87.Нижняя оценка разброса (уклонения) величиной $\frac{\sqrt{n}}{2}$ с помощью матриц Адамара.

Теорема.Если n - порядок матрицы Адамара, то $\exists \mathcal{M} : \forall \chi \hookrightarrow disc(\mathcal{M}, \chi) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$, где $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n\}, \forall i \ \mathcal{M}_i \subset \{1, 2, \cdots, n\} = \mathcal{R}$

▲ В данном билете используются понятия, определённые в билетах "Матрицы Адамара"(билет 15) и "Разброс системы подмножеств относительно раскраски"(билет 18).

По определению:

$$disc(\mathcal{M}, \chi) = max|\sum_{j \in \mathcal{M}_i} \chi(j)|$$

Пусть H - матрица Адамара, которая имеет нормальный вид, J - матрица из единиц. Рассмотрим матрицу $\frac{H+J}{2}$, она состоит только из нулей и единиц. Рассмотрим $\mathcal{M}$, в которой за $\mathcal{M}_i$ обозначим те позиции в i-ой строке, на которых стоят единицы. $\mathcal{M}_i \subset \{1, 2, \cdots, n\}$

Пусть

$$H \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_n \end{pmatrix}, v_i \in \{+1, -1\}$$

$$\left(\frac{H+J}{2}\right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_1+\lambda)/2 \\ \cdots \\ (L_n+\lambda)/2 \end{pmatrix}, v_i \in \{+1, -1\}, \lambda = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

Тогда $\forall i$

$$(L_i + \lambda)/2 = (1...10...01...) \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Будем с помощью v_i-ых задавать раскраску множества $\mathcal{R}$: $v_i = \chi(i)$. Тогда

$$|(L_i + \lambda)/2| = |\sum_{j \in \mathcal{M}_i} \chi(j)|$$

Следовательно, нам необходимо доказать, что для любого набора v_i (для любой раскраски множества $\mathcal{R}$), всегда найдётся $(L_i + \lambda)/2$ по модулю не меньшее $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

$H = (\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_n})$, т.е. $\overline{h_i}$ - i-ый столбец матрицы H. (Важное свойство $(h_i, h_j) = 0$, $\forall i \neq j$)

$$(H\overline{v}, H\overline{v}) = L_1^2 + \ldots + L_n^2$$

$$(H\overline{v}, H\overline{v}) = (\overline{h_1} \cdot v_1 + \ldots + \overline{h_n} \cdot v_n, \overline{h_1} \cdot v_1 + \ldots + \overline{h_n} \cdot v_n) = (\overline{h_1}, \overline{h_1})v_1^2 + \ldots + (\overline{h_n}, \overline{h_n})v_n^2 = n \cdot 1 + \ldots + n \cdot 1 = n^2 \Rightarrow$$

$$L_1^2 + \ldots + L_n^2 = n^2$$

$$(H+J)\overline{v} = \begin{pmatrix} L_1 + \lambda \\ \cdots \\ L_n + \lambda \end{pmatrix}, \text{где } \lambda = \sum_{i=1}^{n} v_i \text{- чётное число}$$

$$((H+J)\overline{v}, (H+J)\overline{v}) = (L_1+\lambda)^2 + \ldots + (L_n+\lambda)^2 = L_1^2 + \ldots + L_n^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} L_i + \lambda^2 n = n^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} L_i + \lambda^2 n$$

Используя структуру матрицы H - матрицы Адамара нормального вида, можно сказать, что $\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n h_{ij} = v_1 \cdot n + v_2 \cdot 0 + \ldots + v_n \cdot 0 = \pm n$, следовательно

$$((H+J)\overline{v}, (H+J)\overline{v}) = \lambda^2 n \pm 2\lambda n + n^2 \geq n^2$$

(Неравенство доказывается перебором целых значений в окрестности минимума)

Так как $((H+J)\overline{v},(H+J)\overline{v}) = (L_1+\lambda)^2+\ldots+(L_n+\lambda)^2$,то $\exists k : L_k+\lambda \geq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{(L_k+\lambda)}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$, следовательно, для рассматриваемого $\mathcal{M}$ верно:

$$disc(\mathcal{M},\chi) = max|\sum_{j\in\mathcal{M}_i}\chi(j)| \geq |\sum_{j\in\mathcal{M}_k}\chi(j)| = \frac{(L_k+\lambda)}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Следовательно, $\exists\mathcal{M} : \forall\chi \hookrightarrow disc(\mathcal{M},\chi) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$ $\blacksquare$