели

Можно считать, что ϕ замкнуто (иначе навесим \forall по правилу обобщения)

Для замкнутых в силу полноты Γ будем доказывать следующее:

Если $\Gamma \vdash \phi$, то ϕ истинна в модели, а если $\Gamma \vdash \neg \phi$, то ϕ ложна в модели

Индукция по логической глубине формулы.

Если ϕ атомарная, то по определению $[P]$

Если $\phi = \neg \psi$, то для ψ всё доказано, для ϕ тоже получается.

Если $\phi = (\psi \wedge \xi)$ или для другой связки, то из утверждений для ψ и ξ всё выводится

Если $\phi = \exists x \psi$, то по экзистенциальной полноте $\Gamma \vdash \psi(t/x)$, это более простая формула, поэтому $\psi(t/x)$ истинна в модели, поэтому $\exists x \psi$ тоже истинна в модели

С другой стороны, если $\exists x \psi$ истинна в модели, то $\psi(t/x)$ истинна в модели, по предположению индукции $\Gamma \vdash \psi(t/x)$, поэтому $\Gamma \vdash \exists x \psi$

$\forall x \psi$ можно заменить на $\neg \exists x \neg \psi$ как с точки зрения выводимости, так и с точки зрения истинности

Все формулы исходного Γ_0 будут лежать в Γ и потому быть выводимы, так что мы построили действительно модель исходной теории

1.8 (5). Представимость конечных последовательностей в арифметике при помощи β - функции Гёделя.

Лемма 1: $\forall n \forall c \exists b > c$ такое, что $b + 1, 2b + 1, \dots, nb + 1$ - взаимно просты

▲ Рассмотрим $b = n!$ НОД($kb + 1, lb + 1$) = $d > 1 \Rightarrow (k - l)b$ делится на d . Тогда т.к. $b = n!$ и $k - l < n$, получаем, что любой простой делитель числа $(k - l)b$ должен быть меньше n (Строго меньше, т.к. $kb + 1, lb + 1$ не делятся на n).

У d есть простой делитель $p < n$.

$lb + 1$ делится на p .

$lb + 1 - l \cdot n!$ делится на p . !!!!! $\Rightarrow d = 1$ ■

Лемма 2 $(x_1, \dots, x_n) \exists a, b \forall i \text{ а mod}(b \cdot i + 1) = x_i$ ▲ Выберем по Лемме 1 $b > \max\{x_i\}$

Тогда a найдётся по китайской теореме об остатках: Если натуральные числа попарно взаимно просты, то для любых r_1, r_2, \dots, r_n таких, что $0 \leq r_i < a_i$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ найдется число N , которое при делении на $a_i = b \cdot i + 1$ дает остаток r_i при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Более того, если найдутся два таких числа N_1 и N_2 , то $N_1 = N_2 \text{ mod } a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

Положим $\beta(a, b, i) = \text{а mod}(b \cdot i + 1)$

β арифметична: $r = x \text{ mod } q \Leftrightarrow r < q \cap \exists s : x = s \cdot q + r$ ■