1.5 (3). Устойчивость выразимых предикатов при автоморфизмах интерпретаций.

Пусть есть две интерпретации одной и той же сигнатуры $\langle P_1, \dots, P_k, f_1, \dots, f_m \rangle$, где $P_1, \dots, P_k$ — это предикатные символы, а $f_1, \dots, f_m$ — функциональные символы. Носители этих интерпретаций обозначим A и B (соответственно)

Определение 54: Гомоморфизм *обозначается $\alpha : \ A \to B$, причем α называется гомоморфизмом, если верно следующее:*

1. $P_i(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_l)) = P_i(a_1, \dots, a_l)$ *при* $i = 1, \dots, k$, *причем* $a_i \in A$.
2. $f_j(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) = \alpha(f_j(a_1, \dots, a_n))$, *при* $j = 1, \dots, n$, *причем* $a_i \in A$. ♣

Здесь используется свойство линейности:

$$\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y).$$

4. ***Автоморфизм*** *— это гомоморфизм в случае, если α является биекцией, а также $A = B$.*

k-местный предикат P - устойчивыq относительно α, если

$P(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) \Leftrightarrow P(m_1, ..., m_k)$ для любых элементов $m_1, \dots, m_k \in M$. Далее, k-местная функция f называется *устойчивой* относительно α, если $f(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = \alpha(f(m_1, \dots, m_k))$.

Теорема. Любой предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно её автоморфизмов.

▲ Проведём доказательство этого (достаточно очевидного) утвер- ждения формально. Пусть π — некоторая оценка, то есть отображение, ставящее в соответствие всем индивидным переменным некоторые элементы носителя. Через $\alpha \circ \pi$ обозначим оценку, которая получится, если к значению каждой переменной применить отображение α; другими словами, $\alpha \circ \pi(\xi)$ для любой переменной ξ.

Первый шаг состоит в том, чтобы индукцией по построению терма t доказать такое утверждение: значение терма t при оценке $\alpha \circ \pi$ получается применением α к значению терма t при оценке π: $[t](\alpha \circ \pi) = \alpha([t](\pi))$.

Для переменных это очевидно, а шаг индукции использует устойчивость всех функций интерпретации относительно α. Теперь индукцией по построению формулы φ легко доказать такое утверждение: $[\varphi](\alpha \circ \pi) = [\varphi](\pi)$

Мы не будем выписывать эту проверку; скажем лишь, что взаимная однозначность α используется, когда мы разбираем случай кванторов. (В самом деле, если с одной стороны изоморфизма берётся какой-то объект, то взаимная однозначность позволяет взять соответствующий ему объект с другой стороны изоморфизма.) ■

1.6 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: расширение любого непротиворечивого множества до полного и экзистенциально полного.

См. следующий вопрос до леммы 9.

1.7 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: построение модели из замкнутых термов у любого непротиворечивого, полного и экзистенциально полного множества.

Теория - любое множество замкнутых формул (то есть формул, не имеющих параметров).

Модель теории - это любая интерпретация, в которой все формулы из данной теории истинны.

Совместная теория - теория, имеющая модель.

Противоречивая теория - теория, из которой выводится противоречие.

Непротиворечивая теория - теория, из которой нельзя вывести противоречие

Теорема Гёделя, о полноте исчисления предикатов: Если φ общезначима, то она выводима в исчислении предикатов. Пользуясь данной терминологией, можно сформулировать теорему, из которой будет следовать теорема Гёделя.

Теорема: Если теория непротиворечива, то она совместна (имеет модель).

Док-во: Сначала сформулируем идею доказательства. Нужно расширить непротиворечивую теорию Γ так, чтобы она стала:

1. *Полной*, то есть если ϕ — замкнутая формула, то $\Gamma \vdash \phi$ или $\Gamma \vdash \neg\phi$;
2. *Экзистенциально полной*, то есть если $\Gamma \vdash \exists x\, \phi$, то:

$$\Gamma \vdash \phi(t/x),$$

где t — замкнутый терм.

После этого у Γ будет модель из замкнутых термов.

Итак, **первым шагом** доказательства будет пополнение. Будем считать, что множество переменных, как и сигнатура — счетные. Следовательно, множество всех замкнутых формул — счетно.

Рассмотрим все замкнутые формулы по очереди $(\phi_1, \phi_2, \dots)$. Тогда если Γ — непротиворечива, то $\Gamma \cup \{\phi\}$ или $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ — также непротиворечива.

Используя закон исключенного третьего и лемму о дедукции, получим:

$$\Gamma \cup \{\phi \vee \neg\phi\} \vdash x,\ \neg x,$$

тогда:

$$\Gamma \vdash x,\ \neg x.$$

Получено противоречие. Тогда пусть:

$$\Gamma_0 = \Gamma_1, \quad \dots, \quad \Gamma_i = \begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\phi_i\}, & \text{если это непротиворечиво,} \\ \Gamma_{i-1} \cup \{\neg\phi_i\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда пополнение — это:

$$\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i.$$

Очевидно, это множество полно

Аксиома 12: $\forall x\, \phi \to \phi(t/x)$, где t/x — это корректная подстановка терм t в ϕ вместо свободных вхождений x.

Лемма 7 (О свежих константах) Пусть выводима формула ϕ, в которой переменная x заменена на некоторую константу, то есть $\vdash \phi(c/x)$, где c — константа, не встречающаяся в формуле ϕ. Тогда выводима и сама формула ϕ. *

Док-во: В выводе $\phi(c/x)$ заменим c на «свежую переменную» z, которая не встречается более нигде в выводе. Получим, что выводима формула $\phi(z/x)$.

Тогда по правилу обобщения будет выводима формула:

$$\vdash \forall z\, \phi(z/x).$$

Используя аксиому 12, получим:

$$\vdash \Big(\phi(z/x)\Big)(x/z) = \phi,$$

что и требовалось доказать. ■

Лемма 8 (О добавлении констант) Пусть σ — некоторая сигнатура, а σ' — сигнатура, отличная от σ на некоторое количество константных символов.

Тогда если ϕ — формула в сигнатуре σ — выводима в теории Γ сигнатуры σ при помощи сигнатуры σ', то она выводима в теории Γ сигнатуры σ и при помощи сигнатуры σ. *

Док-во: Идея доказательства: все вхождения новых констант нужно заменить на «свежие переменные». ■

Итак, вернемся к экзистенциальному пополнению. Пусть:

$$\Gamma \vdash \exists x\, \phi.$$

Тогда добавим к сигнатуре константу c_ϕ, а к теории — замкнутую формулу $\phi(c_\phi/x)$. Поступим аналогично со всеми формулами такого вида.

Нужно понять, почему в результате проделанных операций сохранится непротиворечивость.

Пусть было выведено какое-то противоречие, то есть пусть выводятся формулы ϕ и $\neg\phi$ из $\Gamma \cup \phi(c_\phi/x)$. Тогда (по лемме о дедукции):

$$\vdash \Big(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge ... \wedge \gamma_k \wedge \phi(c_\phi/x)\Big) \;\to\; (\psi \wedge \neg\psi). \tag{12.1}$$

Теперь нужно вспомнить, что гласит аксиома 9:

$$\neg\psi \;\to\; (\psi \to \eta).$$

Выведем тогда:

$$\neg\psi \;\to\; (\psi \to \neg\eta).$$

Следовательно, можно заменить ψ на замкнутую формулу η, не содержащую c_ϕ. Тогда по лемме 7 о свежих константах, примененной к формуле (12.1), получим, что:

$$\vdash (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_k \wedge \phi) \ \rightarrow \ (\eta \wedge \neg\eta).$$

Значит, по лемме 8 о добавлении констант можно считать, что в выводе новая константа c_ϕ не используется.

Отсюда получим далее (*булева тавтология*):

$$\vdash \phi \ \rightarrow \ \Big((\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \rightarrow (\eta \wedge \neg\eta)\Big).$$

Используем правило Бернайса:

$$\vdash \exists x\, \phi \ \rightarrow \ \Big((\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \rightarrow (\eta \wedge \neg\eta)\Big).$$

Так как $\Gamma \vdash \exists x\, \phi$, запишем, что:

$$\Gamma \vdash (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \ \rightarrow \ (\eta \wedge \neg\eta).$$

В силу того, что Γ содержит $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, получим:

$$\Gamma \vdash \eta \wedge \neg\eta,$$

то есть Γ — противоречива.

Здесь возникает проблема: новое Γ может перестать быть полным из-за расширения сигнатуры. Решение таково: нужно снова использовать пополнение.

Тогда возникает новая проблема: экзистенциальная полнота могла быть утрачена. Решением будет провести счетное количество аналогичных операций — циклов пополнения и экзистенциального пополнения.

Полученный результат будет:

1. Непротиворечив, так как промежуточные результаты являются непротиворечивыми на каждом этапе;

2. Полон, так как любая формула содержит лишь конечное число новых констант, следовательно, на следующем этапе после добавления последней константы будет выводима либо она, либо ее отрицание;

3. Экзистенциально полон (по аналогичным причинам).

Лемма 9. Любую непротиворечивую теорию можно расширить до непротиворечивой, полной и экзистенциально полной теории.

Доказательство было приведено выше.

Лемма 10.

Любая непротиворечивая, полная, экзистенциально полная теория совместна, то есть имеет модель.

Докажем лемму 10:

Док-во: Носитель (интерпретация) — это замкнутые термы. Функциональные символы интерпретируются естественным образом, то есть:

$$[f](t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k).$$

Предикатные символы интерпретируются более сложным образом:

$$\begin{aligned} [P](t_1, \dots, t_k) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash P(t_1, \dots, t_k); \\ [P](t_1, \dots, t_k) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \neg P(t_1, \dots, t_k). \end{aligned}$$

Таким образом, определились значения всех замкнутых формул. ∎

Лемма 11 Если ϕ — замкнутая формула, то тогда $\Gamma \vdash \phi$ тогда и только тогда, когда ϕ истинно в построенной интерпретации. *

Док-во: Доказательство будет проведено индукцией по построению формулы.

Если ϕ — атомарная, то тогда она имеет вид $P(t_1, \dots, t_k)$, где t_i — замкнутые термы. Значит, по определению утверждение верно. Здесь также используется полнота. ∎

Продолжим доказательство леммы 10. База индукции определена (исходя из леммы 11).

Если $\phi = \neg\psi$, то (по предположению индукции):

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \psi \quad &\Longleftrightarrow \quad \psi \text{ — истинна;} \\ \Gamma \vdash \psi \quad &\Longleftrightarrow \quad \Gamma \nvdash \psi, \end{aligned}$$

пользуясь также полнотой и непротиворечивостью. Это равносильно тому, что ψ ложна, что, в свою очередь, равносильно тому, что ϕ истинна.

Пусть $\phi = (\psi \wedge \eta)$. Тогда:

$$\Gamma \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\Gamma \vdash \psi,\ \Gamma \vdash \eta\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\psi \text{ и } \eta \text{ истинны}\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \phi \text{ — истинна.}$$

С дизъюнкцией и импликацией — аналогично.

Пусть теперь $\phi = \exists x\, \psi$. Тогда:

$$\Gamma \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \psi(t/x),$$

где t — замкнутый терм. Здесь используются экзистенциальная полнота и аксиома 13.

Тогда:

$$\Gamma \vdash \psi(t/x) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(t/x) \text{ — истинна} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x\, \psi \text{ — истинно.}$$

Здесь используется то, что ψ — истинна на оценке $x = t$, а также определение истинности.

В случае, если $\phi = \forall x\, \psi$ — ситуация сводится к $\neg\exists x\, \neg\psi$. ∎

1.8 (5). Представимость конечных последовательностей в арифметике при помощи β - функции Гёделя.

Лемма 1: $\forall n \forall c \exists b > c$ такое, что $b+1, 2b+1, \ldots, nb+1$ - взаимно просты

▲ Рассмотрим $b = n!$ НОД$(kb+1, lb+1) = d > 1 \Rightarrow (k-l)b$ делится на d. Тогда т.к. $b = n!$ и $k - l < n$, получаем, что любой простой делитель числа $(k-l)b$ должен быть меньше n (Строго меньше, т.к. $kb+1, lb+1$ не делятся на n).

У d есть простой делитель $p < n$.

$lb+1$ делится на p.

$lb+1-l \cdot n!$ делится на p. !!!!! $\Rightarrow d = 1$ ■

Лемма 2 $(x_1, \ldots x_n) \exists a, b \forall i \; amod(b \cdot i + 1) = x_i$ ▲ Выберем по Лемме 1 $b > max\{x_i\}$

Тогда a найдётся по *китайской теореме об остатках*: Если натуральные числа попарно взаимно просты, то для любых $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i < a_i$ при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется число N, которое при делении на a_i дает остаток r_i при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Более того, если найдутся два таких числа N_1 и N_2, то $N_1 = N_2(moda_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n)$.

Положим $\beta(a, b, i) = amod(b \cdot i + 1)$

β арифметична: $r = xmodq \Leftrightarrow r < q \cap \exists s : x = s \cdot q + r$ ■