

**20. Распределение простых чисел в натуральном ряде.**  
**Функции  $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$ . Теорема о равенстве нижних и верхних пределов (формулировка). Неравенство  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ .**  
**Постулат Бертрана (б/д). Теорема Адамара, Валле-Пуссена (б/д). «Дырки» между соседними простыми числами (б/д).**

Распределение простых чисел в натуральном ряде

**Определение.**

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \text{ — количество простых чисел, не превосходящих } x.$$

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$$

$$\psi(x) = \sum_{(\alpha, p): p^\alpha \leq x} \ln(p)$$

**Теорема.**(о равенстве верхних и нижних пределов (формулировка))

$$\lambda_1 = \overline{\lim}_{x \leftarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x}, \lambda_2 = \overline{\lim}_{x \leftarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x}, \lambda_3 = \overline{\lim}_{x \leftarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$$

За  $\mu_i$  обозначим соответствующие нижние пределы.

Тогда  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ .

**Утверждение.**  $\lambda_1 \leq \lambda_2$

$$\blacktriangle \lambda_1 = \overline{\lim}_{x \leftarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = \overline{\lim}_{x \leftarrow \infty} \frac{\sum_{p \leq x} \ln(p)}{x} \leq \overline{\lim}_{x \leftarrow \infty} \frac{\sum_{(\alpha, p): p^\alpha \leq x} \ln(p)}{x} = \overline{\lim}_{x \leftarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = \lambda_2 \blacksquare$$

**Теорема.**(Постулат Бертрана (формулировка))

$\forall x \exists p : p \in [x, 2x]$

**Теорема.**(Адамара, Валле-Пуссена)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

**«Дырки» между соседними простыми**

**Теорема.**(Чебышёв)  $\exists a, b : 0 < a < b < \infty$  такие, что  $\frac{ax}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq \frac{bx}{\ln(x)}$

На лекции Райгородский указал конкретные границы:  $a = \ln(2), b = 4\ln(2)$