

72 (30 на хор). Определение решётки и дискретного подмножества. Любая дискретная подгруппа \mathbb{R}^n является решёткой.

Опр Пусть (e_1, \dots, e_k) — набор линейно независимых векторов в \mathbb{R}^n . Тогда дискретная абелева группа в \mathbb{R}^n , порождённая $\{e_i\}$, называется решёткой, а набор (e_1, \dots, e_k) называется базисом решётки. Иными словами, решётка есть множество $\Lambda = \{a_1 e_1 + \dots + a_k e_k\}, a_i \in \mathbb{Z}$

Опр Подмножество X пространства \mathbb{R}^n называется дискретным, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность этой точки, не содержащая других точек множества X .

Теорема. Любая дискретная подгруппа \mathbb{R}^n является решёткой.

▲ 1. Дискретное множество в \mathbb{R}^n является множеством изолированных точек: действительно, рассматриваем произвольную точку, принадлежащую множеству; по определению дискретности, она является изолированной точкой этого множества.

2. По определению группы, выполняется ассоциативность, наличие нейтрального элемента и наличие обратного элемента. \exists нейтральный элемент: это начало координат.

3. Мы выбрали начало координат. Возьмём расстояния всех точек до начала координат. Существует \inf расстояний, отличный от нуля (так как иначе в любой ϵ -окрестности начала координат существует точка из нашего множества), $\inf > 0$

4. Докажем, что \inf достигается. Предположим противное - тогда в любой ϵ -окрестности \inf существует бесконечное количество точек с радиусом, большим чем он. Но тогда обязательно найдутся две точки, расстояние между которыми меньше $\inf \Rightarrow$ в силу бытия подгруппой мы можем отложить это расстояние от нуля и получить противоречие тому, что мы выбрали \inf . Значит, \inf достигается.

5. Выбираем этот \inf и так последовательно формируем базис: получаем базис размера k , получаем линейные подпространства размерности k , находим расстояние между ними, это и есть искомым вектор базиса, получаем базис размерности $k + 1$.

6. Этот процесс должен остановиться не позднее, чем n . Почему так? Предположим противное. Тогда \exists точка в фундаментальной области, которая не была получена. Но она же находится в фундаментальной области, граничащей с нулём, в силу того, что это группа \Rightarrow противоречие тому, что мы всегда выбирали минимальные расстояния (мы нашли точку с меньшим расстоянием). P.S. По сути мы просто пытаемся показать, что мы не можем найти $n + 1$ -й линейно независимый вектор в пространстве \mathbb{R}^n . ■

Доказательство 2:

1) В любом компакте содержится лишь конечное число точек из G
2) Будем рассматривать линейное пространство, порождённое нашей подгруппой G .
3) Выберем базис (в подпространстве) e_1, \dots, e_k среди элементов нашей группы, и рассмотрим подгруппу $G_0 = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_k \subset G$.

4) Так как G дискретная, в G/G_0 содержится конечное количество элементов (по пункту 1), пусть $[G : G_0] = q$.

5) G содержится в $1/q G_0$, и поэтому является решёткой.