88-89 Распределение простых чисел в натуральном ряде. Функции $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$. Теорема Чебышёва

$\pi(x) = \sum\limits_{p<=x} 1$

$\theta(x) = \sum\limits_{p<=x} ln(p)$

$\psi(x) = \sum\limits_{(p,\alpha):p^\alpha<=x} ln(p)$

Теорема Чебышева
$\exists x_0 : \ \forall x \geq x_0$ выполнено:
$\ln 2 * \frac{x}{lnx} \leq \pi(x) \leq 4ln2\frac{x}{lnx}$

▲ Введем $\lambda_1 = \overline{\lim\limits_{x->\infty}}\frac{\theta(x)}{x}, \ \lambda_2 = \overline{\lim\limits_{x->\infty}}\frac{\psi(x)}{x}, \ \lambda_3 = \overline{\lim\limits_{x->\infty}}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{lnx}}$. Аналогично определим μ_1, μ_2, μ_3
$\mu_1 = \underline{\lim\limits_{x->\infty}}\frac{\theta(x)}{x}, \ \mu_2 = \underline{\lim\limits_{x->\infty}}\frac{\psi(x)}{x}, \ \mu_3 = \underline{\lim\limits_{x->\infty}}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{lnx}}$

Лемма
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ▲ $\lambda_1 \leq \lambda_2$ - очевидно. Зафиксируем р. $\alpha : p^\alpha \leq x, [log_p(x)] = [\frac{ln(x)}{ln(p)}]; \ \ \psi(x) = \sum\limits_{(p,\alpha):p^\alpha<=x} ln(p) = \sum\limits_{p\leq x}[\frac{ln(x)}{ln(p)}]ln(p) \leq \sum\limits_{p\leq x} ln(x) = ln(x)\sum\limits_{p\leq x} 1 = \pi(x) * ln(x) \Longrightarrow \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)ln(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{\frac{x}{lnx}} \Longrightarrow \lambda_2 \leq \lambda_1$
Осталось показать, что $\lambda_1 \geq \lambda_3$. $\theta(x) = \sum\limits_{p<=x} ln(p) \geq \sum\limits_{x^\gamma<p<=x} ln(p), \ \gamma \in (0,1), > \sum\limits_{x^\gamma<p<=x} ln(x^\gamma) = \gamma ln(x)\sum\limits_{x^\gamma<p<=x} 1 = \gamma ln(x)(\pi(x) - \pi(x^\gamma)) \geq \gamma ln(x)(\pi(x) - x^\gamma) \Longrightarrow \frac{\theta(x)}{x} \geq \gamma(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{lnx}} - \frac{x^\gamma}{x} * ln(x)) \Longrightarrow \lambda_1 \geq \gamma\lambda_3 \Longrightarrow \lambda_1 \geq \lambda_3$ Для μ_i доказывается аналогично, но в конце переходим к нижнему пределу, а не к верхнему■

Теперь начинаем доказывать Теорему Чебышева. Рассмотрим $C_{2n}^n < 2^{2n}$; $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \geq \prod\limits_{n<p\leq 2n} p \Longrightarrow$
$\prod\limits_{n<p\leq 2n} p < 2^{2n}$. Прологарифмируем это по натуральному основанию. Получим:
$\prod\limits_{n<p\leq 2n} p < 2nln2 \Longrightarrow \theta(2n) - \theta(n) < 2nln2$. Просуммируем правую и левую части выражения по степеням двойки. То есть пробежимся по всем n $= 1, 2, 4, ..., 2^k$. Получим
$\theta(2^{k+1}) < 2^{k+2}ln2$
Теперь рассмотрим произвольный x.
Очевидно, что для каждого такого x $\exists! k : 2^k \leq x < 2^{k+1} \Longrightarrow \theta(x) \leq \theta(2^{k+1}) < 2^{k+1}ln2 \leq 4xln2 \Longrightarrow \frac{\theta(x)}{x} \leq 4ln2 \Longrightarrow \lambda_1 \leq 4ln2 \Longrightarrow \lambda_3 \leq 4ln2 \Longrightarrow \pi(x) \leq (4ln2 + \epsilon)\frac{x}{ln2}$

Верхняя оценка доказана! Теперь докажем нижнюю...
$C_{2n}^n > \frac{2^{2n}}{2n+1}; (C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + ... + C_{2n}^n + ... + C_{2n}^2 n = 2^{2n}, C_{2n}^n -$ самое большое слагаемое)
$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \prod\limits_{p\leq 2n} p^{[\frac{2n}{p}]+[\frac{2n}{p^2}]+....-2([\frac{n}{p}])+[\frac{n}{p^2}]+...} = \prod\limits_{p\leq 2n} p^{([\frac{2n}{p}]-2[\frac{n}{p}])+([\frac{2n}{p^2}]-2[\frac{n}{p^2}])+...}$
Заметим, что $[2x] - 2[x] \leq 1 \Longrightarrow \leq \prod\limits_{p\leq 2n} p^{[log_p(2n)]} = \prod\limits_{p\leq 2n} p^{[\frac{ln(2n)}{ln(p)}]}$
$\frac{2^{2n}}{2n+1} < \prod\limits_{p\leq 2n} p^{[\frac{ln(2n)}{ln(p)}]}$
Логарифмируем по натруральному основанию. Получаем:
$2nln(2) - ln(2n+1) < \sum\limits_{p\leq 2n} ln(p) * [\frac{ln(2n)}{ln(p)}] = \psi(2n)$
Как и в предыдущих рассуждениях, берем произвольный x, $x \in [2n, 2n+2)$

$\psi(x) \geq \psi(2n) > 2nln(2) - ln(2n+1) > (x-2)ln(2) - ln(x+1) \Longrightarrow \frac{\psi(x)}{x} > ln(2) - \frac{2ln(2)}{x} - \frac{ln(x+1)}{x}$.
И переходим к нижнему пределу:
$\mu_2 \geq ln(2) \Longrightarrow \mu_3 \geq ln(2) \Longrightarrow \pi(x \geq (ln(2) - \epsilon)\frac{x}{ln(x)})$

Ура!■