100 (16 на хор). Доказательство теоремы Минковского-Главки для октаэдра: переформулировка условия теоремы через Λ_a и неравенства на p и n. Сведение теоремы к неравенству

Теорема Минковского-Главки: $\frac{Vol\Omega}{\Delta(\Omega)} \geqslant 1$, где Ω - произвольное тело; мы работаем с ней для октаэдра, но не на классе ВСЕХ решёток (в критическом определителе у нас inf по всем решёткам), а переформулируем:
$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geqslant n_0 \exists \Lambda \subset \mathbb{R}^n : \Lambda \cap \Omega \backslash \{0\} = \varnothing$, а $\det\Lambda \leqslant (Vol\Omega)(1+\varepsilon)$
Рассмотрим $\overline{a} = (a_1/p, a_2/p, \ldots, a_n/p)$, p - простое число, $a_i \in \mathbb{Z}$. Берём $< \mathbb{Z}^n, \overline{a} > = \{\overline{a}l + \overline{b}l : l \in \mathbb{Z}, \overline{b} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда $\Lambda_{\overline{a}} = < \mathbb{Z}^n, \overline{a} >$- это вот эта решётка. Б.о.о. $1 \leqslant a_i \leqslant p-1$.

Утверждение: $\det\Lambda_{\overline{a}} = \frac{1}{p}$

Переформулировка условия теоремы Минковского-Главки $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geqslant n_0 \exists \Lambda_{\overline{a}} \subset \mathbb{R}^n : \Lambda_{\overline{a}} \cap O^n \backslash \{0\} = \varnothing$ ($\Lambda_{\overline{a}}$ допустима относительно O^n, а $\det\Lambda_{\overline{a}} = \frac{1}{p} \leqslant (VolO^n)(1+\varepsilon) = \frac{2^n}{n!}(1+\varepsilon)$, что, по сути, $p \geqslant \frac{n!}{2^n}(1-\varepsilon)$

Билет 100 (продолжение)

Хотим найти, сколько ~~раз~~ точек $\Lambda_{\bar a}$ (в зав-ти от a) попадает в октаэдр:
$|\Lambda_{\bar a} \cap O^n|$ -?

Вспомогательная ф-ия: $\delta(\bar x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \bar x \in \mathbb{Z}^n \\ 0, \text{ если } \bar x \notin \mathbb{Z}^n \end{cases}$ (индикатор)

$$\sum_{l=1}^{p} \sum_{\bar x \in (\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n \cap O^n)} \delta(\bar a l + \bar x) = |\Lambda_{\bar a} \cap O^n \backslash \{0\}|$$

это доказываем.

$$\Lambda_{\bar a} \overset{def}{=} \{\bar a l + \bar b : l \in \mathbb{Z}, \bar b \in \mathbb{Z}^n\}$$

$(\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n \cap O^n)$ ← здесь лежат все нужные векторы, т.к. $\Lambda_{\bar a}$ - подрешётка $\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n \cap O^n$

$\Lambda_{\bar a} \subset \frac{1}{p}\mathbb{Z}^n$.

$\delta(\bar a l + \bar x) = 1 \iff \bar a l + \bar x = \bar b \in \mathbb{Z}^n$

$\bar x = \bar a \cdot (-l) + \bar b \in \Lambda_{\bar a}$

$\Downarrow$

рав-во доказано.

Возьмём среднее значение $|\Lambda_{\bar a} \cap O^n \backslash \{0\}|$ по всем способам выбрать $\bar a$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. мин. простое p: $p \geqslant \frac{n!}{2^n}(1-\varepsilon)$

При $n \geqslant n_0$ $p \leqslant \frac{n!}{2^n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

p выбрали, величину выбрали, усредняем по всем $1 \leqslant a_i \leqslant p-1$:

$$\frac{1}{p^n} \cdot \sum_{a_1=1}^{p} \ldots \sum_{a_n=1}^{p} |\Lambda_{\bar a} \cap O^n \backslash \{0\}| \overset{?}{<} 1.$$

$\Rightarrow$ одно из этих слагаемых < 1

$\Rightarrow$ равно 0.

101 (17 на хор). Теорема Минковского-Главки для октаэдра (формулировка). Доказательство неравенства.

Билет 101. Продолжение док-ва.

$$\frac{1}{p^n}\sum_{a_1=1}^{p}\ldots\sum_{a_n=1}^{p} |\Lambda_{\bar a}\cap O^n\setminus\{0\}| < 1.$$

$$\frac{1}{p^n}\underbrace{\sum_{a_1=1}^{p}\ldots\sum_{a_n=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}}_{\text{переставим порядок сумм.}}\sum_{\bar x\in(\frac{1}{p}\mathbb{Z}^n\cap O^n\setminus\{0\}}\delta(\bar a l+\bar x) = \frac{1}{p^n}\sum_{l=1}^{p}\sum_{x}\sum_{a_1=1}^{p}\ldots\sum_{a_n=1}^{p}\delta(\bar a l+\bar x)$$

Фикс. l, $\bar x = \left(\frac{x_1}{p},\ldots\frac{x_n}{p}\right)$

$\bar a l+\bar x : \left(\frac{a_1 l+x_1}{p},\ldots,\frac{a_n l+x_n}{p}\right)$

$(u,v)=1 \Rightarrow au+bv=1$

— " —

$\frac{1}{p^n}\sum_{l=1}^{p}\ldots$ $\leftarrow$ можно просто взять $p-1$, т.к. если $l=p$, то $\bar a l\in\mathbb{Z}^n$, $\delta(\bar a l+\bar x)=1 \Leftrightarrow \bar x\in\mathbb{Z}^n$, но векторы $\bar x\in\mathbb{Z}^n$ – $2n$ штук: вершины октаэдра.

$\frac{2n}{p^n}$ – очень маленькая штука

p, l взаимно прост. $\Rightarrow \exists$ и притом ед. a_i, b: $a_i l+b_i\cdot p=-x_i$

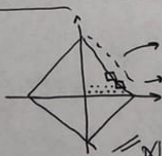
$a_i l+x_i = \underline{\underline{-b_i p}}$ целое.

$$\ominus\ \frac{1}{p^n}\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{\bar x}\underbrace{\sum_{a_1=1}^{p}\ldots\sum_{a_n=1}^{p}}\delta(\bar a l+\bar x)+\frac{2n}{p^n} \ominus$$

надо в каждом Σ выдрать фикс. a_i: это всего одно $\bar a$.

$$\ominus\ \frac{1}{p^n}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{\bar x}1\right)+\frac{2n}{p^n}\leq$$

Оценим $\longrightarrow$



$\to$ покрывается бо́льшим октаэдром из фунд. обл.

$\to$ $\frac{1}{p^n}$ – объём фунд. обл.

$$\sum_{\bar x}1 \text{ – не больше } V \text{ бо́льшего октаэдра на } p^n.$$

$$\sum_{\bar x}1\leq\frac{2^n}{n!}\cdot\underline{\underline{\left(1+\frac{2}{p}\right)^n}}\cdot p^n$$

коэфф. увел. для бо́льшего октаэдра.

$$\leq\frac{1}{p^n}\sum_{l=1}^{p-1}\frac{2^n}{n!}\left(1+\frac{2}{p}\right)^n\cdot p^n+\frac{2n}{p^n}\ \textcircled{\leq}$$

$$\textcircled{\leq}\ \frac{1}{\cancel{p^n}}\cdot p\cdot\frac{2^n}{n!}\left(1+\frac{2}{p}\right)^n\cdot\cancel{p^n}+\frac{2n}{p^n}\ \textcircled{\leq}$$

но $\frac{n!}{2^n}(1-\varepsilon)\leq p\leq\frac{n!}{2^n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\textcircled{\leq}\ \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n!}}\underbrace{\left(1+\frac{2^{n+1}}{n!(1-\varepsilon)}\right)^n}_{\longrightarrow 1 \text{ при } n\to\infty}+\frac{2n}{p^n}<\cancel{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}+\frac{\varepsilon^2}{4}=1.\ \text{Ура!}$$