

3 Доп1 (7). Существование непересекающихся перечислимых множеств, не отделимых никаким разрешимым.

Два непересекающихся множества X и Y *отделяются* множеством C , если множество C содержит одно из них и не пересекается с другим.

Теорема. Существуют два непересекающихся перечислимых множества X и Y , которые не отделяются никаким разрешимым множеством.

▲ В самом деле, пусть d — вычислимая функция, принимающая только значения 0 и 1 и не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения. Пусть $X = \{x | d(x) = 1\}$ и $Y = \{x | d(x) = 0\}$. Легко видеть, что множества X и Y перечислимы. Пусть они отделяются разрешимым множеством C ; будем считать, что C содержит X и не пересекается с Y (если наоборот, перейдём к дополнению). Тогда характеристическая функция множества C (равная 1 внутри C и 0 вне него) продолжает d , что противоречит её выбору \Rightarrow предположение неверно, эти два множества не отделимы. ■