2.1 Эквивалентность фундированности, отсутствия бесконечно убывающей последовательности элементов и принципа трансфинитной индукции.

Мы будем работать с частично упорядоченным множеством $(A, \leqslant)$ и для краткости будем его просто называть множеством A.

Теорема: Три определения фундированного множества эквивалентны друг другу:

1. Множество A называется фундированным, если в любом непустом подмножестве A есть минимальный элемент.

2. Множество A называется фундированным, если для него выполняется принцип невозможности бесконечного спуска: не существует строго убывающей последовательности $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$

3. Множество A называется фундированным, если для него выполняется принцип трансфинитной индукции: для любого свойства $\phi(x)$ верно условие: $\forall x\ (\forall y < x\ \ \phi(y) \to \phi(x))\ \Rightarrow\ \forall x \phi(x)$

▲ $(1 \Rightarrow 2)$ Предположим, что 2 определение неверно, и в множестве есть бесконечная убывающая цепь $x_1 > x_2 > \dots$. Но тогда в множестве $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ нет минимального элемента, что противоречит определению 1.

$(2 \Rightarrow 1)$ Теперь предположим, что определение 1 не выполнено. Это значит, что в A есть непустое подмножество B, в котором нет минимального элемента. Поскольку $B \neq \varnothing$, то $\exists x_1 \in B$. Мы предположили, что в B нет минимальных элементов. В частности, $x_1 \neq min$, то $\exists x_2 < x_1$. Поскольку $x_2 \neq min$, то $\exists x_3 < x_2$ и так далее, получим бесконечно убывающую последовательность. Это противоречит определению 2.

$(1 \Rightarrow 3)$ Снова предположим, что для некоторого A выполнено определение 1. Нам нужно доказать, что для данного множества выполнен также и принцип индукции. Пусть для какого-то свойства $\phi(x)$ верен "шаг индукции":

$$\forall x\ (\forall y < x\ \ \phi(y) \to \phi(x))$$

Мы хотим показать, что в таком случае свойство $\phi(x)$ верно для всех элементов $x \in A$. Предположим противное – пусть для некоторых x свойство $\phi(x)$ ложно. Выберем среди всех таких x минимальный (определение фундированности гарантирует, что среди всех элементов x для которого $\phi(x)$ ложно, есть хотя бы один минимальный). Тогда для данного x_{min} свойство $\phi(x_{min})$ ложно, а для всех элементов y меньших x_{min} свойство $\phi(y)$ истинно. Получаем противоречие с предположением индукции (т.е. $1 \to 0$).

$(3 \Rightarrow 1)$ Теперь предполагаем, что для A выполнен принцип индукции. Нам нужно проверить, что $\forall B \subset A \mid B \neq \varnothing$ есть хотя бы один минимальный элемент. Пусть в некотором $B \subset A$ минимального элемента нет. Мы должны доказать, что данное B пусто. Для этого мы рассмотрим свойство $\phi(x) : \phi(x)$ истинно $\Leftrightarrow\ x \notin B$. Для данного свойства верно:

$$\forall x\ (\forall y < x\ \ \phi(y) \to \phi(x))$$

(если все элементы $y < x$ не лежат в B, то и x не лежит в B, иначе x был бы минимальным элементом B) По принципу индукции заключаем, что свойство $\phi(x)$ истинно для всех $x \in A$. Это значит, что в B нет ни одного элемента — это подмножество пусто. ■

2.2 Лемма о монотонной функции из вполне упорядоченного множества в себя.

Лемма: Пусть W – вполне упорядоченное множество (def: одновременно фундировано и линейно упорядочено), а $f : W \to W$ – строго монотонная функция ($x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$).
Тогда $\forall x \; f(x) \geqslant x$

▲ Докажем через ринцип невозможности бесконечного спуска:
Пусть для какого-то x верно $f(x) < x$. Тогда по строгой монотонности выполнено:

$$f(f(x)) < f(x), \;\; f(f(f(x))) < f(f(x)), \;\; \dots$$

Следовательно, образуется бесконечно убывающая последовательность

$$x > f(x) > f(f(x)) > f(f(f(x))) > \dots$$

Это противоречит фундированности W, значит, $\forall x \; f(x) \geqslant x$. ■