1.5 (3). Устойчивость выразимых предикатов при автоморфизмах интерпретаций.

Пусть есть две интерпретации одной и той же сигнатуры $\langle P_1, \dots, P_k, f_1, \dots, f_m \rangle$, где $P_1, \dots, P_k$ — это предикатные символы, а $f_1, \dots, f_m$ — функциональные символы. Носители этих интерпретаций обозначим A и B (соответственно)

***Определение 54:* Гомоморфизм** *обозначается* $\alpha : \ A \to B$, *причем* α *называется гомоморфизмом, если верно следующее:*

1. $P_i(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_l)) = P_i(a_1, \dots, a_l)$ *при* $i = 1, \dots, k$, *причем* $a_i \in A$.
2. $f_j(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) = \alpha(f_j(a_1, \dots, a_n))$, *при* $j = 1, \dots, n$, *причем* $a_i \in A$. ♣

Здесь используется свойство линейности:

$$\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y).$$

4. **Автоморфизм** — *это гомоморфизм в случае, если* α *является биекцией, а также* $A = B$.

k-местный предикат P - устойчивыq относительно α, если

$P(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) \Leftrightarrow P(m_1, ..., m_k)$ для любых элементов $m_1, \dots, m_k \in M$. Далее, k-местная функция f называется *устойчивой* относительно α, если $f(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = \alpha(f(m_1, \dots, m_k))$.

Теорема. Любой предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно её автоморфизмов.

▲ Проведём доказательство этого (достаточно очевидного) утвер- ждения формально. Пусть π — некоторая оценка, то есть отображение, ставящее в соответствие всем индивидным переменным некоторые элементы носителя. Через $\alpha \circ \pi$ обозначим оценку, которая получится, если к значению каждой переменной применить отображение α; другими словами, $\alpha \circ \pi(\xi)$ для любой переменной ξ.

Первый шаг состоит в том, чтобы индукцией по построению терма t доказать такое утверждение: значение терма t при оценке $\alpha \circ \pi$ получается применением α к значению терма t при оценке π: $[t](\alpha \circ \pi) = \alpha([t](\pi))$.

Для переменных это очевидно, а шаг индукции использует устойчивость всех функций интерпретации относительно α. Теперь индукцией по построению формулы φ легко доказать такое утверждение: $[\varphi](\alpha \circ \pi) = [\varphi](\pi)$

Мы не будем выписывать эту проверку; скажем лишь, что взаимная однозначность α используется, когда мы разбираем случай кванторов. (В самом деле, если с одной стороны изоморфизма берётся какой-то объект, то взаимная однозначность позволяет взять соответствующий ему объект с другой стороны изоморфизма.) ■

1.6 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: расширение любого непротиворечивого множества до полного и экзистенциально полного.

См. следующий вопрос до леммы 9.

1.7 (4). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: построение модели из замкнутых термов у любого непротиворечивого, полного и экзистенциально полного множества.

Теория - любое множество замкнутых формул (то есть формул, не имеющих параметров).

Модель теории - это любая интерпретация, в которой все формулы из данной теории истинны.

Совместная теория - теория, имеющая модель.

Противоречивая теория - теория, из которой выводится противоречие.

Непротиворечивая теория - теория, из которой нельзя вывести противоречие

Теорема Гёделя, о полноте исчисления предикатов: Если φ общезначима, то она выводима в исчислении предикатов. Пользуясь данной терминологией, можно сформулировать теорему, из которой будет следовать теорема Гёделя.

Теорема: Если теория непротиворечива, то она совместна (имеет модель).

Доказательство: 1. Мы хотим расширить не противоречивую Γ так, чтобы она была полной (если φ - замкнутая формула, то $\Gamma \vdash \varphi$ или $\Gamma \vdash \neg\varphi$) и экзистенциально полной (т.е. если $\Gamma \vdash \exists x\varphi$, то $\Gamma \vdash \varphi(t/x)$, где t - замкнутый терм.

Теория Γ в сигнатуре σ называется полной, если для любой замкнутой формулы ϕ этой же сигнатуры выполнено либо $\Gamma \vdash \phi$, либо $\Gamma \vdash \neg\phi$

Теорема о пополнении: Любую непротиворечивую теорию Γ можно расширить до полной непротиворечивой теории Δ.

Доказательство (для счётной сигнатуры). Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ — нумерация всех замкнутых формул в сигнатуре σ. Будем строить рекурсивную цепочку: $\Gamma_0 = \Gamma$.

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \phi_{i+1}, \text{ если это непротиворечивая теория} \\ \Gamma_i \cup \neg\phi_{i+1}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Если обе теории противоречивы, то и Γ_i противоречиво — доказывается аналогично ИВ

$$\Delta = \cup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

Проблема с нехваткой констант: может быть так, что $\Gamma \vdash \exists x\, \phi$, но неверно $\Gamma \vdash \phi(t/x)$ ни для какого замкнутого терма t. Тогда получится, что $\phi(t/x)$ не будет верна в модели из замкнутых термов, а тогда и формула $\exists x\, \phi$ не будет там верна.

Вводится дополнительное требование: теория Γ называется экзистенциально полной в сигнатуре σ, если для любой формулы ϕ, такой что $\Gamma \vdash \exists x\, \phi$, также $\Gamma \vdash \phi(t/x)$ для какого-то замкнутого терма t

Теорема: любую пару (Γ, σ), т.ч. теория Γ непротиворечива в сигнатуре σ, можно расширить до пары (Δ, τ), т.ч. теория Δ непротиворечива и экзистенциально полна в сигнатуре τ

Доказательство: вновь рассмотрим подряд все формулы с 1 параметром $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ Положим $\Gamma_0 = \Gamma$, $\sigma_0 = \sigma$

Если $\Gamma_i \vdash \exists x\, \phi_{i+1}$, то $\sigma_{i+1} = \sigma_i \cup \{c_{\phi_{i+1}}\}$, $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\phi_{i+1}(c_{\phi_{i+1}}/x)\}$

Нужно доказать, что при такой процедуре не пропадёт непротиворечивость

Пусть Γ_{i+1} противоречива. Тогда $\Gamma_i \vdash \neg\phi_{i+1}(c_{\phi_{i+1}}/x)$

Но если в выводе противоречия заменить $c_{\phi_{i+1}}$ на "свежую" переменную z (т.е. не участвовавшую в выводе), то вывод останется корректным.

Т.е. $\Gamma_i \vdash \neg\phi_{i+1}(z/x)$. Отсюда по правилу обобщения $\Gamma_i \vdash \forall z\, \neg\phi_{i+1}(z/x)$

Поэтому (упр. — проверить детали) $\Gamma_i \vdash \forall x\, \neg\phi_{i+1}(x)$

С другой стороны, $\Gamma_i \vdash \exists x\, \phi_{i+1}$, поэтому само Γ_i противоречиво

Теперь $\Delta = \cup\, \Gamma_i$, $\tau = \cup\, \sigma_i$

Δ также будет непротиворечивым, т.к. противоречие выводится из конечного множества формул

Проблема : при пополнении может утратиться экзистенциальная полнота. В теорию добавляются новые формулы, становятся выводимыми новые формулы вида $\exists x\ \phi$, для некоторых из них может нарушаться условие
С другой стороны, при экзистенциальном пополнении может утратиться полнота. В сигнатуре появляются новые символы, условие полноты распространяется на новые формулы, для которых может быть неверным.
Чтобы решить эту проблему, нужно сделать счётное число раундов пополнения и экзистенциального пополнения, и объединить все получившиеся теории и сигнатуры.
Результат будет непротиворечивым, полным и экзистенциально полным.
Непротиворечивость : как обычно, противоречие выводится из конечного числа формул, на каком – то конечном этапе все они уже добавлены.
Полнота : пусть дана формула в объединённой сигнатуре. Формула зависит от конечного числа символов, на каком – то этапе они все уже добавлены в сигнатуру. На следующем раунде пополнения эта формула будет рассмотрена.
Экзистенциальная полнота : пусть дана формула вида $\exists x\ \phi$, выводимая из объединённой теории
В выводе используется конечное число формул, все они уже лежат в теории на каком- то этапе.
На следующем раунде экзистенциального пополнения будет добавлена нужная константа.

Идея доказательства теоремы о полноте : если в сигнатуре есть константные символы, то в языке есть замкнутые термы, т.е. термы, не зависящие от переменных. Им должны соответствовать какие- то элементы носителя модели. Самое простое – все эти элементы будут разными, функции будут определяться тривиальным образом, т.е. функция f из термов $t_1,\ldots,t_k$ делает терм $f(t_1,\ldots,t_k)$.
Проблема с этим планом : константных символов может или вообще не быть, или быть недостаточно для того, чтобы все формулы из теории были выполнены
Другая проблема : а как, собственно, определять предикаты?
Идея решения : чтобы избавиться от первой проблемы, добавляем новые константные символы, а для решения второй проблемы пополняем теорию, чтобы любая замкнутая формула была доказуема или опровержима, что позволит определить значения предикатов на замкнутых термах
(Предикат от замкнутых термов является замкнутой формулой и потому подпадает под условие.
Решение одной проблемы усугубляет другую, и наоборот, поэтому нужно сделать счётное число исправлений

Лемма 9. Любую непротиворечивую теорию можно расширить до непротиворечивой, полной и экзистенциально полной теории.

Доказательство было приведено выше.

Лемма 10.

Любая непротиворечивая, полная, экзистенциально полная теория совместна, то есть имеет модель.

Последняя лемма : любая полная, непротиворечивая и экзистенциально полная теория Γ имеет модель из замкнутых термов.
Носитель – все замкнутые термы

$$[f](t_1,\ldots,t_k) = f(t_1,\ldots,t_k)$$

$$[P](t_1,\ldots,t_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } \Gamma \vdash P(t_1,\ldots,t_k) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Нужно доказать, что если $\Gamma \vdash \phi$, то ϕ истинно в этой модели
Можно считать, что ϕ замкнуто (иначе навесим $\forall$ по правилу обобщения)
Для замкнутых в силу полноты Γ будем доказывать следующее:
Если $\Gamma \vdash \phi$, то ϕ истинна в модели, а если $\Gamma \vdash \neg\phi$. то ϕ ложна в модели
Индукция по логической глубине формулы.
Если ϕ атомарная, то по определению $[P]$
Если $\phi = \neg\psi$, то для ψ всё доказано, для ϕ тоже получается.
Если $\phi = (\psi \wedge \xi)$ или для другой связки, то из утверждений для ψ и ξ всё выводится
Если $\phi = \exists x\ \psi$, то по экзистенциальной полноте $\Gamma \vdash \psi(t/x)$, это более простая формула, поэтому $\psi(t/x)$ истинна в модели, поэтому $\exists x\ \psi$ тоже истинна в модели
С другой стороны, если $\exists x\ \psi$ истинна в модели, то $\psi(t/x)$ истинна в модели, по предположению индукции $\Gamma \vdash \psi(t/x)$, поэтому $\Gamma \vdash \exists x\ \psi$
$\forall x\ \psi$ можно заменить на $\neg\exists x\ \neg\psi$ как с точки зрения выводимости, так и с точки зрения истинности
Все формулы исходного Γ_0 будут лежать в Γ и потому быть выводимы, так что мы построили действительно модель исходной теории

1.8 (5). Представимость конечных последовательностей в арифметике при помощи β - функции Гёделя.

Лемма 1: $\forall n \forall c \exists b > c$ такое, что $b+1, 2b+1, \ldots, nb+1$ - взаимно просты

$\blacktriangle$ Рассмотрим $b = n!$ НОД$(kb+1, lb+1) = d > 1 \Rightarrow (k-l)b$ делится на d. Тогда т.к. $b = n!$ и $k - l < n$, получаем, что любой простой делитель числа $(k-l)b$ должен быть меньше n (Строго меньше, т.к. $kb+1, lb+1$ не делятся на n).

У d есть простой делитель $p < n$.

$lb+1$ делится на p.

$lb+1 - l \cdot n!$ делится на p. !!!!! $\Rightarrow d = 1$ $\blacksquare$

Лемма 2 $(x_1, ...x_n) \exists a, b \forall i \; a mod (b \cdot i + 1) = x_i$ $\blacktriangle$ Выберем по Лемме 1 $b > max\{x_i\}$

Тогда a найдётся по *китайской теореме об остатках*: Если натуральные числа попарно взаимно просты, то для любых $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i < a_i$ при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется число N, которое при делении на $a_i = b \cdot i + 1$ дает остаток r_i при всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Более того, если найдутся два таких числа N_1 и N_2, то $N_1 = N_2 (mod a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n)$.

Положим $\beta(a, b, i) = a mod (b \cdot i + 1)$

β арифметична: $r = x mod q \Leftrightarrow r < q \cap \exists s : x = s \cdot q + r$ $\blacksquare$