40. Определение равномерной распределённой последовательности по модулю 1. Являются ли р.р. (mod 1) последовательности а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$ б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \ldots$.

Послед-ность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - **равномерно распределена по модулю 1**, если:

$$\forall a, b \in [0,1] \lim_{N\to\infty} \frac{|\{i = 1, \ldots, N : \{x_i\} \in [a,b)\}|}{N} = b - a$$

а) **Равномерно распределена mod 1**.

▲ Разбиваем на "блоки"по знаменателям. Тогда количество чисел из N-ого блока, которые попадают в отрезок (b-a) можно оценить как $(b-a)N + C$, где $|C| < 2$. Доля чисел от 1 до M, где $\frac{N(N-1)}{2} <= M < \frac{N(N+1)}{2}$ (то есть M находится в блоке N+1), попадающих в этот отрезок - как $\frac{1}{M}(\sum_n[(b-a)n + C] + D)$, где D - это "остаток"из дробей со знаменателем N+1. Так как C, D - это линейные функции от N, то при делении на M они будут стремится к 0, и останется в точности (b-a). ■

б) **Не равномерно распределена mod 1**.

▲ Разобъём её на "блоки"по знаменателям. Рассмотрим отрезок $[0; \frac{1}{2}]$. Если смотреть на концы блоков, то там ровно половина попадает в первый отрезок. А если посмотреть на все числа до середины N-ого блока, то доля чисел, попадающих на отрезок $[0; \frac{1}{2}]$ будет $\frac{2}{3}$ (по индукции), что противоречит существованию предела (а, значит, и определению равномерной распределённости по модулю 1). ■