1.extra7.4. Существование нестандартных моделей арифметики. Теорема о порядке на галактиках в этих моделях (он корректно определён, линеен, всюду плотен, не имеет наибольшего, имеет наименьший элемент).

Здесь собрана информация их разных источников. Однако есть лекция Мусотова на эту тему. Там разбирают тему билета.

ссылка: лекция Мусотова

Стандартные модели арифметики (Напоминание)

Язык арифметики : $0, S, +, \cdot, =$

Стандартная интерпретация : $\mathbb{N}$, S − следующее число, $0, +, \cdot, =$ понимаются как обычно.

Формальная арифметика − это аксиоматическая теория, расширяющая исчисление предикатов с равенством.

Список аксиом :

1) Все аксиомы ИВ и ИП

2) Аксиомы равенства.

Рефлексивность, симметричность и транзитивность − равенство является отношением эквивалентности.

Подстановка равного элемента вместо другого не меняет значение выражения.

$\forall x \forall y\ (x = y\ \to Sx = Sy)$

$\forall x \forall y \forall z \forall t\ ((x = y\ \wedge\ z = t) \to (x + z = y + t))$

И т.д.

3) Собственно аксиомы арифметики (Пеано)

Правила вывода − из ИП : *mosud ponens* и 2 правила Бернайса.

Аксиомы, связанные с порядком :

1) $\neg \exists x\ Sx = 0$

2) $\forall x \forall y\ (Sx = Sy\ \to\ x = y)$

3) Принцип индукции $(\phi(0) \wedge \forall x\ (\phi(x) \to \phi(Sx))) \to \forall x\ \phi(x)$

Принцип первого порядка : эта формула верна, если вместо ϕ подставить какую− нибудь формулу с одной свободной переменной

Принцип второго порядка : ϕ − произвольный предикат, по нему стоит квантор всеобщности.

Мы будем изучать арифметику первого порядка.

Нестандартные модели арифметики

Пример. Пусть $(\mathbb{N}; =, S, +, \cdot, 0)$ — стандартная модель арифметики и $Th(\mathbb{N})$ есть множество всех истинных в $\mathbb{N}$ предложений (теорий).

Добавим к сигнатуре новую константу Ω и рассмотрим теорию

$$T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cap \{\neg\Omega = 0, \neg\Omega = S0, \neg\Omega = SS0, \ldots\}$$

или аналогичную

$$T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cap \{\Omega > 0, \Omega > 1, \Omega > 2, \ldots\}$$

.

T — тоже теория, и к ней также применима теорема о компактности. У такой теории любая конечная подтеория — совместна. Из теоремы о компактности следует, что у данной теории существует модель, то есть вся теория — совместна. Эта модель арифметики уже не может быть стандартной. Значит, она должна заключать в себе стандартную модель.

Определение. Терм $\bar{n} \rightleftharpoons SS\ldots S0$ (n раз) называем *нумералом*. Нумералы служат именами натуральных чисел.

Определение. Введем обозначение $^*N$ это носитель новой модели, а ее элементы будем называть *гипернатуральными числами*. Будем изучать такую модель. Заметим, что здесь Ω — это «бесконечно большое число».

Корректность: Здесь существует операция прибавления единицы ($Sx = x + 1$). Значит, функция всюду определена. Тогда применим ее к Ω:

$$S\Omega = \Omega + 1 > \Omega.$$

Отношение порядка:
$$\forall x \ \nexists y \quad x < y < x + 1.$$
Можно также записать:
$$S(\Omega + 1) = \Omega + 2, S(\Omega + 2) = \Omega + 3, \ldots.$$
Так будет построено счетное количество, которое, с точки зрения порядка, образует внутри себя натуральный ряд. Также из любого числа, кроме нуля, можно вычесть единицу:
$$\forall x (x \neq 0 \to \exists y \ s(y) = x)$$
. Обозначим также:
$$\Omega = S(\Omega - 1).$$
Если считать, что вычитание — это частично определенная функция, то это будет не только обозначение, но и содержательное утверждение. Аналогично:
$$\Omega - 1 = S(\Omega - 2), \ldots$$
С точки зрения порядка получим некий аналог целых чисел. Более того, такие утверждения можно провести не только с Ω, но и с любыми нестандартным числом. Заметим, что любое нестандартное число должно быть больше любого стандартного

(картинка не совсем верная $\mathbb{N}$ и галактика пораждённая $c_M = \Omega$ не находятся вплотную)

Два варианта доказательства существования нестандартных моделей арифметики. Выбирайте удобный:

Существование. 1-ый вариант доказательства. (Из теоремы компактности)

Существование нестандартных моделей арифметики может быть продемонстрировано применением теорема компактности. Для этого набор аксиом T определяется на языке, включающем язык арифметики Пеано, вместе с новым постоянным символом Ω. Аксиомы состоят из аксиом арифметики Пеано $Th(\mathbb{N})$ вместе с другим бесконечным набором аксиом: для каждого числа n аксиома $\Omega > n$ включена. $T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cap \{\Omega > 0, \Omega > 1, \Omega > 2, \ldots\}$ Любое конечное подмножество этих аксиом удовлетворяется моделью, которая представляет собой стандартную модель арифметики. Константа Ω интерпретируется как некоторое число больше любого числа, упомянутого в конечном подмножестве T. Таким образом, по теореме компактности существует модель, удовлетворяющая всем аксиомам T. Поскольку любая модель T является моделью $Th(\mathbb{N})$ (поскольку модель набора аксиом, очевидно, также является моделью любого подмножества этого набора аксиом), мы имеем, что наша расширенная модель также является моделью аксиом Пеано. Элемент этой модели, соответствующий Ω не может быть стандартным числом, потому что, как указано, оно больше любого стандартного числа.

Существование. 2-ой вариант доказательства. (Из теоремы компактности)

$T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cap \{\Omega > 0, \Omega > 1, \Omega > 2, \ldots\}$

По теореме о компактности (видимо исчисления предикатов) существует (нормальная) модель $M \vDash T$. Модель M обладает следующими свойствами:

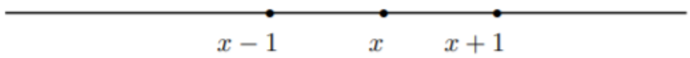
- $\mathbb{N}$ изоморфна начальному сегменту M; вложение $\mathbb{N} \to M$ задаётся функцией $\phi : n \to \bar{n}_M$.
- $M \vDash Th(\mathbb{N})$ (M - модель множества Th(N))

- Бывает что $M \ncong \mathbb{N}$, а бывает $M \ncong \mathbb{N}$, в частности $\Omega \in M$ есть «бесконечно большое число», поскольку Ω отлично от всякого $n \in \mathbb{N}$.

Формула $a < b \rightleftharpoons \exists x(x \neq 0 \wedge a + x = b)$ определяет порядок в $\mathbb{N}$. Для данной формулы в $\mathbb{N}$ выполнены аксиомы строгого линейного порядка и следующие предложения:

- $\forall x(0 < x \vee 0 = x)$;
- $\forall x \exists y(x < y \wedge \forall z(z < y \to z = x \vee z < x))$;
- $\forall y(y \neq 0 \to \exists x(x < y \wedge \forall z(z < y \to z = x \vee z < x)))$.

Следовательно, те же аксиомы выполнены и в T. Поэтому предикат $<_T$ на T представляет собой строгий линейный порядок с наименьшим элементом 0. При этом каждый элемент имеет последователя, и каждый элемент, кроме 0, имеет непосредственного предшественника.



Определение. Элементы $x, y \in M$ близки, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $y = SS \dots S(x)$ или $x = SS \dots S(y)$ (n символов S). Классы эквивалентности по отношению близости называем **галактиками**.

Определение. (аналогичное) С любым нестандартным числом x связано множество следующего вида:

$$\{\dots, x-2, x-1, x, x+1, x+2, \dots\}.$$

Такое множество называется *нестандартной галактикой.*

$\mathbb{N}$ - стандартная галактика.

Утверждение. Если G — галактика в M, $G \neq \mathbb{N}$, то порядок $(G, <_M)$ изоморфен $(\mathbb{Z}, <)$.

Пусть $\mathcal{G}$ есть множество всех галактик в M. Определим $G_1 <_M G_2$, если для любых $x \in G_1, y \in G_2, x <_M y$.

Утверждение.(на множестве галактик задан линейный порядок) Если G и H — две различные галактики в M, и для некоторых $x_0 \in G$ и $y_0 \in H$ верно $x_0 < y_0$, тогда:

$$\forall x \in G \; \forall y \in H \quad x < y.$$

▲ Пусть:

$$x_0 + a \geq y_0 + b$$

Тогда можно записать:

$$-x_0 + y_0 > 0, \quad x_0 - y_0 - b + a \geq 0.$$

Соответственно, в стандартной модели для x_0 и y_0 можно записать формулу, верную и в гипернатуральных числах. Рассуждения приводят к противоречию по причине того, что x_0 и y_0 лежат в различных галактиках. Таким образом, доказано, что на множестве галактик задан линейный порядок. ■

Утверждение. (б/д) Любое нестандартное число больше любого стандартного.

Утверждение. $\mathbb{N}$ - минимальный элемент $\mathcal{G}$.

▲ Любая другая галактика G в $\mathcal{G}$ является нестандартной. Сл-но, любой элемент $\mathbb{N}$ меньше любого элемента G. Сл-но, $\mathbb{N}$ - минимальный элемент $\mathcal{G}$. ■

Так как в T работают те же операции, что и в $Th(\mathbb{N})$, то в модели M есть операции сложения, вычитания, умножения и деления (только аккуратные, чтобы число оставались натуральными илм гипернатуральными) на число из $\mathbb{N}$ (соответсвенно и на рациональные).

Утверждение. (б/д) У $\mathcal{G}$ нет наибольшего элемента.

▲ Для натуральных чисел есть опперация $d(x) = 2x$. Для гипернатуральных чисел есть соответсвующая опперация $d(x) = 2x$. Могут ли Ω и $d(\Omega)$ лежать в одной галактике?

Так как для натуральных чисел выполняется $\forall x\ |d(x) - x| = x$, то и это выполняется для гипернатуральных. Сл-но, разность между Ω и $d(\Omega)$ это гипернатуральное число. Сл-но, они в разных галактиках. ■

Утверждение. (б/д) Пусть $d_\alpha(x) = [\alpha x]$. Тогда, если $\alpha < \beta$, то $d_\alpha(x)$ и $d_\beta(x)$ в разных галактиках.

▲ Доказывается аналогично: Разность $d_\alpha(x)$ и $d_\beta(x)$ это гипернатуральное число. Сл-но, они в разных галактиках: $\exists N \forall x > N\ d_\beta(x) - d_\alpha(x) > d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x)$ ■

Утверждение.множество галактик имеет плотный порядок Если G и H — две различные галактики в M, и $G < H$, тогда:

$$\exists F\text{- галактика: } G < F < H$$

Доказывается аналогично. Это можно также показать, если аккуратно применить $c_\alpha(x, y) = [\alpha x + (1 - \alpha)y]$, где $x \in G, y \in H, \alpha \in (\mathbb{R} \geq 0)$. $c_\alpha(x, y)$ - галактика. Тогда порядок плотный, так как на $\mathbb{R}$ плотный порядок.