2 Доп1 (7). Существование нелинейной аддитивной функции, т.е. такой функции f, что f(x + y) = f(x) + f(y) $\forall x; y \in \mathbb{R}$, но f(x) не является умножением на константу.

Линейно независимое множество векторов называется *базисом Гамеля (или просто базисом)* данного пространства, если любой вектор представим в виде конечной линейной комбина- ции элементов этого множества.

Теорема. Существует (всюду определённая) функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой f(x + y) = f(x) + f(y) при всех x и y, но которая не есть умножение на константу.

▲ Рассмотрим $\mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. В нём есть базис Гамеля. Пусть α — один из векторов базиса. Рассмотрим функцию f, которая с каждым числом x (рассматриваемым как вектор в пространстве $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$) сопоставляет его α-координату (коэффициент при α в единственном выражении x через векторы базиса). Эта функция линейна над $\mathbb{Q}$, поэтому f(x+y) = f(x)+f(y) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Она отлична от нуля ($f(\alpha) = 1$) и принимает лишь рациональные значения, поэтому не может быть умножением на константу. ■

P.S. $\mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$: $\mathbb{R}$ замкнуто относительно сложения и домножения на рациональный коэффициент; можно считать это векторным пространством. Базисом будет $< 1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{6}, \cdots >$.