# 25 Конечные цепные дроби. Каноническая запись. Подходящие дроби. Рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей (б/д). Следствия: несократимость подходящих дробей, возрастание подходящих дробей с четными номерами и убывание подходящих дробей с нечетными номерами.

# 26 Рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей.

**Опр** *Конечной цепной дробью* называется выражение вида

$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$, где $a_0 \in Z, a_i \in N\ \forall i >= 1$

$a_i$*−элементы цепной дроби, или неполные частные*
Каноническая запись цепной дроби определяется индуктивно:

1. $[a_0] = \frac{a_0}{1}$
2. $[a_0; a_1, ..., a_n - 1]$ - построено
3. $[a_0; a_1, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_n]} = a_0 + \frac{1}{p/q} = \frac{pa_0 + q}{p}$

**Опр**
$[a_0; a_1, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ - k-ая подходящая дробь

**Теорема**
$p_{k+2} = a_{k+2}p_{k+1} + p_k$
$q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k$
▲ Будем доказывать по индукции

1. База: k = 0; $[a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}, [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1a_2+1} = \frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2} = \frac{p_2}{q_2}$

   $a_0a_1a_2 + a_0 + a_2 = a_2a_0a_1 + a_2 + a_0 = a_2 * p_1 + p_0 \Longrightarrow$ Сошлось! Ура!

2. $a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_{k+2}]} = [a_0; a_1, ..., a_{k+2}] = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$
   Положим $[a_1; a_2, ..., a_i] = \frac{p'_i}{q'_i}$. Тогда $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} = a_0 + \frac{p'_{k+2}}{q'_{k+2}} = \frac{a_0p'_{k+2}+q'_{k+2}}{p'_{k+2}}$

   $p'_{k+2} = a_{k+2}p'_{k+1} + p'_k,\ q'_{k+2} = a_{k+2}q'_{k+1} + q'_k$

   $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} = \frac{a_0a_{k+2}p'_{k+1}+a_0p'_k+a_{k+2}q'_{k+1}+q'_k}{a_{k+2}p'_{k+1}+p'_k} = \frac{a_{k+2}(a_0p'_{k+1}+q'_{k+1})+a_0p'_k+q'_k}{a_{k+2}p'_{k+1}+p'_k}$

   Теперь заметим, что $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} = \frac{a_0p'_{k+2}+q'_{k+2}}{p'_{k+2}} \Longrightarrow p_i = a_0p'_i + q'_i,\ q_i = p'_i \Longrightarrow \frac{a_{k+2}(a_0p'_{k+1}+q'_{k+1})+a_0p'_k+q'_k}{a_{k+2}p'_{k+1}+p'_k} = \frac{a_{k+2}p_{k+1}+p_k}{a_{k+2}q_{k+1}+q_k}$ ■

**Следствие 1**

1. $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+1}q_{k+2}}$

2 Каноническая запись цепной дроби является несократимой

▲

$p_{k+2} - p_k = a_{k+2}p_{k+1},\ q_{k+2} - q_k = a_{k+2}q_{k+1}$

$\frac{p_{k+2}-p_k}{q_{k+2}-q_k} = \frac{a_{k+2}p_{k+1}}{a_{k+2}q_{k+1}}$

$p_{k+2}q_{k+1} - p_kq_{k+1} = p_{k+1}q_{k+2} - p_{k+1}q_k$

Обозначим ЛЧ $b(k+2)$, ПЧ -$b(k+1)$
$b(1) = p_1q_0 - q_1p_0 = (a_0a_1+1)*1 - a_1a_0 = 1$

$p_{k+2}q_{k+1} - q_{k+2}p_{k+1} = (-1)^{k+1} \Longrightarrow \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+1}q_{k+2}}$

Предположим, что каноническая запись цепной дроби сократима. Тогда $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$ - сократима, тогда $\exists\ d:\ \ p_{k+2}, q_{k+2} \vdots\ d \Longrightarrow p_{k+2}q_{k+1} - q_{k+2}p_{k+1} \vdots\ d$. Противоречие

■

**Замечание**

Из этого утверждения следует, что подходящие дроби с четными номерами меньше, чем с нечетными

**Следствие 2**

Подходящие дроби с четными номерами возрастают, с нечетными - убывают

▲

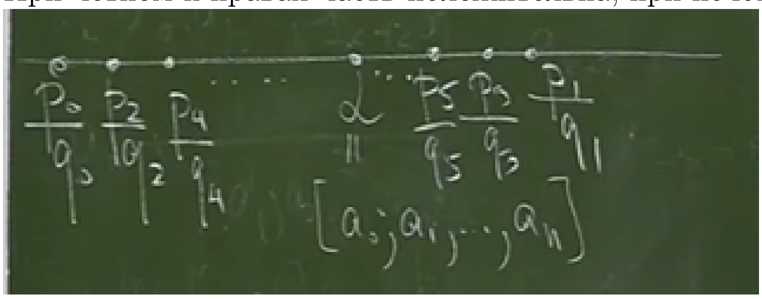
$p_{k+2} = a_{k+2}p_{k+1} + p_k * q_k$
$q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k * p_k$

$p_{k+2}q_k = a_{k+2}p_{k+1}q_k + p_kq_k$
$q_{k+2}p_k = a_{k+2}q_{k+1}p_k + q_kp_k$

$p_{k+2}q_k - q_{k+2}p_k = a_{k+2}(p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k) = a_{k+2}(-1)^k$

$\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_{k+2}*(-1)^k}{q_kq_{k+2}}$

При четном k правая часть положительна, при нечетном - отрицательна




■

# 27 Определение бесконечной цепной дроби. Доказательство сходимости соответствующих подходящих цепных дробей (можно пользоваться без доказательства соотношениями на их коэффициенты).

**Опр** *Бесконечной цепной дробью* называется выражение вида:
$[a_0; a_1, a_2, ...] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$, где $a_0 \in Z, a_i \in N\ \forall i >= 1$

**Опр** *Величиной бесконечной цепной дроби* называется предел её подходящих дробей, то есть такое число $\alpha = \lim\limits_{n->\infty} \frac{P_n}{Q_n}$

**Теорема**
Соответствующие подходящие цепные дроби сходятся. $\exists \lim\limits_{n->\infty} \frac{P_n}{Q_n}$
▲ Согласно следствиям 1 и 2 из Теоремы о рекуррентных соотношениях для числителей и знаменателей подходящих дробей последовательность дробей с четными номерами возрастает и ограничена сверху, а последовательность с нечетными номерами ограничена снизу и убывает, значит, обе эти последовательности имеют предел. $|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$
Всилу того, что $Q_{n+2} = a_{n+2}Q_{n+1} + Q_n,\ Q_{n+2}Q_n \implies \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} -> 0 \implies |\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}| -> 0 \implies$ пределы последовательностей совпадают, тогда и $\frac{P_n}{Q_n}$ сходится ■

# 28 Бесконечные периодические цепные дроби. Теорема о периодичности дроби для квадратичной иррациональности (доказательство в одну сторону). Умение находить периодическую цепную дробь по её значению, и наоборот, нахождение значения дроби по её периоду.

**Опр** Бесконечная цепная дробь вида
$[a_0; a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+T}, a_{k+1}, ..., a_{k+T}, ...] = [a_0; a_1, ..., a_k, \overline{a_{k+1}, ..., a_{k+T}}]$ называется *периодической* с периодом $a_{k+1}, ..., a_{k+T}$ . Набор $a_0, a_1, ..., a_k$ называется *предпериодом.*

**Опр** Иррациональное число $\alpha$ называется *квадратичной иррациональностью*, если $\alpha$ - корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

**Теорема**
Если $\alpha = [a_0; a_1, ..., a_k, \overline{a_{k+1}, ..., a_n}]$, то $\alpha$ - квадратичная иррациональность
▲ $\beta = [\overline{a_{k+1}; a_{k+2}, ..., a_n}] = a_{k+1} + \frac{1}{\ddots + a_n + \frac{1}{[\overline{a_{k+1}; a_{k+2}, ..., a_n}] = \beta}}$

$\frac{a_n\beta}{\beta}$; $\frac{\beta}{a_n\beta + 1} + a_{n+1} = \frac{\beta + a_{n-1}a_n\beta + a_{n-1}}{a_n\beta + 1}$
Заметим, что раскрывая таким образом мы получаем дробь вида $\frac{c\beta + d}{c'\beta + d'} = \beta$

$a_0 + \frac{1}{\ddots + a_k + \frac{1}{\beta}}$
Заметим две прекрасные вещи:
Если $\beta$ - решение квадратного уравнения, то $\frac{1}{\beta}$ - тоже является решением квадратного уравнения $\implies \frac{1}{\beta}$ - также квадратичная иррациональность. (Достаточно поделить уравнение для $\beta$ на $x^2$)
Если $\beta$ - решение квадратного уравнения, то $\forall \gamma \in N\ \beta + \gamma -$ решение квадратного уравнения,

т.е. квадратичная иррациональность. ( Если $c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ - уравнение с корнем $\beta$, то $c_2(x-\gamma)^2 + c_1(x-\gamma) + c_0 = 0$ - уравнение с корнем $\beta + \gamma$).
Пользуясь тем, что прибавление к квадратичной иррациональности натурального числа и обратное к квадратичной иррациональности - квадратичная иррациональность, получаем, что $\alpha$ - квадратичная иррациональность $\blacksquare$

## Нахождение периодической цепной дроби по её значению, и нахождение значения дроби по её периоду

Пусть дана периодическая цепная дробь $[5; \overline{1, 2, 1, 10}] = a$. Найти ее значение
Алгоритм:
1. Выделяем часть с периодом: $[\overline{1; 2, 1, 10}] = x$
2. Расписываем дробь, пока не дойдем до первого периода, приравниваем цепную дробь в знаменателе к x, всю дробь приравниваем к x: $x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{10+\frac{1}{[1;2,1,10]}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{10+\frac{1}{x}}}}$
3. Начинаем переворчивать: $x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{x}{10x+1}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{10x+1}{11x+1}} = 1 + \frac{11x+1}{32x+3} = \frac{43x+4}{32x+3} \Longrightarrow 32x^2 - 40x - 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{33}+5}{8}$
4. Находим а. $a = 5 + \frac{1}{x} = 5 + \frac{8}{\sqrt{33}+5} = \frac{33+5\sqrt{33}}{\sqrt{33}+5}$

Пусть дано значение $a = \sqrt{2}$. Найти цепную дробь
Алгоритм: 1. Выделяем целую часть: $1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. 2. Если число уже встречалось в разложении, мы нашли период. Ура! Иначе переворачиваем дробную часть: $1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$
3. Домножаем на сопряженное: $1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
4. Вернуться к шагу 1
Таким образом, получим:
$1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$
$\sqrt{2} - 1$ уже встречалось, значит, дробь: $[1; \overline{2}]$