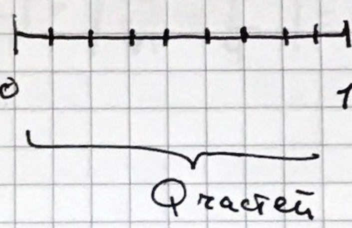
Билет 63. Date

Теорема Дирихле о диофантовых приближениях (формулировка и док-во с использованием принципа Дирихле)

Т-ма Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда $\exists$ бесконечно много рациональных дробей $\frac{p}{q}$, таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}$

▲ Возьмём $Q \in \mathbb{N}$ (произвольное)



Разобьем отрезок от 0 до 1 на Q одинаковых частей, тогда размер каждой части будет равен $\frac{1}{Q}$.

Рассмотрим все числа вида $\{\alpha x\}$, где x от 0 до Q (дробная часть αx).

Все они попадут на отрезок от 0 до 1.

Их Q+1, маленьких отрезков Q, поэтому для некоторых чисел x_1, x_2 $(x_1 \ne x_2)$

$$\left|\{\alpha x_1\} - \{\alpha x_2\}\right| \le \frac{1}{Q} \quad \text{(по принципу Дирихле)}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $\{a\} = a - [a]$, поэтому:

$$\left|\alpha x_1 - \alpha x_2 - ([\alpha x_1] - [\alpha x_2])\right| \le \frac{1}{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\underbrace{\alpha(x_1 - x_2)}_{q} - (\underbrace{[\alpha x_1] - [\alpha x_2]}_{p})\right| \le \frac{1}{Q}$$

($q > 0$ т.к. $x_1 > x_2$)

$$|\alpha q - p| \le \frac{1}{Q} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{qQ} \le \frac{1}{q^2}$$

Далее возьмём Q_1 такое, что $\frac{1}{Q_1} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$.

Найдем для него таким же образом p_1 и q_1.

$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| \le \frac{1}{Q_1} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} \ne \frac{p}{q}$. Таким образом, получим бесконечное число дробей. ■