

88-89 Распределение простых чисел в натуральном ряде. Функции $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$. Теорема Чебышёва

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$$

$$\psi(x) = \sum_{(p, \alpha): p^\alpha \leq x} \ln(p)$$

Теорема Чебышева

$\exists x_0 : \forall x \geq x_0$ выполнено:

$$\ln 2 * \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 4 \ln 2 \frac{x}{\ln x}$$

▲ Введем $\lambda_1 = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x}$, $\lambda_2 = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x}$, $\lambda_3 = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$. Аналогично определим μ_1, μ_2, μ_3

$$\mu_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x}, \mu_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x}, \mu_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$$

Лемма

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad \blacktriangle \lambda_1 \leq \lambda_2 - \text{очевидно. Зафиксируем } p. \alpha : p^\alpha \leq x, [\log_p(x)] = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right]; \psi(x) = \sum_{(p, \alpha): p^\alpha \leq x} \ln(p) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right] \ln(p) \leq \sum_{p \leq x} \ln(x) = \ln(x) \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) * \ln(x) \Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} \leq$$

$$\frac{\pi(x) \ln(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \Rightarrow \lambda_2 \leq \lambda_3$$

$$\text{Осталось показать, что } \lambda_1 \geq \lambda_3. \theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p) \geq \sum_{x^\gamma < p \leq x} \ln(p), \gamma \in (0, 1), > \sum_{x^\gamma < p \leq x} \ln(x^\gamma) =$$

$$\gamma \ln(x) \sum_{x^\gamma < p \leq x} 1 = \gamma \ln(x) (\pi(x) - \pi(x^\gamma)) \geq \gamma \ln(x) (\pi(x) - x^\gamma) \Rightarrow \frac{\theta(x)}{x} \geq \gamma \left(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} - \frac{x^\gamma}{x} * \ln(x) \right) \Rightarrow \lambda_1 \geq$$

$\gamma \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 \geq \lambda_3$ Для μ_i доказывается аналогично, но в конце переходим к нижнему пределу, а не к верхнему ■

Теперь начинаем доказывать Теорему Чебышева. Рассмотрим $C_{2n}^n < 2^{2n}$; $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p \Rightarrow$

$\prod_{n < p \leq 2n} p < 2^{2n}$. Прологарифмируем это по натуральному основанию. Получим:

$\prod_{n < p \leq 2n} p < 2n \ln 2 \Rightarrow \theta(2n) - \theta(n) < 2n \ln 2$. Просуммируем правую и левую части выражения по

степеням двойки. То есть пробежимся по всем $n = 1, 2, 4, \dots, 2^k$. Получим

$$\theta(2^{k+1}) < 2^{k+2} \ln 2$$

Теперь рассмотрим произвольный x .

$$\text{Очевидно, что для каждого такого } x \exists k : 2^k \leq x < 2^{k+1} \Rightarrow \theta(x) \leq \theta(2^{k+1}) < 2^{k+2} \ln 2 \leq 4x \ln 2 \Rightarrow \frac{\theta(x)}{x} \leq 4 \ln 2 \Rightarrow \lambda_1 \leq 4 \ln 2 \Rightarrow \lambda_3 \leq 4 \ln 2 \Rightarrow \pi(x) \leq (4 \ln 2 + \epsilon) \frac{x}{\ln 2}$$

Верхняя оценка доказана! Теперь докажем нижнюю...

$$C_{2n}^n > \frac{2^{2n}}{2n+1}; (C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^n + \dots + C_{2n}^{2n}) n = 2^{2n}, C_{2n}^n - \text{самое большое слагаемое})$$

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \prod_{p \leq 2n} p^{\left[\frac{2n}{p} \right] + \left[\frac{2n}{p^2} \right] + \dots - 2 \left(\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots \right)} = \prod_{p \leq 2n} p^{\left(\left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \left[\frac{n}{p} \right] \right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^2} \right] \right) + \dots}$$

$$\text{Заметим, что } [2x] - 2[x] \leq 1 \Rightarrow \leq \prod_{p \leq 2n} p^{[\log_p(2n)]} = \prod_{p \leq 2n} p^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right]}$$

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} < \prod_{p \leq 2n} p^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right]}$$

Логарифмируем по натуральному основанию. Получаем:

$$2n \ln(2) - \ln(2n+1) < \sum_{p \leq 2n} \ln(p) * \left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right] = \psi(2n)$$

Как и в предыдущих рассуждениях, берем произвольный x , $x \in [2n, 2n+2)$

$$\psi(x) \geq \psi(2n) > 2n \ln(2) - \ln(2n+1) > (x-2)\ln(2) - \ln(x+1) \implies \frac{\psi(x)}{x} > \ln(2) - \frac{2\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

И переходим к нижнему пределу:

$$\mu_2 \geq \ln(2) \implies \mu_3 \geq \ln(2) \implies \pi(x \geq (\ln(2) - \epsilon) \frac{x}{\ln(x)})$$

Ура! ■