



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII

Ion ACHIRI

Vasile NEAGU

Vasile CIOBANU

Nicolae PRODAN

Petru EFROS

Dumitru TARAGAN

Valentin GARIT

Anatol TOPALĂ

# MATEMATICĂ



Leonhard Euler (1707-1783)

MANUAL  
**XI**

PENTRU  
CLASA

EDITURA  
**PRUT**



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII

Ion ACHIRI

Vasile NEAGU

Vasile CIOBANU

Nicolae PRODAN

Petru EFROS

Dumitru TARAGAN

Valentin GARIT

Anatol TOPALĂ

# MATEMATICĂ



Acet manual este proprietatea Ministerului Educației, Culturii și Cercetării.

Manualul școlar a fost realizat în conformitate cu prevederile curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Culturii și Cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Culturii și Cercetării nr. 1219 din 06 noiembrie 2020, ca urmare a evaluării calității metodico-științifice.

Denumirea instituției de învățământ \_\_\_\_\_  
Acet manual a fost folosit:

Anul de folosire	Numele și prenumele elevului	Anul școlar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

- Dirigintele clasei verifică dacă numele, prenumele elevului sunt scrise corect.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
- Aspectul manualului (la primire și la returnare) se va aprecia cu unul dintre următorii termeni: *nou, bun, satisfăcător, nesatisfăcător*.

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii Prut Internațional.

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din această carte este permisă doar cu acordul scris al editurii.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE (Modulul 4)

*Vasile Ciobanu*, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 1)

*Petru Efros*, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 8–10)

*Valentin Garit*, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 8–10)

*Vasile Neagu*, doctor habilitat, profesor universitar, USM (Modulele 3, 5)

*Nicolae Prodan*, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 6, 7)

*Dumitru Taragan*, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 2)

*Anatol Topală*, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 6, 7)

Comisia de evaluare: *Ludmila Baș*, grad didactic superior, LT „Constantin Stere”, Soroca – coordonator

*Aliona Lașcu*, grad didactic superior, LT „Mihai Eminescu”, Chișinău

*Gabriela Diaicuc*, grad didactic superior, LT „Alexandr Pușkin”, Fălești

*Radion Blându*, grad didactic superior, LT „Spiru Haret”, Chișinău

*Andrei Corlat*, doctor, conferențiar universitar, UTM

Redactor: *Tatiana Rusu*

Corector: *Nina Artin*

Copertă: *Sergiu Stanciu*

Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

© Editura Prut Internațional, 2020

© I. Achiri, V. Ciobanu, P. Efros, V. Garit, V. Neagu, N. Prodan, D. Taragan, A. Topală, 2020

Editura Prut Internațional, str. Alba Iulia 23, bl. 1 A, Chișinău, MD-2051

Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18; e-mail: office@prut.ro; www.edituraprut.md

#### Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

**Matematică:** Manual pentru clasa a 11-a / Ion Achiri, Vasile Ciobanu, Petru Efros, Valentin Garit, Vasile Neagu, Nicolae Prodan, Dumitru Taragan, Anatol Topală; comisia de evaluare: Ludmila Baș (coordonator) [et al.]; Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. – Chișinău: Prut Internațional. – 304 p.

ISBN 978-9975-54-514-3

51(075.3)

M 47

## Cuvânt-înainte

Prezentul manual este elaborat conform curriculumului liceal la matematică, ediția 2019, axat pe formarea de competențe.

Manualul este structurat pe module. Pentru orientare, la începutul fiecărui modul sunt formulate obiectivele educaționale care pot fi atinse studiind modulul respectiv. Obiectivele marcate cu \* vizează numai elevii de la profilul real. Menționăm că manualul conține compartimente ce țin de elemente de analiză matematică, numere complexe, elemente de algebră superioară și geometrie.

La această treaptă a școlarizării, elevii se familiarizează cu o serie de concepte noi. Acest fapt este un motiv în plus de a parurge atent atât materialul teoretic (definiții, teoreme, proprietăți etc.), cât și exemplele ilustrative, exercițiile motivaționale și cele rezolvate. Numai în acest mod pot fi realizate prevederile principiilor constructiv și formativ puse la baza studierii matematicii în învățământul preuniversitar.

Manualul este structurat astfel încât să poată fi utilizat la predarea matematicii atât elevilor de la profilul real, cât și celor de la profilurile umanist, arte, sport. De reținut că **materialul (textul) marcat în partea stângă cu o bară verticală este prevăzut numai pentru profilul real. Pentru profilurile umanist, arte, sport aceste texte pot fi propuse ca extinderi.** În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exercițiile și problemele propuse la sfârșitul paragrafului, precum și la sfârșitul modulului sunt clasificate după profil\*). Exercițiile marcate cu \* au un grad sporit de complexitate și nu sunt obligatorii pentru rezolvare la profilul respectiv.

Testele sumative servesc la verificarea nivelului performanțelor atinse și sunt elaborate pe profiluri.

Unele prevederi țin să faciliteze organizarea lucrului individual al elevilor. În afară de exemplele motivaționale, de consolidare și de utilizare a conceptelor, în manual sunt prezentate modele de rezolvare a principalelor tipuri de exerciții și probleme.

---

<sup>\*)</sup> La fiecare profil, exercițiile și problemele sunt clasificate pe niveluri:

- a) profilurile umanist, arte, sport: **A** – cunoaștere și înțelegere, **B** – aplicare, **C** – integrare;
- b) profilul real: **A<sub>1</sub>** – cunoaștere și înțelegere, **B<sub>1</sub>** – aplicare, **C<sub>1</sub>** – integrare.

Simbolurile și notațiile folosite sunt cele întâlnite frecvent în literatura de specialitate și recomandate inclusiv de curriculumul gimnazial la matematică, ediția 2019. Sunt folosite literele alfabetului grec, pe care-l reproducem mai jos.

Manualul oferă elevilor pasionați de matematică posibilități pentru a-și extinde cunoștințele, atât prin însușirea unor noțiuni teoretice suplimentare (optionale), cât și prin rezolvarea unor probleme mai complicate.

Stimăți profesori și dragi elevi, sperăm ca acest manual să devină un instrument didactic util în studierea matematicii. Totodată vom fi recunoscători pentru obiecțiile și sugestiile dumneavoastră ce vor contribui la îmbunătățirea conținutului manualului.

*Autorii*

### Alfabetul grec

<b>Litere</b>	<b>Citirea literelor</b>	<b>Litere</b>	<b>Citirea literelor</b>
A $\alpha$	alfa	N $\nu$	niu
B $\beta$	beta	$\Xi$ $\xi$	csi
$\Gamma$ $\gamma$	gama	O o	omicron
$\Delta$ $\delta$	delta	$\Pi$ $\pi$	pi
E $\varepsilon$	epsilon	P $\rho$	ro
Z $\zeta$	zeta	$\Sigma$ $\sigma$	sigma
H $\eta$	eta	T $\tau$	tau
$\Theta$ $\theta$	teta	Y $\upsilon$	ipsilon
I $\iota$	iota	$\Phi$ $\varphi$	fi
K $\kappa$	kapa	X $\chi$	hi
$\Lambda$ $\lambda$	lambda	$\Psi$ $\psi$	psi
M $\mu$	miu	$\Omega$ $\omega$	omega

## Modulul

# 1

# Șiruri de numere reale

### Obiective

- ⇒ operarea cu numere reale pentru a efectua calcule în diverse contexte;
- ⇒ reprezentarea prin diverse moduri a șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice;
- ⇒ clasificarea după diverse criterii a șirurilor numerice;
- ⇒ aplicarea șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice în diverse contexte;
- ⇒ \*utilizarea în diverse contexte a noțiunii de limită a șirului, a șirurilor convergente, divergente.

În modulele 1–5 vom studia elemente de analiză matematică – unul dintre compoziții fundamentale ale matematicii. Aplicații ale analizei matematice întâlnim în fizică, tehnică, geometrie, economie și în multe alte domenii. Cadrul numeric al analizei matematice îl constituie mulțimea numerelor reale. Obiectele ei de studiu – dependențele funcționale, derivatele, integralele – sunt, în fond, limite definite în mod corespunzător. Pentru a studia limitele de funcții, este necesar să examinăm limitele de șiruri numerice.

## § 1 Șiruri numerice. Recapitulare și completări

### 1.1. Marginile inferioare și superioare ale mulțimilor de numere reale

Vom studia unele proprietăți ale mulțimilor de numere reale necesare pentru fundamentarea studiului analizei matematice.

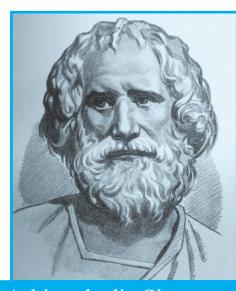
#### Axioma continuității mulțimii numerelor reale

Fie  $A$  și  $B$  două submulțimi nevide ale mulțimii  $\mathbb{R}$ , astfel încât pentru orice  $a \in A$  și orice  $b \in B$  are loc relația  $a \leq b$ . Atunci există cel puțin un  $c \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $a \leq c \leq b$ .

#### Principiul lui Arhimede<sup>1</sup>

Pentru orice număr real  $x$  există un unic număr întreg  $m$ , astfel încât  $m \leq x < m + 1$ .

Numărul  $m$  se numește *partea întreagă* a numărului  $x$  și se notează  $[x]$ .



Arhimede din Siracusa

<sup>1</sup> Arhimede din Siracusa (cca 287–212 î.H.) – învățat grec.

- Definiții.** • Multimea  $X \subset \mathbb{R}$  se numește **mărginită superior (mărginită inferior)** dacă există un număr  $c \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x \leq c$  ( $x \geq c$ ), pentru orice  $x \in X$ . Numărul  $c$  se numește **majorant (minorant)** pentru multimea  $X$ .
- Multimea  $X \subset \mathbb{R}$  se numește **mărginită** dacă ea este mărginită superior și inferior, adică există numerele reale  $m, M$ , astfel încât  $m \leq x \leq M$ , pentru orice  $x \in X$ .

Pentru fiecare dintre aceste propoziții poate fi formulată negația ei logică. De exemplu, negația primei propoziții este: multimea  $X \subset \mathbb{R}$  nu este mărginită superior (mărginită inferior) dacă pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  există  $x' \in X$ , astfel încât  $x' > m$  ( $x' < m$ ). (Cu ajutorul cuantificatorilor universali  $\forall, \exists$  condiția „pentru orice [oricare ar fi]  $m \in \mathbb{R}$  există  $x' \in X$ ” se scrie concis astfel:  $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x' \in X$ .)

**Observație.** Orice multime  $X \subset \mathbb{R}$ , mărginită superior (mărginită inferior), are o infinitate de majoranți (minoranți). Dacă numărul  $c$  este un majorant (minorant) pentru multimea  $X$ , atunci oricare alt număr  $c_1$  mai mare (mai mic) decât  $c$  de asemenea este un majorant (minorant) pentru multimea  $X$ . Într-adevăr, pentru orice  $x \in X$ , astfel încât  $x \leq c$  și  $c < c_1$ , rezultă că  $x \leq c_1$ , deci  $c_1$  este de asemenea un majorant.

**Definiție.** Elementul  $a \in X$  (dacă există),  $X \subset \mathbb{R}$ , se numește **cel mai mare** (respectiv **cel mai mic**) element al mulțimii  $X$  dacă pentru orice  $x \in X$  avem  $x \leq a$  (respectiv  $x \geq a$ ). În acest caz, se notează:  $a = \max X$  ( $a = \min X$ ).

### Exemplu

Pentru mulțimea  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ,  $\max A = 1$ , iar  $\min A$  nu există.

- Definiții.** • Cel mai mic majorant (dacă există) al mulțimii mărginite superior  $X \subset \mathbb{R}$  se numește **margină superioară (supremum)** pentru  $X$  și se notează  $\sup X$ .
- Cel mai mare minorant (dacă există) al mulțimii mărginite inferior  $X \subset \mathbb{R}$  se numește **margină inferioară (infimum)** pentru  $X$  și se notează  $\inf X$ .

**Observație.** Fie  $\alpha = \inf X$  și  $\beta = \sup X$ , iar  $Y = \{-x \mid x \in X\}$ , atunci  $\inf Y = -\beta$  și  $\sup Y = -\alpha$ .

### Exemple

1. Multimea numerelor naturale  $\mathbb{N}$  nu este mărginită superior, dar este mărginită inferior. Prin urmare, mulțimea  $\mathbb{N}$  nu este mărginită. Mulțimile  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  nu sunt mărginite nici inferior, nici superior.

2. Multimea  $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$  este mărginită, deoarece  $\forall n \geq 1$  avem  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ .

3. Multimea  $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$  este mărginită, deoarece  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**Observație.** În exemplul 2,  $\inf X = 0 \notin X$ ,  $\sup X = 1 \in X$ , iar în exemplul 3,  $\inf A = -1 \in A$ ,  $\sup A = 1 \in A$ . Așadar, supremul (infimumul) unei mulțimi  $X \subset \mathbb{R}$  poate să aparțină sau poate să nu aparțină acestei mulțimi.

O mulțime nevidă mărginită superior are o infinitate de majoranți, iar supremumul ei este cel mai mic majorant. Cum o mulțime infinită de numere poate să nu aibă cel mai mic element (a se vedea exemplul 2), apare următoarea întrebare: o mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă oare supremum (infimum)?

**Teorema 1.** Orice mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă margine superioară (inferioară) și această margine este unică.

**Teorema 2 (de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi)**

Fie  $X \subset \mathbb{R}$  o mulțime nevidă mărginită superior. Numărul  $M^*$  este marginea superioară a mulțimii  $X$  dacă și numai dacă:

- 1)  $x \leq M^*$ , pentru orice  $x \in X$ ;
- 2) pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $x_\varepsilon \in X$ , astfel încât  $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$ .

**Teorema 3 (de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi)**

Fie  $X \subset \mathbb{R}$  o mulțime nevidă mărginită inferior. Numărul  $m^*$  este marginea inferioară a mulțimii  $X$  dacă și numai dacă:

- 1)  $x \geq m^*$ , pentru orice  $x \in X$ ;
- 2) pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $x_\varepsilon \in X$ , astfel încât  $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$ .

Demonstrația acestor teoreme rezultă imediat din definiția marginii superioare și respectiv a celei inferioare pentru o mulțime.

Dacă mulțimea  $X$  nu este mărginită superior (inferior), atunci vom conveni să scriem  $\sup X = +\infty$  ( $\inf X = -\infty$ ). Pentru  $X = \mathbb{R}$ , convenim că  $\inf \mathbb{R} = -\infty$  și  $\sup \mathbb{R} = +\infty$ . Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , considerăm că  $-\infty < x < +\infty$ .

**Exerciții rezolvate**

1. Să se determine supremul și infimumul mulțimii  $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

*Rezolvare:*

Evident că  $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Deci, mulțimea  $A$  este mărginită.

Să demonstrăm că  $\sup A = 1$ . Vom aplica teorema de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi. Deoarece  $1 - \frac{1}{n} < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , rezultă că prima condiție a teoremei 2 este verificată.

Observăm că pentru orice  $\varepsilon > 0$  inecuația  $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$  are soluții în  $\mathbb{N}^*$ . Fie  $n_\varepsilon$  una dintre aceste soluții. Obținem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există numărul  $1 - \frac{1}{n_\varepsilon} \in A$ , astfel încât  $1 - \frac{1}{n_\varepsilon} > 1 - \varepsilon$ . Așadar, condiția a doua a teoremei 2 este verificată. Prin urmare,  $\sup A = 1$ .

Să demonstrăm că  $\inf A = 0$ . Avem  $1 - \frac{1}{n} \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Cum 0 aparține acestei mulțimi (pentru  $n = 1$ ), rezultă că  $\inf A = 0$ . Constatăm că  $\inf A = \min A \in A$ , iar  $\sup A \notin A$ .

2. Fie mulțimea  $A = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- Să se demonstreze că mulțimea  $A$  este mărginită.
- Să se determine supremul și infimumul mulțimii  $A$ .

*Rezolvare:*

a) Observăm că  $0 \leq \frac{n^2}{n^2 + 4} < 1$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Deci, mulțimea  $A$  este mărginită.

b) Să demonstrăm că  $\sup A = 1$ . Vom aplica teorema 2. Prima condiție a teoremei este verificată. Vom arăta că pentru orice  $0 < \varepsilon < 1$  inecuația  $\frac{n^2}{n^2 + 4} > 1 - \varepsilon$  are soluții în  $\mathbb{N}$ .

Rezolvând această inecuație, obținem  $n > 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$  și, conform principiului lui Arhimede,

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $n_\varepsilon > 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ , anume  $n_\varepsilon = \left[ 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right] + 1$ . Prin urmare,  $\sup A = 1$ .

Deoarece  $\frac{n^2}{n^2 + 4} \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , și  $0 \in A$ , rezultă că  $\inf A = 0$ .

**Observație.** Mulțimea tuturor fracțiilor subunitare pozitive nu posedă nici cel mai mic element, nici cel mai mare element, infimumul și supremul acestui mulțimi fiind respectiv numerele 0 și 1.

## 1.2. Noțiunea de sir numeric. Siruri finite, infinite

**Definiție.** Fie  $E \subset \mathbb{R}$  o submulțime. Se numește **sir de numere reale** (**sir numeric, sir real**) orice funcție  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow E$ .

O astfel de funcție asociază fiecărui număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$  un unic număr real  $f(n) \in E$ .

Dacă funcția  $f$  este definită pe o submulțime finită a elementelor consecutive ale mulțimii  $\mathbb{N}^*$ , atunci se obține un **sir numeric finit**. În caz contrar, sirul obținut se numește **sir numeric infinit**.

Numărul  $f(n)$  se notează cu  $x_n$  și se numește **termenul de rang  $n$**  al sirului sau **termenul general** al sirului, iar însuși sirul se notează cu  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

**Observații.** 1. Uneori, funcția  $f$  este definită pe  $\mathbb{N}$  și atunci sirul începe cu termenul de rang zero, adică scriem  $(x_n)_{n \geq 0}$ , sau funcția este definită pe  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, k-1\}$ , atunci scriem  $(x_n)_{n \geq k}$ .

2. În mod frecvent, pentru siruri utilizăm și notații ca  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,  $(c_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  etc.

**Exemple**

1. Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ , reprezintă sirul inverselor numerelor naturale nenule.

2. Sirul  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_n = n$ , este sirul numerelor naturale.

3. Sirul  $(b_n)_{n \geq 2}$ ,  $b_n = \sqrt{n-2}$ , este sirul  $0, 1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n-2}, \dots$

Şirul se consideră definit dacă este indicat modul de obținere a termenilor săi.

### **Un şir poate fi definit:**

1) **analitic**, adică prin **formula termenului general**

Această formulă permite calculul oricărui termen al şirului.

De exemplu, pentru şirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , definit prin termenul general  $x_n = 1 + (-1)^n$ , avem  $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2, \dots$

2) **prin descrierea termenilor şirului**

De exemplu, şirul numerelor prime este 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

3) **printr-o relație de recurență**. În acest caz se precizează unul sau câțiva termeni și o relație de recurență din care se deduc ceilalți termeni ai şirului.

### **Exemple**

1. Fie  $x_1 = \sqrt{2}$  și relația de recurență  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ , pentru orice  $n \geq 1$ .

Atunci obținem şirul  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

2. Fie  $x_0 = 1, x_1 = 1$  și  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$  pentru orice  $n \geq 2$ . Aflăm termenii şirului:  $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = x_1 + x_0 = 2, x_3 = x_2 + x_1 = 3, x_4 = x_3 + x_2 = 5, x_5 = x_4 + x_3 = 8, \dots$

Așadar, obținem şirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., care se numește **şirul lui Fibonacci**<sup>1</sup>.

Se poate determina formula termenului general al şirului lui Fibonacci:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$



Leonardo da Pisa (Fibonacci)

Şirul lui Fibonacci are aplicații în diverse domenii ale matematicii: combinatorică, teoria numerelor, analiză matematică și.a. El posedă proprietăți interesante (de exemplu, toți termenii şirului de rang divizibil cu 3 sunt numere pare, termenii de rang divizibil cu 4 sunt divizibili cu 3, iar termenii de rang divizibil cu 15 sunt divizibili cu 10).

**Definiție.** Două şiruri,  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$ , se numesc **egale** dacă  $x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Astfel, şirurile  $\left( \frac{1+(-1)^{n-1}}{2} \right)_{n \geq 1}$  și 1, 0, 1, 0, ... sunt egale, iar şirurile 1, 0, 1, 0, ... și 0, 1, 0, 1, ... nu sunt egale, cu toate că au aceeași mulțime de valori ale termenilor: {0, 1}.

**Definiție.** Un şir  $(x_n)_{n \geq 1}$  se numește **constant** dacă  $x_{n+1} = x_n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### **Exemplu**

Şirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit de  $x_1 = 3$  și  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, \forall n \geq 1$ , este constant:  $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 3, \dots$

<sup>1</sup> Leonardo da Pisa (Fibonacci) (1175–1250) – matematician italian.

### 1.3. Siruri monotone. \*Siruri mărginite

- Definiții.**
- Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  se numește **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă  $x_n \leq x_{n+1}$  (respectiv  $x_n \geq x_{n+1}$ ),  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
  - Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  se numește **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă  $x_n < x_{n+1}$  (respectiv  $x_n > x_{n+1}$ ),  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
  - Sirurile crescătoare sau descrescătoare se numesc **siruri monotone**.
  - Sirurile strict crescătoare sau strict descrescătoare se numesc **siruri strict monotone**.

**Observație.** Există siruri care nu sunt monotone.

De exemplu, sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = (-1)^n$ :  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ , ...

Pentru a determina dacă un sir  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător sau descrescător, se poate proceda astfel:

1. Studiem semnul *diferenței* a doi termeni consecutivi:

- dacă  $x_{n+1} - x_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător;
- dacă  $x_{n+1} - x_n \leq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este descrescător.

2. Dacă termenii sirului sunt pozitivi, atunci comparăm cu unitatea *raportul* a doi termeni consecutivi:

- dacă  $x_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , și  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător;
- dacă  $x_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , și  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este descrescător.

Înlocuind semnul „ $\geq$ ” („ $\leq$ ”) cu „ $>$ ” („ $<$ ”), se obțin criterii analoage pentru monotonia strictă.

#### Exercițiu rezolvat

Să se studieze monotonia sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ , dacă: a)  $x_n = \frac{n+1}{n+2}$ ; b)  $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

*Rezolvare:*

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x_{n+1} - x_n &= \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 3}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Ceea ce înseamnă că  $x_{n+1} > x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , adică sirul este strict crescător.

b) Observăm că  $x_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Atunci } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot n(n+1) = \frac{n}{n+2} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, sirul este strict descrescător.

**Definiții.** • Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  se numește **mărginit superior (mărginit inferior)** dacă există un număr real  $a$  (respectiv  $b$ ), astfel încât  $x_n \leq a$  (respectiv  $x_n \geq b$ ),  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

• Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  se numește **mărginit** dacă el este mărginit superior și inferior, adică există două numere  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $a \leq x_n \leq b$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este **nemărginit** dacă  $\forall M > 0$ ,  $\exists n_M \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $|x_{n_M}| > M$ .

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se stabilească dacă sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{2n+1}{2n+3}$ , este mărginit.

Rezolvare:

$x_n = \frac{2n+1}{2n+3} > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci sirul este mărginit inferior.

Să demonstrăm că sirul este mărginit și superior.

Într-adevăr,  $x_n = \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2n+1+2-2}{2n+3} = \frac{(2n+3)-2}{2n+3} = 1 - \frac{2}{2n+3} < 1$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Așadar, sirul, fiind mărginit inferior și superior, este mărginit:

$$0 < \frac{2n+1}{2n+3} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

### Exerciții propuse

#### Profilurile umanist, arte, sport

**A** 1. Să se dea exemple de siruri finite, infinite.

2.  **Lucrați în perechi!** Să se dea un exemplu de sir numeric cu termeni pozitivi, care strict descrescător „se apropie” de zero.

3. Fie sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{2n+1}{n+4}$ .

a) Să se scrie primii cinci termeni ai sirului.

b) Să se studieze monotonia sirului.

**B** 4. Să se dea un exemplu de sir numeric cu termeni negativi, care strict crescător „se apropie” de zero.

5. Să se dea exemple de siruri care nu sunt monotone.

6. Să se studieze monotonia sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $x_n = \frac{3n+1}{4n+3}$ ;      b)  $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ ;      c)  $x_n = \frac{3n+1}{5n}$ .

**C** 7. Să se găsească formula termenului al  $n$ -lea ( $n \geq 1$ ) al sirului:

a) 1, 3, 5, 7, 9, ...;      b)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

8. Este termenul al sirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ , unde  $a_n = n^2 - 17n$ , numărul:

a) -30;      b) -72;      c) -200?

9.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale sirului lui Fibonacci în natură*.

*Profilul real*

**A<sub>1</sub>** 1. Să se dea exemple de şiruri mărginite, şiruri nemărginite, şiruri monotone.

2.  **Lucrați în perechi!** Folosind cuantificatorii logici, să se scrie negația propoziției: „Şirul numeric  $(x_n)_{n \geq 1}$  este mărginit superior”.

3. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$ .

4. Pentru şirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin formula termenului general  $x_n = \left(\frac{11}{10}\right)^n$ :

a) să se scrie primii cinci termeni;

b) să se studieze monotonia și mărginirea şirului.

5. Să se demonstreze că şirul numeric  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{3n - 1}{3n + 1}$ , este strict crescător și mărginit.

6. Să se determine marginea superioară și marginea inferioară pentru mulțimea:

a)  $X = \left\{ \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\};$

b)  $X = \left\{ -\frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$

**B<sub>1</sub>** 7. Pentru şirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit de  $x_1 = -1$  și relația de recurență  $x_{n+1} = x_n - 2$ ,  $\forall n \geq 1$ :

a) să se determine formula termenului de rang  $n$ ;

b) să se studieze monotonia și mărginirea şirului.

8. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  și să se definească acest şir prin formula termenului de rang  $n$ , dacă:

a)  $x_1 = -10$ ,  $x_{n+1} = x_n + 5$  pentru  $n \geq 1$ ;

b)  $x_1 = 4$ ,  $x_{n+1} = 2x_n$  pentru  $n \geq 1$ .

Să se studieze monotonia și mărginirea acestor şiruri.

9. Să se scrie cu ajutorul cuantificatorilor:

a) submulțimea  $X \subset \mathbb{R}$  nu este mărginită superior;

b) numărul  $m$  nu este marginea inferioară a submulțimii  $X \subset \mathbb{R}$ ;

c) numărul  $M$  nu este marginea superioară a submulțimii  $X \subset \mathbb{R}$ .

**C<sub>1</sub>** 10.  **Investigați!** Fie şirul recurrent  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit astfel:  $x_1 = 1$  și  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3^n}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

a) Să se determine formula termenului general al şirului.

b) Să se studieze monotonia şirului.

c) Să se stabilească dacă şirul este mărginit.

11. Să se determine marginea inferioară și marginea superioară pentru mulțimea:

a)  $A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq 3\};$       b)  $B = \{x \in \mathbb{R}, x^3 < 7\}.$

12.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale şirului lui Fibonacci în diverse domenii (biologie, medicină, fizică)*.

## §2 Progresii aritmetice. Progresii geometrice

Vom cerceta siruri numerice speciale care admit aplicatii importante.

### 2.1. Progresii aritmetice

#### 2.1.1. Noțiunea de progresie aritmetică

Fie sirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$ , astfel încât  $a_1 = 2$  și  $a_{n+1} = a_n + 3$  pentru orice  $n \geq 1$ . Deci,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$ ,  $a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$ ,  $a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$ , ...

Observăm că fiecare termen al acestui sir, începând cu al doilea, se obține prin adăugarea la termenul precedent a aceluiași număr, și anume 3.

**Definiție.** Se numește **progresie aritmetică** un sir de numere reale în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin adăugarea aceluiași număr.

Sirul de numere  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  este o progresie aritmetică dacă pentru orice  $k \geq 1$  avem  $a_{k+1} = a_k + r$ , unde  $r$  este un număr real. Numărul  $r$  se numește **rația progresiei aritmetice**, iar  $a_1$  este **primul termen** al acesteia.

O progresie aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  este complet determinată, dacă se cunosc primul termen  $a_1$  și rația  $r$ .

- Dacă:
- $r > 0$ , atunci progresia aritmetică este **strict crescătoare**;
  - $r < 0$ , atunci progresia aritmetică este **strict descrescătoare**;
  - $r = 0$ , atunci progresia aritmetică este **constantă**.

#### Exemplu

- Pentru  $a_1 = 1$ ,  $r = 2$ , obținem progresia aritmetică  $1, 3, 5, 7, \dots$
- Dacă  $a_1 = 1$ ,  $r = -3$ , atunci avem progresia aritmetică  $1, -2, -5, -8, \dots$
- Pentru  $a_1 = 7$ ,  $r = 0$ , obținem progresia aritmetică  $7, 7, 7, \dots$

**Definiție.** Se spune că numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt **numere în progresie aritmetică** dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Progresia aritmetică posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

**Teorema 4.** Orice termen al unei progresii aritmetice  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$ , începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad \forall n \geq 2.$$

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 4.

Este adevărată și

**Reciproca teoremei 4.** Dacă fiecare termen al unui sir de numere reale, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini, atunci acest sir este o progresie aritmetică.

**Demonstrație**

Să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui sir oarecare  $(a_n)_{n \geq 1}$  sunt loc relația:  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ ,  $n \geq 2$ .

Atunci  $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ , de unde obținem  $a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$  sau  $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ .

Aceasta înseamnă că diferența dintre orice termen al sirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  și predecesorul său este un număr constant, deci sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este o progresie aritmetică. ►

**2.1.2. Formula termenului general al unei progresii aritmetice**

Fie  $a_1$  primul termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , iar  $r$  rația ei. Atunci, conform definiției progresiei aritmetice, avem:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r, \\ a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r, \\ a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r, \\ &\dots \end{aligned}$$

**Teorema 5.** Termenul general al unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r. \quad (1)$$

**Demonstrație**

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducției matematice.

Notăm prin  $A(n)$  afirmația din egalitatea (1).

1. Pentru  $n = 1$ , afirmația  $A(1)$  este adevărată.

2. Fie afirmația  $A(k)$  adevărată pentru  $k \geq 1$ , adică,  $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$ .

Să demonstrăm că este adevărată și afirmația  $A(k+1)$ .

Într-adevăr,  $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1) \cdot r + r = a_1 + k \cdot r$ .

3. Conform metodei inducției matematice, afirmația  $A(n)$  este adevărată pentru orice număr natural nenul  $n$ . ►

**Observație.** Progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  de rație  $r$  poate fi definită prin relația de recurență  $a_{n+1} = a_n + r$ ,  $\forall n \geq 1$ , sau prin relația de recurență  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ ,  $\forall n \geq 1$ , și primul termen  $a_1$ .

**2.1.3. Formula sumei primilor  $n$  termeni ai unei progresii aritmetice**

**Teorema 6.** Fie numerele reale  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  în progresie aritmetică.

Atunci suma termenilor egal depărtați de termenii extremi este egală cu suma termenilor extremi:  $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ , pentru orice  $k \geq 1$ .

**Demonstrație**

Fie numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  în progresie aritmetică. Dacă  $r$  este rația progresiei, atunci

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \quad \text{și} \quad a_{n-k+1} = a_1 + (n-k) \cdot r,$$

de unde  $a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)r] + [a_1 + (n-k)r] = 2a_1 + (n-1)r$ .

Dar  $a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = 2a_1 + (n-1)r$ .

Astfel, obținem egalitatea  $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n$ . ►

Folosind teorema 6, se obține ușor formula generală pentru suma primilor  $n$  termeni ai unei progresii aritmetice.

Notăm cu  $S_n$  suma primilor  $n$  termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  și o scriem de două ori astfel:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Adunând aceste două egalități membru cu membru, obținem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Conform teoremei 6:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_1.$$

De aceea  $2S_n = n(a_1 + a_n)$ , de unde  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ .

**Rețineți:**  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  (2) – formula sumei primilor  $n$  termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$  (3) – formula de calcul al sumei primilor  $n$  termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen  $a_1$  și rația  $r$ .

**Exercițiu.** Demonstrați formula (3).

### Exerciții rezolvate

1. Să se afle suma numerelor naturale de la 1 la 100.

*Rezolvare:*

Aceste 100 de numere sunt în progresie aritmetică. Primul termen al progresiei este 1, iar ultimul termen este 100.

Deci,  $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$ .

2. Să se afle primul termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă  $a_{10} = 131$ ,  $r = 12$ .

*Rezolvare:*

Aplicând formula (1), obținem:  $131 = a_1 + (10-1) \cdot 12 \Leftrightarrow 131 = a_1 + 108 \Leftrightarrow a_1 = 23$ .

3. Să se afle primul termen și rația progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă  $a_5 = 27$ ,  $a_{27} = 60$ .

*Rezolvare:*

Folosind formula (1), avem:  $\begin{cases} a_1 + 4r = 27, \\ a_1 + 26r = 60. \end{cases}$

Rezolvăm sistemul și obținem  $a_1 = 21$ ,  $r = 1,5$ .

4. Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă  $a_1 = 10$ ,  $a_{100} = 150$ .

*Rezolvare:*

Aplicând formula (2), obținem:

$$S_{100} = \frac{10 + 150}{2} \cdot 100 = 80 \cdot 100 = 8000.$$

5. Să se demonstreze că dacă cotangentele unghiurilor triunghiului  $ABC$  sunt în progresie aritmetică, atunci pătratul lungimilor laturilor respective ale acestui triunghi de asemenea sunt în progresie aritmetică.

*Rezolvare:*

Fie  $R$  raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ . Din condiția problemei avem, de exemplu,  $\operatorname{ctg}A - \operatorname{ctg}B = \operatorname{ctg}B - \operatorname{ctg}C \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos C}{\sin C} \Leftrightarrow$

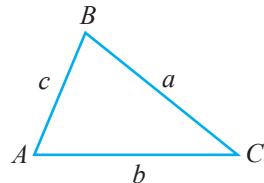
$$\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos A - \sin A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin C \cos B - \sin B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

De aici obținem  $\frac{\sin(B-A)}{\sin A} = \frac{\sin(C-B)}{\sin C}$ .

Deoarece  $\sin C = \sin(B+A)$ ,  $\sin A = \sin(B+C)$ , obținem

$$\sin(B-A)\sin(B+A) = \sin(C-B)\sin(C+B) \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C - \sin^2 B.$$

Dar  $\sin A = \frac{a}{2R}$ ,  $\sin B = \frac{b}{2R}$ ,  $\sin C = \frac{c}{2R}$ . Astfel, rezultă că  $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$ . Prin urmare, pătratul lungimilor laturilor triunghiului,  $a^2, b^2, c^2$ , sunt în progresie aritmetică.



## 2.2. Progresii geometrice

### LEGENDA JOCULUI DE SAH



O legendă spune că jocul de șah a fost inventat în India de înțeleptul Sessa, în secolul al IV-lea. Încântat de joc, regele hindus a vrut să-l răsplătească pe inventator și a rămas uimit auzind că acesta cere să i se dea un bob de grâu pentru primul pătrat al tablei de șah, 2 boabe – pentru al doilea pătrat, 4 – pentru al treilea, 8 – pentru al patrulea ș.a.m.d. până la pătratul al 64-lea. Această doleanță i s-a părut regelui foarte modestă. Oare aşa să fie?

### 2.2.1. Noțiunea de progresie geometrică

Fie sirul de numere reale  $(b_n)_{n \geq 1}$ , astfel încât  $b_1 = 3$  și  $b_{n+1} = b_n \cdot 4$ , pentru orice  $n \geq 1$ . Atunci  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = b_1 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$ ,  $b_3 = b_2 \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48$ ,  $b_4 = b_3 \cdot 4 = 48 \cdot 4 = 192$ , ...

Observăm că fiecare termen al acestui sir, începând cu al doilea, se obține prin înmulțirea termenului precedent cu același număr, și anume 4.

**Definiție.** Se numește **progresie geometrică** un sir de numere reale al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu același număr nenul.

Sirul de numere  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  ( $b_1 \in \mathbb{R}^*$ ) este o progresie geometrică dacă pentru orice  $k \geq 1$  avem  $b_{k+1} = b_k \cdot q$ ,  $q \in \mathbb{R}^*$ .

Numărul  $q$  se numește **rația progresiei geometrice**, iar  $b_1$  este **primul termen** al ei.

O progresie geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  este complet determinată dacă se cunosc primul termen  $b_1$  și rația  $q$ .

**Definiție.** Se spune că numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sunt **numere în progresie geometrică** dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

### Exemple

- Pentru  $b_1 = 1$ ,  $q = \frac{1}{2}$  obținem progresia geometrică  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
- Pentru  $b_1 = 2$ ,  $q = -2$  obținem progresia geometrică  $2, -4, 8, -16, 32, \dots$

Progresia geometrică cu termeni pozitivi posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

**Teorema 7.** Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots$ , începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui:  $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ ,  $\forall n \geq 2$ .

### Demonstrație

Conform definiției progresiei geometrice, pentru orice  $n \geq 2$ ,  $b_n = b_{n-1} \cdot q$  și  $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$ .

Atunci  $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ , de unde  $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ .

Deoarece  $b_n > 0$ , obținem  $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ . 

**Observație.** Relația  $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$  (sau  $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ ) este adevărată pentru oricare progresie geometrică.

Este adevărată și

**Reciproca teoremei 7.** Dacă fiecare termen al unui sir de numere reale pozitive, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini, atunci acest sir este o progresie geometrică.

**Exercițiu.** Demonstrați reciproca teoremei 7.

### 2.2.2. Formula termenului general al unei progresii geometrice

Fie  $b_1$  primul termen al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$  și  $q$  rația ei. Atunci, din definiția progresiei geometrice, avem:  $b_2 = b_1 \cdot q$ ,

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2, \\ b_4 &= b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3, \end{aligned}$$

.....

**Teorema 8.** Termenul general al unei progresii geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$  este dat de formula:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \quad (4)$$

### Demonstrație

Vom aplica metoda inducției matematice.

Notăm cu  $P(n)$  afirmația din egalitatea (4).

1. Pentru  $n=1$ , afirmația  $P(1)$  este evidentă.

2. Fie afirmația  $P(k)$  adevărată pentru  $k \geq 1$ , adică  $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$ .

Să demonstrăm că este adevărată afirmația  $P(k+1)$ .

Într-adevăr,  $b_{k+1} = b_k \cdot q = (b_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q = b_1 \cdot q^k$ .

3. Conform metodei inducției matematice, afirmația  $P(n)$  este adevărată pentru orice număr natural nenul  $n$ . ►

**Observație.** Progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  de rație  $q$  poate fi definită prin relația de recurență  $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ,  $\forall n \geq 1$ , și primul termen  $b_1$ .

### 2.2.3. Formula sumei primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice

Fie  $(b_n)_{n \geq 1}$  o progresie geometrică cu primul termen  $b_1$  și rația  $q$ .

**Observație.** Ca și pentru numere în progresie aritmetică, pentru numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , care sunt în progresie geometrică, are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n,$$

adică produsul termenilor egal depărtați de extremi este egal cu produsul termenilor extremi.

Fie suma primilor  $n$  termeni ai acestei progresii:

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n. \quad (5)$$

Pentru a calcula  $S_n$ , examinăm două cazuri:

1) rația  $q=1$ ; atunci  $S_n = b_1 \cdot n$ ;

2) rația  $q \neq 1$ ; atunci înmulțim ambii membri ai egalității (5) cu  $q$  și obținem:

$$qS_n = b_1q + b_2q + \dots + b_{n-1}q + b_nq.$$

Dar  $b_1q = b_2$ ,  $b_2q = b_3$ , ...,  $b_{n-1}q = b_n$ , de aceea

$$qS_n = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_nq. \quad (6)$$

Scăzând membru cu membru (5) din (6), obținem:

$$qS_n - S_n = b_nq - b_1 \Leftrightarrow S_n \cdot (q-1) = b_nq - b_1.$$

$$\text{Deoarece } q \neq 1, \quad S_n = \frac{b_nq - b_1}{q-1} = \frac{b_1 - b_nq}{1-q}.$$

**Retineți:**  $S_n = \frac{b_1 - b_nq}{1-q}$ ,  $q \neq 1$  – formula sumei primilor  $n$  termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ .

$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ ,  $q \neq 1$  (7) – formula de calcul al sumei primilor  $n$  termeni ai progresiei geometrice, aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen  $b_1$  și rația  $q$ .

**Exercițiu.** Demonstrați formula (7).

Să revenim la legenda jocului de șah.

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să aflăm numărul de boabe de grâu, adică să calculăm suma  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$ .

Avem:  $b_1 = 1$ ,  $q = 2$ ,  $b_{64} = 2^{63}$ .

$$\text{Obținem } S_{64} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Am obținut un număr natural de 20 de cifre. Considerând că 30 000 000 de boabe de grâu cântăresc aproximativ o tonă, ne convingem că doleanța lui Sessa nu a putut fi îndeplinită. (Comparați: producția mondială de grâu în anul agricol 2018–2019 a constituit circa 770 000 000 t, iar întreleptul a cerut aproximativ 614 miliarde de tone.)

Progresia geometrică:

- cu  $b_1 > 0$ ,  $q > 1$  sau cu  $b_1 < 0$ ,  $0 < q < 1$  este **strict crescătoare**;
- cu  $b_1 < 0$ ,  $q > 1$  sau cu  $b_1 > 0$ ,  $0 < q < 1$  este **strict descrescătoare**;
- cu  $q < 0$  nu este monotonă;
- cu  $q = 1$  este **constantă**.

**Exercițiu.** Dați câte un exemplu pentru fiecare caz.

Progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  se numește **infinit descrescătoare** dacă rația  $q$  verifică relația  $|q| < 1$ . Pentru progresia geometrică infinit descrescătoare  $(b_n)_{n \geq 1}$ , obținem:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Când  $n$  crește,  $q^n$  tinde la zero („se apropiie” de zero), deoarece  $|q| < 1$ , iar suma  $S_n$  tinde la valoarea expresiei  $\frac{b_1}{1 - q}$ . (A se vedea și § 3, secvența 3.3.)

### Exerciții rezolvate

1. Să se afle primul termen și rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă  $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4, \\ b_3 - b_1 = 8. \end{cases}$

*Rezolvare:*

Folosind formula (4), scriem sistemul:  $\begin{cases} b_1q - b_1 = -4, \\ b_1q^2 - b_1 = 8. \end{cases}$

Rezolvând acest sistem, obținem  $b_1 = 1$ ,  $q = -3$ .

2. Un turist, urcând pe munte, în prima oră a parcurs o distanță de 800 m. În fiecare oră următoare el a parcurs o distanță cu 25 m mai mică decât în ora precedentă. În câte ore turistul a parcurs distanța de 5 700 m?



*Rezolvare:*

Numeralele 800, 775, 750, ... sunt în progresie aritmetică. Astfel,  $a_1 = 800$ ,  $r = -25$ .

Din condiția problemei rezultă sistemul:  $\begin{cases} a_n = x = 800 - 25(n-1), \\ S_n = \frac{800+x}{2} \cdot n = 5700. \end{cases}$

Rezolvăm acest sistem și obținem  $x = 1625$  m,  $n = 8$  ore.

*Răspuns:* 8 ore.

3. Să se determine numerele pozitive  $x, y, z$  care satisfac simultan condițiile:

- 1)  $x, y, z$  sunt în progresie geometrică;
- 2)  $x, y+4, z$  sunt în progresie aritmetică;
- 3)  $x, y+4, z+32$  sunt în progresie geometrică.

*Rezolvare:*

$$\text{Obținem sistemul: } \begin{cases} xz = y^2 \\ x+z = 2(y+4) \\ x(z+32) = (y+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ y = 4x-2 \\ z = 2y-x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 20x + 4 = 0, \\ y = 4x-2, \\ z = 7x+4. \end{cases}$$

Rezolvând ultimul sistem, obținem soluția:  $x = 2$ ,  $y = 6$ ,  $z = 18$ .

### Exerciții propuse

#### Profilurile umanist, arte, sport

- A 1. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă:
- a)  $a_1 = 7$ ,  $r = 2$ ;      b)  $a_1 = -3$ ,  $r = 5$ ;      c)  $a_1 = 1,3$ ,  $r = 0,3$ ;      d)  $a_1 = \frac{2}{7}$ ,  $a_2 = \frac{1}{5}$ .
2. Să se afle termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă:
- a)  $a_{10} = 131$ ,  $r = 12$ ;      b)  $a_{200} = 0$ ,  $r = -3$ .
3. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă:
- a)  $b_1 = -10$ ,  $q = \frac{1}{2}$ ;      b)  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $q = \sqrt{3}$ .
4. Fie sirul: a) 6, 9, 12, 15, ...;    b) 4, 8, 16, 32, ...  
Să se completeze astfel încât propoziția să fie adevărată:  
„Sirul este o progresie  cu rația ”.
- B 5. Pentru a construi o seră, se folosesc piloni instalați vertical. Cel mai scurt pilot are înălțimea de 5 dm, iar fiecare dintre pilonii următori este cu 3 dm mai înalt decât precedentul. Să se afle înălțimea celui mai înalt pilot, al șaptelea.
6. Într-un amfiteatru sunt 10 rânduri. În primul rând sunt 100 de locuri, iar în fiecare dintre rândurile următoare – cu 20 de locuri mai mult decât în cel precedent. Câte locuri sunt în total în amfiteatru?
7. Vara, la munte, odată cu creșterea altitudinii cu câte 100 m, temperatura aerului scade cu  $0,7^\circ\text{C}$ . La poalele muntelui sunt  $26^\circ\text{C}$ . La ce altitudine se află un turist, dacă termometrul indică  $14,8^\circ\text{C}$ ?
- C 8.  **Lucrați în perechi!** O bancă dă o dobândă anuală de 9%. Ce sumă va primi peste 5 ani o persoană care a depus la bancă 2700 lei, dacă dobânda calculată în fiecare an se adaugă la suma existentă?

9. Fântânarilor angajați la săparea unei fântâni li s-a promis 150 de lei pentru primul metru săpat, iar pentru fiecare metru săpat în continuare – cu 60 de lei mai mult decât pentru cel precedent. Să se afle câți lei vor câștiga fântânarii, dacă adâncimea fântânii va fi de 12 metri.

10. În condiții favorabile, în fiecare oră, orice bacterie se divizează în altele două. Câte bacterii se vor reproduce dintr-o bacterie timp de 10 ore?

11.  **Lucrați în grup!** Proiect *Progresiile în viitoarea mea profesie*.

### *Profilul real*

**A<sub>1</sub>** 1. Să se afle suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă  $\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} = \frac{1}{3}$  și  $b_1 + b_2 + b_3 = 52$ .

2. Să se determine formula termenului general al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $S_n$ , dacă:

a)  $a_1 = -4$ ,  $r = \frac{1}{3}$ ,  $n = 14$ ;      b)  $a_1 = \frac{3}{5}$ ,  $r = \frac{1}{7}$ ,  $n = 25$ .

3. Să se scrie formula termenului de rang  $n$  al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $b_1 = 9$ ,  $b_{n+1} = 2b_n$ ;      b)  $b_1 = 10$ ,  $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$ .

4. Fie o progresie geometrică cu  $S_3 = 40$ ,  $S_6 = 60$ . Să se afle  $S_9$ .

5. Fie șirul: a) 16, 12, 8, 4, ...;    b)  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$

Să se completeze astfel încât propoziția să fie adevărată:

„Șirul este o progresie  cu rația ”.

**B<sub>1</sub>** 6. Să se demonstreze că dacă numerele  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele  $a^2 - bc$ ,  $b^2 - ac$ ,  $c^2 - ab$  sunt în progresie aritmetică.

7. Să se afle primul termen și rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $b_4 = -12$ ,  $b_7 = 23\frac{7}{16}$ ;      b)  $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}$ ,  $b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$ .

8. Să se determine numerele  $x$ ,  $y$ ,  $z \in \mathbb{R}$  care satisfac simultan condițiile:

- a)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sunt în progresie geometrică;
- b)  $x$ ,  $y + a$ ,  $z$  sunt în progresie aritmetică;
- c)  $x$ ,  $y + a$ ,  $z + b$  sunt în progresie geometrică.

9. Să se afle valorile lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care numerele  $2x - 1$ ,  $2x + 1$ ,  $x + 26$  sunt în progresie geometrică.

10. Să se determine primul termen al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $S_4 = 12$ ,  $q = 3$ ;      b)  $S_6 = 1$ ,  $q = -2$ .

**C<sub>1</sub>** 11. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$ .

12. Lungimile laturilor triunghiului  $ABC$ , considerate în ordine consecutivă, sunt în progresie geometrică crescătoare. Rația acestei progresii este mai mică sau mai mare decât 2?

13. Să se reprezinte numărul 180 ca suma a patru numere reale pozitive, care sunt în progresie geometrică cu rația  $q \neq 1$ , dacă se știe că termenul al treilea este cu 36 mai mare decât primul termen. Să se găsească două posibilități.

14.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale progresiilor în diverse domenii*.

### §3 Limita unui sir. Siruri convergente, siruri divergente

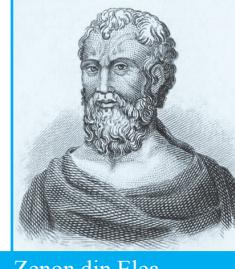
În Antichitate, matematicienii greci Arhimede, Zenon din Elea<sup>1</sup> și alții au utilizat sirurile numerice pentru a obține aproximări cât mai bune ale unor mărimi. Mult mai târziu, s-au introdus conceptele de sir convergent și limită.

#### 3.1. Noțiunea de limită a unui sir

Se numește **vecinătate a unui punct**  $a \in \mathbb{R}$  orice interval deschis de forma  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Vecinătatea punctului  $a$  se notează cu  $U(a, \varepsilon)$  sau  $V(a, \varepsilon)$ .

Prin urmare,  $U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ .

Vom spune că un punct  $x_0$  este **punct interior** al mulțimii  $X$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}$ , dacă există o vecinătate  $U(x_0, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , a acestui punct, astfel încât  $U(x_0, \varepsilon) \subset X$ .



Zenon din Elea

**Definiție (în limbajul vecinătăților).** Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$  un sir de numere reale și  $a$  un număr real. Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  are **limită**  $a$  dacă în orice vecinătate a punctului  $a$  se conțin toți termenii sirului, cu excepția, poate, a unui număr finit de termeni.

Faptul că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  are limită  $a$  se scrie:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (se citește: „limita sirului  $x_n$  când  $n$  tinde la infinit este egală cu  $a$ ”) sau  $x_n \rightarrow a$  când  $n \rightarrow \infty$  (se citește: „ $x_n$  tinde la  $a$  când  $n$  tinde la  $\infty$ ”).

**Observație.** Se scrie  $n \rightarrow \infty$ , și nu  $n \rightarrow +\infty$ , deoarece  $n$  este număr natural și nu este pericol de confuzie.

**Definiție (în limbajul  $\varepsilon$ ).** Numărul  $a \in \mathbb{R}$  este **limită** sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $|x_n - a| < \varepsilon$  oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n > n_\varepsilon$ .

**Observații.** 1. Dacă negăm în definiția cu „ $\varepsilon$ ”, obținem: Numărul  $a \in \mathbb{R}$  nu este limita sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  dacă  $\exists \varepsilon_0 > 0$ , astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists n_0 > n$  cu proprietatea  $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$ .

2. În definiția în limbajul  $\varepsilon$  se poate înlocui  $\varepsilon$  cu  $\alpha\varepsilon$ , unde numărul real  $\alpha > 0$  este fixat. Atunci putem formula definiția în limbajul  $\varepsilon$  astfel: numărul  $a \in \mathbb{R}$  este limita sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  dacă  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $|x_n - a| < \alpha\varepsilon$ ,  $\forall n > n_\varepsilon$ , unde  $\alpha > 0$ .

#### Exerciții rezolvate

1. Fie sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ . Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

*Demonstrație*

Fie  $U$  o vecinătate arbitrară a punctului  $0$ ,  $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , adică  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ . Deci,  $x_n = \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) = U$  dacă  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Așadar, termenii sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,

<sup>1</sup> Zenon din Elea (cca 490–cca 430 î.H.) – filozof și matematician grec.

începând cu rangul  $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , se află în vecinătatea  $U$  a punctului 0.

Prin urmare, numărul 0 este limita sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ .

**Rețineți:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

4. Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$ .

*Demonstrație*

Vom demonstra că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n > n_\varepsilon$ , se verifică inegalitatea  $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$ . Evaluăm  $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$ .

Pentru orice  $\varepsilon > 0$  cerem ca  $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ . Dacă  $\varepsilon > \frac{1}{2}$ , atunci inegalitatea  $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$  este verificată de orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dacă  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ , atunci ea este verificată de orice  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , de aceea în acest caz considerăm  $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$ ,  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ .

Așadar, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$ , oricare ar fi  $n$ ,  $n > n_\varepsilon$ . Rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$ .

5. Să se demonstreze că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = (-1)^n$  nu are limită.

*Demonstrație*

Presupunem contrariul, că există un număr  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = a$ . Conform definiției limitei, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , în particular pentru  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ ,  $\forall n > n_\varepsilon$ . Deoarece  $x_n \in \{-1, 1\}$ , rezultă că au loc simultan inegalitățile  $|1 - a| < \frac{1}{2}$  și  $|-1 - a| < \frac{1}{2}$ . Obținem că  $2 = |(1 - a) + (a + 1)| \leq |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ , adică  $2 < 1$ . Absurd. Deci, sirul dat nu posedă limită.

6. Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

*Demonstrație*

Vom demonstra că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n > n_\varepsilon$ , are loc inegalitatea  $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| < \varepsilon$ ,  $\alpha > 0$ .

Într-adevăr, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , luând în considerare că  $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$  și rezolvând inecuația  $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| < \varepsilon$  cu necunoscuta  $n$ , obținem  $n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$ . Observăm că  $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} \right\rceil$  este un număr

natural. Așadar, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \right\rceil \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| < \varepsilon$  oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n > n_\varepsilon$ . Prin urmare,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ ,  $\alpha > 0$ .

**Rețineți:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ ,  $\alpha > 0$ .

**Exercițiu.** Folosind definiția în limbajul vecinătăților, demonstrați că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = (-1)^n$ , nu are limită.

- Definiții.**
- Se spune că sirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  are **limită plus infinit** și se scrie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $x_n > \varepsilon$  oricare ar fi  $n > n_\varepsilon$ .
  - Se spune că sirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  are **limită minus infinit** și se scrie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $x_n < -\varepsilon$  oricare ar fi  $n > n_\varepsilon$ .
  - Se spune că sirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  are **limită infinită** și se scrie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $|x_n| > \varepsilon$  oricare ar fi  $n > n_\varepsilon$ .

**Observație.** Evident, dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  sau  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

### Exemple

1. Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = n^2$ . Evident,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .
2. Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = -2^n$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .
3. Pentru sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = (-1)^n \cdot n$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

### Exercițiu rezolvat

Considerăm sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = q^n$ ,  $q < -1$ . Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ .

*Rezolvare:*

Conform definiției, vom arăta că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $|q^n| > \varepsilon$  oricare ar fi  $n > n_\varepsilon$ .

Fie  $\varepsilon > 0$ . Relația  $|q^n| > \varepsilon$  este echivalentă cu  $|q|^n > \varepsilon$ . Logaritmând inegalitatea în baza  $|q|$ ,  $|q| > 1$ , obținem:

$$\log_{|q|} |q|^n > \log_{|q|} \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$ , astfel încât  $|q^n| > \varepsilon$  oricare ar fi  $n > n_\varepsilon$ . Conform definiției,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ .

La demonstrația teoremelor și la rezolvarea exemplelor cu limite infinite uneori vom utiliza următoarele mulțimi:

$$U(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon, \varepsilon > 0\};$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon, \varepsilon > 0\};$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \varepsilon, \varepsilon > 0\},$$

care se mai numesc **vecinătăți**, respectiv, ale lui  $+\infty$ ,  $-\infty$  și  $\infty$ .

În definițiile vecinătăților simbolurilor  $+\infty$  și  $-\infty$ , condiția  $\varepsilon > 0$  uneori poate fi omisă. Această condiție este introdusă doar pentru a uniformiza formulările noțiunilor. Deci, vecinătatea oricărui număr finit, a lui  $+\infty$ ,  $-\infty$  și  $\infty$  se determină cu ajutorul unui număr pozitiv. Această convenție este comodă uneori la formularea rezultatelor în care nu este esențial dacă limita este finită sau infinită. Aplicând această terminologie, definiția limitei finite sau a oricarei limite infinite poate fi formulată astfel:

- Definiții. • Se spune că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  are limită  $a$  (unde  $a$  este număr finit,  $+\infty$ ,  $-\infty$  sau  $\infty$ ) dacă pentru orice vecinătate  $U(a, \varepsilon)$  a lui  $a$  există numărul natural  $n_u$ , astfel încât  $x_n \in U$  oricare ar fi  $n > n_u$ .
- Sirul care are limită finită se numește **sir convergent**. Sirul care nu este convergent (adică sirul care nu are limită sau are limită infinită) se numește **sir divergent**.

**Teorema 9.** Dacă un sir de numere reale are limită, atunci această limită este unică.

**Teorema 10 (Weierstrass<sup>1</sup>).** Orice sir numeric monoton și mărginit este convergent.

### Demonstrație

Să considerăm cazul sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  crescător și mărginit superior. Atunci  $x_n \leq x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Conform ipotezei, mulțimea  $\{x_n \mid n \geq 1\}$  este nevidă și mărginită. Fie  $x_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .



Karl Weierstrass

Conform teoremei de caracterizare a marginii superioare, oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există un rang  $n_\varepsilon$ , astfel încât  $x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$ . Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător, deci  $x_n > x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$  pentru orice  $n > n_\varepsilon$ . Pe de altă parte, din condiția că  $x_0$  este marginea superioară,  $x_n \leq x_0 < x_0 + \varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Așadar, pentru orice  $n > n_\varepsilon$  avem  $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$  sau  $|x_n - x_0| < \varepsilon$ , adică  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , și, cum  $x_0 \in \mathbb{R}$ , sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent. Analog se demonstrează cazul sirului descrescător și mărginit inferior. ►

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se arate că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit de  $x_1 = \sqrt{2}$  și relația de recurență  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ ,  $\forall n \geq 1$ , este convergent.

*Rezolvare:*

Să demonstrăm că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător. Considerăm diferența  $x_{n+1}^2 - x_n^2$ . Obținem:  $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = (1 + x_n)(2 - x_n) > 0$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Din ultima relație avem  $x_{n+1}^2 > x_n^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Cum  $x_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , obținem  $x_{n+1} > x_n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Astfel, sirul este crescător.

Folosind metoda inducției matematice, să demonstrăm că sirul este mărginit superior.

Avem  $x_1 = \sqrt{2} < 2$ ,  $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$ .

Presupunem că  $x_n < 2$ . Atunci  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$ .

<sup>1</sup> Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) – matematician german.

Prin urmare, conform metodei inducției matematice,  $x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Conform teoremei lui Weierstrass, sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , fiind monoton crescător și mărginit superior, este convergent.

**Observație 1.** În demonstrația teoremei 10 am obținut că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$ , dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător. Dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este descrescător, atunci analog se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$ .

**2.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , atunci se mai spune că **sirul**  $(x_n)_{n \geq 1}$  **converge** la numărul  $a$ .

**Teorema 11.** Un sir  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge la  $x_0$  dacă și numai dacă orice subșir  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$  converge la  $x_0$ . Adică  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ , pentru orice  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ .

**Observație.** Din teorema 11 rezultă că pentru ca un sir numeric să nu aibă limită, este suficient ca el să conțină două subșiruri cu limite diferite.

### 3.2. Proprietăți ale sirurilor convergente

Fie sirurile de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$ . Sirurile  $(\lambda \cdot x_n)_{n \geq 1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;  $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$ ;  $(x_n \cdot y_n)_{n \geq 1}$ ;  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq 1}$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;  $(x_n^{y_n})_{n \geq 1}$ ,  $\forall x_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , se numesc respectiv **produsul unui sir cu o constantă**, **sir-sumă**, **sir-produs**, **sir-cât**, **sirul puterilor**.

Apare în mod firesc întrebarea: ce se poate spune despre limita sirurilor definite mai sus, în cazul în care sirurile inițiale au limită, și, dacă au limită, cum se calculează limita lor?

#### Teorema 12

**1.** Dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este un sir convergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$ , atunci sirul  $(\lambda \cdot x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot a = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , adică *factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei*.

**2.** Dacă sirurile  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , atunci sirul  $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , adică *limita sumei a două siruri convergente este egală cu suma limitelor acestor siruri*.

**3.** Dacă sirurile  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , atunci sirul  $(x_n \cdot y_n)_{n \geq 1}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , adică *limita produsului a două siruri convergente este egală cu produsul limitelor acestor siruri*.

**4.** Dacă sirurile  $(x_n)_{n \geq 1}$  și  $(y_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  ( $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ) și  $b \neq 0$ , atunci sirul-cât  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq 1}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ , adică *limita câtului a două siruri convergente este egală cu câtul limitelor acestor siruri*.

### 3.3. Suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare

**Teorema 13.** Fie sirul  $(S_n)_{n \geq 1}$ ,  $S_n = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-1}$ , unde  $0 < |q| < 1$  și  $b_1 \neq 0$ .

$$\text{Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

#### Demonstrație

Suma primilor  $n$  termeni ai progresiei geometrice infinit descrescătoare  $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots$  poate fi scrisă sub forma  $S_n = \sum_{i=1}^n b_1 q^{i-1}$ ,  $|q| < 1$ .

Știind că  $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ ,  $|q| < 1$ , obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{b_1}{1-q}, \text{ deoarece } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \quad \blacktriangleright$$

### 3.4. Numărul $e$

**Teorema 14.** Sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , este convergent.

#### Demonstrație

Vom aplica teorema 10 (Weierstrass) din secvența 3.1 și *inegalitatea mediilor*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Vom arăta că sirul  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \geq 1$ , este monoton și mărginit.

Studiem monotonia sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

Considerăm numerele  $\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}, 1$ .

Conform inegalității mediilor, pentru aceste  $n+1$  numere pozitive avem:

$$\begin{aligned} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n+1} &> \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Prin urmare,  $x_n < x_{n+1}$ ,  $\forall n \geq 1$ , de unde rezultă că sirul dat este strict crescător.

Să demonstrăm că sirul este mărginit superior. Considerăm următoarele  $n+2$  numere pozitive:  $\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ .

Din inegalitatea mediilor, aplicată acestor  $n+2$  numere, rezultă:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Deci, sirul este mărginit superior.

Conform teoremei lui Weierstrass, sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ , fiind monoton crescător și mărginit superior, este convergent. ►

Limita sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ , se notează cu  $e$ , după inițiala numelui lui L. Euler<sup>1</sup>, și reprezintă un număr irațional care

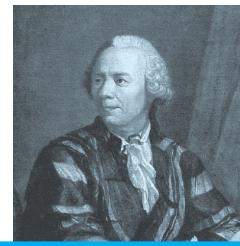


Daniel Bernoulli

aparține intervalului  $(2, 3)$ . Iraționalitatea numărului  $e$  a fost demonstrată în 1815 de J. Fourier<sup>2</sup>. În 1728, D. Bernoulli<sup>3</sup> a stabilit că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284590\dots$$

**Rețineți:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (8)$



Leonard Euler



Jean-Baptiste Joseph Fourier

**Observație.** Numărul  $e$  este o constantă fundamentală în analiza matematică. Logaritmul în baza  $e$  are aplicații în matematică, fizică și în multe alte domenii, se numește **logaritm natural** și se notează  $\ln x$  ( $= \log_e x$ ).

### Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1}$ .

Rezolvare:

$$\text{Aplicând teorema 11 și relația (8), obținem: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{6n+1} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{1}{3n+7} \cdot (3n+7)(6n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{1}{3n+7}} \right\}^{\frac{1(6n+1)}{3n+7}} = e^2.$$

<sup>1</sup> Leonard Euler (1707–1783) – matematician, fizician și astronom elvețian.

<sup>2</sup> Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – matematician francez.

<sup>3</sup> Daniel Bernoulli (1700–1782) – matematician și fizician elvețian.

2. Să se calculeze limita sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $x_n = \sqrt{n^2 + 2n - 3} - n;$

b)  $x_n = \frac{n+2}{3n+1};$

c)  $x_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n};$

d)  $x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$

Rezolvare:

a) Amplificăm cu conjugatul expresiei:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 3} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n - 3) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n - 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{\sqrt{n^2 + 2n - 3} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 2 - \frac{3}{n} \right)}{n \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} + 1 \right)} = 1.\end{aligned}$$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 1 + \frac{2}{n} \right)}{n \left( 3 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$

c) Amplificăm cu conjugatul expresiei de la numărător:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0.$$

d) Folosim formula sumei primilor  $n$  termeni ai unei progresii geometrice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}{\frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1}} = \frac{4}{3}.$$

### Exerciții propuse

#### *Profilul real*

A1 1. Să se aducă exemple de siruri numerice convergente, divergente.

2. Aplicând definiția limitei sirului numeric, să se arate că:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n} = 4;$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2;$       c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{4n+5} = \frac{1}{2};$       d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{n+1} = 5.$

3. Folosind definiția limitei sirului, să se arate că:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \neq \frac{1}{2};$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n+1} \neq 1.$

**B<sub>1</sub>** 4. Aplicând teorema lui Weierstrass, să se demonstreze convergența sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $x_n = \frac{2n+1}{n+1};$

b)  $x_n = 1 + \frac{1}{3^n};$

c)  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$

**5.** Să se calculeze:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1};$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2+n};$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^n};$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1};$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2^n}\right);$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5 \cdot 2^n}{4^n + 5^{n+1}};$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n).$

**C<sub>1</sub>** 6. Să se calculeze:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n};$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{n};$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{n}+2}{n+3}\right);$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n.$

## Exerciții și probleme recapitulative

### *Profilurile umanist, arte, sport*

**A** 1. Să se scrie primii cinci termeni ai sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general:

a)  $x_n = \frac{3n-2}{2+n};$       b)  $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right);$       c)  $x_n = (-1)^n \cdot 7 + \frac{1}{n}.$

2. Să se determine formula termenului de rang  $n$  pentru sirul:

a)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots;$       b)  $2, 4, 6, 8, 10, \dots;$       c)  $3, -3, 3, -3, \dots;$       d)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

3.  **Lucrați în perechi!** Să se dea exemple de siruri numerice:

- a) finite;      b) infinite;      c) monotone.

4. Să se decidă dacă sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ , este monoton.

**B** 5. Să se scrie formula termenului general al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

- a)  $a_1 = -2$  și  $r = -4;$       b)  $a_1 = 1$  și  $r = 2;$       c)  $a_1 = -10$  și  $r = 5;$       d)  $a_1 = 3$  și  $r = 7.$

6. Să se afle suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

- a)  $a_1 = 2$ ,  $r = -5;$       b)  $a_1 = -1$ ,  $r = 1.$

7. Să se scrie formula termenului general al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

- a)  $b_1 = 2$ ,  $q = 6;$       b)  $b_1 = -10$ ,  $q = \frac{1}{2};$       c)  $b_1 = 3$ ,  $q = 2.$

8.  **Investigați!** Să se decidă dacă este progresie aritmetică sau progresie geometrică sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $x_1 = 2$ ,  $x_{n+1} = 3x_n;$       b)  $x_1 = 4$ ,  $x_{n+1} = 2 + x_n;$

c)  $x_1 = -4$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n;$       d)  $x_1 = -1$ ,  $x_{n+1} = 5 + x_n.$

În caz afirmativ, să se indice formula termenului general al progresiei și rația.

9. Fie numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  în progresie aritmetică. Să se determine:

- a)  $n$  și  $S_n$ , dacă  $a_n = 5$ ,  $a_1 = 23$ ,  $r = -2;$       b)  $a_1$  și  $n$ , dacă  $a_n = 18$ ,  $r = 2$ ,  $S_n = 88.$

- C** 10. Fie numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  în progresie geometrică. Să se determine  $q$  și  $S_n$ , dacă:  
 a)  $b_n = 1280, b_1 = 5, n = 9$ ;      b)  $b_n = 384, q = 2, n = 8$ .
11. Un ciclist a parcurs în prima oră o distanță de 8 km. În fiecare oră următoare, el a parcurs o distanță cu 2 km mai mare decât în ora precedentă. În câte ore ciclistul a parcurs distanța de 60 km?
12. În cădere liberă într-o mină, o piatră parurge în prima secundă 4,9 m și viteza ei crește cu 9,8 m/s. Să se afle adâncimea minei, dacă piatra a ajuns la fund peste 8 s.
13.  **Investigați!** Să se determine valorile lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care numerele  $2x - 2, x^2 + 1, 3x^2 - 1$  sunt în progresie aritmetică.

### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Aplicând definiția limitei sirului, să se arate că:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5n}{n} = -5$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{3n^2} = \frac{2}{3}$ ;      c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{4n+5} = \frac{1}{4}$ ;      d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{1-n} = -5$ .

2. Folosind definiția limitei sirului, să se arate că:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \neq \frac{1}{3}$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{7n+1} \neq 1$ ;      c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{3n} \neq \frac{9}{4}$ ;      d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} \neq 1$ .

3. Aplicând teorema lui Weierstrass, să se demonstreze convergența sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ , dacă:

a)  $x_n = \frac{3n+1}{2n+1}$ ;      b)  $x_n = 1 + \frac{1}{5^n}$ ;      c)  $x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n+1}$ .

- B<sub>1</sub>** 4. Să se calculeze: a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1}$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+n}$ ;      c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2n}$ ;  
 d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1}$ ;      e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C_n^2}{2^n}\right)$ ;      f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ .

- C<sub>1</sub>** 5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt în progresie aritmetică cu ratia 2. Cosinusul celui mai mic unghi al acestui triunghi este egal cu  $\frac{4}{5}$ . Să se afle perimetru triunghiului.

6. Dintr-un vas plin ce conținea 729 l de acid s-au luat  $a$  litri, apoi vasul a fost umplut cu apă. După obținerea unei soluții omogene, iarăși s-au luat  $a$  litri și vasul a fost umplut din nou cu apă. Această operație a fost repetată de 6 ori și în final soluția din vas conținea 64 l de acid. Să se determine  $a$ .

7.  **Lucrați în perechi!** Să se afle suma tuturor numerelor naturale de două cifre care, fiind împărțite la 4, dau restul 1.

8. Să se demonstreze că numerele  $(a+x)^2, a^2+x^2, (a-x)^2$ ,  $a, x \in \mathbb{R}$ , sunt în progresie aritmetică. Să se afle suma primilor  $n$  termeni ai progresiei, știind că  $(a+x)^2$  este primul termen.

9. Să se calculeze:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+1}{2^n+1}$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2 + 1)$ ;      c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n - n^5)$ ;  
 d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n}$ ;      e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1}\right)$ ;      f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ ;  
 g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ;      h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ;      i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$ .

**Test sumativ**

*Timp efectiv de lucru:*  
45 de minute

**Profilurile umanist, arte, sport**

- Scrieti primii 3 termeni ai sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ :  
 a)  $x_n = \frac{3n-2}{n+2}$ ; ③  
 b)  $x_n = \frac{1+(-1)^n}{3}$ . ③
- Studiați monotonia sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin formula  $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ . ④
- Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă:  
 $a_2 + a_4 = 16$ ,  $a_1 a_5 = 28$ . ⑥
- Determinați primul termen și rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă:  
 $b_2 - b_1 = -4$ ,  $b_3 - b_1 = 8$ . ⑧
- Pentru a ridica un pian la etajul 2, s-au plătit 3 u.m., iar pentru a-l ridica la fiecare etaj următor – de 2 ori mai mult decât pentru etajul precedent. Determinați la ce etaj a fost ridicat pianul, dacă pentru ultimul etaj s-au plătit 48 u.m. ⑧

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	32–31	30–28	27–24	23–20	19–15	14–10	9–6	5–4	3–2	1–0

*Timp efectiv de lucru:*  
45 de minute

**Profilul real**

- Folosind teorema lui Weierstrass, demonstrați convergența sirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  

$$x_n = \frac{10 \cdot 11 \cdots (n+9)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}.$$
 ⑧
- Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă  $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$ ,  $a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72}$ . ⑧
- Determinați primul termen și rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă:  
 $b_4 - b_2 = -\frac{45}{32}$ ,  $b_6 - b_4 = -\frac{405}{512}$ . ⑨
- Pentru confecționarea și instalarea inelului de jos al unei fântâni s-au plătit 26 u.m., iar pentru fiecare inel următor – cu 2 u.m. mai puțin decât pentru cel precedent. Suplimentar, s-au mai plătit 40 u.m. Prețul mediu pentru confecționarea și instalarea unui inel este de  $22\frac{4}{9}$  u.m. Aflați câte inele au fost instalate. ⑨

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	34–33	32–30	29–26	25–21	20–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

## Siruri de numere reale

### Moduri de definire a sirului

- 1) analitic;
- 2) prin descrierea termenilor sirului;
- 3) printr-o relatie de recurenta.

superior:  
 $\exists M \in \mathbb{R}: x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

inferior:

$\exists m \in \mathbb{R}: x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$  sunt egale  
 $\Leftrightarrow x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

### Sir numeric

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Notam:  $(x_n)_{n \geq 1}$

### Sir-produs

$$(x_n \cdot y_n)_{n \geq 1}$$

### Sir-sumă

$$(x_n + y_n)_{n \geq 1}$$

### Sir mărginit

crescator:  $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

descrescator:  $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

### Sir monoton

crescator:  $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

descrescator:  $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

### Sir-puterilor

$$((x_n)^{y_n})_{n \geq 1}$$

### Sir-cât

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq 1}$$

### Teorema de caracterizare a marginii superioare

#### a unei multimi

Fie  $X \subset \mathbb{R}$  o multime nevidat mărginită superior. Numărul  $M^*$  este marginea superioară a mulțimii  $X$  dacă și numai dacă:

- 1)  $x \leq M^*$ , pentru orice  $x \in X$ ;
- 2) pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $x_\varepsilon \in X$ , astfel încât  $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$ .

### Teorema de caracterizare a marginii inferioare

#### a unei multimi

Fie  $X \subset \mathbb{R}$  o multime nevidat mărginită inferior. Numărul  $m^*$  este marginea inferioară a mulțimii  $X$  dacă și numai dacă:

- 1)  $x \geq m^*$ , pentru orice  $x \in X$ ;
- 2) pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $x_\varepsilon \in X$ , astfel încât  $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$ .

### Progresie aritmetică

$$a_n = a_1 + r(n-1), n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k \in \mathbb{N}^*$$

### Progresie geometrică

$$b_n = b_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, n \in \mathbb{N}^*$$

### Inegalitatea medinilor

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, n \in \mathbb{N}^*,$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$

### Teorema lui Weierstrass

Orice sir numeric monoton și mărginit este convergent.

### Numărul e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Obiective**

- ⇒ \*determinarea punctelor de acumulare și a punctelor izolate ale unei mulțimi;
- ⇒ \*aplicarea în diverse contexte a limitei funcției într-un punct, \*aplicarea în rezolvări de probleme a limitelor laterale ale funcției, \*identificarea funcțiilor care au limită și care nu au limită în punct;
- ⇒ \*calculul limitelor de funcții elementare și a limitelor de funcții compuse, \*utilizarea în rezolvări de probleme a operațiilor cu limite de funcții;
- ⇒ \*aplicarea limitelor remarcabile la calculul limitelor de funcții; \*recunoașterea în diverse contexte a formelor exceptate și aplicarea metodelor de înlăturare a acestora.

**§1 Limita unei funcții într-un punct****1.1. Puncte de acumulare ale unei mulțimi**

Fie  $E \subseteq \mathbb{R}$  o submulțime de numere reale și  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție. În acest modul vom studia comportarea funcției  $f$  în vecinătatea unui punct  $x_0$ , care, în caz general, nu aparține în mod necesar mulțimii  $E$ . Mai precis, vom studia ce se întâmplă cu valorile  $f(x)$  ale funcției  $f$  dacă valorile argumentului  $x$ ,  $x \neq x_0$ , sunt din ce în ce mai aproape de  $x_0$ . Pentru ca argumentul  $x \in E$  să se poată apropiă suficient de mult de  $x_0$ , este necesar ca în orice vecinătate a lui  $x_0$  să existe puncte din mulțimea  $E$ , adică  $x_0$  să fie punct de acumulare pentru  $E$ .

**Definiție.** Fie  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Punctul  $x_0 \in \mathbb{R}$  se numește **punct de acumulare** pentru mulțimea  $E$  dacă în orice vecinătate a lui  $x_0$  există cel puțin un punct din mulțimea  $E \setminus \{x_0\}$ .

Deci,  $x_0 \in \mathbb{R}$  este un **punct de acumulare** pentru mulțimea  $E$  dacă pentru orice vecinătate  $V$  a punctului  $x_0$  are loc relația  $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ . Prin urmare,  $x_0 \in \mathbb{R}$  nu este **punct de acumulare** pentru mulțimea  $E$  dacă există o vecinătate  $V'$  a lui  $x_0$  care nu conține niciun punct din mulțimea  $E \setminus \{x_0\}$ , adică  $V' \cap (E \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ . Punctul  $x_0 \in E$ , care nu este punct de acumulare pentru  $E$ , se numește **punct izolat** al mulțimii  $E$ . Mulțimea  $E \subseteq \mathbb{R}$  se numește **mulțime închisă** dacă ea își conține toate punctele de acumulare. Mulțimea mărginită și închisă se numește **mulțime compactă**.

**Teorema 1.** Punctul  $x_0 \in \mathbb{R}$  este punct de acumulare pentru mulțimea  $E \subseteq \mathbb{R}$  dacă și numai dacă există un sir  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in E \setminus \{x_0\}$ , astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

### Demonstrație

*Necesitatea.* Să admitem că  $x_0$  este punct de acumulare pentru mulțimea  $E$  și să considerăm vecinătățile  $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , ale punctului  $x_0$ . Atunci în fiecare vecinătate  $V_n$  se află cel puțin un punct  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ , adică  $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$ , de unde rezultă că  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$  pentru orice  $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ . Prin urmare,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

*Suficiența.* Dacă mulțimea  $E$  conține un sir  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu termeni  $x_n$ ,  $x_n \neq x_0$ , astfel încât  $x_n \rightarrow x_0$  când  $n \rightarrow \infty$ , atunci din definiția limitei sirului numeric rezultă că pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  toți termenii  $x_n$  ai acestui sir aparțin vecinătății  $V$  începând cu un rang  $N$ . Prin urmare,  $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ , adică  $x_0$  este punct de acumulare pentru  $E$ . ►

**Observație.** Definiția punctului de acumulare și teorema 1 rămân adevărate și pentru cazurile în care  $x_0$  este  $+\infty$ ,  $-\infty$  sau  $\infty$ . În aceste cazuri, în demonstrația teoremei 1 se vor considera, respectiv, vecinătățile  $V_n = (n, +\infty)$ ,  $V_n = (-\infty, -n)$  sau  $V_n = (-\infty, -n) \cup (n, +\infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ .

### Exemple

1. Pentru  $E = (a, b)$  sau  $E = [a, b]$  orice punct  $x_0 \in [a, b]$  este punct de acumulare.

2. Mulțimea  $\mathbb{N}$  are punctul de acumulare  $+\infty$ . Toate punctele mulțimii  $\mathbb{N}$  sunt pentru ea puncte izolate.

3. Mulțimea  $E = [-2, 1] \cup \{3\}$  are în calitate de puncte de acumulare orice punct  $x_0 \in [-2, 1]$ , iar punctul  $x_0 = 3$  este pentru ea un punct izolat.

4. Punctele 0 și 1 sunt puncte de acumulare pentru mulțimea

$E = \left\{-1, 2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$ , fiindcă această mulțime conține sirurile  $(x'_n)_{n \geq 1}$ ,  $x'_n = -\frac{1}{n}$ , și  $(x''_n)_{n \geq 1}$ ,  $x''_n = 1 + \frac{1}{n}$ , pentru care  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 1$ , iar  $x'_n \neq 0$ ,  $x''_n \neq 1$ ,  $\forall n \geq 1$ . Toate punctele  $x_0 \in E$  sunt pentru această mulțime puncte izolate.

## 1.2. Limita unei funcții într-un punct

Fie  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție,  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E$  și  $l \in \mathbb{R}$ . În cele ce urmează vom da un sens riguros afirmației: *Dacă valorile argumentului  $x$  se apropie de  $x_0$ , atunci valorile  $f(x)$  ale funcției  $f$  se apropie de  $l$ .*

Pentru început, să examinăm câteva

**Exemple**

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{2}$ , și punctul  $x_0 = 2$  (fig. 2.1).

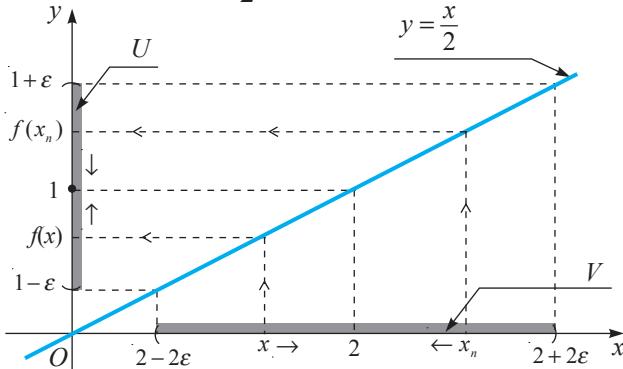


Fig. 2.1

În figura 2.1 observăm că dacă valorile argumentului  $x$  se apropie suficient de mult de  $x_0 = 2$ , atunci valorile  $f(x)$  ale funcției  $f$  se apropie oricăr de mult de  $l = 1$ .

Această situație poate fi redată în mai multe moduri.

De exemplu, intuitiv dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este un sir arbitrar și convergent la  $x_0 = 2$ , atunci sirul  $(f(x_n))_{n \geq 1}$ , unde  $f(x_n) = \frac{x_n}{2}$ , converge la  $l = 1$  (fig. 2.1).

Sau în alt mod: pentru orice vecinătate  $U = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , centrată în punctul  $l = 1$  al axei  $Oy$ , există o vecinătate  $V = (2 - 2\epsilon, 2 + 2\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , cu centrul în punctul  $x_0 = 2$  al axei  $Ox$ , astfel încât pentru orice  $x \in V$  rezultă că  $f(x) \in U$  (fig. 2.1).

2. Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ , care nu este definită în punctul 1. Pentru orice  $x \neq 1$ , cu  $x \rightarrow 1$  (ce tinde la 1), obținem că  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2$  (tinde la 2) (fig. 2.2).

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ x + 1, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$

și punctul  $x_0 = 1$  (fig. 2.3). Din reprezentarea grafică a funcției  $f$  constatăm: dacă argumentul  $x$  ia valori tot mai aproape de  $x_0 = 1$ , dar mai mari decât 1, atunci valorile funcției  $f$  se apropie de  $l = 2$ ; dacă însă argumentul  $x$  ia valori tot mai aproape de  $x_0 = 1$ , dar mai mici decât 1, atunci valorile funcției  $f$  se apropie de  $l = 0$ . Prin urmare, nu există un număr  $l \in \mathbb{R}$  de care valorile funcției  $f$  se apropie atunci când valorile argumentului  $x$  sunt aproape de  $x_0 = 1$ .

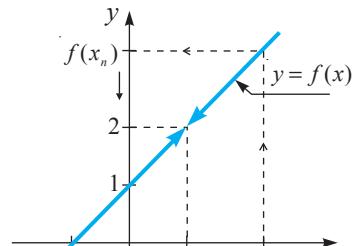


Fig. 2.2

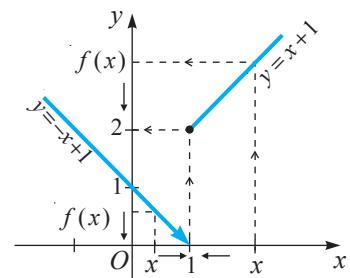


Fig. 2.3

Așadar, în cazul exemplului 1 (exemplului 2) se spune că numărul  $l=1$  (respectiv numărul  $l=2$ ) este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0=2$  (respectiv în punctul  $x_0=1$ ), iar în cazul exemplului 3 se spune că funcția  $f$  nu are limită în punctul  $x_0=1$ .

Situațiile examineate în aceste exemple conduc la următoarele două definiții ale limitei unei funcții într-un punct.

Fie  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) o funcție și  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E$ .

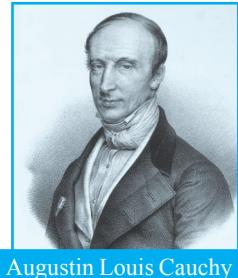
**Definiție (în limbajul vecinătăților).** Se spune că **funcția  $f$  are limita  $l \in \mathbb{R}$  în punctul  $x_0$**  dacă pentru orice vecinătate  $U$  a punctului  $l$  există o vecinătate  $V$  a punctului  $x_0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in V \cap (E \setminus \{x_0\})$  rezultă că  $f(x) \in U$ .

Limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  se notează  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  sau  $f(x) \rightarrow l$  când  $x \rightarrow x_0$  și se citește: *Limita funcției  $f$  când  $x$  tinde la  $x_0$  este egală cu  $l$*  sau  *$f(x)$  tinde la  $l$  când  $x$  tinde la  $x_0$* .

În definiția limitei unei funcții într-un punct, vecinătățile punctului  $l$  pot fi considerate de forma  $U = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - l| < \varepsilon\} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , iar vecinătățile punctului  $x_0$  – de forma  $V = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , și este evident că, în caz general,  $V$  depinde de  $U$ . Deci,  $\delta$  depinde de  $\varepsilon$ , adică  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . Prin urmare, definiția limitei unei funcții într-un punct poate fi formulată, în mod echivalent, cu ajutorul inegalităților numerice.

**Definiție (Cauchy<sup>1</sup>, sau în limbajul  $\varepsilon-\delta$ ).** Se spune că **funcția  $f$  are limita  $l \in \mathbb{R}$  în punctul  $x_0$**  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in E \setminus \{x_0\}$ , inegalitatea  $|x - x_0| < \delta$  implică  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

Noțiunea de limită  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  a unei funcții  $f$  într-un punct  $x_0$  se extinde și pentru cazul în care una sau ambele valori  $x_0, l$  nu sunt finite. Prezentăm unele dintre aceste definiții.



Augustin Louis Cauchy

### Definiții (Cauchy)

- Se spune că limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este  $+\infty$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in E \setminus \{x_0\}$ , inegalitatea  $|x - x_0| < \delta$  implică  $f(x) > \varepsilon$ . Se notează:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

<sup>1</sup> Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – matematician francez.

Cu ajutorul cuantificatorilor  $\exists, \forall$ , definiția 1 se scrie concis astfel:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ) dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , a.î. (astfel încât)  $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$ ,  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ .

**2.** Se spune că limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este  $\infty$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in E \setminus \{x_0\}$ , inegalitatea  $|x - x_0| < \delta$  implică  $|f(x)| > \varepsilon$ . Se notează:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

Concis, definiția 2 se scrie astfel:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ) dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , a.î.  $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$ ,  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$ .

**3.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ( $l \in \mathbb{R}$ ) dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , a.î.  $\forall x \in E$ ,  $x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ .

**4.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , a.î.  $\forall x \in E$ ,  $|x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$ .

**5.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , a.î.  $\forall x \in E$ ,  $x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$ .

**Observații.** **1.** Pentru  $x_0, l \in \mathbb{R}$ , definițiile limitei unei funcții într-un punct (în limbajele vecinătăților și  $\varepsilon-\delta$ ) au următoarea interpretare geometrică: *pentru valori ale argumentului  $x$  suficient de apropiate de  $x_0$ , valorile respective  $f(x)$  ale funcției  $f$  sunt oricără de mult apropiate de  $l$*  (fig. 2.4).

**2.** Pentru funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = a_n$ , definițiile 3 și 5 (Cauchy) ale limitei unei funcții într-un punct reprezintă definiția limitei unui sir numeric cu limită finită sau infinită.

**3.** Se poate demonstra că dacă există două sîruri  $(x'_n)_{n \geq 1}$  și  $(x''_n)_{n \geq 1}$  din mulțimea  $E \setminus \{x_0\}$  cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$ , astfel încât sîrurile respective  $(f(x'_n))_{n \geq 1}$  și  $(f(x''_n))_{n \geq 1}$  au limite diferite sau nu au limită, atunci funcția  $f$  nu are limită în punctul  $x_0$ .

Observația 3 este deseori aplicată pentru a demonstra că o funcție  $f$  nu are limită în  $x_0$ .

**4.** Se poate demonstra că dacă există limită unei funcții într-un punct, atunci această limită este unică.

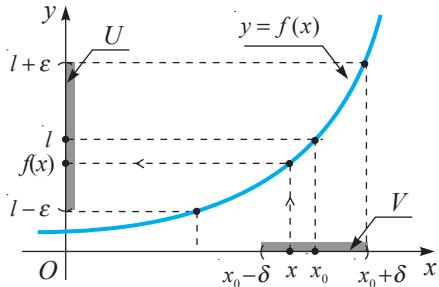


Fig. 2.4

Fiecare dintre exercițiile următoare a fost rezolvat cu ajutorul definiției limitei unei funcții într-un punct, adecvate enunțului respectiv.

### Exerciții rezolvate

**1.** Să se arate, aplicând definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un punct, că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$  are limită în punctul  $x_0 = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ .

*Rezolvare:*

Fie  $U = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , o vecinătate arbitrară a punctului  $l = 3$ .

Dacă  $x < 1$ , atunci

$$f(x) = 3x \in U \Leftrightarrow 3 - \varepsilon < 3x < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1\right).$$

Dacă însă  $x > 1$ , atunci

$$f(x) = 2x + 1 \in U \Leftrightarrow 3 - \varepsilon < 2x + 1 < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x \in \left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Fie  $V = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$  vecinătatea punctului  $x_0 = 1$ ,  $V \subset \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ . Din  $x \in V$ ,  $x \neq 1$ , rezultă că  $x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1\right)$  sau  $x \in \left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , de unde obținem că  $f(x) \in U$ .

Așadar,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ .

**2.** Se consideră funcția  $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ . Folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ .

*Rezolvare:*

$\forall \varepsilon > 0$  și  $\forall x \in [-1, 3]$  avem  $|x| \leq 3$  și  $|f(x) - 5| = |3x^2 - 4x - 4| = |(x-2)(3x+2)| \leq |x-2|(3|x|+2) \leq 11|x-2| < \varepsilon$ , dacă  $|x-2| < \frac{\varepsilon}{11}$ . Așadar,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$   $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{11}\right)$ , astfel încât  $\forall x \in [-1, 3] \setminus \{2\}$  cu  $|x-2| < \delta$ , avem  $|f(x) - 5| < \varepsilon$ .

Prin urmare,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ .

**3.** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ . Să se demonstreze că  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$ .

*Rezolvare:*

Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Considerând orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , obținem  $|f(x)| > \varepsilon \Leftrightarrow |x+1|^3 < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x+1| < \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ . Deci,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$   $\left(\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right)$ , astfel încât  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  cu  $|x+1| < \delta$ , avem  $|f(x)| > \varepsilon$  și, în baza definiției Cauchy, rezultă că  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$ .

4. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$ . Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$ .

*Rezolvare:*

Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar și orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

$$\text{Atunci } f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} = \frac{(2x+1)(x+2)}{x+2} = 2x+1 \in (-3-\varepsilon, -3+\varepsilon) = U \text{ dacă și}$$

numai dacă  $-3-\varepsilon < 2x+1 < -3+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < 2x+4 < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x+2 < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in V = \left( -2 - \frac{\varepsilon}{2}, -2 + \frac{\varepsilon}{2} \right). \text{ Deci, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3.$$

5. Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sin x$ . Să se arate, folosind observația 3, că nu există limitele  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

*Rezolvare:*

Funcția  $f$  nu are limită în punctul  $x_0 = 0$ , deoarece există cel puțin două siruri  $(x'_n)_{n \geq 1}$ ,  $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$ , și  $(x''_n)_{n \geq 1}$ ,  $x''_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}$ , care au limita zero când  $n \rightarrow \infty$ , însă sirurile respective  $(f(x'_n))_{n \geq 1}$ ,  $f(x'_n) = 1$ , și  $(f(x''_n))_{n \geq 1}$ ,  $f(x''_n) = -1$ , au limite diferite: 1 și respectiv -1. Similar, funcția  $g$  nu are limită la plus infinit, fiindcă sirurile  $(x'_n)_{n \geq 1}$ ,  $x'_n = n\pi$ , și  $(x''_n)_{n \geq 1}$ ,  $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ , au limita plus infinit, dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n) = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x''_n) = 1$ .

### 1.3. Limite laterale

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) și  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E$ . Să admitem că  $x_0$  este punct de acumulare și pentru mulțimea  $E_- = E \cap (-\infty, x_0)$  sau pentru mulțimea  $E_+ = E \cap (x_0, +\infty)$ . În acest caz se spune că  $x_0$  este punct de acumulare la stânga sau punct de acumulare la dreapta pentru mulțimea  $E$ .

Fie  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punct de acumulare la stânga (la dreapta) pentru mulțimea  $E$ . Dacă valorile lui  $x$  se apropi de  $x_0$  din stânga (respectiv din dreapta) cu valori  $x < x_0$  (respectiv  $x > x_0$ ), se scrie  $x \rightarrow x_0 - 0$  (respectiv  $x \rightarrow x_0 + 0$ ). Pentru  $x_0 = 0$ , în aceste cazuri se scrie  $x \rightarrow -0$  (respectiv  $x \rightarrow +0$ ).

Pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{dacă } x < 1 \\ x+1, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$  considerată în secvența 1.2,

am observat că nu există un număr  $l \in \mathbb{R}$  de care valorile  $f(x)$  să se apropii în timp ce valorile argumentului  $x$  sunt suficient de aproape de 1. Dacă însă valorile argumentului  $x$  se apropii de 1 din stânga (prin valori  $x < 1$ ), atunci valorile  $f(x) = -x+1$  se apropii de 0, iar dacă valorile argumentului  $x$  se apropii de 1 din dreapta (prin valori  $x > 1$ ), atunci valorile  $f(x) = x+1$  se apropii de 2. Deci, funcția  $f$  nu are limită în punctul 1, însă se spune că ea are limite laterale în acest punct.

În definițiile care urmează,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) este o funcție, iar  $x_0 \in \mathbb{R}$  – un punct de acumulare la stânga (la dreapta) pentru mulțimea  $E$ .

**Definiție.** Se spune că numărul  $l_s = l_s(x_0) \in \mathbb{R}$  este **limita la stânga a funcției  $f$  în punctul  $x_0 \in \mathbb{R}$**  dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l_s$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in V \cap E_-$  rezultă că  $f(x) \in U$ .

**Definiție.** Se spune că numărul  $l_d = l_d(x_0) \in \mathbb{R}$  este **limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0 \in \mathbb{R}$**  dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l_d$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in V \cap E_+$  rezultă că  $f(x) \in U$ .

Numerele  $l_s(x_0)$  și  $l_d(x_0)$  se numesc **limite laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  și se folosesc notațiile

$$l_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x), \quad l_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

sau

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

(fig. 2.5).

Pentru  $x_0 = 0$ , în aceste cazuri se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0).$$

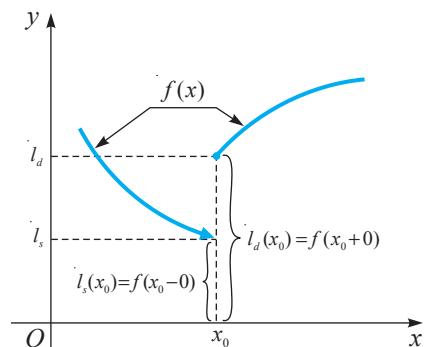


Fig. 2.5

Mentionăm că definițiile limitelor laterale pot fi formulate și în limbajul Cauchy. Vom prezenta doar enunțul uneia dintre aceste definiții, celelalte fiind propuse ca exerciții.

**Definiție (Cauchy).** Se spune că numărul  $l_d \in \mathbb{R}$  este **limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0 \in \mathbb{R}$**  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in E$ , inegalitatea dublă  $x_0 < x < x_0 + \delta$  implică  $|f(x) - l_d| < \varepsilon$ .

**Observație.** Ca și în cazul limitelor de funcții, limitele laterale  $l_s$  și  $l_d$  pot fi infinite ( $+\infty$ ,  $-\infty$  sau  $\infty$ ). Definițiile acestor concepte pot fi formulate în cele două limbi echivalente. Prezentăm doar una dintre aceste definiții.

**Definiție (Cauchy).** Se spune că  $-\infty$  este **limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in E$ , inegalitatea dublă  $x_0 < x < x_0 + \delta$  implică  $f(x) < -\varepsilon$ .

Se notează:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = -\infty$ .

Un criteriu util de existență a limitei unei funcții într-un punct este formulat în

**Teorema 2 (criteriul în limbajul limitelor laterale).** Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) și  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punct de acumulare pentru mulțimile  $E_-$  și  $E_+$ . Funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă funcția  $f$  are în  $x_0$  limite laterale egale:  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ . În acest caz,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ .

### Demonstrație

*Necesitatea.* Dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci, în baza definiției, există și limitele laterale  $f(x_0 - 0) = l$  și  $f(x_0 + 0) = l$ .

*Suficiența.* Să presupunem că există limitele laterale  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$  și  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ . Din definiția Cauchy a limitelor laterale ale unei funcții într-un punct rezultă:  $(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = l \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = l) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0, \text{ astfel încât } \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \text{ dacă } x_0 - \delta_1 < x < x_0 \text{ sau } x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$ .

Fie  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ . Evident,  $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$  cu  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow (x_0 - \delta_1 < x < x_0 \text{ sau } x_0 < x < x_0 + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ . Prin urmare,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

Similar se demonstrează și cazul în care limita  $l$  este infinită. ►

### Exerciții rezolvate

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$  Să se determine limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 2$ . Are limită funcția  $f$  în punctul  $x_0 = 2$ ?

*Rezolvare:*

Folosind definiția Cauchy a limitei funcției, obținem  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + x) = 6$  și  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 3) = 7$ .

În baza definiției limitelor laterale și a teoremei 2 vom avea: dacă  $x < 2$ , atunci  $f(x) = x^2 + x$  și, prin urmare,  $f(2 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = 6$ , iar dacă  $x > 2$ , atunci  $f(x) = 2x + 3$ , deci  $f(2 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2x + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 7$ .

Cum  $f(2 - 0) \neq f(2 + 0)$ , în baza teoremei 2, funcția  $f$  nu are limită în punctul  $x_0 = 2$ .

2. Să se determine valorile parametrului real  $a$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ 3ax + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \end{cases}$  are limită cel puțin în unul dintre punctele  $-1$  și  $1$ . Care este valoarea acestei limite?

*Rezolvare:*

Pentru orice  $x \in (-1, 1)$  avem  $f(x) = x^2 + a^2$ , deci  $l_s(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + a^2) = 1 + a^2$ ,  $l_d(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x^2 + a^2) = 1 + a^2$ . În mod analog, pentru orice  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  obținem că  $f(x) = 3ax + 1$ , deci  $l_s(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (3ax + 1) = 1 - 3a$ ,  $l_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (3ax + 1) = 1 + 3a$ .

Astfel, funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0 = -1$  dacă:  $l_s(-1) = l_d(-1) \Leftrightarrow 1 + a^2 = 1 - 3a \Leftrightarrow \Leftrightarrow a \in \{-3, 0\}$ . Dacă  $a = 0$ , atunci  $l_s(-1) = l_d(-1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ , iar dacă  $a = -3$ , atunci  $l_s(-1) = l_d(-1) = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 10$ .

Similar, funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0 = 1$  dacă:  $l_s(1) = l_d(1) \Leftrightarrow 1 + a^2 = 1 + 3a \Leftrightarrow a \in \{0, 3\}$ . Pentru  $a = 0$  avem  $l_s(1) = l_d(1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ , iar pentru  $a = 3$  obținem că  $l_s(1) = l_d(1) = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 10$ .

Așadar, pentru  $a = 0$  funcția  $f$  are limită în ambele puncte,  $-1$  și  $1$ , iar pentru  $a \in \{-3, 3\}$  ea are limită numai în unul dintre aceste puncte.

## Exerciții propuse

### *Profilul real*

- A<sub>1</sub>** 1. Să se arate că punctul  $x_0 = 2$  este punct de acumulare pentru mulțimea  $E \subseteq \mathbb{R}$ :
- a)  $E = \left\{ \frac{2n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ;      b)  $E = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ;      c)  $E = \left\{ \frac{4n+3}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2. Să se arate că punctul  $x_1 \in E$  ( $n = 1$ ), unde  $E$  este mulțimea din exercițiul 1, este un punct izolat pentru  $E$ .
3. Aplicând definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că:
- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{2}x - 3 \right) = -2$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow -1} (1 - 2x) = 3$ ;      e)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1$ ;      f)  $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$ .
4. Să se demonstreze, utilizând definiția  $\varepsilon - \delta$  a limitei unei funcții într-un punct, că:
- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (2 - 3x) = 5$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2}{3}x - 3 \right) = -1$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}) = 2$ .
5. Folosind proprietățile sirurilor convergente, să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ :
- a)  $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 5}{x^2 + 1}$ ,  $x_0 = 1$ ;      b)  $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 5x - 2}$ ,  $x_0 = -2$ ;
- c)  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}$ ,  $x_0 = -1$ .
- B<sub>1</sub>** 6. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimea:
- a)  $E = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ ; b)  $E = \left\{ \frac{n}{n+3} (3 + (-1)^n) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ ; c)  $E = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .
7. Să se indice cel puțin un sir numeric din  $E$  care are ca limită punctul de acumulare  $x_0$  pentru mulțimea  $E$ :
- a)  $E = \mathbb{R} \setminus [0, 4]$ ,  $x_0 = 4$ ;      b)  $E = \left\{ \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ,  $x_0 \in \{-1, 1\}$ .
8.  **Lucrați în perechi!** Să se demonstreze, folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, că:
- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5x + 3) = 1$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+7}{x+3} = 1$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ .
9. Să se arate că nu există limită:
- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{1}{x-1}$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin^2 \pi x$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x}$ .

10. Să se calculeze în punctul specificat  $x_0$  limitele laterale ale funcției  $f: D^1 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x \leq 2 \\ x^2+x, & \text{dacă } x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2; \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x^2+4x+1}{x^2-1}, \quad x_0 \in \{-1, 1\}.$$

11. Să se decidă dacă funcția  $f$  are limită în punctul specificat  $x_0$  și să se calculeze  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , știind că  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^3-2x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 \in \{0, 1\}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2-4}{2-x}, \quad x_0 \in \{0, 2\}.$$

C<sub>1</sub> 12.  **Investigați!** Să se cerceteze, în punctele specificate  $x_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , existența limitei funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : a)  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ ,  $x_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; b)  $f(x) = [x]$ ,  $x_k = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

13. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : a)  $f(x) = x - [x]$ ; b)  $f(x) = [\cos x]$ ;

$$\text{c) } f(x) = \sigma(\sin x), \text{ unde } \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases} \text{ este funcția Heaviside (treapta unitate).}$$

Să se schițeze graficul funcției  $f$  și să se determine punctele  $x_0 \in \mathbb{R}$  în care există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

14.  **Investigați!** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ ax+3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1; \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & \text{dacă } x < 2 \\ x-a, & \text{dacă } x \geq 2, \end{cases} \quad x_0 = 2.$$

Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât să existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și să se calculeze această limită.

15. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} a^2x - x^2, & \text{dacă } x < -2 \\ -6, & \text{dacă } x = -2 \\ 3ax, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$

Pentru care valori ale parametrului  $a \in \mathbb{R}$  există  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$ ?

## §2 Operări cu limite de funcții. Limitele unor funcții elementare

### 2.1. Operări cu limite de funcții

Să determinăm operațiile ce pot fi efectuate cu limite de funcții. Vom prezenta demonstrațiile doar pentru unele dintre aceste operații, celelalte demonstrații fiind propuse ca exerciții.

Fie  $E$  o submulțime nevidă a lui  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un punct de acumulare finit sau infinit pentru mulțimea  $E$  și  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  funcții pentru care există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , unde limitele  $a$  și  $b$  sunt finite. Sunt adevărate **propozițiile**:

① Dacă funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0$  și  $c \in \mathbb{R}$ , atunci și funcția  $c \cdot f$  are limită în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Prin urmare, *factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei*.

**Observație.** Dacă în propoziția ① se consideră că  $f(x) = 1$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ . Deci, limita în orice punct  $x_0$  a unei constante este însăși constantă.

<sup>1</sup> Aici și în continuare mulțimea  $D$  se consideră domeniul maxim de definiție al funcției.

② Dacă funcțiile  $f, g$  au limită în punctul  $x_0$ , atunci și funcția  $f \pm g$  are limită în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  – limita sumei (diferenței) de funcții este egală cu suma (diferența) limitelor acestor funcții.

### Demonstrație

Din definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct rezultă ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \text{ astfel încât } \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \text{ dacă } |x - x_0| < \delta_1 \text{ și } |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$ ). Deci,  $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$  inegalitatea  $|x - x_0| < \delta$ , unde  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ , implică inegalitatea  $|f(x) \pm g(x) - (a \pm b)| = |(f(x) - a) \pm (g(x) - b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Prin urmare, conform definiției Cauchy,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$ . ►

③ Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au limită în punctul  $x_0$ , atunci și funcția  $f \cdot g$  are limită în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  – limita produsului de funcții este egală cu produsul limitelor acestor funcții.

Propozițiile ② și ③ sunt adevărate și pentru un număr finit  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de funcții care au limită în punctul  $x_0$ . În particular, din propoziția ③, pentru  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$ , se obține  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ .

④ Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au limită în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$ , atunci câtul  $\frac{f(x)}{g(x)}$  este definit pe o vecinătate a punctului  $x_0$  din mulțimea  $E \setminus \{x_0\}$ , funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$  – limita câtului a două funcții este egală cu câtul limitelor acestor funcții.

⑤ Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au limită în punctul  $x_0$  și  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in E$ , atunci și funcția  $f^g: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f^g)(x) = [f(x)]^{g(x)}$  are limită în punctul  $x_0$  (cu excepția cazului  $0^0$ ) și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Condițiile de existență a limitei pentru funcții compuse sunt formulate în propoziția ⑥.

⑥ Fie  $E$  și  $F$  submulțimi nevide din  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un punct de acumulare pentru  $E$ , funcțiile  $u: E \rightarrow F$ ,  $f: F \rightarrow \mathbb{R}$  și funcția compusă  $f \circ u: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ ,  $\forall x \in E$ . Dacă 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ ,

2)  $u(x) \neq u_0$  pentru orice  $x$  dintr-o vecinătate din  $E$  a lui  $x_0$  și  $x \neq x_0$ ,

3)  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$ ,

atunci funcția compusă  $f \circ u$  are limită în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$ .

**Observații.** 1. Egalitatea  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ , stabilită în propoziția ⑥, argumentează un procedeu general numit **metoda substituției** sau **metoda schimbării de variabilă** la calculul limitelor de funcții. Într-adevăr, membrul din dreapta al egalității se obține din membrul din stânga dacă se efectuează notația  $u = u(x)$ , numită **substituție** sau **schimbare de variabilă**, și se ține cont de ipotezele 1) și 2) ale propoziției ⑥ că  $u \rightarrow u_0$  și  $u \neq u_0$ .

2. Operațiile cu limite de funcții sunt valabile și pentru limite laterale.

Propozițiile ① – ⑤ sunt adevărate și în unele cazuri în care una sau ambele funcții  $f$  și  $g$  au limită infinită în punctul  $x_0$  sau când pentru călăut  $\frac{f}{g}$  avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

De exemplu, să presupunem că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , iar  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  și să demonstrează că în acest caz funcția  $f + g$  are limită în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$ .

Conform definiției Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0, \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \\ |x - x_0| < \delta_1 &\Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta_2(M) > 0, \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \\ |x - x_0| < \delta_2 &\Rightarrow g(x) > M - (a - \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că pentru orice  $M > 0$ ,  $\exists \delta = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(M)) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in E \setminus \{x_0\}$  inegalitatea  $|x - x_0| < \delta$  implică  $|x - x_0| < \delta_1$  și  $|x - x_0| < \delta_2$ , care, la rândul lor, implică

$$f(x) + g(x) > (a - \varepsilon) + M - (a - \varepsilon) = M.$$

În baza definiției Cauchy a limitei funcției în punct,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$ .

Simbolic, acest rezultat se notează  $a + (+\infty) = +\infty$  și se numește **formă neexceptată**, **formă determinată** sau, simplu, **determinare**.

În mod similar pot fi demonstreate și forme de neexceptate:

$$\begin{aligned} a + (-\infty) &= -\infty; \quad a + \infty = \infty; \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = +\infty \quad (a > 0); \\ a \cdot (-\infty) &= +\infty \quad (a < 0); \quad \frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

În cazul în care  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , despre existența limitei funcției  $f + g$  sau a funcției  $\frac{f}{g}$  în punctul  $x_0$  nu ne putem pronunța.

Simbolic, acest rezultat se notează  $+\infty - \infty$  sau  $\frac{-\infty}{\infty}$  și se numește **formă exceptată**, **formă nedeterminată** sau, simplu, **nedeterminare** (o expunere mai detaliată a acestor cazuri se va efectua în § 4).

Așadar, operațiile cu limite de funcții pot avea sau nu pot avea sens. Aceste operații conduc la apariția așa-numitelor **forme neexceptate (determinări)** și **forme exceptate (nedeterminări)**.

### Tabelul formelor neexceptate

Dacă  $a \in \mathbb{R}$ , atunci:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\infty + a = \infty$                    | 15. $\frac{a}{\infty} = 0$                |
| 2. $(+\infty) + a = +\infty$                | 16. $\frac{\infty}{a} = \infty$           |
| 3. $(-\infty) + a = -\infty$                | 17. $\frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0)$   |
| 4. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$        | 18. $a^{+\infty} = +\infty \ (a > 1)$     |
| 5. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$        | 19. $a^{-\infty} = 0 \ (a > 1)$           |
| 6. $a \cdot \infty = \infty \ (a \neq 0)$   | 20. $a^{+\infty} = 0 \ (0 < a < 1)$       |
| 7. $a \cdot (+\infty) = +\infty \ (a > 0)$  | 21. $a^{-\infty} = +\infty \ (0 < a < 1)$ |
| 8. $a \cdot (-\infty) = -\infty \ (a > 0)$  | 22. $(+\infty)^a = +\infty \ (a > 0)$     |
| 9. $a \cdot (+\infty) = -\infty \ (a < 0)$  | 23. $(+\infty)^a = 0 \ (a < 0)$           |
| 10. $a \cdot (-\infty) = +\infty \ (a < 0)$ | 24. $0^{+\infty} = 0$                     |
| 11. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$   | 25. $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$       |
| 12. $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$   | 26. $(+\infty)^{-\infty} = 0.$            |
| 13. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$   |   |
| 14. $\infty \cdot \infty = \infty$          |   |

### Tabelul formelor exceptate

- |                            |                  |                     |                      |               |          |               |
|----------------------------|------------------|---------------------|----------------------|---------------|----------|---------------|
| 1. $\frac{\infty}{\infty}$ | 2. $\frac{0}{0}$ | 3. $0 \cdot \infty$ | 4. $\infty - \infty$ | 5. $1^\infty$ | 6. $0^0$ | 7. $\infty^0$ |
|----------------------------|------------------|---------------------|----------------------|---------------|----------|---------------|

### Exemple

Din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , unde  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
Prin urmare, în baza propozițiilor ①–⑥ obținem:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2) = 3(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 2 = 2;$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} [(x+3) \cdot (3x^2 - 4x - 2)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2) = 5 \cdot 2 = 10;$
3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 2}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)} = \frac{2}{5},$
4.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)^{(x+3)} = [\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)]^{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)} = 2^5 = 32;$
5.  $\lim_{x \rightarrow -1} [3(x+3)^2 - 4(x+3) - 2] = \lim_{u \rightarrow 2} (3u^2 - 4u - 2) = 2 \quad (u = x+3 \rightarrow 2 \text{ când } x \rightarrow -1).$

## 2.2. Limitele funcțiilor elementare

În cele ce urmează vom studia limitele unor funcții elementare, funcții care se folosesc la descrierea în limbaj matematic al diverselor procese din natură. Vom prezenta, fără demonstrație, relațiile de calcul al limitelor de funcții respective. Aceste rezultate pot fi deduse direct utilizând definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct.

**I. Funcția putere cu exponent natural**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  (fig. 2.6)

- a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .

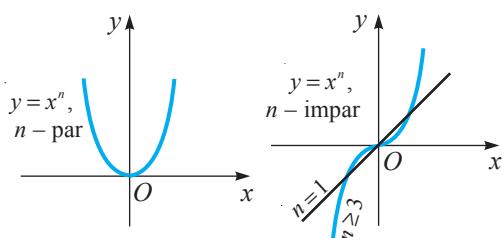


Fig. 2.6

**II. Funcția putere cu exponent întreg negativ**

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  (fig. 2.7)

- a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ ;
- e)  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

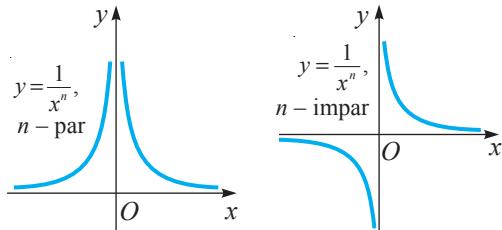


Fig. 2.7

**III. Funcția polinomială**

$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- |   |   |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , $x_0 \in \mathbb{R}$ ;            | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0 x^n$ ;   |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 x^n$ ; | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0 x^n$ . |

### Exemple

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 2) = 3 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 2 = 3$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 5x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2) = -\infty$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 100x^4 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5) = +\infty$ .

#### IV. Funcția rațională

Fie  $P$  și  $Q$  două funcții polinomiale cu coeficienți reali definite, respectiv, prin:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{și} \quad Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Funcția  $\frac{P}{Q}: E \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $E = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ , se numește **funcție rațională**.

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \forall x_0 \in E;$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } n = m \\ 0, & \text{dacă } n < m. \end{cases}$

Dacă  $x \rightarrow +\infty$  sau  $x \rightarrow -\infty$ , atunci în b) se mai specifică și semnul expresiei  $\frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m}$ . Cazul  $Q(x_0) = 0$  se va examina în § 4.

#### Exemple

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{-x^2 + 6x - 2} = \frac{2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3}{-2^2 + 6 \cdot 2 - 2} = \frac{1}{2}.$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + 3x + 1}{4x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2} x^3 \right) = +\infty.$

#### V. Funcția radicală

1)  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad n - \text{par}$  (fig. 2.8)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \in [0, +\infty);$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad n - \text{par}.$

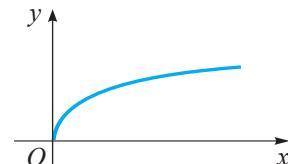


Fig. 2.8

2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3, \quad n - \text{impar}$  (fig. 2.9)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R};$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \quad n - \text{impar};$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad n - \text{impar};$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \quad n - \text{impar}.$

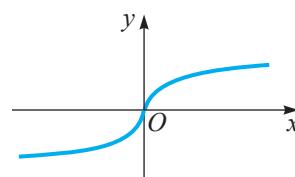


Fig. 2.9

## VI. Funcția exponentială

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  (fig. 2.10)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

b) dacă  $a > 1$ , atunci:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ;

c) dacă  $0 < a < 1$ , atunci:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ ;

d) nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$ .

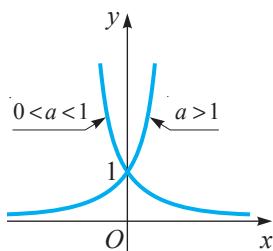


Fig. 2.10

## VII. Funcția logarithmică

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  (fig. 2.11)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ ,  $x_0 > 0$ ;

b) dacă  $a > 1$ , atunci:  $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ ;

c) dacă  $0 < a < 1$ , atunci:  $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ .

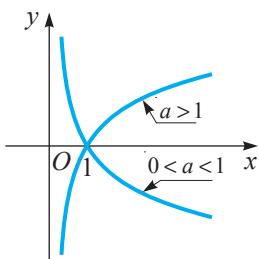


Fig. 2.11

## VIII. Funcția putere cu exponent real

$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (fig. 2.12)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ ,  $x_0 > 0$ ;

b)  $\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ ;

c)  $\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = +\infty$ .

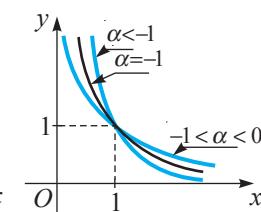
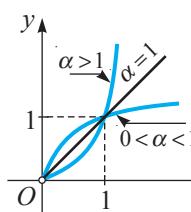


Fig. 2.12

## IX. Funcții trigonometrice

1 **Funcția sinus**  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$  (fig. 2.13)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

b) nu există:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ .

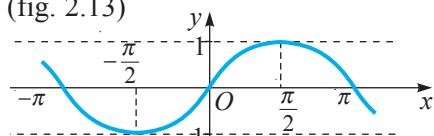


Fig. 2.13

2 **Funcția cosinus**  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \cos x$  (fig. 2.14)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

b) nu există:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ .

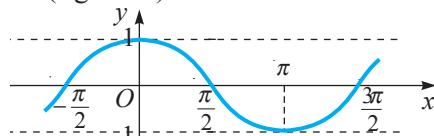


Fig. 2.14

**3 Funcția tangentă**

$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$  (fig. 2.15)

- a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, x_0 \neq \alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \alpha_k^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \alpha_k^+} \operatorname{tg} x = -\infty, k \in \mathbb{Z}.$

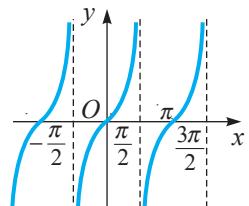


Fig. 2.15

**4 Funcția cotangentă**

$f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$  (fig. 2.16)

- a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, x_0 \neq \beta_k = k\pi, k \in \mathbb{Z};$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \beta_k^-} \operatorname{ctg} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow \beta_k^+} \operatorname{ctg} x = +\infty, k \in \mathbb{Z}.$

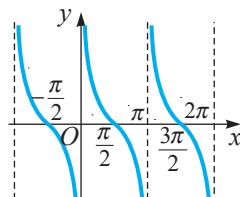


Fig. 2.16

**X. Funcții trigonometrice inverse****1 Funcția arcsinus**

$f: [-1, 1] \rightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], f(x) = \arcsin x$  (fig. 2.17)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, x_0 \in [-1, 1].$$

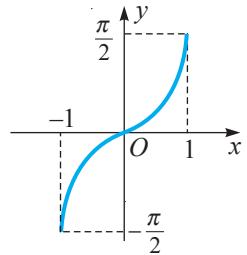


Fig. 2.17

**2 Funcția arccosinus**

$f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], f(x) = \arccos x$  (fig. 2.18)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, x_0 \in [-1, 1].$$

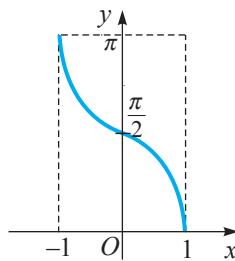


Fig. 2.18

**3 Funcția arctangentă**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), f(x) = \operatorname{arctg} x$  (fig. 2.19)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, x_0 \in \mathbb{R};$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2};$

c) nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x.$

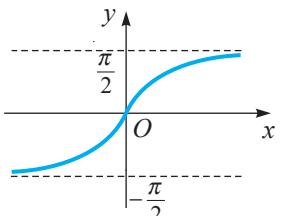


Fig. 2.19

#### 4 Funcția arccotangentă

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ,  $f(x) = \text{arcctg } x$  (fig. 2.20)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \text{arcctg } x = \text{arcctg } x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arcctg } x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg } x = \pi$ ;

c) nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{arcctg } x$ .

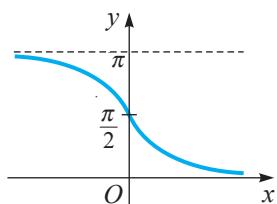


Fig. 2.20

#### XI. Funcția modul (valoarea absolută)

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = |x|$  (fig. 2.21)

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = +\infty$ .

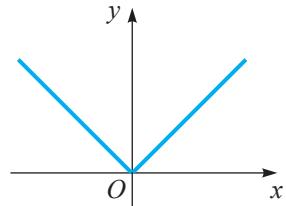


Fig. 2.21

Cea mai simplă clasă de funcții care se studiază în analiza matematică este mulțimea funcțiilor elementare I–XI. Funcțiile care se obțin din acestea prin aplicarea succesivă a unui număr finit de operații aritmetice și de compunere de asemenea se numesc **funcții elementare**. Constatăm că pentru funcțiile elementare  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subseteq \mathbb{R}$ , unde  $D$  este domeniul maxim de definiție al funcției) este verificată relația  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ,  $x_0 \in D$ , adică *limita funcției într-un punct este egală cu valoarea funcției în acest punct*.

#### Exemple

1. a) Funcția definită prin formula  $f(x) = \sqrt{x} + 2^x - 3 \log_2 x$  este elementară, deci  $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2^x - 3 \log_2 x) = f(4) = \sqrt{4} + 2^4 - 3 \log_2 4 = 12$ .

b) În mod similar,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left( \ln(\sin x) + 3 \ln \left( \frac{5}{4} + \cos^2 x \right) \right) = \ln \left( \sin \frac{\pi}{6} \right) + 3 \ln \left( \frac{5}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) = \ln \frac{1}{2} + 3 \ln 2 = 2 \ln 2.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{-\frac{1}{3}} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{ctg} x = +\infty$  etc.

#### Exerciții propuse

##### Profilul real

A<sub>1</sub> 1. Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( -\frac{1}{8}x^3 + \sqrt{x} + 5 \right)$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^4 + \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2} \right)$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[4]{x} - \frac{2}{x^2} + x^3 \right)$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} \right)$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} - 3x^2 \right)$ ; f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + 3 + x^3 + \sqrt[3]{x} \right)$ .

2. Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + x - 10);$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x^2 + 3);$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 3x^3 + 1);$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + 100x^2);$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 10x^2 + 1}{x^2 + 3x + 1};$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2 + 3}{5x^4 - x^3 - 1}.$

3. Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2^x + \log_{0,25} x - (\sqrt{3})^x);$

b)  $\lim_{x \rightarrow \log_2 e} (2^x - 2 \cdot 4^x + 8^x);$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2^e} (\log_2 x + \log_4 x - e).$

4. Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt[4]{x^4 + 1});$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3 + 1)(1 - x^2);$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 - x^3)(x^3 - x + 1).$

5. Să se calculeze: a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x + \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x);$

b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + 2 \operatorname{ctg} x - \cos x).$

B<sub>1</sub> 6. Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 5x^3};$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3}{2x^4 + 3};$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{1 + x - x^2}.$

7. Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\pi^x + \log_3 x);$

b)  $\lim_{x \rightarrow +0} (\log_{0,5} x - 2^x);$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \lg x).$

8. Să se calculeze: a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{|x-1|};$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{|x+1|};$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{3x-1}.$

9. **Lucrați în perechi!** Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi} (\sin x + 2 \cos x - 3 \operatorname{ctg} x), n \in \mathbb{Z};$

b)  $\lim_{x \rightarrow n\pi} (2 \sin x - 3 \cos x + \operatorname{tg} x), n \in \mathbb{Z}.$

10. **Lucrați în perechi!** Să se completeze spațiile punctate, astfel încât propoziția obținută să fie adevarată:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(2^x) = \lim_{y \rightarrow \dots} \sin y = 0, \text{ unde } y = 2^x;$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg}(\pi^x + \ln x) = \lim_{y \rightarrow \dots} \operatorname{tg} y = \dots, \text{ unde } y = \dots$

C<sub>1</sub> 11. Să se calculeze în punctul indicat  $x_0$  limitele laterale ale funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}, x_0 \in \{-1, 0, 1\};$

b)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2-1}}, x_0 \in \{-1, 1\};$

c)  $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+1}}}, x_0 = -1.$

12. **Investigați!** Să se afle valoarea de adevar a propoziției:

a)  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1 - 2x);$

b)  $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x^2;$

c)  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - \cos x),$

unde simbolul  $\exists$  semnifică „nu există”.

13. **Investigați!** Pentru care valori ale parametrului  $m \in \mathbb{R}$  funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x^2 + m^2} - 2, & \text{dacă } x < 0 \\ m + 2, & \text{dacă } x = 0 \\ (m^2 e^x) \cdot \left(1 + 2^{\frac{1}{x}}\right), & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

are în punctul  $x_0 = 0$  limita egală cu  $f(0)$ ?

14. Să se determine valorile parametrului  $m \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{m^2 x^2 - 6mx + 9 \cdot 2^{1-x}}, & \text{dacă } x < 1 \\ 4 - \sqrt{m^2 x^2 + 2mx + 3^{x-1}}, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$

are limită în punctul  $x_0 = 1$ .

15. Aplicând noțiunea de limită laterală și teorema despre limita funcției compuse, să se calculeze:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos(1 - 2 \sin x);$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin^2 x);$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2 - x^4}};$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3^x - \ln x^2 + x^3};$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{2}\right);$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^3(\pi \cos x);$
- g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x}}{\ln(\cos x)};$
- h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right).$

### §3 Calculul limitelor de funcții

#### 3.1. Proprietăți ale limitelor de funcții

Fie  $E \subseteq \mathbb{R}$ , funcțiile  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E$ . Afirmațiile care urmează exprimă **proprietăți ale limitelor de funcții** sau **condiții suficiente de existență a limitei unei funcții într-un punct** și pot fi deduse folosind definiția limitei unei funcții într-un punct.

**1°** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , atunci există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$ , astfel încât funcția  $f$  este mărginită pe mulțimea  $V(x_0) \cap E$ .

**2°** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , și  $a < b$  ( $a > b$ ), atunci există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x) < g(x)$  (respectiv  $f(x) > g(x)$ ) pentru orice  $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$ .

**Consecință.** În condițiile proprietății 2°, dacă  $g(x) = \lambda$  ( $\forall x \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ), atunci există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x) < \lambda$  (respectiv  $f(x) > \lambda$ ) pentru orice  $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$ .

În cazul  $\lambda = 0$  se obține  $f(x) < 0$  (respectiv  $f(x) > 0$ ) pentru orice  $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$ .

**3° Trecerea la limită în inegalități.** Dacă

- a) există limitele  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ,
  - b)  $f(x) \leq g(x)$  pentru orice  $x \in E$  sau pe o vecinătate a lui  $x_0$  din  $E$ ,
- atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Consecință.** În condițiile proprietății 3°, dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , iar dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

**4° Criteriul „cleștelui”.** Fie funcțiile  $f, g, h: E \rightarrow \mathbb{R}$  verifică condițiile:

- a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,
- b)  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  pentru orice  $x \in E$  sau pe o vecinătate a lui  $x_0$  din  $E$ .

Atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

### Exerciții rezolvate

• Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x);$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x^2 - e^{-x}).$

*Rezolvare:*

a) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  are loc inegalitatea dublă:  $-1 \leq -\sin x \leq 1.$

Atunci  $x - \sin x \geq x - 1$  (1). Cum  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ , din consecința proprietății 3° și din inegalitatea (1) rezultă că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x) = +\infty.$

b) Deoarece  $\sin x^2 - e^{-x} \leq 1 - e^{-x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$ , din consecința proprietății 3° rezultă că  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x^2 - e^{-x}) = -\infty.$

### 3.2. Limite remarcabile

Limitele

<b>1</b> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	<b>2</b> a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ , b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
--	--

sunt utile la calculul limitelor de funcții și se numesc **limite remarcabile**.

**Lemă.** Este adevărată inegalitatea dublă  $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$ , dacă  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

#### Demonstrație

Fie  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , un cerc de rază 1 și unghiul la centru  $AOC$  având măsura în radiani egală cu  $x$  (fig. 2.22). Notăm cu  $B$  punctul de intersecție a tangentei la cerc în punctul  $A$  cu semidreapta  $OC$ , iar cu  $D$  – piciorul perpendicularării duse din punctul  $C$  pe dreapta  $OA$ . Evident, aria triunghiului  $AOC$  este mai mică decât aria sectorului  $AOC$ , care, la rândul său, este mai mică decât aria triunghiului  $AOB$ , adică

$$\frac{1}{2} AO \cdot DC \leq \frac{1}{2} AO^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} AO \cdot AB. \quad (2)$$

Cum  $AO = 1$ ,  $DC = \sin x$ ,  $AB = \operatorname{tg} x$ , inegalitatea dublă (2) devine

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \text{ unde } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Dacă  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , atunci  $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ . Deci, (3) implică  $\sin(-x) \leq -x \leq \operatorname{tg}(-x)$ , adică

$$-\sin x \leq -x \leq -\operatorname{tg} x, \text{ unde } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \quad (4)$$

Inegalitățile (3) și (4), în baza definiției valorii absolute, sunt echivalente cu inegalitatea dublă indicată în lemă. ►

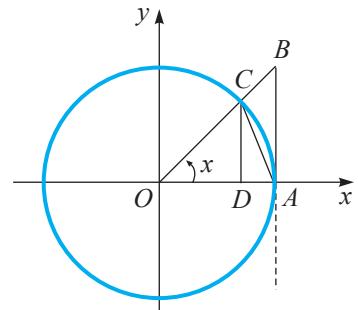


Fig. 2.22

Să demonstrăm limitele remarcabile ① și ②.

**1.** Dacă  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ , atunci  $\sin x \neq 0$  și, cum  $x \neq 0$ , din inegalitatea dublă stabilită în lemă, prin împărțire la  $|\sin x|$ , obținem:  $1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right| \Leftrightarrow |\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$ . Însă  $|\cos x| = \cos x$ , iar  $x$  și  $\sin x$  au același semn pentru  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Prin urmare,  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ , dacă  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ , din ultima inegalitate dublă, conform criteriului „cleștelui”, rezultă că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**2.** Pentru limita remarcabilă ② demonstrația este doar schițată. a) Folosind relația  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  (a se vedea modulul 1, § 3, secvența 3.4), se poate demonstra că variabila discretă  $n \in \mathbb{N}$  poate fi înlocuită cu variabila continuă  $x \in \mathbb{R}$  și deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

Cazul b) rezultă din cazul a) și din propoziția ⑥ despre limita funcției compuse, dacă se efectuează în a) substituția  $u = \frac{1}{x}$  și  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow \infty$ .

### Exerciții rezolvate

↳ 1. Să se arate că:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ;  | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ , $a > 0$ ; |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ ; | d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{x} = 1$ ;                 |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ;                          | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ ;             |
|   | g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$ .              |

*Rezolvare:*

Vom rezolva aceste exerciții aplicând relațiile respective pentru limite de funcții elementare, limitele remarcabile ①, ② și propoziția ⑥ despre limita funcției compuse.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$ .

b) Efectuăm schimbarea de variabilă  $u = a^x - 1$ . Atunci  $x = \log_a(1+u)$  și  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 0$ . Prin urmare, similar cu limita a), obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right] =$   
 $= \alpha \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha \ln e \cdot 1 = \alpha$ , unde  $u = \alpha \ln(1+x)$  și  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 0$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{1}{2}$ , unde  $u = \frac{x}{2} \rightarrow 0$

când  $x \rightarrow 0$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^{-1} = 1$ , unde  $u = \arcsin x$  și  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 0$ .

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} u}{u} \right)^{-1} = 1$ , unde  $u = \operatorname{arctg} x$  și  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 0$ .

**Observație.** Limitele remarcabile ① și ②, precum și toate limitele din exercițiul rezolvat 1, în baza propoziției ⑥ despre limita funcției compuse, rămân adevărate și în cazul în care se va face schimbarea de variabilă  $x = u(t)$ , unde  $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = 0$  (cu excepția limitei remarcabile ② a), unde  $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \infty$ ).

2. Să se calculeze limita:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 4x}$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{x^2}$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x^2} - 3^{2x^2}}{\cos x - \cos 2x}$ .

*Rezolvare:*

Folosind limita remarcabilă ①, rezultatele exercițiului rezolvat 1 și observația de mai sus, obținem:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin 3x}{3x} - 5 \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}}{4 \frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3 \cdot 1 - 5 \cdot 1}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{x^2} = 12 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{3 \sin^2 2x} \cdot \left( \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \right] = 12 \ln e \cdot 1^2 = 12$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x^2} - 3^{2x^2}}{\cos x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{3x^2} - 1) - (3^{2x^2} - 1)}{(1 - \cos 2x) - (1 - \cos x)} =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{2^{3x^2} - 1}{3x^2} - 2 \cdot \frac{3^{2x^2} - 1}{2x^2}}{4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} - \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \ln \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

3. Să se calculeze limita:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2 + x^3};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5+3x} - 2}{x^2 + 2x - 3}.$$

Rezolvare:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos 3x - 1))}{2x^2 + x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1 + (\cos 3x - 1))}{\cos 3x - 1} \cdot \frac{\cos 3x - 1}{(3x)^2} \cdot \frac{9}{2+x} \right] = 1 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{9}{2+0} = -\frac{9}{4},$$

b) Efectuăm schimbarea de variabilă:  $u = x - 1$ . Atunci  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 1$  și

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5+3x} - 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5+3(1+u)} - 2}{(1+u)^2 + 2(1+u) - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3u} - 2}{u^2 + 4u} =$$

$$= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left[ \frac{\left( 1 + \frac{3}{8}u \right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{3}{8}u} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{u+4} \right] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{4} = \frac{1}{16}.$$

4. Să se calculeze limita:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-x};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Rezolvare:

Vom aplica limitele remarcabile ② a) și ② b).

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x-1}{2x+3} - 1 \right)^{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4}{2x+3} \right)^{1-x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}} \right)^{\frac{2x+3}{-4}} \right]^{\frac{-4}{2x+3}(1-x)} = \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{u} \right)^u \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x-1)}{2x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}{2+\frac{3}{x}}} = e^2,$$

unde  $u = \frac{2x+3}{-4}$  și  $u \rightarrow \infty$  când  $x \rightarrow \infty$ ;

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}} \right]^{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}} = \left[ \lim_{u \rightarrow 0} \left( 1 + u \right)^{\frac{1}{u}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = e^{\frac{1}{2} \cdot 1} = \sqrt{e}, \text{ unde}$$

$u = \sin \frac{x}{2}$  și  $u \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 0$ .

## Exerciții propuse

### Profilul real

**A<sub>1</sub>** 1. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(2x+1)-3}{(x-3)(x+2)+x^2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+2x)(1+3x)}{(1+x)(1-2x)}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2+1}{16x^2+1}}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)(1+3x)-1}{10x+x^2}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1-3x)-1}{(1-5x)(1+7x)-1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x)^2-9}{(3+x)^2-16}. \end{array}$$

2. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\sin 4x}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^3 x)}{\cos^4 x}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 2(x-2)}{x-2}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x+x^2)}{x}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2\sin x}{x + 3\sin x}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+3x)}{\sin(2\pi-6x)}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} - 3}{\operatorname{tg} x + \sin 2x}; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{e^{5x} - e^{3x}}. \end{array}$$

**B<sub>1</sub>** 3. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-3}{\sqrt[3]{2+3x}-2}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}. \end{array}$$

4. Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} \text{a}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}; & \text{b}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}; \\ \text{c}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{e^{6x^2} - 1}; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 3x}}{\operatorname{tg} x - \sin 4x}; \\ \text{e}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\arcsin x)}{\sqrt[5]{1-\sin 2x}-1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(e^{x^2} + \sin^2 x)}. \end{array}$$

**C<sub>1</sub>** 5. Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} \text{a}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin(3x+\sin x)}; & \text{b}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\cos 2x - e^{x^2}}; \\ \text{c}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin 3x}}{\sin(\sin(\sin x))}; & \text{d}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{arctg} x^2}; \\ \text{e}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x \cos 2x}{e^{\sin x^2} - \cos 2x}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+7x}}{1 + \sqrt[5]{1-2x}}. \end{array}$$

6. Să se aplice proprietățile limitelor de funcții și să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \cos x^2); & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin 2x - \cos 3x); \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - 2^x); & \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x) e^x. \end{array}$$

7.  **Lucrați în perechi!** Să se determine  $m, n \in \mathbb{R}$ , dacă:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} + mx+n \right) = 3; \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(mx+n)}{x-1} = 2, \text{ unde } m+n=\pi.$$

## §4 Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții

În § 2 s-a afirmat că anumite operații cu limite de funcții nu au sens. Vom examina mai detaliat doar una dintre aceste operații.

Fie  $x_0$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  funcții pentru care există limitele finite sau infinite  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . De exemplu, din definițiile respective ale limitei unei funcții într-un punct se poate stabili că: dacă  $a = \infty$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$ ; dacă  $a = +\infty$ ,  $b = +\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$  etc. Simbolic, aceste propoziții se scriu astfel:  $\infty + b = \infty$  ( $b \in \mathbb{R}$ ),  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$  și se numesc *forme* sau *cazuri neexceptate (determinate)* ori, simplu, *determinări*, iar despre suma  $a + b$  în acest caz se spune că are sens. Tabelul complet al *formelor neexceptate*, care apar la operații cu limite de funcții, este prezentat în secvența 2.1.

Dacă însă  $a = +\infty$ ,  $b = -\infty$  sau  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ , atunci despre limita funcției  $f + g$  în punctul  $x_0$  nu se poate afirma nimic concret. Într-adevăr, dacă  $x \rightarrow +\infty$ , atunci:

- a)  $f(x) = x^2 \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) = -x \rightarrow -\infty$  și  $f(x) + g(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$ ;
- b)  $f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) = -x \rightarrow -\infty$  și  $f(x) + g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ ;
- c)  $f(x) = x + l \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) = -x \rightarrow -\infty$  și  $f(x) + g(x) = l \rightarrow l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ;
- d)  $f(x) = x + \sin x \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) = -x \rightarrow -\infty$  și  $f(x) + g(x) = \sin x$  nu are limită.

Așadar,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  depinde de însăși natura funcțiilor  $f$  și  $g$  și poate fi infinită, zero, orice număr real sau poate chiar să nu existe. În acest caz se spune că limita respectivă reprezintă o *formă* sau un *caz exceptat (nedeterminat)* ori, simplu, *o nedeterminare* de tipul  $\infty - \infty$ , iar despre suma  $a + b$  se spune că este lipsită de sens.

În general, operațiile  $a + b$ ,  $a \cdot b$ ,  $\frac{a}{b}$  și  $a^b$  cu limite de funcții  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  conduc la următoarele șapte forme sau cazuri exceptate:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Nu există o regulă strictă care ar permite eliminarea cazurilor exceptate. Există doar unele recomandări pentru excluderea acestor forme.

**I. Cazul exceptat  $\frac{0}{0}$ .** Fie limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .

**Se recomandă**, dacă este posibil, să se descompună în factori expresiile  $f(x)$  și  $g(x)$  sau să se amplifice raportul  $\frac{f(x)}{g(x)}$  cu expresii conjugate, simplificând apoi cu  $x - x_0$ , sau să se aplique limita remarcabilă 1 ori limitele din exercițiul rezolvat 1, secvența 3.2.

**Exemple**

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 - 2x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{3x+1} = \frac{3}{4}.$$

(Simplificarea cu  $x-1$  a fost posibilă, deoarece  $x \rightarrow 1$ , și  $x \neq 1$ .)

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x + x^6))}{4x - x^2} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x + x^6))}{\sin(2x + x^6)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{4x - x^2} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{4x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{2x + x^6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^6}{4x - x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + x^5)}{x(4 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x^5}{4 - x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Similar cu exemplul 1 se calculează limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , unde  $P$  și  $Q$  sunt polinoame.

Fie  $P, Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polinoame nenule.

a) Dacă  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ , atunci există polinoamele  $P_1, Q_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

și  $i, j \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $P_1(x_0) \neq 0$ ,  $Q_1(x_0) \neq 0$ ,  $P(x) = (x - x_0)^i P_1(x)$ ,

$$Q(x) = (x - x_0)^j Q_1(x) \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{j-i}}.$$

b) Dacă  $P(x_0) \neq 0$ , iar  $Q(x_0) = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^j} = \infty$ .

**II. Cazul exceptat  $\frac{\infty}{\infty}$**  apare la calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ .

**Se recomandă**, dacă este posibil, să se depisteze la numitorul și numărătorul raportului  $\frac{f(x)}{g(x)}$  funcțiile (termenii) care cresc cel mai repede la infinit, numite **funcții dominante**; să se extragă forțat ca factori comuni aceste funcții și să se transforme în mod echivalent expresiile obținute, aplicând, dacă este necesar, limitele remarcabile sau limitele din exercițiul rezolvat 1, secvența 3.2.

**Exemplu**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{4^{x+1} + 2^{x+2}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^x + 3 \right]}{4^{x+1} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^x \right]} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{2}{3} \right)^x + 3}{1 + \left( \frac{1}{2} \right)^x} = \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot \frac{0+3}{1+0} = 0,$$

unde funcțiile dominante sunt  $3^x$  și  $4^{x+1}$ .

**III. Cazul exceptat  $0 \cdot \infty$**  apare la calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ , unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ .

**Se recomandă** să se efectueze transformarea echivalentă  $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$ ,  $f(x) \neq 0$ , sau  $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$ ,  $g(x) \neq 0$ , pentru a obține unul dintre cazurile exceptate  $\frac{\infty}{\infty}$  sau  $\frac{0}{0}$ .

**Exemplu**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{2}{x} \right) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cdot \sin 2y}{y^2} = \\ = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\sin 2y}{2y} \right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \text{ unde } y = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ când } x \rightarrow \infty.$$

**IV. Cazul exceptat  $\infty - \infty$**  apare la calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ , unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  și  $a = +\infty$ ,  $b = +\infty$  sau  $a = -\infty$ ,  $b = -\infty$ .

**Se recomandă** să se efectueze transformarea echivalentă a expresiei  $f(x) - g(x)$  prin aducere la numitor comun sau prin raționalizare cu expresii conjugate, sau prin aplicarea identității  $f(x) - g(x) = \frac{(g(x))^{-1} - (f(x))^{-1}}{(f(x) \cdot g(x))^{-1}}$ ,  $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ , etc. pentru a obține unul dintre cazurile exceptate  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Exemple**

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{2x + 1} - \frac{x^2 - 1}{2x - 1} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 4x}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{4x^2} = -\frac{1}{2}. \\ 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}} = 2.$$

**V. Cazurile exceptate  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$**  apar la calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ .

**Se recomandă:**

- în cazul exceptat  $1^\infty$  să se aplique limitele remarcabile privind numărul  $e$ ;
- în cazurile exceptate  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  să se utilizeze identitatea logaritmică fundamentală  $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ ,  $f(x) > 0$ , și relația  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}$  (propoziția ⑤ din § 2), care plasează exponentul  $g(x) \cdot \ln f(x)$  în cazul exceptat  $0 \cdot \infty$ .

**Exemple**

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x+3} \right)^{2x+1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x+1}{x+3} - 1 \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{-2}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-2}} \right]^{\frac{-2(2x+1)}{x+3}} = \\
 &= \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(2x+1)}{x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{3}{x}}} = e^{-4}, \text{ unde } y = -\frac{2}{x+3} \rightarrow 0 \text{ când } x \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$
  

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} = e^{2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} = e^{2+0} = e^2.$$

În modulul 4 vor fi formulate regulile lui l'Hospital pentru calculul limitelor de funcții în cazurile exceptate  $\frac{0}{0}$  și  $\frac{\infty}{\infty}$ . Consecințe ale acestor reguli sunt următoarele limite:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$  ( $\alpha > 0, a > 0, a \neq 1$ )
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$  ( $\alpha > 0, a > 1$ )

Aceste limite sunt utile în cazurile exceptate  $\frac{\infty}{\infty}$  și  $0 \cdot \infty$ .

**Observație.** Dacă  $x \rightarrow +\infty$  și  $\alpha > 0, a > 1$ , atunci funcțiile logaritmice  $\log_a x$ , putere  $x^\alpha$  și exponentială  $a^x$  tind la plus infinit. Din limitele 1 și 2 rezultă că cea mai „lentă” este funcția  $\log_a x$ , mai „rapidă” este funcția  $x^\alpha$ , iar cea mai „rapidă” este funcția  $a^x$ .

Această observație se aplică la determinarea funcțiilor dominante în cazul exceptat  $\frac{\infty}{\infty}$ .

## Exerciții propuse

*Profilul real*

**A1** 1. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 - x - 2)}{(x^2 + x - 6)^2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^5 (3x+1)^5}{(2x+6)^{10}}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x} + 3 \sqrt{x}}, \\
 \text{d)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{\sqrt[3]{x} + 1}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 4^x}{2^x - 4^x}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 4^x}{2^x - 4^x}, \\
 \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 4^x}{2^x - 4^x}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + x^6)}{\ln(x^4 + x^{10})}; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + x^6)}{\ln(x^4 + x^{10})}.
 \end{array}$$

2. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1-x^3+x^6)}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^{5x})}{\ln(x^{10} + e^{4x})}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + e^{5x})}{\ln(x^{10} + e^{4x})}, \\
 \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x); & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x); & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x); \\
 \text{g)} \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right); & \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x+2} - \frac{x^2+3}{x-1} \right); & \text{i)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+x-1}{x+1} - \frac{x^2-2x-1}{x-1} \right).
 \end{array}$$

**B<sub>1</sub>** 3. Să se calculeze:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6\sin^2 x + \sin x - 2}{4\sin^2 x - 8\sin x + 3}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^{-x} + 2^{3x})}{\ln(e^{-x} + e^{2x})}$ ;  
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{4x+3} \right)^{x^2}$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+3} \right)^{5-2x}$ ; f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+4x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}$ ;  
 g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5)^{\frac{1}{x-2}}$ ; i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})]$ .

4. Să se calculeze:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + \operatorname{tg} x}{2 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 2x}}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos 2x}{\cos 5x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^2 + x^3)}}$ ;  
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}}$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}}$ ; f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ ;  
 g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}{[(4x)^n + 1]^{\frac{n+1}{2}}}$ ,  $n \geq 1$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1}$ ,  $n \geq 1$ .

**C<sub>1</sub>** 5.  **Investigați!** Să se determine valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$ , dacă

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{4x^2 - x^3} + ax + b) = \frac{1}{3}.$$

6. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a\sqrt{x^2 + x} + b\sqrt{4x^2 + x})$  și să se discute după valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$ .

7. Fie  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x + 1}$ . Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  din condițiile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = 3, \text{ apoi să se calculeze } \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x).$$

8.  **Investigați!** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & \text{dacă } x < 2 \\ b + \ln(x-1), & \text{dacă } x \geq 2. \end{cases}$  Să se determine valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să existe limitele  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ , iar  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

### Exerciții și probleme recapitulative

#### *Profilul real*

**A<sub>1</sub>** 1. Să se calculeze:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 6x + x^2}{2 + 3x - 2x^2}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{(1-2x)(3x+4)}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)(1+3x)-2}{9-(3-2x)^2}$ ;  
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}{(3-2x)^3}$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{x+1} - \frac{2x^2 + 5x}{x-2} \right)$ ; f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x^3}}{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2}}$ ;  
 g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6-10x} - 4}{2x^2 - 3x - 5}$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{5 - \sqrt{10x+5}}$ ; i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x} - 2}{x-1}$ .

2. Să se calculeze:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{5+x}}{\sqrt[3]{1+2x} + 1}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7-6x} - \sqrt[5]{16-15x}}{\sqrt[6]{9-8x} - 1}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$ ;  
 d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - x + 1})$ ; e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$ .

**3.** Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x + \sin 4x};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x + 2 \sin x}{3 \sin 2x - \operatorname{tg} x};$

c\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \arcsin 6x}{\operatorname{tg}^2(3x)};$

d\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x - 3 \operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 6x};$

e\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{2^{3x} + 3^{2x} - 2};$

f\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\operatorname{tg} 6x}.$

**B<sub>1</sub> 4.** Să se calculeze:

a\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2(2x)};$

b\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - \cos 3x};$

c\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin 3x)}{e^{5x} - e^{3x}};$

d\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 6x)}{\ln(\cos 3x)};$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^{x+4};$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \sin x}{1 + \sin 2x} \right)^{\frac{1}{x}};$

g\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos 2x}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$

h\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x \cdot 3^x}{1+x \cdot 5^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

**5.** Să se calculeze limitele laterale:

a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{(x+1)(x-2)};$

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{|1-x|}{\sqrt{x^2 - 1}};$

c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{2 - 2^{\frac{x}{2-x}}};$

d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{1 - 2^x};$

e)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x-2}{\ln(1+x)};$

f)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{3 - 3^{\frac{1+|x|}{1-x^2}}}.$

**C<sub>1</sub> 6.**  **Investigați!** Să se determine valorile parametrului  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât să existe

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$

a)  $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sqrt{5x+4} + 2a^2, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

b)  $f(x) = \begin{cases} a^2 + 3x + 2, & \text{dacă } x < 0 \\ 5\sqrt{a^2 + x^2} - 2, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sqrt{3a+1} + ax + a, & \text{dacă } x \leq -1 \\ x^2 - x\sqrt{a+4}, & \text{dacă } x > -1, \end{cases} \quad x_0 = -1;$

d)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 x^2 + 1}, & \text{dacă } x < 1 \\ 1 + 2ax, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

**7.**  **Investigați!** Să se determine valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 + ax + b)}{2x^2 - 3x + 1} = 3, \text{ dacă } a + b = -1;$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - x + 3}{x - 2} + ax + b \right) = 6; \quad \text{c*) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{ax} - ae^{bx}}{x} = -4.$

**8.**  **Lucrați în perechi!** Secțiunea verticală a reliefului unei localități de munte este dată de

funcția  $f: \left[-6, \frac{11}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1 - 6x - x^2, & \text{dacă } x \in [-6, -1), \\ 0,1x + 2,1, & \text{dacă } x \in [-1, 1], \\ -0,45x^2 + 2,7x - 0,05, & \text{dacă } x \in \left(1, \frac{11}{2}\right], \end{cases}$

la scara 1 : 100 m pe fiecare axă de coordonate. Pe platoul dintre cei doi munți ce corespunde valorilor abscisei  $x \in [-1, 1]$  este situat un cătun.

- a) Să se traseze graficul funcției  $f$  și să se stabilească abscisele vârfurilor munților.
- b) Să se determine diferența dintre înălțimile celor două vârfuri.
- c) Să se afle înălțimea peretelui vertical al muntelui, ce corespunde abscisei  $x = -1$ .
- d) Să se calculeze unghiul de înclinație a platoului pe care este situat cătunul.
- e) Care este adâncimea minimă a fântânilor din cătun, dacă axa  $Ox$  reprezintă nivelul pânzei apelor freatică?

 **Lucrați în perechi!**

Graficul funcției  $f: [-10,2; 52] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}x^2 - \frac{1}{50}, & \text{dacă } x \in [-10,2; 2] \\ \frac{1}{5000}(x-2)^2 + \frac{1}{1000}, & \text{dacă } x \in (2; 52], \end{cases}$

rezintă relieful subacvatic al unei mări la scara 1 : 10 000 m, astfel încât suprafața mării corespunde liniei orizontale  $y = 0,5$ .

- a) Să se traseze graficul funcției  $f$  și să se determine adâncimea maximă a mării.
- b) Care este lățimea mării, dacă ea corespunde liniei orizontale  $y = 0,5$ ?
- c) Să se determine înălțimea rupturii plăcilor tectonice în punctul de abscisă  $x = 2$ .

**Test sumativ**

**Profilul real**

*Timp efectiv de lucru:  
45 de minute*

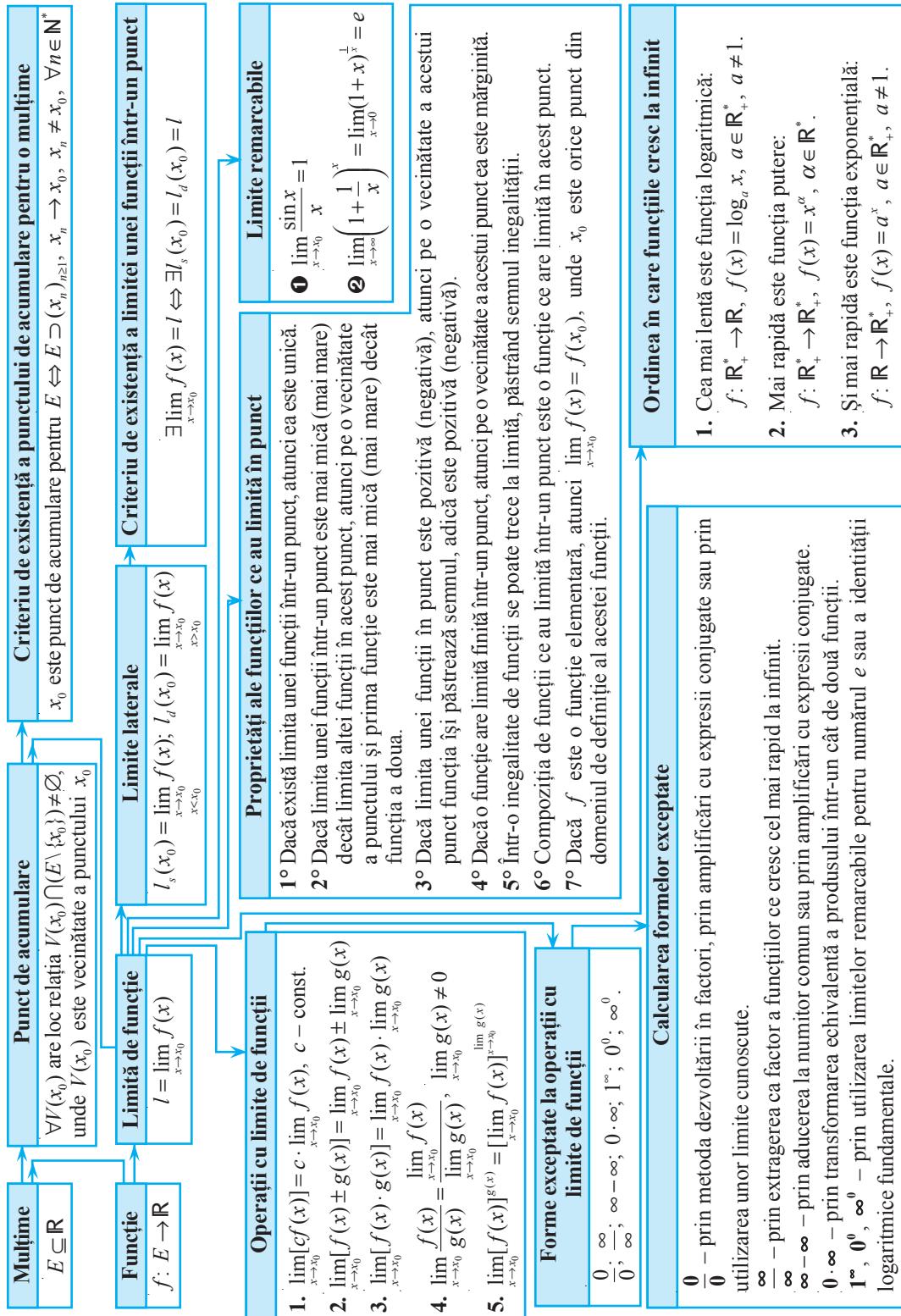
1. Calculați: a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10-3x} - \sqrt{2+x}}{x-2}$ ; ⑤  
                  b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\sin 5x - 3\sin \frac{x}{2}}{\sin 2x}$ . ⑤
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{4-2x}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2 + 3x - x^2, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$   
    a) Calculați limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x = 0$ . ④  
    b) Determinați și argumentați valoarea de adevăr a propoziției:  

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2. \quad \text{A/F}$$
 ②
3. Fie  $l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ ,  $l_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ ,  $l_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ .  
    a) Calculați  $l_1$  și  $l_3$ . ⑤  
    b) Fără a calcula limita  $l_2$ , stabiliți valoarea  $l = l_1 l_2 l_3$ . ③  
    c) Utilizând rezultatul de la b), determinați valoarea limitei  $l_2$ . ②  
    d) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\log_{l_2^2}(x - l_1^2) + \log_{l_2^2}(l_3^2 - x) = \log_{l_2^2} 9 - 2 \log_{l_2^2} l$ . ⑤
4. Indicați litera corespunzătoare variantei corecte de răspuns.  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x+3} + ax + b \right) = 1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , dacă  
    A  $a=0, b=4$ .   B  $a=-1, b \in \mathbb{R}$ .   C  $a=-1, b=2$ .   D  $a \in \{0, 1\}, b \in \mathbb{R}$ . ⑤  
    Argumentați răspunsul.

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

## Limite de funcții



**Obiective**

- ⇒ \*studierea continuității, identificarea punctelor de discontinuitate în baza formulei analitice sau pe graficele funcțiilor date;
- ⇒ \*aplicarea în diverse contexte a noțiunilor *funcție continuă*, *funcție continuă lateral*, *funcție discontinuă într-un punct* sau *pe o mulțime*;
- ⇒ \*utilizarea proprietăților funcțiilor continue pe un interval în diverse contexte;
- ⇒ \*recunoașterea și determinarea asymptotelor graficului funcției;
- ⇒ \*aplicarea noțiunii *limită funcției* la determinarea asymptotelor graficului funcției.

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ). În modulul 2 am studiat comportarea funcției  $f$  în vecinătatea unui punct de acumulare  $x_0$  al mulțimii  $E$ . Punctul  $x_0$  nu aparținea în mod necesar mulțimii  $E$ , iar în cazul în care  $x_0$  aparținea lui  $E$ , valoarea funcției  $f$  în  $x_0$  nu era luată în considerare.

În acest modul vom studia comportarea funcției  $f$  nu numai în vecinătatea punctului  $x_0$ , dar și în însuși  $x_0$ , și anume: vom compara valoarea funcției  $f$  în  $x_0$  cu valorile sale în punctele vecine cu  $x_0$ . Pentru aceasta este necesar ca funcția  $f$  să fie definită în punctul  $x_0$ , adică  $x_0$  să aparțină mulțimii  $E$ .

## §1 Funcții continue într-un punct. Funcții continue pe o mulțime

De noțiunea *limită funcției* este strâns legată o altă noțiune importantă a analizei matematice – *continuitatea funcției*. Această noțiune a fost definită într-o formă riguroasă de către matematicienii B. Bolzano<sup>1</sup> și A. L. Cauchy.

### 1.1. Noțiunea de continuitate



Bernhard Bolzano

În mod intuitiv, afirmațiile *o curbă este continuă* și *o curbă nu are întreruperi*, adică poate fi trasată fără a ridica creionul de pe hârtie, sunt echivalente.

Noțiunile *funcție continuă*, *funcție discontinuă* (*într-un punct* sau *pe o mulțime*) pot fi înțelese cu ușurință observând graficele unor funcții.

<sup>1</sup> Bernhard Bolzano (1781–1848) – filozof, logician și matematician ceh de origine italiană.

**Exemple**

1. Presupunem că pe axa numerelor se mișcă uniform un mobil care în momentul  $t = 0$  se află în origine. Dacă viteza presupusă constantă a mobilului este  $v$ , atunci, notând cu  $s(t)$  distanța parcursă de mobil în timpul  $t$ , obținem ecuația  $s(t) = vt$ ,  $t \geq 0$ . Graficul funcției  $s: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s(t) = vt$ , este reprezentat în figura 3.1.

2. Considerăm funcțiile  $f$ ,  $g$ ,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 1, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ 1+x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 1+x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Graficele acestor funcții sunt reprezentate în figura 3.2.

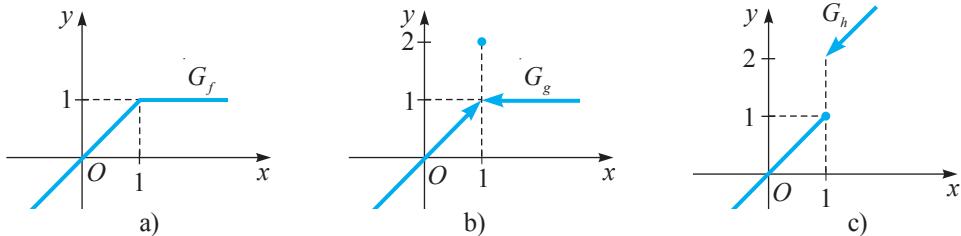


Fig. 3.2

Graficele funcțiilor  $s$  (fig. 3.1) și  $f$  (fig. 3.2 a)) pot fi trasate printr-o mișcare continuă a creionului, iar graficele funcțiilor  $g$  și  $h$  (fig. 3.2 b), c)) sunt întrerupte în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ .

Pentru a pune în evidență deosebirile dintre comportarea funcțiilor  $f$ ,  $g$  și  $h$  în punctul  $x_0 = 1$ , vom compara limitele lor laterale în  $x_0 = 1$  cu valorile lor respective în acest punct:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1, \quad f(1) = 1;$$

$$g(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad g(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1, \quad g(1) = 2;$$

$$h(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad h(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (1+x) = 2, \quad h(1) = 1.$$

Funcțiile  $f$  și  $g$  în punctul  $x_0 = 1$  au limita 1, adică  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ . Constatăm că  $f(1) = 1$ ,  $g(1) = 2$ . Graficul funcției  $g$  se întrerupe în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ , deoarece  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ , iar  $g(1) = 2$ . Graficul funcției  $h$  de asemenea se întrerupe în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ , deoarece limitele ei laterale în acest punct sunt diferite (funcția  $h$  nu are limită în punctul  $x_0 = 1$ ). Astfel, deducem că graficul funcției  $f$  nu se întrerupe în punctul de abscisă  $x_0 = 1$  din două motive:

1) există  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ;

2) limita  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  este egală cu valoarea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .

În baza acestor considerații, putem formula următoarea

**Definiție.** Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  și un punct  $x_0 \in E$  de acumulare pentru  $E$ . Spunem că funcția  $f$  este **continuă în punctul**  $x_0$  dacă ea are limită în acest punct și această limită este egală cu valoarea funcției în  $x_0$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

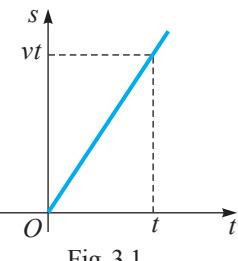


Fig. 3.1

**Observație.** Dacă  $x_0$  nu este punct de acumulare, adică este punct izolat, considerăm, prin definiție, că funcția este **continuă** într-un astfel de punct.

Tinând seama de această observație, vom pune problema continuității unei funcții *numai* în punctele de acumulare ale domeniului ei de definiție.

Definiția continuității unei funcții  $f$  într-un punct  $x_0$  se bazează pe noțiunea de limită a funcției  $f$  în acest punct  $x_0$ . De aceea unele proprietăți ale limitelor de funcții se vor regăsi și în cazul funcțiilor continue.

Utilizând definițiile limitei unei funcții într-un punct, obținem caracterizări ale continuității.

**Teorema 1.** Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in E$ .

1. Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 \Leftrightarrow$  pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$ , astfel încât pentru orice  $x \in E$  din  $|x - x_0| < \delta$  rezultă că  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

2.  $f$  este continuă în  $x_0 \Leftrightarrow$  pentru orice sir  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in E$ , din faptul că  $x_n \rightarrow x_0$  când  $n \rightarrow \infty$  rezultă că sirul respectiv  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  converge la  $f(x_0)$ , adică  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  când  $n \rightarrow \infty$ .

3.  $f$  este continuă în  $x_0 \Leftrightarrow$  există limitele laterale ( $x_0$  un punct interior mulțimii  $E$ ):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ și } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Propozițiile 1–3 semnifică existența limitei funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Dacă funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , atunci  $x_0$  se numește **punct de continuitate** al funcției  $f$ . În cazul când funcția  $f$  nu este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , ea se numește **discontinuă în punctul  $x_0$** , iar  $x_0$  se numește **punct de discontinuitate** al funcției  $f$ .

Funcția  $f$  continuă în orice punct al unei mulțimi  $A \subseteq E$  se numește **continuă pe mulțimea  $A$** .

În cazul în care  $A = E$ , în loc să spunem că  $f$  este continuă pe tot domeniul său de definiție, putem spune, mai simplu, că  $f$  este o **funcție continuă** (fără a mai menționa pe care mulțime).

**Observație.** S-a demonstrat că limita funcțiilor elementare în orice punct  $x_0$  din domeniul lor de definiție se calculează înlocuind  $x$  cu  $x_0$  direct în funcție, adică  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Astfel, funcțiile elementare (polinomiale, raționale, exponențiale etc.) sunt continue pe orice interval pe care sunt definite.

**Concluzie.** Funcțiile elementare sunt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

### Exemple

1. Funcția  $f$  (fig. 3.2 a)) este continuă în punctul  $x_0 = 1$ , iar funcțiile  $g, h$  (fig. 3.2 b), c)) sunt discontinue în acest punct.

2. Funcțiile  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$ ,  $g(x) = \cos x$ ,  $h(x) = 3^x$ , fiind elementare, sunt continue pe  $\mathbb{R}$ , iar funcția  $\varphi: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{1 - 3^x}$ , este continuă pe  $(-\infty, 0]$  din aceleași considerente.

**Exercițiu rezolvat**

- ↳ Să se studieze continuitatea funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{2}, & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$

*Rezolvare:*

Când se cere să studiem continuitatea unei funcții fără a fi precizat un anume punct, subînțelegem că trebuie să studiem problema pe întreg domeniul de definiție.

Funcția  $f$ , fiind definită pe  $(0, 1]$  prin  $f(x) = x^2$  și pe  $(1, +\infty)$  prin  $f(x) = \frac{x+1}{2}$ , este continuă pe aceste intervale (fig. 3.3). Urmează să studiem continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .

$$\text{Avem: } f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{2} = 1 \text{ și } f(1) = 1.$$

Deci,  $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$ . Conform teoremei 1 (propoziția 3), funcția  $f$  este continuă și în punctul  $x_0 = 1$ .

*Răspuns:* Funcția  $f$  este continuă pe  $(0, +\infty)$ .

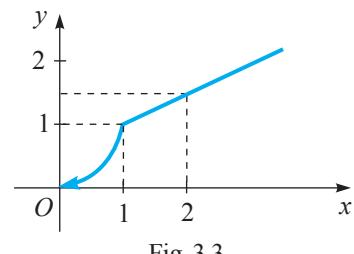


Fig. 3.3

**1.2. Puncte de discontinuitate**

Punctele de discontinuitate ale unei funcții pot fi de două spețe (categorii).

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) și punctul  $x_0 \in E$  ( $x_0$  punct interior multimii  $E$ ).

**Definiție.** Punctul de discontinuitate  $x_0$  se numește **punct de discontinuitate de speță întâi** pentru funcția  $f$  dacă limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0$  există și sunt finite, însă  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$  sau  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ .

**Exerciții rezolvate**

- ↳ 1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ .

*Rezolvare:*

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad f(+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2.$$

Cum  $f(-0) \neq f(+0)$ , rezultă că  $x_0 = 0$  este un punct de discontinuitate de speță întâi pentru funcția  $f$ .

- ↳ 2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \\ 2, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

*Rezolvare:*

Funcția  $f$  este continuă pe multimea  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , iar în punctul  $x_0 = 1$  avem  $f(1-0) = f(1+0) = 2$  și  $f(1) = 1$  (fig. 3.4).

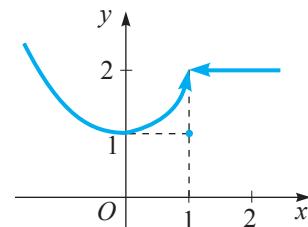


Fig. 3.4

Prin urmare, funcția  $f$  nu este continuă în punctul  $x_0 = 1$ , având în acest punct o discontinuitate de speță întâi.

**Definiție.** Punctul de discontinuitate  $x_0$  se numește **punct de discontinuitate de speță a doua** pentru funcția  $f$  dacă el nu este punct de discontinuitate de speță întâi.

Din definiție rezultă că, într-un punct de discontinuitate de speță a doua, fie cel puțin o limită laterală este infinită (adică egală cu  $\infty$ ), fie cel puțin o limită laterală nu există.

### Exerciții rezolvate

4. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției  $f$  (fig. 3.5) în punctul  $x_0 = 0$ .

*Rezolvare:*

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ . Prin urmare,  $x_0 = 0$  este un punct de discontinuitate de speță a doua pentru funcția  $f$ .

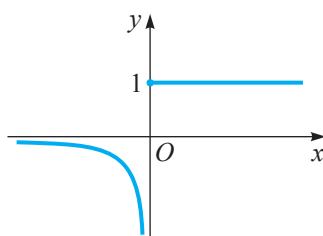


Fig. 3.5

5. Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Să se arate că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 0$  și orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  este punct de discontinuitate de speță a doua pentru această funcție.

*Rezolvare:*

Fie  $x_0 = 0$  și un sir arbitrar  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ . Atunci  $f(x_n) = \begin{cases} x_n, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  și, evident,  $f(x_n) \rightarrow 0 = f(0)$  când  $n \rightarrow \infty$ . Deci, funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 0$ .

Fie acum un oarecare  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Vom arăta că nu există limita la stânga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ . Considerăm două siruri,  $(x'_n)_{n \geq 1}$ ,  $x'_n \in \mathbb{Q}$ , și  $(x''_n)_{n \geq 1}$ ,  $x''_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , astfel încât  $x'_n \rightarrow x_0 - 0$  și  $x''_n \rightarrow x_0 - 0$  când  $n \rightarrow \infty$ . Atunci, conform definiției funcției  $f$ , rezultă că  $f(x'_n) = x'_n \rightarrow x_0$ , iar  $f(x''_n) = 0 \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ . Însă  $x_0 \neq 0$ . Astfel, am arătat că există două siruri,  $(x'_n)_{n \geq 1}$  și  $(x''_n)_{n \geq 1}$ , care converg la stânga la  $x_0$ , însă sirurile respective,  $(f(x'_n))_{n \geq 1}$  și  $(f(x''_n))_{n \geq 1}$ , converg la limite diferite. Aceasta înseamnă că nu există  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ . Deci,  $x_0$  este un punct de discontinuitate de speță a doua pentru funcția  $f$ .

**Definiție.** Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0$  un punct interior mulțimii  $E$ . Dacă există limitele laterale finite  $f(x_0 - 0)$  și  $f(x_0 + 0)$ , atunci diferența  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  se numește **saltul funcției  $f$  în punctul  $x_0$** .

De exemplu, funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ , are în punctul  $x_0 = 0$  un salt egal cu 2 (fig. 3.6 a)).

**Observații.** 1. În punctele de continuitate de speță a două, noțiunea de salt al funcției nu este definită, deoarece cel puțin una dintre limitele laterale nu există sau este infinită.

2. Evident, saltul unei funcții  $f$  într-un punct de continuitate  $x_0$  este egal cu zero, deoarece în acest caz  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ .

3. Saltul unei funcții  $f$  poate fi egal cu zero și într-un punct de discontinuitate  $x_0$ , dacă

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

De exemplu, fie funcția  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0) \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Avem  $f(-0) = f(+0) = 0$ , iar  $f(0) = 1$ . Prin urmare, funcția  $f$  este discontinuă în punctul  $x_0 = 0$  și saltul ei este egal cu zero (fig. 3.6 b)).

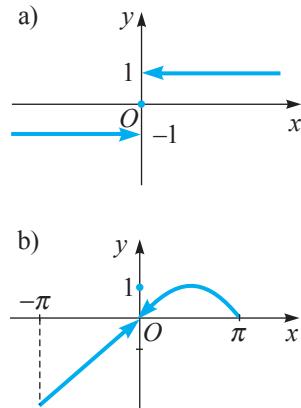


Fig. 3.6

### 1.3. Continuitatea laterală

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) și  $x_0 \in E$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E_- = E \cap (-\infty, x_0) = \{x | x \in E, x < x_0\}$ .

**Definiție.** Funcția  $f$  se numește **continuă la stânga** în punctul  $x_0$  dacă în  $x_0$  există limita la stânga  $f(x_0 - 0)$  și  $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ .

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in E$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E_+ = E \cap (x_0, +\infty) = \{x | x \in E, x > x_0\}$ .

**Definiție.** Funcția  $f$  se numește **continuă la dreapta** în punctul  $x_0$  dacă în  $x_0$  există limita la dreapta  $f(x_0 + 0)$  și  $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ .

#### Exemple

1. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$  este continuă la stânga în punctul  $x_0 = 0$ , însă nu este continuă la dreapta în acest punct, deoarece  $f(+0) = -1$ , iar  $f(0) = 1$ , adică  $f(+0) \neq f(0)$ .

2. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -1, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$  este continuă la dreapta în punctul  $x_0 = 0$ , fiindcă  $f(+0) = -1 = f(0)$ , și nu este continuă la stânga în acest punct, deoarece  $f(-0) = 1$ , iar  $f(0) = -1$ , adică  $f(-0) \neq f(0)$ .

**Observații.** 1. Funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) este continuă în punctul  $x_0 \in E$  ( $x_0$  – punct interior multimii  $E$ ) dacă și numai dacă ea este continuă și la stânga, și la dreapta în  $x_0$  (a se compara cu teorema 1, propoziția 3).

2. Dacă  $E = [a, b]$ , atunci problema continuității la stânga în punctul  $a$  și respectiv la dreapta în punctul  $b$  nu are sens. În plus, funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă în  $a$  (respectiv în  $b$ ) dacă și numai dacă  $f$  este continuă la dreapta în  $a$  (respectiv la stânga în  $b$ ).

### Exerciții rezolvate

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^x + a \cos x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ x^2 + b, & \text{dacă } x > 0, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$

Să se determine valorile parametrilor reali  $a$  și  $b$  pentru care funcția  $f$  este:

- a) continuă la stânga în punctul  $x_0 = 0$ ;
- b) continuă la dreapta în punctul  $x_0 = 0$ ;
- c) continuă pe  $\mathbb{R}$ .

Rezolvare:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (e^x + a \cos x) = 1 + a$ . În baza definiției, funcția  $f$  este continuă la stânga în punctul  $x_0 = 0$  dacă și numai dacă  $f(-0) = f(0) \Leftrightarrow 1 + a = 1 \Leftrightarrow a = 0$  și  $b \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + b) = b$ . Conform definiției, funcția  $f$  este continuă la dreapta în punctul  $x_0 = 0$  dacă și numai dacă  $f(+0) = f(0) \Leftrightarrow b = 1$  și  $a \in \mathbb{R}$ .

- c) Funcția  $f$  este continuă pe  $(-\infty, 0)$  și pe  $(0, +\infty)$  pentru orice valori ale parametrilor  $a$  și  $b$ . În punctul  $x_0 = 0$  funcția  $f$  este continuă dacă și numai dacă  $f(-0) = f(+0) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$  și  $b = 1$ .

Răspuns: a)  $a = 0, b \in \mathbb{R}$ ; b)  $a \in \mathbb{R}, b = 1$ ; c)  $a = 0, b = 1$ .

2. Să se studieze continuitatea la stânga și la dreapta a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Rezolvare:

Pentru  $x < 1$  și  $x > 1$  funcția  $f$ , fiind elementară, este continuă. Studiem continuitatea ei în punctul  $x = 1$ . Calculăm limitele laterale:  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1 = f(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \neq f(1)$ . Prin urmare,  $f$  este continuă la stânga în punctul  $x = 1$  și nu este continuă la dreapta în acest punct.

## 1.4. Operații cu funcții continue (optional)

Vom arăta că operațiile aritmetice asupra funcțiilor continue, precum și compunerea acestora, conservă continuitatea.

**Teorema 2.** Dacă  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) sunt funcții continue într-un punct  $x_0 \in E$ , atunci funcțiile  $\alpha f$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  sunt continue în  $x_0$ . Dacă, în plus,  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$ , atunci și  $\frac{f}{g}$  este o funcție continuă în  $x_0$ .

Această teoremă, stabilită local (într-un singur punct  $x_0$ ), se poate extinde la nivelul unei mulțimi, în particular, pe tot domeniul de definiție  $E$ .

### Exemple

1. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x + \sin x + x$ , este continuă pe  $\mathbb{R}$  ca sumă a trei funcții elementare continue pe  $\mathbb{R}$ .

2. Funcția definită prin  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  este continuă pe mulțimea  $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ , fiind cîntul a două funcții continue pe această mulțime și având numitorul nenul pe  $E$ .

3. Funcția definită prin  $f(x) = \operatorname{tg} x$  este continuă pe mulțimea  $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ , deoarece  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$  ( $\cos x \neq 0, x \in E$ ) și sinus, cosinus sunt funcții continue pe  $E$ .

**Teorema 3.** Fie funcțiile  $g: E_1 \rightarrow E_2$ ,  $f: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ ) și compusa lor  $h = f \circ g: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă funcția  $g$  este continuă în punctul  $x_0 \in E_1$  și funcția  $f$  este continuă în punctul  $y_0 = g(x_0) \in E_2$ , atunci funcția  $h$  este continuă în  $x_0$ .

**Observație.** În condițiile teoremei 3 și din definiția continuității rezultă următoarea egalitate:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$ , care înseamnă că *limita „comută” cu toate funcțiile continue*.

### Exemple

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x} = e^0 = 1$  în baza continuității funcțiilor  $f(x) = e^x$  și  $g(x) = \sin x$ ;

2.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg}(2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(\lim_{x \rightarrow \pi} 2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(2^{\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{x}}) = \operatorname{tg} 2^{\sqrt{\pi}}$  în baza continuității funcțiilor  $a^x$ ,  $\operatorname{tg} x$  și  $x^\alpha$  în punctele respective.

**Corolar.** Dacă funcția  $g: E_1 \rightarrow E_2$  este continuă pe mulțimea  $E_1$  și funcția  $f: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe mulțimea  $E_2$  ( $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ ), atunci funcția  $h = f \circ g: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe  $E_1$ .

Așadar, prin compunerea a două funcții continue se obține o funcție continuă, iar teoremele 2 și 3 se extind la sume, produse, compunerile ale unui număr finit de funcții continue.

### Exercițiu rezolvat

¶ Fie  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue în punctul  $x_0 \in E$  (pe mulțimea  $E$ ). Să se demonstreze că și funcțiile  $|f|$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  sunt continue în  $x_0$  (respectiv continue pe  $E$ ).

*Rezolvare:*

Funcția  $|f|$ , adică  $|f|(x) = |f(x)|$ , poate fi reprezentată ca o compusă a două funcții continue:  $|f| = \varphi \circ f$ , unde  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = |x|$ , este funcția modul, care este continuă pe mulțimea  $E$ . În baza teoremei 3, funcția  $|f|$  este continuă în punctul  $x_0$  (respectiv continuă pe mulțimea  $E$ ).

Continuitatea celorlalte două funcții rezultă din teorema 2 și din relațiile:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)+|f-g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)-|f-g|).$$

### Exerciții propuse

#### *Profilul real*

**A1** 1. Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ , este continuă în punctele  $x_0 = 0$  și  $x_1 = 2$ .

2.  **Investigați!** Să se studieze continuitatea funcției  $f$  pe domeniul ei de definiție:

- a)  $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x + x + \frac{x}{x+3}$ ;      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2 + 1}$ ;  
 c)  $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+3} + \ln(x+4)$ .

3. Să se stabilească dacă este continuă pe  $\mathbb{R}$  funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = |x+1|$ ;      b)  $f(x) = x + |x-1|$ ;  
 c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$       d)  $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 2,7, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$

4.  **Investigați!** Să se studieze continuitatea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{2}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

**B1** 5. Aplicând inegalitatea  $|\sin x| \leq |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , să se demonstreze continuitatea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = \sin x$ ;      b)  $g(x) = \cos x$ ;      c)  $f(x) = \sin 2x$ ;      d)  $f(x) = \cos 2x$ .

6. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x + |x-1| e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ .

- a) Să se expliciteze funcția  $f$ .      b) Să se studieze continuitatea funcției  $f$ .

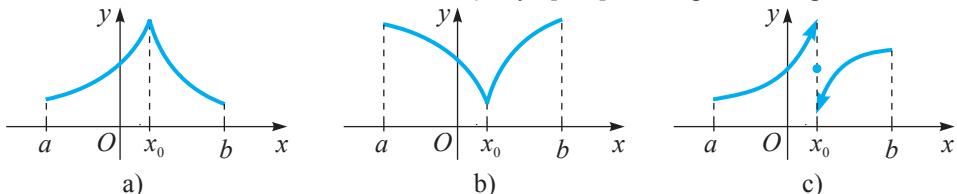
7.  **Investigați!** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^3 + a^3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$   $a \in \mathbb{R}$ .

Să se determine valorile parametrului  $a$  pentru care funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

8. Să se afle punctele de discontinuitate și să se calculeze în aceste puncte saltul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

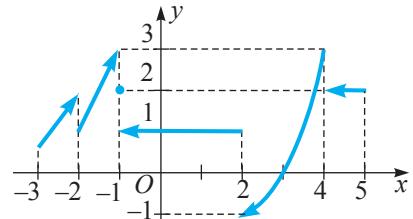
- a)  $f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sin(x-1), & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x+1), & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

**C1** 9. Să se afle intervalele de continuitate ale funcției  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  reprezentate grafic:



10. Funcția  $f: [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  este reprezentată grafic în figura alăturată.

- Să se indice intervalele pe care funcția  $f$  este continuă.
- Să se calculeze:  $f(-1) \cdot f(0)$ ,  $f(2) \cdot f(4)$ ,  $f(0) \cdot f(5)$ .



11. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul funcției:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{x}{n}, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$
- $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{2n} + x^{2n+2})$ .

12. **Investigați!** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax + be^x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ 1 - ax, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se determine valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f$  este continuă:

- la stânga în punctul  $x_0 = 1$ ;
- la dreapta în punctul  $x_0 = 1$ .

13. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 4 - a \ln x, & x \geq 1 \\ 1 + ax, & x < 1, \end{cases}$   $a \in \mathbb{R}$ .

- Să se determine valorile reale ale parametrului  $a$  pentru care funcția  $f$  este continuă pe  $(0, +\infty)$ .
- Pentru  $a = 3$ , să se rezolve ecuația  $f(x) + 2f(x^2) = -3$  pe intervalul  $[1, +\infty)$ .

## §2 Proprietăți ale funcțiilor continue

**Definiție.** O funcție  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) se numește:

- mărginită superior** dacă imaginea sa  $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$  este o mulțime mărginită superior, adică există  $\overline{M} \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $f(x) \leq \overline{M}$ ,  $\forall x \in E$ .
- mărginită inferior** dacă imaginea sa  $f(E)$  este o mulțime mărginită inferior, adică există  $\underline{m} \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\underline{m} \leq f(x)$ ,  $\forall x \in E$ .
- mărginită** dacă imaginea sa  $f(E)$  este o mulțime mărginită, adică există  $\overline{m}$ ,  $\underline{M} \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\underline{m} \leq f(x) \leq \overline{M}$ ,  $\forall x \in E$ .

Numerele  $M = \sup_{x \in E} f(x)$  și  $m = \inf_{x \in E} f(x)$  se numesc respectiv **marginea superioară** și **marginea inferioară** ale funcției  $f$ .

## 2.1. Proprietăți de mărginire

În general, o funcție continuă nu este mărginită. De exemplu, funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , nu este mărginită superior, fiind definită pe un interval nemărginit (fig. 3.7 a)). Dar nici funcția continuă  $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \tan x$ , nu este mărginită superior, deși este definită pe un interval mărginit (fig. 3.7 b)).

Este adevărat următorul rezultat fundamental din care rezultă că este esențială condiția ca mulțimea  $E$  să fie compactă.

### Teorema 4 (Weierstrass de mărginire)

Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci:

1)  $f$  este mărginită;

2)  $f$  își atinge marginile, adică există  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , astfel încât  $f(x_1) = m$  și  $f(x_2) = M$ , unde  $m$  și  $M$  sunt respectiv marginea inferioară și cea superioară ale funcției  $f$ :

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

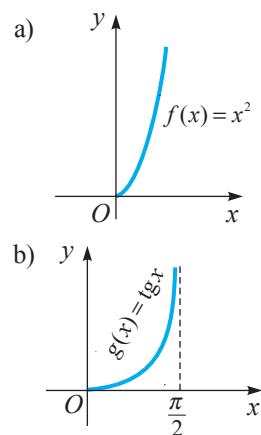


Fig. 3.7

Numerele  $m$  și  $M$  se numesc **cea mai mică valoare** și respectiv **cea mai mare valoare** ale funcției  $f$  pe  $[a, b]$ .

### Exemple

1. Funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$ , este continuă pe  $[0, 1]$ .

Evident,  $m = 1 = f(0)$  și  $M = 2 = f(1)$ .

Astfel am verificat direct dacă funcția  $f$  își atinge marginile.

Restricția funcției  $f$  la intervalul deschis  $(0, 1)$  nu își atinge marginile pe acest interval (fig. 3.8 a)).

2. Fie  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Atunci  $f([1, +\infty)) = (0, 1]$  și funcția  $f$  nu își atinge marginea inferioară  $m = 0$  pe intervalul  $[1, +\infty)$  (fig. 3.8 b)).

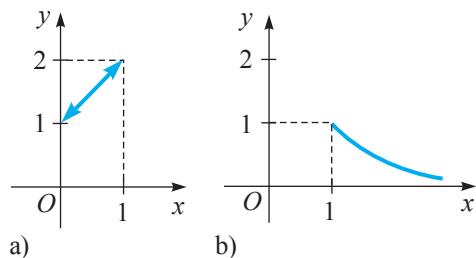


Fig. 3.8

**Observații.** 1. Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție crescătoare pe intervalul  $[a, b]$ , atunci  $m = f(a)$  și  $M = f(b)$ , adică marginile ei sunt atinse la capetele intervalului  $[a, b]$ ; dacă funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $[a, b]$ , atunci  $m = f(b)$  și  $M = f(a)$  (fără a mai fi nevoie de ipoteza de continuitate a funcției  $f$ ).

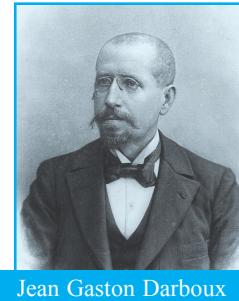
2. Dacă  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție crescătoare pe  $(a, b)$ , atunci  $m = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ,  $M = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ ; dacă  $f$  este o funcție descrescătoare pe  $(a, b)$ , atunci  $m = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ ,  $M = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ .

3. În general sunt posibile cazurile:  $m = \inf_{x \in E} f = -\infty$ ,  $M = \sup_{x \in E} f = +\infty$ .

## 2.2. Proprietatea lui Darboux

Funcțiile definite pe un interval au proprietatea că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare. Altfel spus, dacă o funcție continuă  $f$  ia două valori distincte, atunci  $f$  ia toate valorile cuprinse între aceste două valori.

**Definiție.** Fie  $I$  un interval. Se spune că o funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  are **proprietatea lui Darboux**<sup>1</sup> pe intervalul  $I$  dacă pentru orice puncte  $\alpha, \beta$  din  $I$ ,  $\alpha < \beta$ , și orice număr  $\lambda$  cuprins între  $f(\alpha)$  și  $f(\beta)$ ,  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ , există cel puțin un punct  $c_\lambda \in (\alpha, \beta)$ , astfel încât  $f(c_\lambda) = \lambda$ .



Jean Gaston Darboux

Geometric, aceasta înseamnă că orice valoare „intermediară”  $\lambda$  între  $f(\alpha)$  și  $f(\beta)$  de pe axa  $Oy$  este valoare a funcției în cel puțin un punct „intermediar”  $c$  între  $\alpha$  și  $\beta$  de pe axa  $Ox$ . În figura 3.9 aceasta se realizează în trei puncte:  $c_1$ ,  $c_2$  și  $c_3$ .

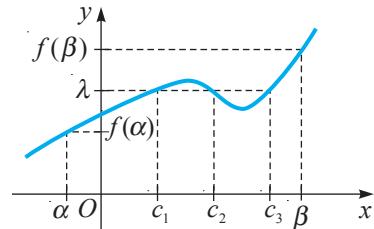


Fig. 3.9

**Teorema 5 (teorema Bolzano–Cauchy despre anularea funcției).** Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe  $[a, b]$  și la extremitățile acestui interval funcția  $f$  ia valori de semne opuse:  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $f(c) = 0$ .

### Demonstratie

Pentru a fixa ideile, să presupunem că  $f(a) < 0$  și  $f(b) > 0$  (fig. 3.10). Divizăm  $[a, b]$  în două intervale de lungimi egale prin punctul  $\frac{a+b}{2}$ . Dacă  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , atunci teorema este demonstrată și se poate considera  $c = \frac{a+b}{2}$ . Dacă  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ , atunci la capetele unuia dintre intervalele  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  funcția ia valori de semne opuse. Notând acest interval cu  $[a_1, b_1]$ , obținem  $f(a_1) < 0$ ,  $f(b_1) > 0$ .

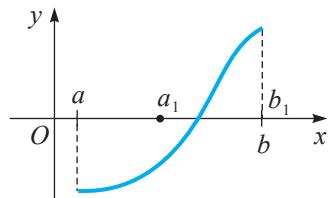


Fig. 3.10

Divizăm  $[a_1, b_1]$  în două intervale de lungimi egale și omitem cazul în care funcția  $f$  se anulează în mijlocul acestuia, fiindcă atunci teorema este demonstrată.

Notăm cu  $[a_2, b_2]$  acea jumătate a intervalului  $[a_1, b_1]$  pentru care  $f(a_2) < 0$ ,  $f(b_2) > 0$ .

<sup>1</sup> Jean Gaston Darboux (1842–1917) – matematician francez.

Repetăm înjumătățirea intervalului și raționamentele anterioare. Dacă după un număr finit de pași găsim un punct în care funcția  $f$  se anulează, atunci teorema este demonstrată. Fie nu găsim un astfel de punct la niciun pas. În acest caz obținem un sir descrescător de intervale incluse  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$  care verifică relațiile:

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \quad \text{și} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Șirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  sunt monotone și mărginite (deoarece  $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ ,  $b \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$ ) și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ .

Aplicând teorema lui Weierstrass (modulul 1, secvența 3.1), obținem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ ,  $c \in [a, b]$ . Trecând la limită în inegalitățile  $f(a_n) < 0$  și  $f(b_n) > 0$  și ținând cont de continuitatea funcției  $f$  în punctul  $c$ , obținem că  $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$  și  $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$ . În concluzie,  $f(c) = 0$ . ►

Teorema 5 poate fi reformulată astfel:

**Teorema 5' (teorema Bolzano–Cauchy despre anularea funcției).** Dacă o funcție  $f$  este continuă pe un interval  $I$  și ia valori de semne opuse în punctele  $a, b \in I$ , atunci ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o soluție în intervalul  $(a, b)$ .

**Teorema 6.** Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

### 2.3. Aplicații ale proprietăților funcțiilor continue la rezolvarea unor ecuații și inecuații

Conform teoremei 5', dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $[a, b] \subseteq I$  și  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , atunci ecuația  $f(x) = 0$  are cel puțin o soluție  $c \in (a, b)$ . Dacă, în plus, funcția  $f$  este strict monotonă pe  $[a, b]$ , atunci soluția  $c$  este unică pe  $[a, b]$ .

#### Exemplu

Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{2x} + 3x$ . Să se demonstreze că pe intervalul  $[-1, 0]$  ecuația  $f(x) = 0$  are exact o soluție.

*Rezolvare:*

Funcția  $f$  este continuă și strict crescătoare pe intervalul  $[-1, 0]$  ca sumă de două funcții crescătoare. În plus,  $f(-1) \cdot f(0) = \left(\frac{1}{e^2} - 3\right) \cdot 1 < 0$ . Prin urmare, există un unic  $c \in (-1, 0)$ , încât  $f(x) = 0$ .

Dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) este o funcție continuă pe intervalul  $I$  și dacă  $f$  nu se anulează în niciun punct  $x \in I$  (adică ecuația  $f(x) = 0$  nu are soluții în  $I$ ), atunci funcția  $f$  are în mod necesar un semn constant pe  $I$ , adică  $f(x) > 0$  sau  $f(x) < 0$  pe acest interval.

Într-adevăr, în caz contrar ar exista puncte  $x_1, x_2$  din  $I$ ,  $x_1 < x_2$ , astfel încât  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ , și atunci funcția  $f$  s-ar anula într-un punct  $c \in (x_1, x_2)$  care aparține intervalului  $I$ , ceea ce este în contradicție cu ipoteza.

În general, a stabili semnul unei funcții  $f$  pe un interval înseamnă a rezolva inecuația de tipul  $f(x) > 0$  (sau  $f(x) < 0$ ) și a indica mulțimile pe care funcția  $f$  ia valori pozitive (sau negative).

Semnul unor funcții elementare poate fi stabilit aplicând *metoda intervalelor*. Să presupunem că  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  sunt *toate* zerourile unei funcții continue  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , adică  $f(x_k) = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  (ele pot fi un număr infinit). Atunci pe fiecare dintre intervalele  $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n), \dots$  funcția  $f$  are semn constant. Pentru a determina acest semn, este suficient ca pe fiecare dintre aceste intervale să alegem câte un punct și să determinăm semnul funcției  $f$  în acest punct.

### Exerciții rezolvate

**1.** Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin un zerou pe  $\mathbb{R}$ .

*Rezolvare:*

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n+1}$ , și presupunem că  $a_0 > 0$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , rezultă că există  $x_1$ , astfel încât  $f(x_1) < 0$ .

Cum  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , rezultă că există  $x_2$ ,  $x_2 > x_1$ , astfel încât  $f(x_2) > 0$ . Așadar, funcția  $f$  se anulează între punctele  $x_1$  și  $x_2$ , deci există cel puțin un punct  $c \in (x_1, x_2)$ , astfel încât  $f(c) = 0$ .

**2.** Să se arate că funcția definită prin  $f(x) = x^5 + 7x^3 + 7$  are un zerou unic pe  $[-1, 0]$ .

*Rezolvare:*

Funcția  $f$  este continuă și strict crescătoare pe  $[-1, 0]$  ca sumă a două funcții strict crescătoare (definite prin expresiile  $x^5$  și  $7x^3 + 7$ ) pe  $[-1, 0]$ . Cum  $f(-1) = -1$ ,  $f(0) = 1$ , rezultă că  $f(-1) \cdot f(0) < 0$ . Prin urmare, în intervalul  $[-1, 0]$  ecuația  $f(x) = 0$  are o soluție și aceasta este unică, deoarece funcția dată este strict crescătoare.

**3.** Să se arate că ecuația  $\ln x + x = 0$  are o soluție unică  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ .

*Rezolvare:*

Fie funcția  $f: \left[\frac{1}{e}, 1\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x + x$ . Funcția  $f$ , fiind continuă pe  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ , are proprietatea lui Darboux pe acest interval și, cum  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = -1 + \frac{1}{e} < 0$  și  $f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$ , rezultă că există  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ , astfel încât  $f(x_0) = 0$ . Soluția  $x_0$  este unică, deoarece funcția  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \ln x + x$ , este strict crescătoare, ca sumă a două funcții strict crescătoare.

4. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $(x^2 - 9)\ln x > 0$ .

*Rezolvare:*

Zerourile funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 9)\ln x$ , sunt 1 și 3. Funcția  $f$ , fiind continuă pe  $(0, +\infty)$ , are semn constant pe fiecare dintre intervalele  $(0, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, +\infty)$ . Alegem  $\xi_1 = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ ,  $\xi_2 = 2 \in (1, 3)$ ,  $\xi_3 = 4 \in (3, +\infty)$  și obținem:

$$f(\xi_1) = \left( \frac{1}{4} - 9 \right) \ln \frac{1}{2} > 0, \quad f(\xi_2) = (4 - 9) \ln 2 < 0, \quad f(\xi_3) = (16 - 9) \ln 4 > 0.$$

*Răspuns:*  $S = (0, 1) \cup (3, +\infty)$ .

### Exerciții propuse

#### *Profilul real*

- A<sub>1</sub> 1. Fie intervalul  $I = [a, b]$  și funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Care dintre următoarele cazuri pot avea loc?
- $f$  este continuă, mărginită și își atinge marginile.
  - $f$  este continuă și nemărginită.
  - $f$  este discontinuă și își atinge marginile.
  - $f$  este discontinuă, mărginită și nu-și atinge marginile.
  - $f$  este discontinuă,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , însă ecuația  $f(x) = 0$  nu are soluții pe intervalul  $[a, b]$ .
  - $f$  este continuă,  $f(a) \cdot f(b) > 0$  și ecuația  $f(x) = 0$  are soluții pe intervalul  $[a, b]$ .
- Să se argumenteze răspunsul apelând la proprietățile funcțiilor continue sau prin exemple.

2. Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe intervalul  $I$ . Să se demonstreze că funcțiile

$$f_+: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) > 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \leq 0, \end{cases} \quad \text{și} \quad f_-: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) < 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

sunt continue pe  $I$ . Să se traseze graficele funcțiilor  $f_+$  și  $f_-$ , știind că  $I = \mathbb{R}$  și:

- $f(x) = x$ ;
- $f(x) = \sin x$ ;
- $f(x) = 1 + x^2$ ;
- $f(x) = -e^x$ .

3. **Lucrați în perechi!** Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ \pi, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases} \quad \text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

este discontinuă și la dreapta, și la stânga în punctul  $x = 0$ .

Să se traseze graficul funcției  $f$ .

4. Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nu are proprietatea lui Darboux:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1 + x, & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases} \quad \text{b)} \quad f(x) = [x] - x; \quad \text{c)} \quad f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

5. Funcția  $f: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{x}$ , este continuă și are proprietatea că  $f(-1) \cdot f(1) < 0$  și totuși ecuația  $f(x) = 0$  nu are soluții. Cum se explică?

6. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă astfel încât  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Să se arate că  $f$  este mărginită. Propoziția ar rămâne adevărată dacă intervalul  $[0, +\infty)$  ar fi înlocuit cu intervalul  $(0, +\infty)$ ? Să se exemplifice răspunsul.

**B<sub>1</sub>** 7. **Investigați!** Să se arate că funcția continuă  $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - x^2$ , este mărginită pe  $(0, 2)$ , însă nu își atinge marginile pe  $(0, 2)$ , iar funcția discontinuă  $g: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = [x]$ , își atinge marginile pe acest interval. Să se traseze graficele acestor funcții.

8. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația:

- a)  $(|x| - 3)(\ln x + 4) < 0$ ;
- b)  $(x^2 + 3x - 4)(2^x - 2) < 0$ ;
- c)  $(x^3 + 2x^2 - 4x + 1)(\lg x - 10) > 0$ .

9. Să se studieze semnul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$ , unde  $a, b, c$  sunt constante și  $0 < a < b < c$ ;
- b)  $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x - 4)(e^{x+4} - 1)$ .

10. Să se studieze semnul funcției:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3e^x - 12$ ;
- b)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 6 - 3\ln x$ ;
- c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 \cdot 2^x - 25$ ;
- d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 1$ .

**C<sub>1</sub>** 11. Să se arate că dacă  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $(a, b)$  – interval finit sau infinit) este o funcție continuă și există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \beta$ , unde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , atunci funcția  $f$  este mărginită pe  $(a, b)$ .

12. Să se construiască o funcție  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și nemărginită pe  $(a, b)$ .

13. Fie funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3}, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

- a) Să se arate că funcția  $f$  este discontinuă în punctul  $x = \frac{1}{2}$ .
- b) Să se traseze graficul funcției  $f$ .
- c) Să se arate că funcția  $f$  își atinge marginile și că mulțimea valorilor ei este un interval închis.

14. Să se dea exemplu de o funcție  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pentru care mulțimea valorilor ei este:
 

- a) un interval închis;
- b) un interval deschis;
- c) un interval semideschis.

### §3 Asimptotele funcțiilor

Fie  $f$  o funcție definită pe mulțimea  $E$ , care este un interval sau o reuniune (finită sau infinită) de intervale. Dacă mulțimea  $E$  este nemărginită sau funcția  $f$  este nemărginită, atunci graficul ei este o mulțime nemărginită de puncte din plan (în sensul că nu există niciun dreptunghi care să conțină integral acest grafic). În acest caz, vom spune că graficul funcției  $f$  are *ramuri nemărginite*.

Dacă o ramură nemărginită a graficului funcției  $f$  se apropie oricât de mult de o dreaptă dată, se spune că această dreaptă este *o asimptotă a graficului (pentru graficul) funcției  $f$* . Graficul unei funcții poate avea *asimptote orizontale, oblice, verticale*.

#### 3.1. Asimptote orizontale

Considerăm o funcție  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , unde mulțimea  $E$  conține un interval de forma  $(a, +\infty)$  sau  $+\infty$  este punct de acumulare pentru  $E$ . În acest caz, graficul funcției  $f$  are o ramură nemărginită. Fie  $l$  ( $l \in \mathbb{R}$ ) un număr și considerăm dreapta de ecuație  $y = l$  (paralelă cu axa  $Ox$ ). Pentru orice număr  $x \in (a, +\infty)$ , notăm prin  $P$  (prin  $Q$ ) punctul de abscisă  $x$  situat pe dreapta de ecuație  $y = l$  (respectiv pe graficul funcției  $f$ ) (fig. 3.11).

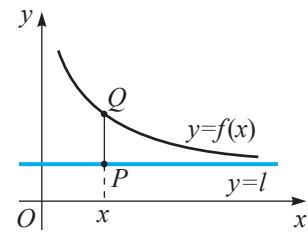


Fig. 3.11

**Definiție.** Dreapta de ecuație  $y = l$  se numește **asimptotă orizontală la  $+\infty$**  a graficului funcției  $f$  (a funcției  $f$ ) dacă lungimea segmentului  $PQ = |f(x) - l|$  tinde la zero când  $x \rightarrow +\infty$ , adică  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - l| = 0$ .

Această condiție este echivalentă cu faptul că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  există și că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

O definiție similară poate fi formulată și pentru asimptota orizontală la  $-\infty$  a graficului funcției  $f$  în cazul în care mulțimea  $E$  conține un interval de forma  $(-\infty, a)$  sau  $-\infty$  este punct de acumulare pentru  $E$  (fig. 3.12).

Dacă limita  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ( $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ) nu există sau este infinită, atunci graficul funcției  $f$  nu are asimptotă orizontală la  $+\infty$  (respectiv la  $-\infty$ ).

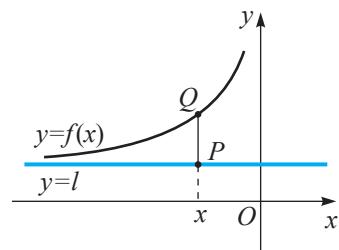


Fig. 3.12

#### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine asimptotele orizontale ale graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ;    b)  $f(x) = 2^x$ ;    c)  $f(x) = e^{x^2}$ ;    d\*)  $f(x) = x \sin x$ .

*Rezolvare:*

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$ . Prin urmare, dreapta de ecuație  $y=1$  este asimptotă orizontală la  $+\infty$  și la  $-\infty$  a graficului funcției  $f$ .

- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ . Deci, dreapta de ecuație  $y = 0$  (axa  $Ox$ ) este asimptotă orizontală la  $-\infty$  a graficului funcției  $f$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$ , rezultă că graficul funcției  $f$  nu are asimptotă orizontală la  $+\infty$ .
- c) Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} = +\infty$ , rezultă că graficul funcției  $f$  nu are asymptote orizontale.
- d) Graficul funcției  $f$  nu are asymptote orizontale nici la  $-\infty$ , nici la  $+\infty$ , deoarece nu există limitele  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$ .

### 3.2. Asimptote oblice

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , unde mulțimea  $E$  conține un interval de forma  $(a, +\infty)$  (sau  $+\infty$  este punct de acumulare pentru  $E$ ), și dreapta de ecuație  $y = mx + n$ ,  $m \neq 0$ . Pentru orice  $x \in (a, +\infty)$  notăm prin  $P$  (prin  $Q$ ) punctul de abscisă  $x$  situat pe dreapta de ecuație  $y = mx + n$ ,  $m \neq 0$  (respectiv pe graficul funcției  $f$ ) (fig. 3.13).

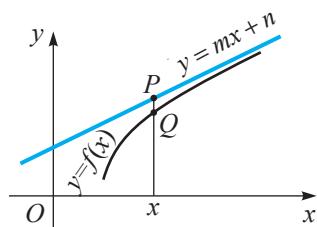


Fig. 3.13

**Definiție.** Dreapta de ecuație  $y = mx + n$ ,  $m \neq 0$ , se numește **asimptotă oblică la  $+\infty$**  a graficului funcției  $f$  (a funcției  $f$ ) dacă lungimea segmentului  $PQ = |f(x) - (mx + n)|$  tinde la zero când  $x \rightarrow +\infty$ , adică  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$ .

**Teorema 6.** Dreapta de ecuație  $y = mx + n$ ,  $m \neq 0$ , este asimptotă oblică la  $+\infty$  a graficului funcției  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ( $m \neq 0$ ) și  $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ .

Fie mulțimea  $E$  conține un interval de forma  $(-\infty, a)$  sau  $-\infty$  este punct de acumulare pentru  $E$ . În mod similar se definește noțiunea *asimptotă oblică la  $-\infty$*  a graficului funcției  $f$  și se formulează teorema 6 pentru astfel de asymptote.

#### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine asimptota oblică a graficului funcției:

a)  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ ,

b)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{|x - 1|}$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ .

*Rezolvare:*

a)  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)} = 1$  și  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{x + 1} = -1$ . Așadar, dreapta de ecuație  $y = x - 1$  este asimptotă oblică la  $+\infty$  și la  $-\infty$  a graficului funcției  $f$ .

b)  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$  și  $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{|x-1|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1$ . Prin urmare, dreapta de ecuație  $y = x + 1$  este asimptotă oblică la  $+\infty$  a graficului funcției  $f$ . În mod similar, dacă  $x \rightarrow -\infty$ , obținem că dreapta de ecuație  $y = -x - 1$  este asimptotă oblică la  $-\infty$  a graficului funcției  $f$ .

c) Graficul funcției  $f$  nu are asimptote oblice nici la  $+\infty$ , nici la  $-\infty$ , deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , însă nu există limitele  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ .

### 3.3. Asimptote verticale

#### Exemple

1. Considerăm funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  (fig. 3.14). Observăm că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  și, prin urmare, dreapta de ecuație  $y = 0$  este asimptotă orizontală pentru graficul funcției  $f$ . Din lectura graficului funcției  $f$  rezultă că dacă  $x$  tinde la zero, punctul  $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$ ,  $x > 0$ , al graficului, de abscisă  $x$ , se apropie de axa  $Oy$ . În acest caz spunem că graficul funcției  $f$  are *asimptotă verticală* axa  $Oy$ , adică dreapta de ecuație  $x = 0$ .

2. Fie funcția  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$  (fig. 3.15).

Avem  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1-x)} = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .

Dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$  sunt asimptote verticale ale graficului funcției  $f$ .

Vom formula riguros termenul *asimptotă verticală*.

Fie funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  și  $a$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $E$ .

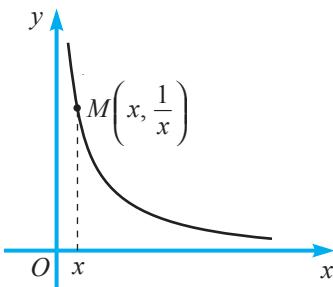


Fig. 3.14

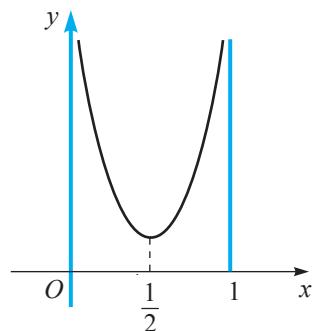


Fig. 3.15

**Definiții.** • Dacă limita la stânga  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  este  $+\infty$  sau  $-\infty$ , se spune că dreapta de ecuație  $x = a$  este **asimptotă verticală la stânga** pentru graficul funcției  $f$  (pentru funcția  $f$ ).

• Dacă limita la dreapta  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  este  $+\infty$  sau  $-\infty$ , se spune că dreapta de ecuație  $x = a$  este **asimptotă verticală la dreapta** pentru graficul funcției  $f$ .

• Dreapta de ecuație  $x = a$  este **asimptotă verticală** pentru graficul funcției  $f$  dacă ea este asimptotă verticală la stânga, la dreapta sau de ambele părți.

Dacă dreapta de ecuație  $x = a$  este asimptotă verticală la stânga pentru graficul funcției  $f$ , atunci lungimea segmentului  $PQ$  tinde la zero când  $x \rightarrow a - 0$ , iar ordonata punctului  $Q$  tinde la  $-\infty$  (fig. 3.16 a)) sau la  $+\infty$  (fig. 3.16 b)).

O interpretare geometrică similară se obține și pentru asimptota verticală la dreapta pentru graficul funcției  $f$ . (Illustrații!)

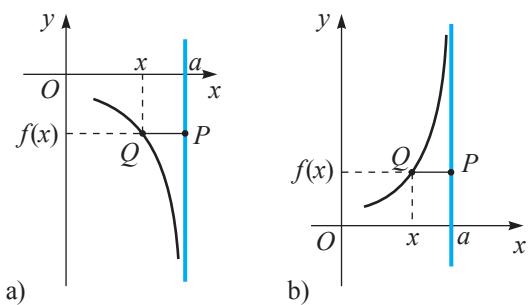


Fig. 3.16

**Observație.** Din definiție conchidem că asimptotele verticale ale graficului unei funcții  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  se vor căuta printre dreptele de ecuații  $x = x_i$ , unde  $x_i$  sunt punctele de discontinuitate de speță a două și/sau punctele de acumulare finite pentru mulțimea  $E$  care nu aparțin lui  $E$ .

În particular, dacă  $E = (a, b)$  și funcția  $f$  este continuă pe  $(a, b)$ , atunci dreapta de ecuație  $x = a$  ( $x = b$ ) este asimptotă verticală la graficul funcției  $f$  dacă și numai dacă  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  (respectiv  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ ).

### Exercițiu rezolvat

• Să se determine asimptotele verticale ale graficului funcției:

a)  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ ;

b)  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$ .

*Rezolvare:*

a) Cum funcția  $f$  este continuă pe  $(-1, 1)$ , eventualele asimptote verticale pentru graficul funcției  $f$  sunt dreptele de ecuații  $x = 1$  și  $x = -1$ .

Calculăm:  $l_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$ ,  $l_d(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$ .

Prin urmare, dreptele de ecuații  $x = 1$  și  $x = -1$  sunt asimptote verticale ale graficului funcției  $f$ .

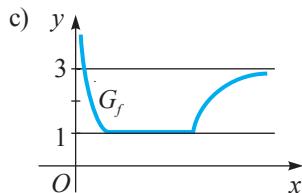
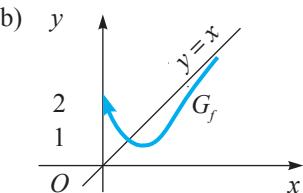
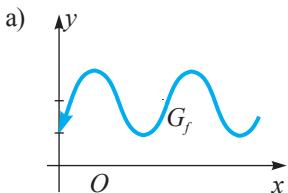
b) Am stabilit (modulul 2) că  $l_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$  și  $l_d\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ .

Deci, dreptele de ecuații  $x = \frac{\pi}{2}$  și  $x = -\frac{\pi}{2}$  sunt asimptote verticale pentru graficul funcției  $f$ .

## Exerciții propuse

## Profilul real

**A<sub>1</sub>** 1. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :



2. Să se scrie o funcție al cărei grafic are asimptote verticale drepte de ecuație  $x_k = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**B<sub>1</sub>** 3. (BAC, 2007). Completăți caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

„Ecuația asimptotei orizontale la  $+\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{7-9x+8x^2}{3x^2+2x+5}$ , este   .”

4. Fie  $f: \mathbb{R} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - c}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Să se determine valorile reale ale parametrilor  $a, b, c$ , astfel încât dreptele de ecuație  $x = 2$  și  $y = 3x + 1$  să fie asimptote ale graficului funcției  $f$ .

5. Să se determine valorile reale  $a$  și  $b$  pentru care dreptele  $x = 1$  și  $x = 2$  sunt asimptote verticale ale graficului funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{2x^2 + ax + b}$ .

**C<sub>1</sub>** 6. Să se determine asimptotele graficului funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  fiind domeniul maxim de definiție:

a)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ;      b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ;      c)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ .

7. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției:

a)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ ;

b)  $f: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ ;

c)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ ;

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ .

## Exerciții și probleme recapitulative

### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se anulează cel puțin o dată pe mulțimea indicată:
- $f(x) = -x^4 + 2x + 1$  pe  $\mathbb{R}$ ;
  - $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x - \frac{3}{2}$  pe  $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ;
  - $f(x) = \ln(1+x) + \sqrt{x} - 1$  pe  $I = [0, 1]$ .
2. Să se afle punctele de discontinuitate și tipul lor pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x-1, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$
  - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x=1; \end{cases}$
  - $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + x^3}{x^{2n} + 1};$
  - $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$
- B<sub>1</sub>** 3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ae^x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{b}}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$   
Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ , știind că  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .
4. Să se precizeze dacă este mărginită funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1};$
  - $f(x) = \sin x^2;$
  - $f(x) = x + \sin x;$
  - $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctgx.$
5. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue și  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{Q}$ .  
Să se demonstreze că  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
6.  **Lucrați în perechi!** Să se determine valorile parametrului  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}, & \text{dacă } x \geq 1 \\ \alpha x + 3, & \text{dacă } x < 1, \end{cases}$  să fie continuă în punctul  $x_0 = 1$ .
- C<sub>1</sub>** 7. Funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ , are proprietatea că  $f(-2) \cdot f(2) < 0$  și totuși ecuația  $f(x) = 0$  nu are soluții. Cum se explică?
8. Să se arate că ecuația  $f(x) = 0$  are soluții pe intervalul indicat pentru funcția:
- $f(x) = -x^3 + 8x + 30$ ,  $\mathbb{R}$ ;
  - $f(x) = x^4 - 3x + 1$ ,  $[0, 1]$ ;
  - $f(x) = (x-2)\sin \pi x$ ,  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .
9. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația:
- $x^4 - 9x^2 > 0;$
  - $(x^2 - 16)\ln x < 0;$
  - $(|x| - 1)(\ln x + 2) > 0.$
10. Se consideră ecuația  $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Să se arate că pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  ecuația are o soluție în intervalul  $[-1, 1]$ .
11.  **Investigați!** Să se determine valoarea parametrului  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , pentru care graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + a}$ ,  $D$  fiind domeniul maxim de definiție al funcției  $f$ , admite o singură asimptotă verticală.

12. Să se verifice dacă graficul funcției admite asimptote și să se completeze spațiile punctate.

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , și  $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

și  $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , rezultă că graficul funcției  $f$  ..., dar este posibil ca graficul funcției  $f$  să admită asimptotă oblică. Cum  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  și  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  nu există, rezultă că graficul funcției  $f$  ...

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x}$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{-x} = e^{-x_0}$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , rezultă că dreapta de ecuație  $x = x_0$  ... Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , rezultă că graficul funcției  $f$  ... Deoarece  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , rezultă că dreapta de ecuație  $x = 0$  este ...

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{dacă } x > 0 \\ 1, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$  Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , iar  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ , rezultă că dreapta de ecuație  $x = 0$  este ... Cum  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , rezultă că la  $+\infty$  graficul funcției  $f$  ...

### Test sumativ

Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

#### *Profilul real*

1. Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Determinați valoarea de adevăr a propoziției:  
„Funcția este mărginită, însă nu-și atinge marginile”. A / F

(3)

2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ c \cdot \cos x + d, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$   $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- 1) Determinați valorile reale ale parametrilor  $a, b, c, d$  astfel încât:

(4)

a) funcția  $f$  să fie continuă la stânga în punctul  $x = 0$ ;

(4)

b) funcția  $f$  să fie continuă la dreapta în punctul  $x = 0$ ;

(4)

c) funcția  $f$  să fie continuă în punctul  $x = 0$ .

(4)

- 2) În cazurile a) și b) să se calculeze saltul funcției  $f$  în punctul  $x = 0$ .

(4)

3. Arătați că ecuația  $\ln x + 2x = 0$  are o soluție  $x_0$  în intervalul  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ .

(4)

4. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

(4)

a)  $x^4 - 4x^2 < 0$ ;

(4)

b)  $(x^2 - 4)\ln x > 0$ .

5. Determinați asimptotele graficului funcției  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$ .

(5)

### Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–17	16–11	10–7	6–4	3–2	1–0

## Funcții continue

### Definiția continuătății

Funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) se numește **continuă în punctul  $x_0 \in E$**  dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **continuă pe  $E$**  dacă ea este continuă în orice punct  $x \in E$ .

### Criterii de continuitate

Funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) este continuă în punctul  $x_0 \in E$  dacă este adevarată una dintre *propozitiile*:

1.  $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ .
2. Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$ , astfel încât pentru orice  $x \in E$  din  $|x - x_0| < \delta$  rezultă că  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  (Cauchy).
3. Pentru orice sir  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in E$ , din  $x_n \rightarrow x_0$  rezultă că  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  când  $n \rightarrow \infty$ .

### Continuitatea la stânga (dreapta)

Funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) se numește **continuă la stânga (dreapta) în punctul  $x_0 \in E$**  dacă există limita ei la stânga (dreapta) în  $x_0$  și  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ .

### Clasificarea punctelor de discontinuitate

Dacă funcția  $f$  nu este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , atunci  $x_0$  se numește **punct de discontinuitate** al acestei funcții.

Punctul de discontinuitate  $x_0$  se numește **punct de discontinuitate de speță înălță** pentru funcția  $f$  dacă limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0$  există și sunt finite, însă  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$  sau  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ .

Diferența  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  se numește **saltul funcției în punctul  $x_0$** .

Punctul de discontinuitate  $x_0$  se numește **punct de discontinuitate de speță a două** dacă cel puțin una dintre limitele laterale  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$  este infinită sau nu există.

### Clase de funcții continue

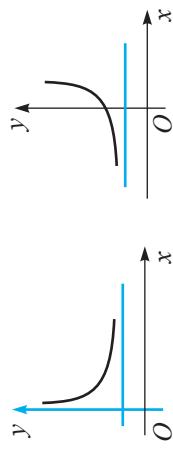
1. Fie  $f$  și  $g$  funcții continue. Atunci  $af$  ( $a \in \mathbb{R}$ ),  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g(x) \neq 0$ ) sunt funcții continue.

2. Combinarea a două funcții continue este o funcție continuă.

3. Orice funcție elementară este continuă pe tot domeniul ei de definiție.

### Asimptote

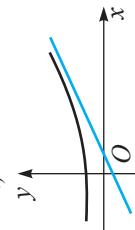
1. Dacă  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$  ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ ), atunci dreapta de ecuație  $y = l$  este **asimptotă orizontală** la  $+\infty$  (la  $-\infty$ ) a graficului funcției  $f$ .



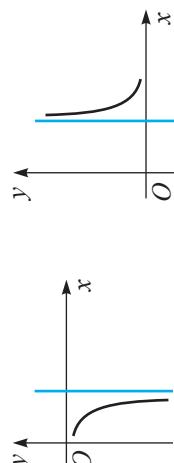
2. Dacă există și sunt finite limitele

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

și  $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ , atunci dreapta de ecuație  $y = mx + n$ ,  $m \neq 0$ , este **asimptotă oblică** la  $+\infty$  a graficului funcției  $f$ . (Similar pentru  $-\infty$ .)



3. Dacă  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ( $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ) este  $+\infty$  sau  $-\infty$ , atunci dreapta de ecuație  $x = a$  este **asimptotă verticală la stânga (dreapta)** a graficului funcției  $f$ .



**Obiective**

- ⇒ \*utilizarea în diverse contexte, inclusiv în comunicare, a terminologiei aferente noțiunilor *derivata funcției* și *diferențiala funcției*;
- ⇒ \*aplicarea definiției derivatei la calculul derivatelor unor funcții elementare; utilizarea în diferite contexte a formulelor obținute;
- ⇒ \*aplicarea regulilor de derivare și a formulelor derivatelor la rezolvarea problemelor;
- ⇒ \*calculul diferențialelor unor funcții elementare și utilizarea formulelor respective în multiple contexte;
- ⇒ \*utilizarea proprietăților funcțiilor derivabile la rezolvarea problemelor;
- ⇒ \*conceperea metodelor calculului diferențial ca metode noi de rezolvare a unor probleme teoretice și practice, de identificare și explicare a unor procese și fenomene utilizând derivata funcției, funcțiile derivabile și diferențiala funcției.



I. Newton

Probleme diverse de matematică (studiul variației funcției și trasarea graficului ei, probleme de maxim și minim etc.), de fizică (viteza și accelerația unui mobil, intensitatea curentului electric, densitatea liniară de masă a unei bare metalice etc.), de economie (costurile și beneficiile), probleme de calcul aproximativ, precum și altele, în care prezintă interes rata vreunei schimbări, se rezolvă prin aplicarea directă a noțiunii *derivata funcției*, care este unul dintre concepțele fundamentale ale *analizei matematice*. Istoria atribuie în egală măsură acest concept savanților I. Newton<sup>1</sup> și G. W. Leibniz<sup>2</sup>.

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor poartă denumirea de *calcul diferențial*. Obiectul calculului diferențial îl constituie funcțiile, iar *derivata* unei funcții reprezintă măsura în care funcția reacționează la schimbarea argumentului.



G. W. Leibniz

<sup>1</sup> Isaac Newton (1642–1727) – fizician, matematician și astronom englez.

<sup>2</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – filozof și matematician german.

## §1 Notiunea de derivată

Noțiunea *derivată funcției* este bazată pe noțiunile *creșterea argumentului* și *creșterea funcției*.

### 1.1. Creșterea argumentului și creșterea funcției

Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde intervalul deschis  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  și  $x$  un punct arbitrar dintr-o vecinătate oarecare a punctului  $x_0$ .

**Definiție.** Diferența  $x - x_0$  se numește **creșterea argumentului**  $x$  în punctul  $x_0$ .

Se notează:  $x - x_0 = \Delta x$ .

**Definiție.** Diferența  $f(x) - f(x_0)$  se numește **creșterea funcției**  $f$  în punctul  $x_0$  corespunzătoare creșterii argumentului cu  $\Delta x$ .

Se notează:  $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ .

Din  $x - x_0 = \Delta x$  rezultă că  $x = x_0 + \Delta x$ .

Atunci  $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ .

#### Exercițiu rezolvat

¶ Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x$ . Să se calculeze  $\Delta x$  și  $\Delta f$ , dacă  $x_0 = 1$  și:

- a)  $x = 1,5$ ;    b)  $x = 0,9$ .

Rezolvare:

a)  $\Delta x = x - x_0 = 1,5 - 1 = 0,5$ ;

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1,5) - f(1) = 2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1 = 1;$$

b)  $\Delta x = x - x_0 = 0,9 - 1 = -0,1$ ;

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = 2 \cdot 0,9 - 2 \cdot 1 = -0,2.$$

¶ **Observație.** Atât creșterile argumentului, cât și creșterile funcției pot fi pozitive, negative sau nule.

Interpretarea geometrică a creșterilor  $\Delta x$  și  $\Delta f(x_0)$  este reprezentată în figura 4.1.

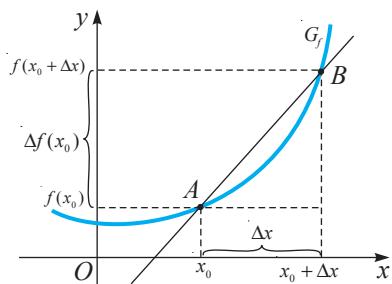


Fig. 4.1

### 1.2. Probleme care au condus la notiunea de derivată

Două probleme clasice, una de geometrie (despre tangenta la o curbă plană) și alta de fizică (despre viteza instantanee a unui mobil), au condus la notiunea de derivată. Aceste probleme au fost cercetate și rezolvate de G. W. Leibniz și respectiv de I. Newton.

### 1.2.1. Tangenta la graficul unei funcții (la o curbă plană)

Fie  $I$  un interval deschis și  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  funcție continuă.

**Observație.** Funcția este continuă pe un interval dacă graficul acesteia poate fi trasat pe acest interval fără a ridica creionul de pe hârtie.

Graficul  $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$  al funcției  $f$  este o curbă de ecuație  $y = f(x)$  (fig. 4.2). Fie  $x_0 \in I$ , punctele  $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$ ,  $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in G_f$  și dreapta  $AB$  – o secantă (față de graficul  $G_f$ ) ce formează cu axa  $Ox$  unghiul  $\beta$ . Când pe curba  $G_f$  punctul  $B$  se apropie de punctul  $A$ , adică atunci când  $\Delta x \rightarrow 0$ , secanta  $AB$  ocupă poziții diferite ( $AB_1, AB_2, \dots, AT$ ).

Spunem că dreapta  $AT$  este **tangentă** la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(x_0, f(x_0))$  dacă această dreaptă coincide cu poziția limită (în cazul în care o astfel de poziție există) a secantei  $AB$  când  $\Delta x \rightarrow 0$  (fig. 4.2).

Tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul dat  $A(x_0, f(x_0))$  poate fi determinată dacă este cunoscută panta ei.

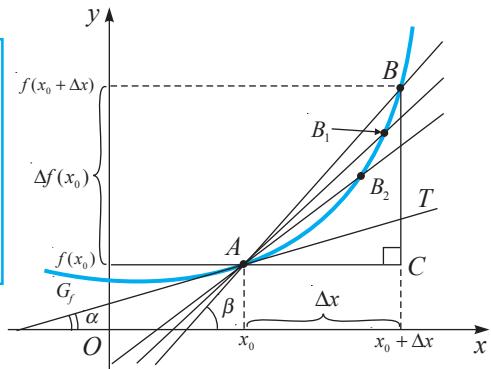


Fig. 4.2

#### Reamintim!

Panta  $m$  (sau **coeficientul unghiular**  $m$ ) a dreptei de ecuație  $y = mx + b$  este egală cu tangenta unghiului pe care îl formează această dreaptă cu direcția pozitivă a axei  $Ox$ .

Cum  $m(\angle C) = 90^\circ$  (fig. 4.2), din  $\triangle ACB$  obținem coeficientul unghiular  $m(\Delta x)$  al secantei  $AB$ :

$$m(\Delta x) = \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Trecerea la limită în formula (1), când  $\Delta x \rightarrow 0$ , conduce la studiul limitei:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Valoarea finită a acestei limite (dacă limita există) este coeficientul unghiular al dreptei tangente la graficul funcției  $f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$ . Deci,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = m. \quad (2)$$

Așadar, problema existenței tangentei la graficul funcției  $f$  într-un punct dat  $A(x_0, f(x_0))$  este în corelație cu problema existenței limitei (2).

### 1.2.2. Viteza instantanee a unui mobil

Fie un mobil se mișcă în sensul pozitiv pe o axă  $l$  conform legii  $s = s(t)$ , unde  $s(t)$  este abscisa punctului în care se află mobilul în momentul  $t$ . Altfel spus, abscisa este *distanța parcursă (spațiul parcurs)* de mobil în timpul  $t$  (fig. 4.3).

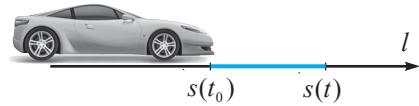


Fig. 4.3

Dacă mișcarea mobilului este uniformă, atunci pentru orice momente  $t_0, t_1$  ( $t_1 \neq t_0$ ) valoarea raportului  $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$  este constantă și este egală cu viteza mobilului.

Dacă însă mișcarea mobilului nu este uniformă, viteza lui nu este constantă. Să considerăm un moment  $t_0$  de referință. Pentru intervalul de timp  $[t_0, t]$  raportul dintre distanța parcursă și timpul scurs,  $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$  (3), se numește **viteza medie** a mobilului.

Mișcări uniforme practic nu există, dar pe intervale de timp din ce în ce mai mici, mișcarea mobilului tinde să devină uniformă. În aceste condiții, pentru  $t \rightarrow t_0$ ,  $t \neq t_0$ , viteza medie respectivă tinde la un număr, care în fizică se numește **viteza instantanee a mobilului în momentul  $t_0$** .

Așadar, definim viteza instantanee  $v(t_0)$  a mobilului în momentul  $t_0$  ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul (3) când  $t \rightarrow t_0$ , adică

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (4)$$

În mod similar, dacă  $v(t)$  este viteza instantanee a mobilului în orice moment  $t$ , atunci **accelerația instantanee a mobilului în momentul  $t_0$**  se definește ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul  $\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$  când  $t \rightarrow t_0$ , adică

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (5)$$

Exemplele prezentate demonstrează importanța studierii limitei raportului dintre creșterea funcției și creșterea argumentului când creșterea argumentului tinde la zero, deci a limitei

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6)$$

### 1.3. Noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct

**Definiție.** Fie intervalul deschis  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  și funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se spune că funcția  $f$  are derivată în punctul  $x_0$  dacă există limita  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

Această limită se numește **derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  și se notează  $f'(x_0)$ .

Dacă, în plus, limita este finită, funcția  $f$  se numește **derivabilă în punctul  $x_0$** .

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ sau } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (7)$$

Notația  $f'(x_0)$  se citește: *ef prim în punctul  $x_0$* .

**Observații.** 1. În cazul în care limita (7) este infinită sau nu există, funcția  $f$  **nu este derivabilă în punctul  $x_0$** .

2. În studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin doar valorile funcției respective într-o vecinătate a acestui punct. Din aceste motive se mai spune că **derivabilitatea funcției**, similar cu limita și \*continuitatea funcției, **este o proprietate locală a acesteia**.

3. În continuare vom studia derivata funcției pe un interval deschis  $I$  (dacă nu se specifică altceva).

**Atenție!** 1. Revenind la exemplele din fizică (formulele (4) și (5)), deducem:

- a)  $v(t_0) = s'(t_0)$  – viteza instantanee a unui mobil în momentul  $t_0$  este valoarea derivatei distanței (spațiului) în  $t_0$ ;
- b)  $a(t_0) = v'(t_0)$  – accelerarea instantanee a unui mobil în momentul  $t_0$  este valoarea derivatei vitezei în  $t_0$ .

2. Formulele  $v(t) = s'(t)$  și  $a(t) = v'(t)$  exprimă sensul fizic (mecanic) al derivatei: *derivata distanței  $s$  în raport cu timpul  $t$  este viteza  $v$  a mișcării unui mobil, iar derivata vitezei  $v$  în raport cu timpul  $t$  este accelerarea  $a$  a aceluiasi mobil*.

**Definiții.** • Se spune că funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) este **derivabilă pe mulțimea  $M$**  ( $M \subseteq I$ ) dacă ea este derivabilă în orice punct din  $M$ .

• În acest caz, funcția  $f': M \rightarrow \mathbb{R}$ , care asociază fiecărui punct  $x \in M$  numărul real  $f'(x)$ , se numește **derivata funcției  $f$  pe mulțimea  $M$** .

• Operația prin care din  $f$  se obține  $f'$  se numește **derivare**.

**Observație.** Derivata funcției  $f$  se notează:  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{d}{dx}(f)$ ,  $y'$ ,  $f'$ , unde  $y = f(x)$ .

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și să se calculeze derivata ei, dacă:

- a)  $f(x) = 2x$ ;
- b)  $f(x) = x^2$ .

*Rezolvare:*

a) Funcția  $f$  definită prin formula  $f(x) = 2x$  este derivabilă în orice punct din  $\mathbb{R}$ , deoarece limita  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{\Delta x} = 2$  există pentru orice  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Deci,  $f'(x) = (2x)' = 2$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Funcția  $f$  definită prin formula  $f(x) = x^2$  este derivabilă în orice punct din  $\mathbb{R}$ , deoarece limita  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$  există pentru orice  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Deci,  $(x^2)' = 2x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Din definiția derivatei rezultă următorul *algoritm de calcul al derivatei unei funcții  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  într-un punct și pe o mulțime*:

- ① Se ia o creștere arbitrară  $\Delta x$  a argumentului  $x$  în punctul  $x_0$ , astfel încât  $x_0 + \Delta x \in I$ .
- ② Se determină creșterea funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .
- ③ Se alcătuiește raportul  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .
- ④ Se calculează limita acestui raport:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ .
- ⑤ Se trage concluzia referitoare la derivabilitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .
- ⑥ Se studiază derivabilitatea funcției  $f$  pe intervalul  $I$ .

**Definiție.** Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Mulțimea punctelor în care funcția  $f$  este derivabilă se numește **domeniu de derivabilitate al funcției  $f$** .

Se notează:  $D_{f'}$ . Evident,  $D_{f'} \subseteq I$ .

**Observație.** În continuare, în cazul în care nu este indicat domeniul de definiție al funcției  $f$ , se va considera că această funcție este definită pe domeniul ei maxim de definiție.

## 1.4. Derivabilitate și continuitate

O condiție necesară de existență a derivatei unei funcții într-un punct este formulată în

**Teorema 1.** Dacă o funcție este derivabilă într-un punct, atunci ea este continuă în acest punct.

### Demonstrație

Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in D$  un punct în care funcția  $f$  este derivabilă, adică există și este finită limita (6). Din relația  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$ ,  $\Delta x \neq 0$ ,  $x \in D$ ,

rezultă că  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$ .

Deci,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ , adică  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , de unde rezultă că funcția  $f$  este continuă în  $x_0$ . ►

Reciproca acestei teoreme este falsă. De exemplu, funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , este continuă în punctul  $x_0 = 0$ , dar nu este derivabilă în acest punct (fig. 4.4).

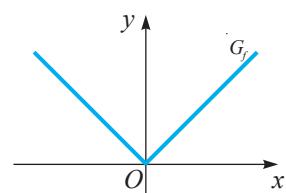


Fig. 4.4

Pentru a demonstra această propoziție, vom calcula limita raportului  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$  în punctul  $x_0 = 0$ . Calculăm limitele laterale ale funcției  $f$  în  $x_0$ :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ .

Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x}$ , rezultă că limita raportului  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$  în punctul  $x_0 = 0$  nu există. Deci, funcția  $f$ , continuă în  $x_0 = 0$ , nu este derivabilă în acest punct.

## 1.5. Derivate laterale

În anumite situații vom studia limitele laterale ale raportului  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ .

**Definiție.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  – interval deschis) și  $x_0 \in I$ . Limita  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numește **derivata la stânga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  și se notează  $f'_s(x_0)$ .

$$\text{Rețineți: } f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \quad (8)$$

**Definiție.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  – interval deschis) și  $x_0 \in I$ . Limita  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numește **derivata la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  și se notează  $f'_d(x_0)$ .

$$\text{Rețineți: } f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \quad (9)$$

**Definiție.** Funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **derivabilă la stânga** (respectiv **derivabilă la dreapta**) **în punctul  $x_0 \in I$**  dacă limita (8) (respectiv limita (9)) există și este finită.

Astfel, revenind la exemplul precedent, conchidem că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , este derivabilă la stânga și la dreapta în punctul  $x_0 = 0$ :  $f'_s(0) = -1$ ,  $f'_d(0) = 1$ .

Reamintim că unul dintre criteriile de existență a limitei unei funcții într-un punct constă în egalitatea limitelor ei laterale în acest punct. Un criteriu similar există și pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct.

**Teorema 2.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ . Funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă ea este derivabilă la stânga și la dreapta în  $x_0$  și  $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ . În acest caz,  $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$ .

Demonstrația teoremei 2 rezultă direct din teorema 2, modulul 2, secvența 1.3.

**Observație.** Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . În punctele  $a$  și  $b$  putem vorbi doar despre derivata la dreapta, respectiv la stânga, în aceste puncte. Nu are sens problema derivatei la stânga în  $a$  și nici a derivatei la dreapta în  $b$ .

### Exemple

1. Pentru funcția  $f(x) = |x|$  avem  $f'_s(0) = -1$  și  $f'_d(0) = 1$ . Cum  $f'_s(0) \neq f'_d(0)$ , rezultă că funcția  $f$  nu este derivabilă în punctul  $x_0 = 0$ .

2. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{2|x-1|}$ , nu este derivabilă în punctul  $x_0 = 1$ , deoarece derivatele ei laterale există, dar sunt infinite. (Verificați!)

3. Fie funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$  Există  $f'_d(0) = 1$ , însă nu există  $f'_s(1)$ , deoarece  $f$  nu este nici continuă în  $x = 1$ .

### Exerciții propuse

#### Profilul real

A<sub>1</sub> 1. Să se calculeze, în punctul  $x_0 = \frac{1}{2}$ , creșterea argumentului și creșterea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , dacă: a)  $x = 2$ ; b)  $x = 0,7$ ; c)  $x = -\sqrt{3}$ ; d)  $x = -4,2$ .

2. Să se calculeze derivata funcției:

- |   |  |
|---|--|
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = -\frac{1}{2}$ ; | b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 3x - 1$ ;        |
| c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 3x^2$ ;         | d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{1}{x}$ . |

3. Să se calculeze, aplicând definiția derivatei,  $f'(-1)$ ,  $f'(0)$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f'(10)$ , dacă:

- |   |  |
|---|--|
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 0,5x$ ; | b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = -2x + 3$ . |
|---|--|

4.  **Lucrați în perechi!** Să se traseze dreptele ce trec prin punctul  $(1, 3)$  și au panta:

- |                         |                         |                                  |
|-------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| a) $-1$ și $\sqrt{3}$ ; | b) $1$ și $-\sqrt{3}$ ; | c) $0$ și $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . |
|-------------------------|-------------------------|----------------------------------|

În fiecare caz, să se determine ce tip de unghi formează aceste drepte cu direcția pozitivă a axei absciselor.

B<sub>1</sub> 5. Să se studieze derivabilitatea funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- |   |   |
|---|---|
| a) $f(x) =  x-2 $ , în $x_0 = 2$ ;      | b) $f(x) =  x^2 - 4 $ , în $x_0 = -2$ , $x_1 = 2$ ; |
| c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ , în $x_0 = 1$ . |   |

6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  în punctele  $x_0$  și  $x_1$ :

- a)  $f(x) = x + |x|$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -2$ ;      b)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$ ;  
 c)  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ,  $x_0 = 0,5$ ,  $x_1 = 1$ ;      d)  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ,  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ .

7.  **Investigați!** Să se studieze, în punctul  $x_0 = 0$ , continuitatea și derivabilitatea funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = |\sin x|$ ;      b)  $f(x) = |\cos x|$ ;  
 c)  $f(x) = \frac{2}{|x+1|}$ ;      d)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2x^2 + x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

**C<sub>1</sub>** 8. Să se afle:

- a)  $m \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  să fie derivabilă în  $x_0 = 0$ ;  
 b)  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  să fie derivabilă în  $x_0 = 0$ .

9. Să se afle  $m, n \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2 \ln x, & \text{dacă } 0 < x \leq e \\ mx + n, & \text{dacă } x > e, \end{cases}$  să fie derivabilă în orice punct  $x \in (0, +\infty)$ .

10. Să se afle valorile parametrilor reali  $a, b$  și  $c$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

să fie derivabilă în punctul  $x_0 = 0$ .

## §2 Interpretarea geometrică a derivatei

Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) o funcție derivabilă în punctul  $x_0 \in I$  și  $G_f$  graficul ei (fig. 4.5).

Prezentăm, fără demonstrație, două teoreme.

**Teorema 3.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0$ , atunci la graficul ei în punctul  $(x_0, f(x_0))$  poate fi trasată o tangentă neverticală, având panta egală cu  $f'(x_0)$ .

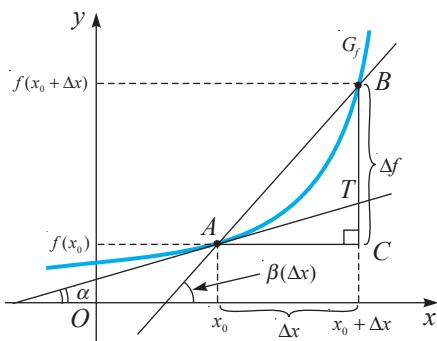


Fig. 4.5

**Teorema 4.** Dacă la graficul funcției  $f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$  poate fi trasată o tangentă neverticală, atunci funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0$  și panta  $m$  a acestei tangente este egală cu valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$  ( $m = f'(x_0)$ ).

Sensul geometric al derivatei unei funcții  $f$  derivabile într-un punct  $x_0$  rezultă din teoremele 3 și 4: existența derivatei finite a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este echivalentă cu existența tangentei nevercicale la graficul funcției  $f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$ , astfel încât panta acestei tangente este egală cu  $f'(x_0)$ .

**Rețineți:** Tangenta la graficul funcției  $f$  derivabile în punctul  $x_0$  este dreapta ce trece prin punctul  $(x_0, f(x_0))$ , a cărei pantă  $m$  este egală cu  $f'(x_0)$ , adică  $m = f'(x_0) = \tan \alpha$ .

Să determinăm ecuația tangentei în punctul  $(x_0, f(x_0))$  al graficului funcției  $f$  derivabile în  $x_0$ . Știind că ecuația dreptei care are coeficientul unghiular  $f'(x_0)$  este  $y = f'(x_0) \cdot x + b$ , să determinăm coeficientul  $b$ . Cum tangenta trece prin punctul  $(x_0, f(x_0))$ , obținem că  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$ , de unde  $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ . Astfel, tangenta în punctul  $(x_0, f(x_0))$  al graficului funcției  $f$  derivabile în punctul  $x_0$  este **dreapta de ecuație**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad . \quad (*)$$

### Exerciții rezolvate

1. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , în punctul de abscisă  $x_0 = 2$ .

*Rezolvare:*

$f'(x) = (x^2)' = 2x$ . Atunci  $f'(x_0) = 2 \cdot 2 = 4$ , iar  $f(x_0) = 2^2 = 4$ . Substituind în (\*), obținem  $y = 4 + 4 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$ , care este ecuația cerută a tangentei.

**Observatie.** Dacă  $f'(x_0) = \infty$  ( $f'(x_0) = +\infty$  sau  $f'(x_0) = -\infty$ ), atunci dreapta tangentă în punctul  $(x_0, f(x_0))$  al graficului  $G_f$  al funcției  $f$  continue în punctul  $x_0$  este paralelă cu axa  $Oy$ , adică tangentă are ecuația  $x = x_0$ .

Dacă  $f'(x_0) = +\infty$ , atunci în vecinătatea punctului  $A(x_0, f(x_0))$  graficul  $G_f$  are forma reprezentată în figura 4.6:

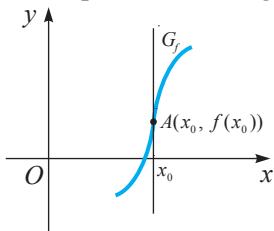


Fig. 4.6

Dacă  $f'(x_0) = -\infty$ , atunci în vecinătatea punctului  $A(x_0, f(x_0))$  graficul  $G_f$  are forma reprezentată în figura 4.7:

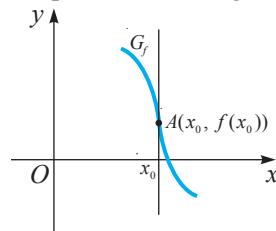


Fig. 4.7

2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Să se afle măsura unghiului format de tangentă la graficul  $G_f$  în punctul de abscisă  $x_0$  și de direcția pozitivă a axei  $Ox$ , dacă:

- a)  $x_0 = 0$ ;      b)  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

*Rezolvare:*

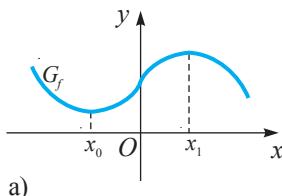
Deoarece pantă tangentei este  $m = \tan \alpha = f'(x_0)$ , unde  $\alpha$  este măsura unghiului format de tangenta la graficul  $G_f$  în punctul de abscisă  $x_0$  și de direcția pozitivă a axei  $Ox$ , obținem:

- a)  $\tan \alpha = f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ , deci  $\alpha = 0$ ;      b)  $\tan \alpha = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ , deci  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

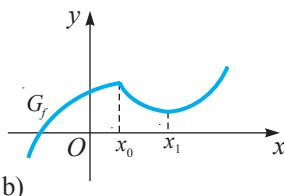
## Exerciții propuse

## Profilul real

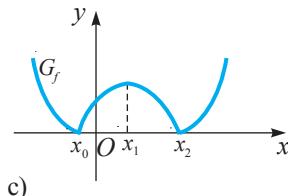
- A<sub>1</sub>** 1. **Investigați!** Să se determine, utilizând interpretarea geometrică a derivatei, dacă funcția  $f$  este derivabilă în punctele de abscise indicate:



a)



b)



c)

2. **Lucrați în perechi!** Să se traseze graficul unei funcții care nu este derivabilă în punctele  $x_0 = 3$  și  $x_1 = 5$ .

3. Să se scrie, aplicând definiția derivatei sau formula respectivă, ecuația tangentei la graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  în punctul de abscisă  $x_0$ :

a)  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 1$ ;      b)  $f(x) = 2x^2 - 1$ ,  $x_0 = 0$ ;      c)  $f(x) = 2 - x^2$ ,  $x_0 = -2$ .

4. Să se afle măsura unghiului format de tangentă la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x_0$  și de direcția pozitivă a axei  $Ox$ :

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 0$ ;      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ ,  $x_0 = 1$ .

5. **Lucrați în perechi!** Să se traseze graficul unei funcții, astfel încât tangenta la acest grafic în punctul de abscisă  $x_0 = -1$  să fie dreapta de ecuație:

a)  $y = 0$ ;      b)  $y = 2$ .

- B<sub>1</sub>** 6. Să se studieze derivabilitatea funcției  $f$  în punctele specificate și să se interpreteze geometric rezultatul obținut:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x^2 - 9|$ ,  $x_0 = -3$ ,  $x_1 = 3$ ;

b)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |\lg x - 1|$ ,  $x_0 = 10$ .

7. Aplicând definiția derivatei, să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ , în punctul de abscisă:

1)  $x_0 = -0,5$ , 2)  $x_0 = 2$ , 3)  $x_0 = -5$ ;

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$ , în punctul de abscisă:

1)  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , 2)  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ , 3)  $x_0 = -\frac{\pi}{6}$ .

8. a) Să se determine pentru fiecare dintre funcțiile  $f$ ,  $g$ ,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 2x^2 - x, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ x^2, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad h(x) = |x^2 - 9|;$$

1) mulțimea punctelor pe care funcția este continuă;

2) mulțimea punctelor pe care funcția este derivabilă.

b) Să se schițeze graficele acestor funcții.

9. La graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$ , este trasată tangentă paralelă cu axa absciselor. Să se determine coordonatele punctului de tangență.

10. Să se determine coordonatele punctului în care tangenta, dusă la graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , este paralelă cu dreapta  $4x - y + 1 = 0$ .
11. Să se afle măsura unghiului de intersecție a tangentelor duse la graficele funcțiilor  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ , și  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .
12. Să se determine punctele ce aparțin graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ , astfel încât tangentele trasate în aceste puncte să formeze un unghi de  $\frac{\pi}{4}$  cu axa  $Ox$ .
13. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 13$ , dacă tangenta trece prin punctul  $A(2, 8)$ .
- C 14. Să se afle coeficienții  $b, c \in \mathbb{R}$ , știind că în punctul de coordonate  $(-1, -2)$  parabola  $f(x) = x^2 + bx + c$  are ca tangentă dreapta de ecuație  $y = 2x$ .
15. Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(x) = \arctg x$ , și  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{\pi + 2 \ln x}{4}$ .
- Să se demonstreze că graficele funcțiilor  $f$  și  $g$  sunt tangente.
  - Să se scrie ecuația tangentei comune.
16. **Investigați!** Să se dea exemple de funcții derivabile pe un interval:
- cu excepția unui punct;
  - cu excepția a două puncte.

### §3 Derivatele unor funcții elementare

**Exercițiu.** Fie  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x$ . Să se calculeze derivata funcției  $f$ .

Pentru a calcula derivata funcției  $f$ , precum și derivele altor funcții, este util să fie cunoscute formulele de calcul al derivatelor funcțiilor elementare.

#### 3.1. Funcția constantă

**Teorema 5.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

##### Demonstrație

Fie  $x_0$  un punct arbitrar din  $\mathbb{R}$ . Avem  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$ .

Cum  $x_0$  a fost luat arbitrar, rezultă că funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . ►

**Rețineți:**  $c' = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . (1)

##### Exemplu

Pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2020$ , obținem  $(2020)' = 0$ .

**Observație.** A se face distincție între numerele  $f'(x_0)$  și  $(f(x_0))'$ , ultimul fiind 0 ca derivata unei funcții constante.

### 3.2. Funcția identică

**Teorema 6.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

#### Demonstrație

Fie  $x_0$  un punct arbitrar din  $\mathbb{R}$ . Avem  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ .

Cum  $x_0$  a fost luat arbitrar, rezultă că funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . ►

**Rețineți:**  $x' = 1$ .

(2)

### 3.3. Funcția putere cu exponent real

**Teorema 7.** Fie  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $(0, +\infty)$  și  $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ .

**Rețineți:**  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ ;

(3)

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $\forall x \in [0, +\infty)$ .

(3')

**Observații.** 1. Pentru  $\alpha \geq 1$ , funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^\alpha$ , este derivabilă și în  $x_0 = 0$ .

2. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = nx^{n-1}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

3. APLICÂND FORMULA (3), OBȚINEM:

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

$$4. (\sqrt[2n+1]{x})' = \frac{1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

5. Funcția definită prin formula  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , nu este derivabilă în punctul  $x_0 = 0$  (deoarece derivatele laterale în punctul 0 sunt infinite).

#### Exercițiu rezolvat



Să se calculeze:

a)  $(x^{-\sqrt{2}})'$ ;      b)  $(\sqrt{x})'$ ;      c)  $(\sqrt[3]{x})'$ .

Rezolvare:

a)  $(x^{-\sqrt{2}})' = -\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1}$ ;      b)  $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$ ;

c)  $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$ .

Relația  $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$  are loc și pentru orice  $x \in (-\infty, 0)$ .

**Rețineți:**  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x \in (0, +\infty)$ . (4)

Pentru funcția radicală  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , obținem:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \forall x \in D \setminus \{0\} . \quad (5)$$

### 3.4. Funcția sinus

**Teorema 8.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = (\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstrație**

Fie  $x_0$  un punct arbitrar din  $\mathbb{R}$ . Avem  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0.$$

Cum  $x_0$  a fost luat arbitrar, rezultă că funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ . ►

**Rețineți:**  $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ . (6)

### 3.5. Funcția cosinus

**Teorema 9.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos x$ . Funcția cosinus este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $(\cos x)' = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Rețineți:**  $(\cos x)' = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ . (7)

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 9.

### 3.6. Funcția exponentială

**Teorema 10.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Rețineți:**  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . (8)

**Consecință.** Aplicând formula (8), obținem  $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Rețineți:**  $(e^x)' = e^x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . (8')

De exemplu:

a)  $(2^x)' = 2^x \ln 2$ ;      b)  $((0,3)^x)' = (0,3)^x \ln 0,3$ .

### 3.7. Funcția logaritmică

**Teorema 11.** Fie  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $(0, +\infty)$  și  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ .

**Rețineți:**  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ . (9)

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 11.

**Teorema 12.** Fie  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $(0, +\infty)$  și  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ .

**Rețineți:**  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ . (10)

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 12.

*Indicație.* Se va ține cont de definiția derivatei, de formula  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  și de formula (9).

De exemplu:

a)  $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$ ;      b)  $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ .

### Exerciții propuse

#### Profilul real

**A1** 1. Să se calculeze derivata funcției  $f$  și să se determine domeniul de derivabilitate  $D_f$ :

- |   |  |
|---|--|
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^8$ ;                          | b) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^{-7}$ ;  |
| c) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ;                | d) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , $f(x) = 3^x$ ;       |
| e) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ; | f) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \log_3 x$ ;  |
| g) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ ;       | h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \sqrt[5]{x}$ . |

- 2.** Să se calculeze valoarea derivatei funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = \log_7 x$ , în  $x_0 = 7$ ;
  - $f(x) = \lg x$ , în  $x_0 = \frac{1}{10}$ ;
  - $f(x) = x^2$ , în  $x_0 = 60$ ;
  - $f(x) = \sqrt{x}$ , în  $x_0 = 49$ ;
  - $f(x) = 2^x$ , în  $x_0 = 5$ ;
  - $f(x) = 25$ , în  $x_0 = -64$ .
- 3.**  **Lucrați împreună!** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  în punctul de abscisă  $x_0$ :
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 1$ ;
  - $f(x) = 2^x$ ,  $x_0 = 0$ ;
  - $f(x) = \log_8 x$ ,  $x_0 = 2$ ;
  - $f(x) = x^5$ ,  $x_0 = -1$ .
- 4.** Să se afle  $f'(0)$  și  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , dacă:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$ ;
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \cos x$ .
- B<sub>1</sub>** **5.** Să se calculeze derivata funcției  $f$  și să se determine domeniul de derivabilitate  $D_f$ :
- $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{x}$ ;
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$ .
- 6.** Să se calculeze derivata funcției  $f$  și să se determine domeniul de derivabilitate  $D_{f'}$ , dacă  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ;
  - $f(x) = \sqrt{|x|}$ ;
  - $f(x) = \log_{0,4}(x^2)$ ;
  - $f(x) = 2^{|x|}$ .
- 7.** Să se calculeze derivele laterale ale funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = |\cos x|$ , în  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ;
  - $f(x) = |2x|$ , în  $x_0 = 0$ ;
  - $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -2x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ , în  $x_0 = 0$ .
- 8.** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  în punctul de abscisă  $x_0$ :
- $f(x) = 7x^2$ ,  $x_0 = -3$ ;
  - $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ;
  - $f(x) = \log_{27}(x^3)$ ,  $x_0 = 27$ ;
  - $f(x) = 2,5^x$ ,  $x_0 = 1$ .
- C<sub>1</sub>** **9.** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} mx + n, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$ . Să se determine valorile parametrilor reali  $m$  și  $n$ , astfel încât funcția  $f$  să fie derivabilă în punctul  $x_0 = 0$ .
- 10.**  **Investigă!** Să se determine valorile parametrilor reali  $m$  și  $n$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} me^{2x} + n, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \sin 2x + n \cos 2x, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$  să fie:
- continuă pe  $\mathbb{R}$ ;
  - derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .
- 11.** (BAC, 2007). Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care tangenta la graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ , în punctul de abscisă  $x_0 = a$  intersectează axa absciselor în unul dintre punctele intervalului  $[0, 1]$ .

## §4 Operații cu funcții derivabile

### 4.1. Derivata sumei, a produsului și a câtului

**Exercițiu.** Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = e^x$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Să se calculeze:

- a)  $(f + g)'$ ;      b)  $(c \cdot f)'$ ;      c)  $(f - g)'$ ;
- d)  $(f \cdot g)'$ ;      e)  $\left(\frac{f}{g}\right)'$ ;      f)  $((f \circ g))'$ .

Pentru a rezolva acest exercițiu, trebuie să cunoaștem regulile de calcul al derivatelor.

**Teorema 13.** Dacă funcțiile  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) sunt derivabile în punctul  $x_0 \in I$ , atunci funcția  $f + g$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

#### Demonstrație

$$\begin{aligned} \text{Avem } (f + g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Corolar.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe intervalul  $I$ , atunci funcția  $f + g$  este derivabilă pe  $I$  și  $(f + g)' = f' + g'$ . (1)

#### Exemplu

Pentru funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) + g(x) = x^3 + e^x$ , conform formulei (1), obținem:

$$(x^3 + e^x)' = (x^3)' + (e^x)' = 3x^2 + e^x.$$

**Observație.** Aplicând metoda inducției matematice, se poate arăta că suma  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  a  $n$  funcții derivabile pe intervalul  $I$  este o funcție derivabilă pe  $I$  și

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n f'_k. \quad (1')$$

**Exercițiu.** Deduceți formula (1').

**Teorema 14.** Dacă funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) este derivabilă în punctul  $x_0 \in I$  și  $c \in \mathbb{R}$ , atunci funcția  $c \cdot f$  este derivabilă în  $x_0$  și  $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ .

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 14.

**Corolare. 1.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $I$  și  $c \in \mathbb{R}$ , atunci funcția  $c \cdot f$  este derivabilă pe  $I$  și  $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ . (2)

#### Exemplu

Pentru funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sqrt{3} \cdot e^x$ , obținem  $(\sqrt{3} \cdot e^x)' = \sqrt{3} \cdot (e^x)' = \sqrt{3}e^x$ .

- 2.** Pentru  $c = -1$  avem  $(-f)' = -f'$ .
- 3.** Dacă funcțiile  $f, g$  sunt derivabile pe intervalul  $I$ , atunci funcția  $f - g$  este derivabilă pe  $I$  și  $(f - g)' = f' - g'$ . (3)

**Exemplu**

Pentru funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x^3 - e^x$ , obținem:

$$(x^3 - e^x)' = (x^3)' - (e^x)' = 3x^2 - e^x.$$

**Teorema 15.** Dacă funcțiile  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) sunt derivabile în punctul  $x_0 \in I$ , atunci funcția  $f \cdot g: I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

**Demonstrație**

Fie  $x_0 \in I$ . Funcția  $g$ , fiind derivabilă în  $x_0$ , este și continuă în  $x_0$ , adică  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ .

$$\text{Atunci } (f \cdot g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \quad \blacktriangleright$$

**Corolar.** Dacă funcțiile  $f, g$  sunt derivabile pe intervalul  $I$ , atunci funcția  $f \cdot g$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \quad (4)$$

**Exemplu**

Pentru funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \cdot e^x$ , obținem:

$$(x^3 \cdot e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

**Observație.** Aplicând metoda inducției matematice, se poate arăta că produsul  $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$  a  $n$  funcții derivabile pe intervalul  $I$  este o funcție derivabilă pe  $I$  și

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f'_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f'_2 \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f'_n.$$

**Teorema 16.** Dacă funcțiile  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) sunt derivabile în punctul  $x_0 \in I$  și  $g(x_0) \neq 0$ , atunci funcția  $\frac{f}{g}$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

### Demonstrație

Cum funcția  $g$  este continuă și  $g(x_0) \neq 0$ , rezultă că există o vecinătate  $V(x_0)$  în care  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in V(x_0)$ . Considerăm  $\Delta x$ , astfel încât  $x_0 + \Delta x \in V(x_0)$ . Atunci

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

( $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$ , deoarece funcția  $g$  este continuă în  $x_0$ ). ►

**Corolarul 1.** Dacă funcțiile  $f, g$  sunt derivabile pe intervalul  $I$  și  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I$ , atunci funcția  $\frac{f}{g}$  este derivabilă pe  $I$  și  $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}} \quad . \quad (5)$

**2.** Pentru  $f = 1$ , aplicând formula (5), obținem:  $\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}} \quad . \quad (6)$

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze derivata funcției  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{x^3}{e^x}$ .

*Rezolvare:*

$$h'(x) = \left( \frac{x^3}{e^x} \right)' = \frac{(x^3)' \cdot e^x - x^3 \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{3x^2 e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 e^x (3 - x)}{e^{2x}} = \frac{x^2 (3 - x)}{e^x}.$$

## 4.2. Derivata funcțiilor tangentă, cotangentă

**Teorema 17.** Fie  $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  și  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

### Demonstrație

$$\begin{aligned} f'(x) = (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad ► \end{aligned}$$

**Rețineți:**  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (7)

**Teorema 18.** Fie  $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cot x$ . Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  și  $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Rețineți:**  $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . (8)

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 18.

### 4.3. Derivarea funcției compuse

**Teorema 19.** Fie  $I_1, I_2$  intervale și funcțiile  $f: I_1 \rightarrow I_2$ ,  $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă funcția  $f$  este derivabilă în  $x_0 \in I_1$ , iar funcția  $g$  este derivabilă în punctul  $y_0 = f(x_0) \in I_2$ , atunci funcția compusă  $h = g \circ f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă în  $x_0 \in I_1$  și  $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ .

Reținem regula de derivare a funcției compuse:

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \forall x \in I \quad . \quad (9)$$

**Corolar.** Dacă funcțiile  $f: I_1 \rightarrow I_2$ ,  $g: I_2 \rightarrow I_3$ ,  $h: I_3 \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile, atunci funcția compusă  $p(x): I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x) = (h \circ g \circ f)(x)$  este derivabilă pe  $I_1$  și

$$p'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad . \quad (10)$$

#### Exercițiu rezolvat

- ↳ Să se calculeze derivata funcției:
- $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 2^{3x}$ ;
  - $p: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x) = \log_2 \cos 2x$ .

*Rezolvare:*

- $(2^{3x})' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot (3x)' = \ln 8 \cdot 2^{3x}$ .
- $(\log_2 \cos 2x)' = \log'_2(\cos 2x) \cdot \cos'(2x) \cdot (2x)' =$   
 $= \frac{1}{\cos 2x \cdot \ln 2} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x \ln 2} = -\frac{2 \tan 2x}{\ln 2}$ .

## 4.4. Derivarea funcției inverse

**Teorema 20.** Fie  $f: I \rightarrow J$  ( $I, J \subseteq \mathbb{R}$ ) o funcție continuă și inversabilă. Dacă funcția  $f$  este derivabilă în  $x_0 \in I$  și  $f'(x_0) \neq 0$ , atunci funcția inversă  $f^{-1}: J \rightarrow I$ , unde  $J = f(I)$ , este derivabilă în punctul  $y_0 = f(x_0)$  și  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Observație.** Fie funcția  $f: I \rightarrow J$  strict monotonă, derivabilă pe intervalul  $I$  și  $f'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ . Prin urmare, funcția inversă  $f^{-1}: J \rightarrow I$  este derivabilă pe intervalul  $J$  și

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall y \in J, \text{ unde } y = f(x) \quad (11)$$

### Exerciții rezolvate

#### 1. Derivata funcției arcsinus

Fie funcția  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$ . Să se calculeze  $(f^{-1})'$ .

*Rezolvare:*

În orice punct  $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  avem  $(\sin)'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$  și sunt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția  $f^{-1} = \arcsin$  este derivabilă în orice punct  $y_0 \in (-1, 1)$ .

Notăm  $y_0 = \sin x_0$ . Atunci  $\arcsin y_0 = x_0$ . Aplicând formula (11), obținem:

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}, \quad \forall y_0 \in (-1, 1).$$

Revenind la notațiile uzuale, reținem formula:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (12)$$

#### 2. Derivata funcției arccosinus

Fie funcția  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \cos x$ . Să se calculeze  $(f^{-1})'$ .

*Rezolvare:*

Raționând în mod analog sau aplicând relația  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ , obținem formula:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (13)$$

#### 3. Derivata funcției arctangentă

Fie funcția  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Să se calculeze  $(f^{-1})'$ .

*Rezolvare:*

În orice punct  $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  avem  $(\operatorname{tg})'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} \neq 0$  și sunt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția  $f^{-1} = \operatorname{arctg}$  este derivabilă în orice punct  $y_0 \in \mathbb{R}$ , unde  $y_0 = \operatorname{tg} x_0$ .

$$\text{Obținem } (\arctg)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Revenind la notațiile uzuale, obținem formula:

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (14)$$

#### 4. Derivata funcției arccotangentă

Fie funcția  $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ . Să se calculeze  $(f^{-1})'$ .

*Rezolvare:*

Raționând în mod similar, obținem formula:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

#### 4.5. Derivarea funcției de tipul $f(x) = u(x)^{v(x)}$ , unde $u(x) > 0$

Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = u(x)^{v(x)}$ , unde  $u(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Această funcție, în caz general, nefiind nici funcție putere, nici funcție exponențială, nu poate fi derivată aplicând formulele (3), (8) din § 3, ci aplicând identitatea logaritmică fundamentală  $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}$ . Funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$ , astfel obținută, este o funcție compusă. Derivând-o, obținem:

$$f'(x) = (e^{v(x)\ln u(x)})' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = u(x)^{v(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))'. \quad (16)$$

De aici rezultă formula pentru derivata funcțiilor de tipul  $f(x) = u(x)^{v(x)}$ , unde  $u(x) > 0$ :

$$(u^v)' = u^v \cdot \left( v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right). \quad (17)$$

#### Exercițiu rezolvat

4. Să se calculeze derivata funcției:

a)  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = x^x$ ; b)  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{\sqrt{x}} \lg 5x$  (a se vedea exercițiul de la începutul § 3).

*Rezolvare:*

a) Conform formulei (16),  $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$ .

Deci,  $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x^x)' = x^x (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$ .

b)  $f'(x) = (x^{\sqrt{x}} \lg 5x)' = (x^{\sqrt{x}})' \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x}} \cdot (\lg 5x)'$ . Să calculăm întâi derivata funcției  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^{\sqrt{x}}$ .

Aplicând formula (17) și formula  $(\ln u^v)' = (v \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$ , obținem  $(\ln x^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{x^{\sqrt{x}}} \cdot (x^{\sqrt{x}})'$ , sau  $(x^{\sqrt{x}})' = \frac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ . Atunci

$$f'(x) = \frac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{x \ln 10} = 0,5(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}-0,5} \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x}-1} \lg e.$$

## 4.6. Derivate de ordin superior

Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe intervalul  $I$ . Valorile lui  $f'(x)$  depind, în general, de  $x$ , adică derivata funcției  $f$  este, la rândul său, o funcție de  $x$ . Prin urmare, poate fi pusă problema derivării funcției  $f'$ .

### Exercițiu rezolvat

Să se calculeze derivata derivatei funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 e^x$ .

*Rezolvare:*

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x.$$

$$\text{Atunci } (f'(x))' = (2xe^x + x^2 e^x)' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

**Definiție.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se spune că **funcția  $f$  este derivabilă de două ori într-un punct  $x_0 \in I$**  dacă funcția  $f$  este derivabilă într-o vecinătate a lui  $x_0$  și funcția  $f'$  este derivabilă în  $x_0$ .

În acest caz, derivata funcției  $f'$  în punctul  $x_0$  se numește **derivata de ordinul doi** (sau **derivata a doua**) a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și se notează  $f''(x_0)$ .

$$\text{Așadar, } f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

**Observație.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă de două ori în orice punct al intervalului  $I$ , atunci se spune că funcția  $f$  este derivabilă de două ori pe acest interval.

### Exemple

1. Pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ , obținem:  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ,  $f''(x) = 6x - 6$ .

2. Pentru funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \cos x$ , avem:  $g'(x) = -\sin x$ ,  $g''(x) = -\cos x$ .

Similar se definește **derivata de ordinul trei** (sau **derivata a treia**) a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ . Se notează:  $f'''(x_0)$ .

\*În mod analog se definește **derivata de ordinul  $n$** ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ . Se notează  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ . Uneori,  $f^{(n)}(x)$  se notează  $\frac{d^n f}{dx^n}$ . (Optional)

**Observații.** 1. Ordinul derivatei se scrie între paranteze, pentru a nu fi confundat cu exponentul puterii (exclusiv cazurile în care ordinul derivatei se notează cu cifre romane).

2. S-a convenit ca derivata de ordinul zero a funcției  $f$  să fie considerată însăși funcția  $f$ , adică  $f^{(0)} = f$ .

### Exemple

1. Pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ , obținem:  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(IV)}(x) = \sin x$ . Aplicând metoda inducției matematice, se poate demonstra formula:

$$*(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{Optional})$$

**2\***. Similar obținem formula:  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . (Opțional)

**3.** Pentru funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^x$ , obținem:  $g'(x) = e^x$ ,  $g''(x) = e^x$ ,  $g'''(x) = e^x$ .

\* **Rețineți:**  $(e^x)^{(n)} = e^x$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (Opțional)

## Exerciții propuse

### *Profilul real*

- A<sub>1</sub>** 1. Să se calculeze: 1)  $f'$ ; 2)  $f''$ ; 3)  $f'''$ , pentru funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- a)  $f(x) = 5x^6$ ;      b)  $f(x) = \pi e^x$ ;      c)  $f(x) = -0,5 \log_{\frac{1}{3}} x$ ;
  - d)  $f(x) = x^3 - 5x^2$ ;      e)  $f(x) = 7x^2 - 3x + 2$ ;      f)  $f(x) = 2 \log_5 x + 2010$ .
2. Să se determine domeniul de definiție  $D_f$ , să se calculeze  $f'$  și să se determine domeniul de derivabilitate  $D_{f'}$  pentru funcția  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ :
- a)  $f(x) = x + \sqrt{x}$ ;      b)  $f(x) = \log_3 x + x^5$ ;      c)  $f(x) = xe^x$ ;      d)  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ ;
  - e)  $f(x) = \sqrt[3]{x} \log_{\frac{1}{5}} x$ ;      f)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ ;      g)  $f(x) = \frac{x}{x^3 + 2x}$ ;      h)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ;
  - i)  $f(x) = \frac{e^x}{x - 3}$ ;      j)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$ ;      k)  $f(x) = -4 \log_2 \sqrt{2x}$ .
3. Să se calculeze  $f'$  în punctul  $x_0$ , dacă:
- a)  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ ,  $x_0 = \sqrt{2}$ ;      b)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x} \log_5 2x$ ,  $x_0 = 0,25$ .
4. Dintr-un punct pleacă un mobil care efectuează o mișcare descrisă de ecuația  $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 7t$  ( $s$  este distanța exprimată în metri, iar  $t$  – timpul exprimat în secunde). Să se determine:
- a) formula de calcul al vitezei mobilului;      b) viteză mobilului în momentul  $t = 2$  s;
  - c) peste câte secunde mobilul se va opri.
5.  **Lucrați în perechi!** Dintr-un punct pleacă concomitent două mobile ale căror ecuații de mișcare sunt  $s_1(t) = 6t^2 + 4t$  și  $s_2(t) = t^3 + 3t^2 + 6t$ , unde distanța  $s$  se exprimă în metri, iar timpul  $t$  – în secunde.
- a) Să se determine momentele de întâlnire a acestor mobile.
  - b) Să se determine formulele vitezelor și ale accelerărilor celor două mobile.
  - c) Să se determine vitezele și accelerăriile mobilelor în momentele de întâlnire.
  - d) Să se determine momentele în care vitezele și respectiv accelerările lor sunt egale.

- B<sub>1</sub>** 6. Să se calculeze  $f'$  pentru funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = x^{25} - \sqrt{x} + \cos x$ ;      b)  $f(x) = \sin x + \log_{0,3} x - \sqrt[3]{x}$ ;      c)  $f(x) = 5 \ln x + \sqrt{3x} - \frac{5}{x^2}$ ;
- d)  $f(x) = \sqrt[6]{2x} + 7e^x - \frac{1}{3}x^{-9}$ ;      e)  $f(x) = \sqrt{5} \cos x - 7 \sin x - 4 \ln x$ ;      f)  $f(x) = 5\sqrt[4]{x} \cdot \sin x$ ;
- g)  $f(x) = 8x^3 \ln x$ ;      h)  $f(x) = 6 - 0,6x^{-5} \log_3 x$ ;      i)  $f(x) = 5 \ln(x^2 - 3x)$ ;
- j)  $f(x) = \sqrt{2} \log_5^3 \operatorname{tg} x$ ;      k)  $f(x) = 6^{3x} \sin^2 4x$ ;      l)  $f(x) = \frac{\cos(3x^2 - 1)}{\ln^2 x}$ .

7. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \cos^2 2x$ , în  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ; b)  $f(x) = \lg^2(3x - 1)$ , în  $x_0 = \frac{2}{3}$ ; c)  $f(x) = x^{\sqrt{x+2}}$ , în  $x_0 = 1$ .

8.  **Lucrați împreună!** Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrilor reali  $a$ ,  $b$  și  $c$ , astfel încât funcția  $f$  să fie derivabilă în punctul  $x_0 = 0$ .

9. Să se scrie cel puțin o funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a cărei derivată este:

a)  $f'(x) = 2 - \cos x$ ; b)  $f'(x) = -2e^{2x}$ ; c)  $f'(x) = 2 \sin 2x$ .

10. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $f'(x) = 0$ , dacă:

a)  $f(x) = 2 \sin^2 x + \sqrt{2}x$ ; b)  $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x$ .

11. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $f'(x) > 0$ , dacă:

a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$ ; b)  $f(x) = 3x + \cos(6x - \pi)$ .

12. Să se calculeze  $f''$  pentru funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6$ ;	b) $f(x) = 2 \sin 3x$ ;	c) $f(x) = 5e^{-2x}$ ;
d) $f(x) = \sqrt{3-x^2}$ ;	e) $f(x) = \ln x$ ;	f) $f(x) = \arccos \frac{x}{3}$ ;
g) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ;	h) $f(x) = \frac{3^{2x}}{(x-1)^2}$ ;	i) $f(x) = (\sqrt{x})^{x-1}$ .

13. Să se calculeze  $f''(x) - 5f'(x) + 3f(x)$ , știind că  $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

14. Să se calculeze  $f'''$  pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 4$ ;	b) $f(x) = 3 \cos \frac{x}{2}$ ;	c) $f(x) = \sqrt{2}e^{-3x}$ ;
d) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ;	e) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$ ;	f) $f(x) = \ln(-5x)$ .

15.  **Lucrați împreună!** Un mobil se deplasează conform ecuației de mișcare  $s(t) = \sqrt{t}$ .

Să se demonstreze că accelerarea mobilului este proporțională cu cubul vitezei lui.

16. Să se afle forța  $F$  ce acționează în momentul  $t = 3$  asupra unui mobil de masă  $m$ , care efectuează o mișcare descrisă de ecuația  $s(t) = 4t^3 - t^2$  (masa  $m$  este exprimată în kilograme, distanța  $s$  – în metri, timpul  $t$  – în secunde).

17. Legea de mișcare a unui mobil cu masa de 5 kg este  $S(t) = 5t^2 - 2t + 1$  (masa este exprimată în kilograme, distanța  $S$  – în metri, timpul  $t$  – în secunde).

- a) Să se afle viteza mobilului în momentul  $t = 3$  s.
- b) Să se determine accelerarea acestui mobil în momentul  $t = 5$  s.
- c) Să se afle energia cinetică a mobilului în momentul  $t = 10$  s.

18.  **Lucrați împreună!** Un corp este lansat vertical în aer cu viteza inițială de 100 m/s.

- a) Să se afle timpul de ascensiune.
- b) Să se determine înălțimea la care ajunge acest corp.
- c) Să se afle timpul de cădere.
- d) Să se determine viteza cu care corpul atinge solul.

19. Fie funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ . Să se arate că  $f''(x) + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$ .
20. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-2x}(\cos x + \sin x)$ . Să se arate că  $f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 0$ .
- C 21. (BAC, 2018) Fie funcția  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^2 x$ . Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $f'(x) = 2\sqrt{3}f(x)$ .
22. Să se calculeze  $f'''(0)$ , dacă  $f(x) = e^{2x} \cdot x^3$ .
23.  **Investigați!** Să se afle valorile reale ale parametrilor  $m$  și  $n$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} mx + n, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x-1}{x^2+1}, & \text{dacă } x \in (0, +\infty), \end{cases}$  să fie derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

## §5 Diferențiala unei funcții

Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) o funcție derivabilă pe intervalul  $I$  și  $x_0 \in I$ . Atunci, conform definiției derivatei, avem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Din (1) și din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad (2)$$

unde  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ . Folosind relația (2), obținem

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \text{sau} \\ \Delta f(x_0) &= f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (3)$$

Din relația (3) rezultă că creșterea  $\Delta f(x_0)$  a funcției  $f$  derivabile în punctul  $x_0$  se exprimă ca o sumă de doi termeni: termenul  $f'(x_0) \cdot \Delta x$ , care este direct proporțional cu creșterea argumentului, și termenul  $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , unde  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  când  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Definiție.** Funcția liniară  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ , se numește **diferențiala funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  și se notează  $df(x_0)$ .

Deci,  $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ . (4)

### Exercițiu rezolvat

 Să se calculeze diferențiala funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ .

*Rezolvare:*

Cum  $f'(x_0) = 1$ , obținem  $dx = \Delta x$ . În baza relației (4),  $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ .

**Consecință.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă în orice punct din  $I$ , obținem formula:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx, \quad \forall x \in I. \quad (5)$$

**Exemple**

1. Pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$ , obținem:

$$df(x) = d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

2. Pentru funcția  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \log_8 x$ , avem:

$$dg(x) = d(\log_8 x) = \frac{1}{x \ln 8} dx = \frac{dx}{x \ln 8}.$$

Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții  $f$  derivabile într-un punct  $x_0$  este reprezentată în figura 4.8. Trasăm tangenta la graficul  $G_f$  în punctul  $A(x_0, f(x_0))$ . Avem  $\Delta x = AB$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{BC}{AB}$  (a se vedea  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle B) = 90^\circ$ ).

Atunci  $BC = f'(x_0) \cdot AB$ , sau  $BC = f'(x_0) \Delta x = df(x_0)$ .

Deci, interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții  $f$  într-un punct  $x_0$  este următoarea:  $\Delta f(x_0)$  reprezintă creșterea ordonatei funcției  $f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$ , ce corespunde creșterii  $\Delta x$  a argumentului ei, iar  $df(x_0)$  – creșterea ordonatei tangentei la graficul  $G_f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$ , care corespunde aceleiași creșteri  $\Delta x$  a argumentului funcției  $f$  (fig. 4.8).

Formulele (3) și (4) implică următoarea relație de aproximare:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0), \quad (6)$$

sau  $BD \approx BC$ .

Din relația (6) rezultă:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (7)$$

Pentru  $\Delta x$  suficient de mici avem  $f(x_0 + \Delta x) \approx y$ . Cu alte cuvinte, în vecinătatea punctului  $A$ , pe o porțiune suficient de mică a graficului funcției  $f$ , arcul de curbă este aproximat cu un segment al tangentei la graficul  $G_f$  în punctul  $A$ .

Formula (7) se aplică deseori la calculul aproximativ al valorii unei funcții într-un punct indicat.

**Observații.** 1. Aplicând formula (7), se pot deduce formulele:

$$1) \sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x. \quad (8)$$

$$2) (1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (9)$$

2. Formulele (7)–(9) pot fi aplicate doar pentru valori suficient de mici ale lui  $\Delta x$ .

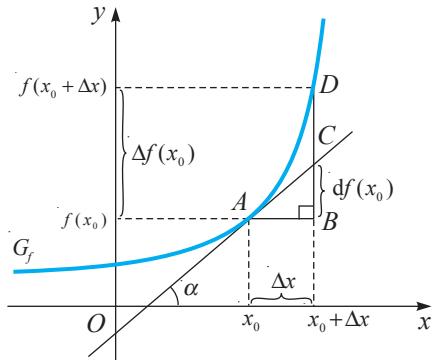


Fig. 4.8

Din definiția diferențialei unei funcții rezultă că tabloul derivatelor funcțiilor elementare se poate transcrie în tabloul diferențialelor funcțiilor respective:

$$d(c) = 0, \quad c \in \mathbb{R};$$

$$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}};$$

$$d(a^x) = a^x \ln a \, dx;$$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2};$$

$$d(\sin x) = \cos x \, dx;$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2};$$

$$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$d(e^x) = e^x \, dx;$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x};$$

$$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a};$$

$$d(\cos x) = -\sin x \, dx;$$

$$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Regulilor de derivare (harta națională a modulului 4) le corespund reguli similare de diferențiere.

### Exemple

1.  $d(e^x \cdot x^3) = e^x \cdot x^3 \cdot dx + 3x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 e^x (x+3) dx.$
2.  $d(\sin 3x) = 3 \cos 3x dx.$

### Exerciții propuse

#### Profilul real

**A<sub>1</sub>** 1. Să se calculeze diferențiala funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- |                       |                            |                        |
|-----------------------|----------------------------|------------------------|
| a) $f(x) = x^3 + 2x;$ | b) $f(x) = \frac{x}{1-x};$ | c) $f(x) = \sin(x+1);$ |
| d) $f(x) = 2^{3x};$   | e) $f(x) = \cos 2x.$       |                        |

2. Să se calculeze diferențiala funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| a) $f(x) = x \cdot \log_2 x;$                         | b) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x};$      |
| c) $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg}(x+5) - \ln 5x;$ | d) $f(x) = 3 \ln \frac{x}{3} + 5.$ |

3. Să se calculeze diferențiala funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- |   |   |
|---|---|
| a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}, \text{ în } x_0 = -2;$ | b) $f(x) = \sin x - \cos x, \text{ în } x_0 = \frac{\pi}{3};$ |
| c) $f(x) = \log_2(x^2 + 3), \text{ în } x_0 = 1;$ | d) $f(x) = (x-1)^3 - \ln x, \text{ în } x_0 = 2.$             |

**B<sub>1</sub>** 4. Să se calculeze diferențiala funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- |  |  |
|--|--|
| a) $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4 - x^{-7};$                  | b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} - \ln(x^2 - 1) + 7;$ |
| c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt[5]{x^2 - x}.$ |  |

5. Să se calculeze diferențiala funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = \sin 2x - \cos^3 x + 5$ , în  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ;
  - $f(x) = \arctg 3x + 5 \arccos x$ , în  $x_0 = 1$ ;
  - $f(x) = -\sqrt{5} \cdot 7^{x^2} + \arcsin \frac{x}{3}$ , în  $x_0 = 0$ ;
  - $f(x) = x^3 e^{2x}$ , în  $x_0 = 2$ .
6.  **Lucrați în perechi!** Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4$ , și  $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \ln(x-1)$ . Să se calculeze diferențiala funcției:
- $f(g(x))$ ;
  - $g(f(x))$ .
7. Să se calculeze diferențiala funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = \sin^2(x^4)$ ;
  - $f(x) = \arctg\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ ;
  - $f(x) = 5^{\operatorname{ctg}\frac{2}{x}}$ .
- C** 8. Să se calculeze diferențiala funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = x^{\sin x}$ ;
  - $f(x) = x^{\ln x}$ ;
  - $f(x) = (x-1)^{3x}$ .
9.  **Investigați!** Se consideră funcția:
- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-|x-1|}$ ;
  - $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x+1| e^{-|x|}$ .
- Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$ .
  - Să se calculeze diferențiala funcției  $f$ .

## §6 Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

În continuare vom pune în evidență unele proprietăți generale ale funcțiilor derivabile. Teoremele ce urmează sunt **teoreme fundamentale ale analizei matematice**.

### 6.1. Teorema lui Fermat

#### Reamintim!

Punctele de maxim (minim) local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.



**Teorema 21 (teorema lui Fermat<sup>1</sup>).** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe intervalul  $I$  și  $x_0 \in I$ . Dacă  $x_0$  este un punct de extrem local al funcției  $f$ , atunci  $f'(x_0) = 0$ .

#### Demonstrație

Pierre de Fermat

Presupunem că  $x_0$  este un punct de maxim local al funcției  $f$ .

Atunci există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$  ( $V(x_0) \subset I$ ), astfel încât  $f(x) \leq f(x_0)$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ . Pentru  $x \in V(x_0)$ ,  $x < x_0$ , avem  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , iar pentru  $x \in V(x_0)$ ,  $x > x_0$ , obținem  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ .

<sup>1</sup> Pierre de Fermat (1601–1665) – matematician francez.

Deoarece funcția  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , rezultă că  $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ , unde  $f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ ,  $f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ .

Deci,  $f'(x_0) \geq 0$  și  $f'(x_0) \leq 0$ , de unde rezultă că  $f'(x_0) = 0$ .

Teorema se demonstrează similar și în cazul în care  $x_0$  este un punct de minim local al funcției  $f$ . Pentru acest caz teorema mai poate fi demonstrată substituind în demonstrația de mai sus  $f$  cu  $-f$ . ►

*Interpretare geometrică.* În condițiile teoremei lui Fermat, tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$  este paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 4.9).

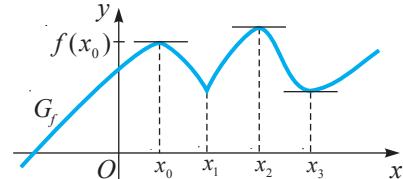


Fig. 4.9

**Observație.** Teorema lui Fermat exprimă doar *condiția necesară* pentru ca funcția derivabilă  $f$  să aibă în punctul  $x_0$  extrem local. Din faptul că derivata funcției  $f$  se anulează în  $x_0$  încă nu rezultă, în mod obligatoriu, că această funcție are în  $x_0$  extrem local.

De exemplu, derivata funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , se anulează în  $x_0 = 0$ , însă  $x_0 = 0$  nu este punct de extrem local pentru funcția  $f$  (fig. 4.10).

Acest exemplu demonstrează că reciproca teoremei lui Fermat este falsă.

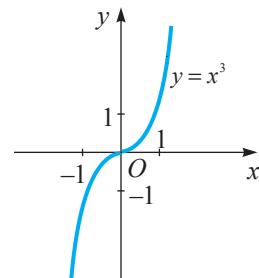


Fig. 4.10

## 6.2. Teorema lui Rolle

Următoarea teoremă, foarte utilă în aplicații, este o consecință a proprietăților funcțiilor continue și a teoremei lui Fermat.

**Teorema 22 (teorema lui Rolle<sup>1</sup>).** Dacă funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) este continuă pe  $[a, b]$ ,
  - 2) este derivabilă pe  $(a, b)$  și
  - 3)  $f(a) = f(b)$ ,
- atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $f'(c) = 0$ .



### Demonstratie

Funcția  $f$ , fiind continuă pe  $[a, b]$ , conform teoremei II Weierstrass (modulul 3, secvența 2.1), este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.

Michel Rolle

Fie  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $m, M \in \mathbb{R}$ . Sunt posibile cazurile:  $m = M$ ;  $m < M$ .

<sup>1</sup> Michel Rolle (1652–1719) – matematician francez.

1) Dacă  $m = M$ , atunci funcția  $f$  este constantă pe  $[a, b]$ .

Prin urmare,  $f'(c) = 0$  pentru orice  $c \in (a, b)$ .

2) Dacă  $m < M$ , atunci  $f$  nu este o funcție constantă pe  $[a, b]$ . Din condiția  $f(a) = f(b)$  rezultă că funcția  $f$  nu-și atinge cel puțin una dintre margini,  $m$  sau  $M$ , în extremitățile segmentului  $[a, b]$ . Adică, există un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $f(c) = m$  sau  $f(c) = M$ . Cum  $c$  este un punct de extrem local, conform teoremei lui Fermat,  $f'(c) = 0$ . ►

**Observație.** Orice funcție cu proprietățile 1) și 2) se numește **funcție Rolle**.

*Interpretare geometrică.* Dacă segmentul determinat de punctele  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  este paralel cu axa  $Ox$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încât tangenta în punctul  $(c, f(c))$  al graficului funcției derivabile  $f$  este paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 4.11).

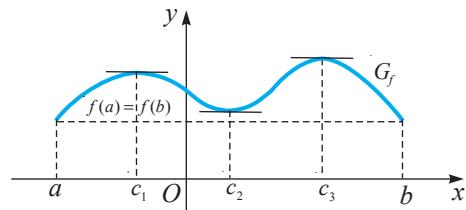


Fig. 4.11

### Exemplu

Funcția  $f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$ , verifică următoarele condiții:

- 1) este continuă pe  $[-1, 0]$ ,
- 2) este derivabilă pe  $(-1, 0)$ ,
- 3)  $f(-1) = f(0) = 1$ .

Conform teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct  $c \in (-1, 0)$ , astfel încât  $f'(c) = 0$ . Să determinăm acest punct  $c$ .

Avem  $f'(x) = 6x^2 - 2 = 0$  cu  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (-1, 0)$ ,  $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0)$ . Așadar,  $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Observații.** 1. Punctul  $c$  din teorema lui Rolle nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

2. Dacă se renunță la cel puțin una dintre ipotezele teoremei lui Rolle, atunci concluzia teoremei este falsă.

**Exercițiu.** Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 2, & \text{dacă } x = 0, \end{cases} \quad I = [0, 1];$
- b)  $f(x) = 2x, \quad I = [0, 1];$
- c)  $f(x) = |x|, \quad I = [-1, 1].$

Determinați care dintre condițiile teoremei lui Rolle nu se verifică și convingeți-vă că, în acest caz, concluzia teoremei lui Rolle este falsă.

### Corolare ale teoremei lui Rolle

1. Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval se află cel puțin un zero al derivatei acestei funcții (fig. 4.12).

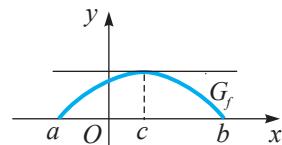


Fig. 4.12

**2.** Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval se află cel mult un zerou al acestei funcții (fig. 4.13).

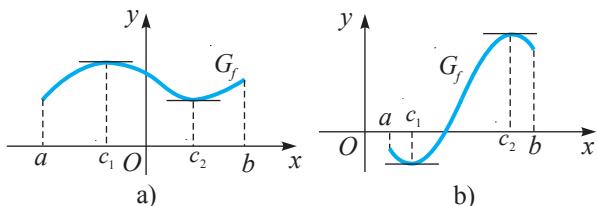
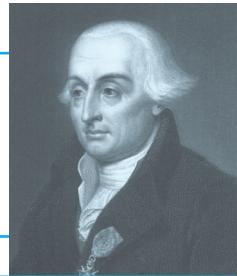


Fig. 4.13

### 6.3. Teorema lui Lagrange

**Teorema 23 (teorema lui Lagrange<sup>1</sup>).** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dacă funcția  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ .



#### Demonstrație

Considerăm funcția auxiliară  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = f(x) - mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Funcția  $F$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$ . Determinăm constanta  $m \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $F(a) = F(b)$ , adică  $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Cum funcția  $F$  satisface condițiile teoremei lui Rolle, rezultă că există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $F'(c) = 0$ .

Din relațiile  $F'(x) = f'(x) - m$  și  $F'(c) = 0$  rezultă că  $f'(c) = m$ .

Prin urmare,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , sau  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$  (1). ►

*Interpretare geometrică.* Graficul funcției  $f$  admite tangentă în orice punct  $x \in (a, b)$ . Dreapta care trece prin punctele  $A(a, f(a))$  și  $B(b, f(b))$  are panta  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_1$ , iar tangentă la graficul funcției  $f$  în punctul  $(c, f(c))$  are panta  $f'(c) = m_2$ . Cum  $m_1 = m_2$ , rezultă că aceste drepte sunt paralele.

Așadar, în condițiile teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct al graficului  $G_f$  în care tangenta este paralelă cu secanta  $AB$  (fig. 4.14).

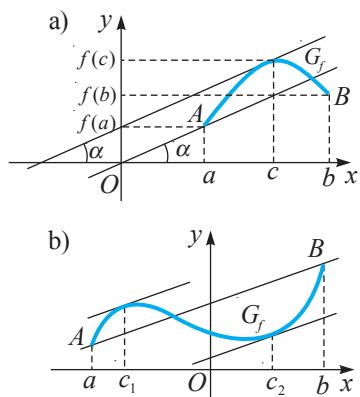


Fig. 4.14

↳ Să se aplique teorema lui Lagrange funcției  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 6 - 2x^2, & x \in [0, 1], \\ \frac{4}{x}, & x \in (1, 2], \end{cases}$$

și să se determine efectiv  $c$ .

<sup>1</sup> Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – matematician și mecanic francez.

*Rezolvare:*

Funcția  $f$  este continuă și derivabilă pe fiecare dintre intervalele  $[0, 1)$  și  $(1, 2]$ . Deoarece  $f(1-0) = f(1) = f(1+0) = 4$ , rezultă că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 1$  și deci continuă pe  $[0, 2]$ .

$$\text{Avem } f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ -\frac{4}{x^2}, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

În baza definițiilor derivatelor laterale,  $f'_s(1) = f'_d(1) = -4$ . Rezultă că  $f'(1) = -4$ . Deci, funcția  $f$  este derivabilă pe  $(0, 2)$ . Atunci, conform teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct  $c \in (0, 2)$ , astfel încât  $f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$ , adică  $f'(c) = -2$ . Înțînd cont de derivata funcției  $f$  pe intervalele indicate, obținem ecuația  $-4c = -2$  pentru  $c \in (0, 1)$  și ecuația  $-\frac{4}{c^2} = -2$  pentru  $c \in (1, 2)$ , cu soluțiile  $c_1 = 0,5$  și respectiv  $c_2 = \sqrt{2}$ . Așadar, am obținut două puncte:  $c_1$  și  $c_2$ .

*Răspuns:*  $c_1 = 0,5$ ;  $c_2 = \sqrt{2}$ .

**Observații.** 1. Formula (1) se numește **formula lui Lagrange** sau **formula creșterilor finite**.

2. Ca și în cazul teoremei lui Rolle, punctul  $c$  nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

3. Teorema lui Lagrange este o generalizare a teoremei lui Rolle.

Într-adevăr, dacă în teorema lui Lagrange se verifică și condiția  $f(a) = f(b)$ , atunci din formula (1) rezultă că  $f'(c) = 0$ , adică obținem concluzia din teorema lui Rolle.

4. Corolarul referitor la monotonie funcției se va studia în modulul 5 (teorema 2, § 1, secvența 1.1).

### **Corolare ale teoremei lui Lagrange**

1. Dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă și  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci  $f$  este constantă pe  $I$ .

2. Dacă  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile pe intervalul  $I$  și  $f' = g'$ , atunci funcția  $g - f$  este constantă pe  $I$ .

3. Fie  $f$  o funcție definită într-o vecinătate  $V$  a punctului  $x_0$ , derivabilă pe  $V \setminus \{x_0\}$  și continuă în  $x_0$ . Dacă există  $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , atunci există  $f'(x_0)$  și  $f'(x_0) = \lambda$ .

**Observație.** Corolarul 3 impune o condiție suficientă ca  $f$  să fie derivabilă în  $x_0$ . Această condiție nu este însă și necesară.

De exemplu, funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$  este continuă și derivabilă în  $x_0 = 0$ , dar  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  nu există.

## 6.4. Regulile lui l'Hospital

Unele limite de funcții pot fi calculate cu ajutorul derivatelor. Aplicarea următoarelor două teoreme, numite **regulile lui l'Hospital**<sup>1</sup>, fac posibil calculul unor limite de forma  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , în cazurile în care  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  sau dacă aceste limite sunt infinite.



Guillaume de l'Hospital

### 6.4.1. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{0}{0}$

**Teorema 24.** Fie  $I$  un interval ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ),  $x_0 \in I$  și funcțiile  $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,
- 2) funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I \setminus \{x_0\}$ ,
- 3)  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in V(x_0) \cap I$ ,
- 4) există limita (finită sau infinită)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ,

atunci există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , și 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
.

### 6.4.2. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$

**Teorema 25.** Fie  $I$  un interval,  $x_0 \in I$  și funcțiile  $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ,
- 2) funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I \setminus \{x_0\}$ ,
- 3)  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in V(x_0) \cap I$ ,
- 4) există limita (finită sau infinită)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ,

atunci există limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , și 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
.

**Observații.** 1. Teoremele 24 și 25 sunt adevărate și pentru limite laterale în punctul indicat.

2. Regulile lui l'Hospital sunt adevărate și în cazul în care  $x \rightarrow \infty$ .

3. Teoremele 24 și 25 reprezintă *condiții suficiente* pentru rezolvarea cazurilor exceptate  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$ .

4. Dacă nedeterminarea  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$  este prezentă atât în  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , cât și în  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  și dacă funcțiile  $f, g, f', g'$ , precum și ambele limite verifică condițiile regulii respective a lui l'Hospital, atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ . În acest caz se spune că s-a aplicat succesiv de două ori regula lui l'Hospital.

<sup>1</sup> Guillaume de l'Hospital (1661–1704) – matematician francez.

**Exercițiu rezolvat**

↳ Să se calculeze: 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ ; 2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x}$ .

*Rezolvare:*

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

|| **Observație.** În unele cazuri apare necesitatea de a aplica succesiv regulile lui l'Hospital de trei sau de mai multe ori.

**6.4.3. Cazurile exceptate  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$** 

Cazurile exceptate  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$  pot fi reduse la cazul exceptat  $\frac{0}{0}$  sau la cazul exceptat  $\frac{\infty}{\infty}$  prin metodele propuse în modulul 2.

**Exerciții rezolvate**

↳ 1. Să se calculeze:

$$a) \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \cdot \ln x); \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right); \quad c) \lim_{x \rightarrow +0} x^x; \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}.$$

*Rezolvare:*

a) Suntem în cazul exceptat  $0 \cdot \infty$ . Avem  $x^2 \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$ . Atunci  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , și  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ . Funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile:  $f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$  și  $g'(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ .

$$\text{Așadar, } \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \left( -\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Răspuns:  $\lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \cdot \ln x) = 0$ .

b) Avem cazul exceptat  $\infty - \infty$ . Cum  $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x}$ , obținem cazul exceptat  $\frac{0}{0}$ .

Deci,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x \operatorname{tg} x)'} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right)}{\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x \cdot \sin x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\frac{1}{2} \sin 2x + x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)'}{\left( \frac{1}{2} \sin 2x + x \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{\cos 2x + 1} = 0. \end{aligned}$$

Răspuns:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) = 0$ .

|| **Observație.** În exemplul b) am aplicat regula lui l'Hospital succesiv de două ori, deoarece, aplicând-o prima dată, am obținut iarăși cazul exceptat  $\frac{0}{0}$ .

c) Avem cazul exceptat  $0^0$ . Fie  $f(x) = x^x$ . Atunci  $\ln f(x) = x \cdot \ln x$ .

Deci,  $f(x) = e^{x \ln x}$ .

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{\left( \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ , obținem:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

Răspuns:  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ .

d) Suntem în cazul exceptat  $1^\infty$ .

Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}$ , atunci  $\ln f(x) = 2x \cdot \ln \frac{x-1}{x+1}$ .

Prin urmare,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{2x}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{2x^2}} = -4$ .

$$\text{Răspuns: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x} = e^{-4}.$$

Exercițiul d) poate fi rezolvat și cu ajutorul formulei  $u^v = e^{v \ln u}$ .

**Observație.** Regulile lui l'Hospital se folosesc și la calculul unor limite de siruri.

2. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ .

Rezolvare:

Considerăm funcția  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ , și calculăm  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Suntem în cazul exceptat  $\infty^0$ .

Logaritmând  $f(x)$ , avem cazul exceptat  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x, \text{ iar } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Prin urmare,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$ .

$$\text{Răspuns: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ .

Rezolvare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

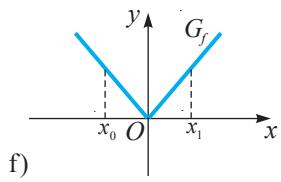
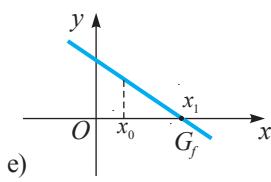
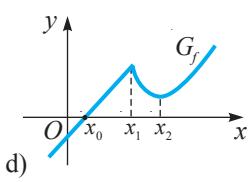
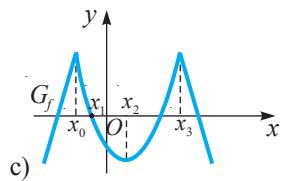
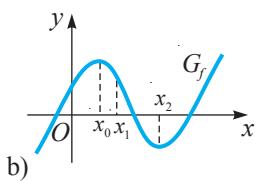
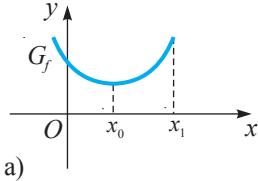
$$\text{Răspuns: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

**Observație.** În calculul limitelor de funcții se recomandă combinarea metodelor elementare cu regulile lui l'Hospital.

## Exerciții propuse

## Profilul real

- A1** 1.  **Lucrați în perechi!** Să se determine în care dintre punctele indicate sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția  $f$  definită grafic:



2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = 2x^2 - x + 3;$       b)  $f(x) = -x^2 + 2x - 3.$

1) Să se rezolve ecuația  $f'(x) = 0$  și să se determine dacă sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat în punctul  $x_0$ , unde  $x_0$  este soluția acestei ecuații.

2) Să se reprezinte graficul funcției  $f$  și să se interpreze geometric teorema lui Fermat în punctul  $x_0$ .

3. Să se determine dacă în punctul  $x_0 = 1$  sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : a)  $f(x) = (x-1)^2;$       b)  $f(x) = (x-1)^3.$

4. Să se traseze graficul unei funcții, astfel încât în punctele  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 2$  să se verifice condițiile teoremei lui Fermat.

- B1** 5.  **Investigați!** Să se dea exemple de funcții pentru care un număr finit de puncte ale intervalului respectiv sunt puncte de extrem local, dar în aceste puncte nu se verifică teorema lui Fermat.

6. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - x^3$ .

a) Să se arate că funcția  $f$  satisfacă condițiile teoremei lui Rolle pe intervalele închise  $-1 \leq x \leq 0$  și  $0 \leq x \leq 1$ .

b) Să se determine valorile corespunzătoare ale lui  $c$ .

7.  **Investigați!** Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle funcției  $f$  și, în caz afirmațiv, să se determine efectiv punctul  $c$ :

a)  $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)(x-3);$       b)  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x-2|;$

c)  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^2 x;$       d)  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos^2 x.$

8. Fie funcția  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x^2 + bx + d, & \text{dacă } x \in [0, 1]. \end{cases}$

a) Să se determine parametrii reali  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , astfel încât funcția  $f$  să satisfacă condițiile teoremei lui Rolle pe  $[-1, 1]$ .

b) Să se aplice teorema lui Rolle funcției  $f$  cu parametrii  $a, b, d$  determinați în a) și să se afle efectiv punctul  $c$ .

9.  **Lucrați în perechi!** Fie funcția:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ ;  
 b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$ .

Să se arate că derivata funcției are numai zerouri reale.

10. Să se demonstreze că ecuația  $2^x(1+x \ln 2) - 20x^9 = 0$  are cel puțin o soluție pe  $(0, 1)$ .

11. Fie  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \sin x - \cos x - 1$ . Să se arate că există cel puțin un punct  $c \in (0, 2\pi)$ , astfel încât  $f''(c) = 0$ .

12. Să se aplice teorema lui Lagrange funcției  $f$  și să se determine efectiv punctul  $c$ :

- a)  $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - x + 2$ ;  
 b)  $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x$ ;  
 c)  $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{dacă } x \in [0, 2] \\ 5x - 2, & \text{dacă } x \in (2, 3] \end{cases}$ ;  
 d)  $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^x$ .

13. Să se dea exemplu de o funcție  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  ce satisface condițiile teoremei lui Lagrange, pentru care punctul intermediar  $c \in (0, 8)$  nu este unic.

14. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4 \ln x + 3x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ . Să se afle  $f'(1)$ .

15.  **Investigați!** Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + |x|$ , poate avea un extrem într-un punct  $x_0$  fără a avea derivată în punctul  $x_0$ .

16. Să se studieze derivabilitatea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \ln x + x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$  în punctul  $x_0 = 1$ , utilizând corolarul 3 al teoremei lui Lagrange.

17. Aplicând regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x}{x^3 - 2x^2 + x}$ ;  
 b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{3x^2 + 3x}$ ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{2x^2 - x}$ ;  
 d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^3 - x}$ ;  
 e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
 f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
 g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x} \right)^{\frac{1}{2x}}$ ;  
 h)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}$ .

18. Să se calculeze limita:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ ;  
 b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$ ,  $x > 0$ .

19. Aplicând regula respectivă a lui l'Hospital, să se calculeze limita sirului:

- a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ ;  
 b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt[50]{n}}$ ;  
 c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{1,01^n}$ .

C 20. Fie funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ . Aplicând teorema lui Lagrange, să se demonstreze că:

- a) sirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  definit prin  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  este divergent.  
 b) sirul  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  definit prin  $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  este convergent.

21. Să se demonstreze, utilizând corolarul 1 al teoremei lui Lagrange, că  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

## Exerciții și probleme recapitulative

### Profilul real

*În exercițiile 1 și 2 determinați litera corespunzătoare variantei corecte.*

**A1** 1. Derivata funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ , este

- |                                    |                                |
|------------------------------------|--------------------------------|
| <b>A</b> $f'(x) = 2x^2 - 2x$ .     | <b>B</b> $f'(x) = 6x^2 - 2x$ . |
| <b>C</b> $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$ . | <b>D</b> $f'(x) = 3x^2 - 2x$ . |

2. Fie funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ . Atunci

- |                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| <b>A</b> $f'(1) = 0$ .           | <b>B</b> $f'(1) = 2$ .      |
| <b>C</b> $f'(1) = \frac{1}{2}$ . | <b>D</b> $f'(1)$ nu există. |

3.  **Investigați!** Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ .

- a) Să se determine valoarea de adevăr a propoziției „ $D_{f'} \subseteq D_g$ ”.
- b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul  $G_f$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- c) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $f'(x) < g'(x)$ .
- d) Să se traseze în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor  $f'$  și  $g'$ .
- e) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor  $f'$  și  $g'$ .

4. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $f'(x) = 0$ , unde  $f$  este funcția definită prin formula:

- |                                 |                               |                               |
|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>a)</b> $f(x) = x^3 - 2x^2$ ; | <b>b)</b> $f(x) = 2x \ln x$ ; | <b>c)</b> $f(x) = (x-1)e^x$ . |
|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

5.  **Lucrați în perechi!** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $f'(x) \geq 0$ , unde  $f$  este funcția definită prin formula  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

6. Dintr-un punct pornesc concomitent două mobile: primul cu viteza inițială de 8 m/s și accelerația de 4 m/s<sup>2</sup>, iar al doilea – intr-o mișcare uniformă cu viteza de 16 m/s.

- a) Să se afle momentul de timp în care mobilele se vor întâlni, dacă se știe că ecuația mișcării uniform accelerate este  $x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ , iar ecuația mișcării uniforme este  $x(t) = vt$ .
- b) Să se determine momentul de timp  $t$  în care viteza primului mobil va fi de două ori mai mare decât viteza celui de al doilea.

**B1** 7. Să se calculeze diferențiala funcției  $f$  definită prin formula:

- |                                   |                                   |                                 |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| <b>a)</b> $f(x) = \cos(\sin x)$ ; | <b>b)</b> $f(x) = \sin(\cos x)$ ; | <b>c)</b> $f(x) = \ln(\ln x)$ . |
|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|

8. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $f'(x) = 0$ , unde  $f$  este funcția definită prin formula:

- |                                      |  |                                       |
|--------------------------------------|--|---------------------------------------|
| <b>a)</b> $f(x) = \sin x + \cos x$ ; | <b>b)</b> $f(x) = \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x$ ; | <b>c)</b> $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$ . |
|--------------------------------------|--|---------------------------------------|

9. a) Să se calculeze derivatele laterale ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  în punctele indicate:

1)  $f(x) = x^2 + x \cdot |x|$ ,  $x_0 = 0$ ;

2)  $f(x) = x + |x-3|$ ,  $x_0 = 3$ ;

3)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$   $x_0 = 0$ .

b) Să se traseze graficul fiecăreia dintre funcțiile  $f$ .

- 10.**  **Lucrați în perechi!** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{|x-3|}$ .
- Să se demonstreze că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 3$ , dar nu este derivabilă în acest punct.
  - Să se traseze graficul funcției  $f$ .
- 11.** Fie  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție polinomială. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului  $P$  sunt reale și distințe, atunci  $P'$  are aceeași proprietate.
- 12.**  **Investigați!** Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ .
- 13.** Să se demonstreze că deși  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x}$  există, nu pot fi aplicate direct regulile lui l'Hospital.
- 14.** Să se verifice dacă formula lui Lagrange este adevărată pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - x^2$ , pe intervalul  $[0, 1]$  și să se determine efectiv  $c$ .
- 15.** Să se verifice justitia teoremei lui Rolle pentru funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  pe intervalul indicat:
- $f(x) = \cos^2 x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ;
  - $f(x) = \sin^2 x$ ,  $[0, \pi]$ ;
  - $f(x) = (x-3)(x-4)(x-5)$ ,  $[3, 5]$ .
- 16.** Utilizând regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^{3x})}$ .
- C1 17.** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$ . Să se demonstreze că funcția  $f$  verifică relația  $(1+x^2)^2 \cdot f''(x) + 2x(1+x^2) \cdot f'(x) + f(x) = 0$ .
- 18.** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $4^x - 2^x = 8^x - 6^x$ , utilizând teorema lui Lagrange.
- 19.** Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii  $s(t) = e^{mt} \cos 2t$ .
- Să se determine constanta  $m$ , știind că  $s''(t) + 2s'(t) + 5s(t) = 0$ .
  - Să se afle apoi viteza și accelerația mobilului în momentele de timp  $t = 0$  și  $t = \frac{\pi}{4}$ .
- 20.** (BAC, 2019) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 + \frac{a + 1}{2}x^2 + 2x - 1$ . Determinați valorile reale ale lui  $a$ , astfel încât graficul funcției  $f$  conține un singur punct în care tangenta la graficul funcției  $f$  este paralelă cu axa  $Ox$ .

## Test sumativ

Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

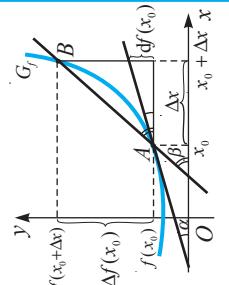
## Profilul real

- Fie funcțiile  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ ;  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 6x + 1$ .
  - a) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „ $D_f' \subset D_g'$ ”. A / F (2)
  - b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $f'(x) = g'(x)$ . (5)
  - c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x_0 = \pi$ . (4)
  - d) Calculați diferențiala funcției  $g(f(x))$ . (4)
- Utilizând regulile lui l'Hospital, calculați limita  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ . (6)
- Fie funcția  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + d, & \text{dacă } x \in [-1, 0] \\ 1 + \ln(x^2 + 1), & \text{dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$ 
  - a) Aflați  $a, b, d \in \mathbb{R}$ , astfel încât teorema lui Rolle să poată fi aplicată funcției  $f$ . (6)
  - b) Aplicați teorema lui Rolle funcției  $f$ , cu parametrii  $a, b, d$  determinați în a). (4)
- Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii  $s(t) = 3t^2 + 9 \ln t + 18$  (distanța  $s$  este exprimată în centimetri, iar timpul  $t$  – în secunde). Aflați momentul de timp  $t$  în care accelerația este de  $2 \text{ cm/s}^2$ . (5)

## Baremul de notare

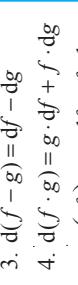
Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

**Interpretarea geometrică a derivatei și diferențialei funcției**



Diferențiala funcției

$df(x) = f'(x)dx$



**Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile**

- 1° Teorema lui Fermat
- 2° Teorema lui Rolle
- 3° Teorema lui Lagrange

## Derivata și diferențiala funcției

### Derivate laterale

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{ sau } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### Derivata funcției

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{ sau } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### Tabelul derivatorelor și diferențialelor funcțiilor elementare

$f$	$D_f$	$f'$	$D_{f'}$	$df$
1. $c$ (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2. $x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1} dx$
3. $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$
4. $\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2} dx$
5. $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2n \cdot \sqrt[n]{x^{2n-1}}}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2n \cdot \sqrt[n]{x^{2n-1}}} dx$
6. $\sqrt[n+1]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{(2n+1) \cdot \sqrt[n+1]{x^{2n}}}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{(2n+1) \cdot \sqrt[n+1]{x^{2n}}} dx$
7. $\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
8. $a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a dx$
9. $e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x dx$
10. $\ln x$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x} dx$
11. $\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x \ln a} dx$
12. $\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x dx$
13. $\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x dx$
14. $\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{2k+1\} \frac{\pi}{2}   k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{\cos^2 x}{\cos x}$	$\mathbb{R} \setminus \{2k+1\} \frac{\pi}{2}   k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{\cos x}{\cos^2 x} dx$
15. $\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi   k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi   k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} dx$
16. $\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
17. $\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
18. $\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1} dx$
19. $\operatorname{arctctg} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{x^2+1} dx$

### Unele aplicații ale derivatorelor

1. Ecuatia tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă  $x_0$ :  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
2. Aplicații la calculele aproximative
3. Determinarea coeficienților binomiali
4. Calculul unor limite (regula lui l'Hospital)
5. Studiul funcțiilor

**Obiective**

- ⇒ \* aplicarea derivatei la determinarea intervalelor de monotonie și a extremelor funcției;
- ⇒ \* recunoașterea și utilizarea în diverse contexte a noțiunilor *punct critic, punct de extrem, extremele funcției*;
- ⇒ \* determinarea cu ajutorul derivatei a punctelor de inflexiune, a intervalor de concavitate și de convexitate ale graficului unei funcții;
- ⇒ \* utilizarea metodelor ce țin de aplicațiile derivatei ca metode noi de studiere a funcției, de rezolvare a problemelor teoretice și practice;
- ⇒ \* aplicarea derivatelor la rezolvarea unor probleme de maxim și minim din geometrie, fizică, economie etc.;
- ⇒ \* utilizarea derivatelor pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

În acest modul vom aplica derivatele de ordinul întâi și derivatele de ordinul doi la studiul variației funcțiilor, vom rezolva diverse probleme de geometrie, fizică și din alte domenii, probleme care, în majoritatea cazurilor, nu pot fi rezolvate folosind metode elementare.

**§ 1 | Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor****1.1. Intervalele de monotonie ale unei funcții**

În studiul variației unei funcții este important să cunoaștem în ce condiții funcția este constantă sau monotonă pe un interval dat. Am stabilit deja că derivata unei funcții constante pe un interval dat este egală cu zero. Va fi utilă și reciproca acestei afirmații.

**Teorema 1.** Fie  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) o funcție derivabilă. Dacă derivata funcției  $f$  este egală cu zero pe un interval  $I \subseteq E$ , atunci funcția  $f$  este constantă pe acest interval.

**Demonstrație**

Fie  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ . Fixăm pe intervalul  $I$  un punct  $x_0$  și fie punctul  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ . Pe intervalul  $[x_0, x]$  (sau pe  $[x, x_0]$ ) funcția  $f$  satisfac condițiile teoremei lui Lagrange (modulul 4, § 6, secvența 6.3). Conform acestei teoreme, există un punct  $c$  situat între  $x_0$  și  $x$ , astfel încât  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ . Deoarece  $f'(c) = 0$ , din ipoteză, rezultă că  $f(x) = f(x_0)$ . Prin urmare, în orice punct  $x \in I$  funcția  $f$  ia valoarea  $f(x_0)$ , adică funcția  $f$  este constantă pe  $I$ .



**Corolar.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții derivabile și  $f' = g'$  pe un interval  $I$ , atunci funcțiile  $f$  și  $g$  diferă printr-o constantă:  $f(x) = g(x) + C$ ,  $\forall x \in I$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

### Demonstrație

Considerăm funcția  $\varphi = f - g$ . Atunci  $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ . Astfel, funcția  $\varphi$  este constantă pe  $I$  și, prin urmare,  $f(x) = g(x) + C$ ,  $\forall x \in I$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . ►

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine intervalele pe care funcțiile  $f$  și  $g$  diferă printr-o constantă și să se afle această constantă:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x; \quad g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

Rezolvare:

Pe fiecare dintre intervalele  $I_1 = (-\infty, -1)$ ,  $I_2 = (-1, 1)$  și  $I_3 = (1, +\infty)$ , funcțiile  $f$  și  $g$  au derivatele egale:  $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Așadar, pe fiecare dintre aceste intervale, funcțiile date diferă printr-o constantă:  $f(x) - g(x) = C_1$ ,  $\forall x \in I_1$ ;  $f(x) - g(x) = C_2$ ,  $\forall x \in I_2$ ;  $f(x) - g(x) = C_3$ ,  $\forall x \in I_3$ . Pentru intervalul  $I_2$  obținem  $C_2 = 0$  (ne convingem îlând  $x = 0$ ), iar pentru intervalele  $I_1$  și  $I_3$  avem  $C_1 = -\frac{\pi}{2}$  și respectiv  $C_3 = \frac{\pi}{2}$ , dacă, de exemplu,  $x$  tinde la  $-\infty$  și respectiv la  $+\infty$ .

Astfel, am obținut:  $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} - \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in (-\infty, -1)$ ;  $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ ,

$\forall x \in (-1, 1)$ ;  $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} + \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in (1, +\infty)$ .

Relațiile obținute pot fi demonstreate și prin metode elementare, fără aplicarea derivatei.

**Observație.** În baza exercițiului rezolvat, tragem concluzia că din faptul că funcția  $f$  este definită pe reuniunea a două (sau mai multe) intervale disjuncte,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , și  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I_1 \cup I_2$ , încă nu rezultă că ea este constantă pe mulțimea  $I_1 \cup I_2$ .

De exemplu, funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$  are derivata nulă în fiecare punct al mulțimii  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , însă ea nu este constantă pe  $A$ .

Vom stabili acum un criteriu important și eficient de determinare a intervalelor de monotonie ale unei funcții derivabile.

**Teorema 2.** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe intervalul  $I$ . Funcția  $f$  este crescătoare (descrescătoare) pe  $I$  dacă și numai dacă  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ),  $\forall x \in I$ .

### Demonstrație

**Necesitatea.** Presupunem că funcția  $f$  este crescătoare pe  $I$ . Atunci  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ ,  $\forall x, x_0 \in I$ ,  $x \neq x_0$ . Fixând  $x_0 \in I$  și trecând în acest raport la limită când  $x \rightarrow x_0$ , obținem că  $f'(x_0) \geq 0$ ,  $\forall x_0 \in I$ .

Raționament similar se face și în cazul în care  $f$  este o funcție descrescătoare pe intervalul  $I$ .

*Suficiența.* Să considerăm punctele arbitrate  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ , și fie  $f'(x) \geq 0$  pe  $I$ . Aplicând funcției  $f$  teorema lui Lagrange pe intervalul  $[x_1, x_2]$ , obținem că  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ , unde  $c \in (x_1, x_2)$  și  $f'(c) \geq 0$ . Cum  $x_2 - x_1 > 0$ , rezultă că  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ , adică  $f(x_2) \geq f(x_1)$ . Deci, funcția  $f$  este crescătoare pe  $I$ .

Analog, dacă  $f'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in I$ , obținem că funcția  $f$  este descreșcătoare pe  $I$ . ►

**Observații.** 1. Dacă  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ .

2. Dacă  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci funcția  $f$  este strict descreșcătoare pe  $I$ .

3. Din faptul că funcția  $f$  este strict crescătoare (strict descreșcătoare) pe  $I$  nu rezultă că  $f'$  nu se anulează în niciun punct din  $I$ . De exemplu, funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ , însă  $f'(0) = 0$ .

Vom arăta că dacă funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă pe  $I$  cu  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ , atunci ea este strict crescătoare pe  $I$  (dacă  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ , atunci ea este strict descreșcătoare pe  $I$ ). Într-adevăr, din observația 1 rezultă că funcția  $f$  este strict crescătoare pe cele două intervale determinate de punctul  $x_0$ . Mai rămâne să comparăm valoarea funcției  $f$  în punctul  $x_0$  cu celelalte valori ale ei. Conform formulei lui Lagrange avem  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_1) > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x < x_0$  și  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_2) > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x > x_0$ . Rezultă că  $f(x) < f(x_0)$  pentru  $x < x_0$ , respectiv  $f(x_0) < f(x)$  pentru  $x_0 < x$ . În mod similar se arată că dacă funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă pe  $I$  cu  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ , atunci ea este strict descreșcătoare.

**Concluzie.** O funcție derivabilă este strict monotonă pe intervalele pe care derivata sa își păstrează semnul. Prin urmare, pentru a stabili intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile, determinăm intervalele pe care derivata sa își păstrează semnul.

### Exemple

1. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x$ , este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ , deoarece  $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

2. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 1$ , este strict descreșcătoare pe  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  și strict crescătoare pe  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , întrucât  $f'(x) = 2x - 1 < 0$ ,  $\forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  și  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

3. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x - x$ , este strict descreșcătoare pe  $\mathbb{R}$ , deoarece  $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$  în punctele  $x = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , iar în celelalte puncte  $f'(x) < 0$ .

### Exercițiu rezolvat

• Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f(-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^2, & \text{dacă } -2 < x < -1 \\ 0, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 1 \\ (1-x)^2, & \text{dacă } 1 < x < 2. \end{cases}$$

*Rezolvare:*

Ne convingem că funcția  $f$  este derivabilă pe  $(-2, 2)$  și

$$f'(x) = \begin{cases} 2(1+x), & \text{dacă } -2 < x < -1 \\ 0, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 1 \\ -2(1-x), & \text{dacă } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Deoarece  $f'(x) < 0$  pe intervalul  $(-2, -1)$  și  $f'(x) > 0$  pe intervalul  $(1, 2)$ , rezultă că pe primul interval  $f$  este strict descrescătoare, iar pe al doilea este strict crescătoare. Pe intervalul  $[-1, 1]$  funcția  $f$  este constantă, fiindcă  $f'(x) = 0, \forall x \in [-1, 1]$ .

## 1.2. Puncte de extrem ale unei funcții

### Reamintim!

**Definiții.** Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ).

- Punctul  $x_0 \in I$  se numește **punct de maxim local** al funcției  $f$  dacă există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in V(x_0) \cap I$ . În acest caz, valoarea  $f(x_0)$  se numește **maxim local** al funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .
- Punctul  $x_0 \in I$  se numește **punct de minim local** al funcției  $f$  dacă există o vecinătate  $V(x_0)$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in V(x_0) \cap I$ . În acest caz, valoarea  $f(x_0)$  se numește **minim local** al funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .
- Punctele de maxim local și de minim local ale funcției  $f$  se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.
- Valorile funcției  $f$  în punctele ei de extrem local se numesc **extremele locale** ale acestei funcții.

**Definiții.** Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ).

- Punctul  $x_0 \in I$  se numește **punct de maxim global** al funcției  $f$  pe  $I$  dacă  $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I$ , iar valoarea  $f(x_0)$  se numește **maximul global** al funcției  $f$  pe  $I$ .
- Punctul  $x_0 \in I$  se numește **punct de minim global** al funcției  $f$  pe  $I$  dacă  $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in I$ , iar valoarea  $f(x_0)$  se numește **minimul global** al funcției  $f$  pe  $I$ .
- Punctele de maxim global și de minim global ale unei funcții se numesc **puncte de extrem global** ale acestei funcții.
- Valorile funcției  $f$  în punctele ei de extrem global se numesc **extremele globale** ale acestei funcții.

**Observații.** 1. Un punct de maxim (minim) local nu este în mod necesar un punct de maxim (minim) global. Un punct de maxim (minim) global este totodată și un punct de maxim (minim) local.

2. Este posibil ca un minim local al unei funcții să fie mai mare decât un maxim local al aceleiași funcții.

De exemplu, funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (fig. 5.1) are în punctul  $x_1$  un minim local mai mare decât maximul local din punctul  $x_4$ .

3. Dacă funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe intervalul  $[a, b]$ , atunci, conform teoremei lui Weierstrass, funcția  $f$  își atinge pe acest interval marginile  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  și  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ , care sunt extremele globale ale funcției  $f$  pe intervalul  $[a, b]$ .

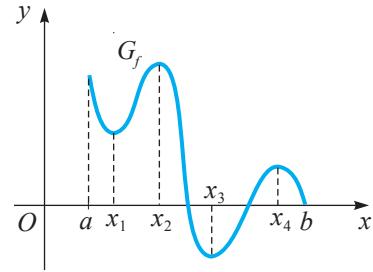


Fig. 5.1

Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe intervalul deschis  $I$ . Din teorema lui Fermat rezultă că dacă  $x_0 \in I$  este un punct de extrem local al funcției  $f$ , atunci  $f'(x_0) = 0$ . Astfel, teorema lui Fermat pune în evidență faptul că *derivata unei funcții se anulează în orice punct de extrem local al intervalului deschis  $I$* .

**Concluzii.** Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe intervalul deschis  $I$  și  $f'(x_0) = 0$ ,  $x_0 \in I$ .

- Dacă  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x < x_0$ , și  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x > x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim local al funcției  $f$ . Se notează:  $\nearrow f(x_0) \searrow$ . Semnul  $\nearrow$  ( $\searrow$ ) semnifică faptul că funcția este monoton crescătoare (descrescătoare) pe intervalul respectiv.
- Dacă  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x < x_0$ , și  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x > x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim local al funcției  $f$ . Se notează:  $\searrow f(x_0) \nearrow$ .
- Dacă derivata funcției  $f$  are același semn la stânga și la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  nu este punct de extrem local al acestei funcții.

**Definiție.** Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe intervalul deschis  $I$ . Punctele din intervalul  $I$  în care  $f'$  ia valoarea zero se numesc **puncte critice** (sau **stationare**) ale funcției  $f$ .

**Observație.** Concluziile 1–3 rămân adevărate și în cazul în care funcția  $f$ , fiind continuă în punctul  $x_0$ , nu este derivabilă în  $x_0$ . Astfel de puncte de asemenea se numesc **puncte critice (staționare)** ale funcției  $f$ .

De exemplu, funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , nu este derivabilă în punctul  $x_0 = 0$ , însă 0 este punct de minim local al acestei funcții.

Într-adevăr,  $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$  și în punctul  $x_0 = 0$  derivata își schimbă semnul din „-” în „+”.

Intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale unei funcții derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se calculează  $f'$ .
- ② Se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$ ; soluțiile acestei ecuații (zerourile funcției  $f'$ , precum și punctele în care  $f$  nu este derivabilă) sunt eventualele puncte de extrem local ale funcției  $f$ .
- ③ Se determină semnul funcției  $f'$  pe intervalele pe care ea nu se anulează.
- ④ Se stabilesc intervalele pe care funcția  $f'$  își păstrează semnul, acestea fiind intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- ⑤ Se determină punctele de extrem local și extremele locale ale funcției  $f$ .

### Exerciții rezolvate

1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 9x^2$ .

*Rezolvare:*

$f'(x) = 3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$ . Punctele critice ale funcției  $f$  sunt  $-6$  și  $0$ .

Constatăm că:

- $f'(x) > 0$  pe intervalele  $(-\infty, -6)$ ,  $(0, +\infty)$ , prin urmare, în baza observației 1 (secvența 1.1), funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalele  $(-\infty, -6]$ ,  $[0, +\infty)$ ;
- $f'(x) < 0$  pe intervalul  $(-6, 0)$ , deci funcția  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $[-6, 0]$ .

Rezultatele acestui studiu pot fi trecute în așa-numitul **tablou (tabel) de variație al funcției**. Pe *linia întâi* a acestui tablou se indică domeniul de definiție al funcției și punctele în care derivata ei se anulează sau nu există. Pe *linia a doua* se scriu semnele funcției  $f'$  pe intervalele unde ea nu se anulează. Pe *ultima linie* se indică creșterea ( $\nearrow$ ), descreșterea ( $\searrow$ ) funcției, precum și extremele ei locale.

Obținem tabloul de variație al funcției  $f$ :

Așadar,  $-6$  este punct de maxim local al funcției  $f$  și  $f(-6) = 108$  este maximul ei local, iar  $0$  este punct de minim local al funcției  $f$  și  $f(0) = 0$  este minimul ei local.

$x$	$-\infty$	$-6$	$0$	$+\infty$
$f'$	+	0	-	0
$f$	$\nearrow$	108	$\searrow$	0

2. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x < -\frac{1}{2} \\ \arcsin x + \arccos x, & \text{dacă } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Rezolvare:*

Deoarece  $f\left(-\frac{1}{2}-0\right) = f\left(-\frac{1}{2}+0\right) = \frac{\pi}{2}$  și  $f\left(\frac{1}{2}-0\right) = f\left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{\pi}{2}$ , rezultă că

funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ . Calculăm derivata:  $f'(x) = \begin{cases} 2\left(x + \frac{1}{2}\right), & \text{dacă } x < -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{dacă } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{dacă } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

Prin urmare,  $f'(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și deci funcția este descrescătoare pe  $\mathbb{R}$ . Mai putem preciza că  $f$  este strict descrescătoare pe intervalele  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$  și  $[\frac{1}{2}, +\infty)$ , iar pe intervalul  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  este și constantă.

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$ . Să se stabilească intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale funcției  $f$ .

*Rezolvare:*

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Derivata funcției  $f$  nu se anulează pe intervalele  $(-\infty, 0)$  și  $(0, +\infty)$ . Pe primul interval  $f'(x) < 0$ , iar pe al doilea  $f'(x) > 0$ . Deci, pe  $(-\infty, 0]$  funcția  $f$  este strict descrescătoare, iar pe  $[0, +\infty)$  – strict crescătoare. Punctul  $x_0 = 0$  este punct de minim local al funcției  $f$  și  $f(0) = e^0 = 1$  este minimul ei local.

Tabloul de variație al funcției  $f$  este:

$x$	–∞	0	+∞
$f'$	–	0	+
$f$	↗	1	↘

**Observație.** Cunoscând tabloul de variație al unei funcții, pot fi stabilite inegalități de tipul  $f_1(x) \geq f_2(x)$ ,  $x \in E$ . Pentru aceasta, studiem variația și semnul funcției diferență  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ .

### Exercițiu rezolvat

4. Să se arate că pentru orice  $x > -1$  este adevărată inegalitatea  $\ln(1+x) \leq x$ .

*Rezolvare:*

Considerăm funcția  $f$  definită prin diferența expresiilor din cei doi membri:

$f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x) - x$ . Studiem variația acestei funcții cu ajutorul derivativei. Avem  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ .

Tabloul de variație al funcției  $f$  este:

Deoarece maximul funcției este 0, rezultă că funcția este negativă pe  $(-1, +\infty)$ , adică  $\ln(1+x) - x \leq 0$ .

$x$	–1	0	+∞
$f'$		+	0
$f$	↗	0	↘

Așadar,  $\ln(1+x) \leq x$  și egalitatea are loc numai pentru  $x = 0$ .

### 1.3. Determinarea extremelor globale

Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe  $(a, b)$  și continuă pe  $[a, b]$ . În baza teoremei lui Weierstrass, funcția  $f$  își atinge marginile sale pe  $[a, b]$ , adică există punctele  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , astfel încât  $f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = m$ ,  $f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = M$ . Dacă punctul  $x_1$  ( $x_2$ ) este situat în interiorul intervalului  $[a, b]$ , atunci în acest punct, conform teoremei lui Fermat, funcția  $f$  are un minim (maxim) local, deci  $f'(x_1) = 0$  ( $f'(x_2) = 0$ ). Însă marginile  $m$  și  $M$  pot fi atinse de funcția  $f$  și la extremitățile intervalului  $[a, b]$ .

De exemplu, funcția  $f: \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ , își atinge cea mai mare valoare a sa,  $M = 1$ , în punctul 0.

Extremele globale ale unei funcții continue  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și derivabile pe  $(a, b)$  pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se află valorile funcției  $f$  la capetele intervalului  $[a, b]$ ,  $f(a)$  și  $f(b)$ .
- ② Se află punctele critice ale funcției  $f$ , adică se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$ ,  $x \in (a, b)$ .
- ③ Se calculează valorile funcției  $f$  în punctele critice deja determinate și se compară cu valorile acesteia la capetele intervalului: cea mai mică (mare) dintre aceste valori va fi minimul (maximul) global al funcției  $f$  pe  $[a, b]$ .

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale și extremele globale ale funcției  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = x^3 + 2x - 10$ ,  $I = [-1, 5]$ ;      b)  $f(x) = x^2 - 4x + 6$ ,  $I = [-3, 10]$ .

*Rezolvare:*

a)  $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ ,  $\forall x \in [-1, 5]$ . Astfel, funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[-1, 5]$ . În acest caz,  $m = f(-1) = -13$ ,  $M = f(5) = 5^3 + 2 \cdot 5 - 10 = 125$ .

b)  $f'(x) = 2x - 4$ ,  $\forall x \in [-3, 10]$ . Rezolvăm ecuația  $f'(x) = 0$  și aflăm punctele critice ale funcției  $f$ :  $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ . În punctul 2, funcția  $f$  are un minim local și  $f(2) = 2$ .

Deci,  $m = \min[f(-3), f(2), f(10)] = \min[27, 2, 66] = 2$ ,

$M = \max[f(-3), f(2), f(10)] = \max[27, 2, 66] = 66$  sunt extremele globale ale funcției  $f$ .

**Observație.** Dacă funcția derivabilă  $f$  este definită pe intervalul  $I = (a, b)$ , finit sau infinit, atunci în algoritmul anterior valorile  $f(a)$  și  $f(b)$  se vor înlocui cu  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  și respectiv  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ . Se calculează marginile  $m = \inf_{x \in I} f(x)$  și  $M = \sup_{x \in I} f(x)$  care, în general, nu sunt atinse de funcția  $f$ .

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine marginile funcției:

a)  $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$ ;      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ .

*Rezolvare:*

a)  $f'(x) = e^x - 1 < 0$ ,  $\forall x \in (-\infty, 0)$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

Prin urmare,  $m = \inf_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = 1$ ,  $M = \sup_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = +\infty$  și aceste valori nu sunt atinse de funcția  $f$ .

b)  $f'(x) = \frac{3-x^2-2x}{(x^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -3$  sau  $x = 1$ .

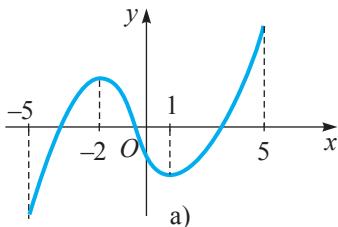
$f(-3) = -\frac{1}{6}$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Deci,  $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min\left\{-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{6}$ ,  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max\left\{-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$  și aceste valori sunt atinse de funcția  $f$ .

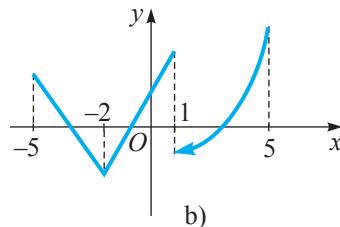
## Exerciții propuse

## Profilul real

- A** 1. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$ ;    b)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ ;    c)  $f(x) = (x^3 - 10)(x + 5)^2$ ;
  - $f(x) = x^3 - 6x$ ;    e)  $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ ;    f)  $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$ .
2. **Lucrați în perechi!** Să se determine, pe intervalul indicat, extremele globale ale funcției  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ ,  $I = [-1, 2]$ ;    b)  $f(x) = x^3 - x$ ,  $I = [0, 5]$ .
- B** 3. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și să se completeze tabloul de variație al funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ ;    b)  $f(x) = x^2 \ln x$ ;    c)  $f(x) = e^{\frac{1}{(x-3)}}$ ;
  - $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$ ;    e)  $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$ ;    f)  $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 1}$ .
4. **Investigați!** Pentru care valori ale parametrului real  $a$  funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ :
- $f(x) = ax - \ln(1+x^2)$ ;    b)  $f(x) = \operatorname{arctg} ax + x$ ;    c)  $f(x) = ax - \sin x$ .
5. (BAC, 2011) Determinați valorile reale ale parametrului  $a$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 1$ , este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
6. Aplicând derivata, să se arate că funcțiile  $f, g$  diferă printr-o constantă și să se determine constanta respectivă:
- $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin 2x$ ,  $g(x) = 1 + 2 \sin x \cos x$ ;
  - $f, g: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{1-x}$ ;
  - $f, g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arcsin} x$ ,  $g(x) = -\operatorname{arccos} x$ .
7. Să se scrie intervalele de monotonie ale funcției  $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  reprezentate grafic.



a)



b)

8. Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale și extremele globale ale funcției  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ ,  $I = [-1, 2]$ ;
  - $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ ,  $I = [0, \pi]$ ;
  - $f(x) = x - 2 \ln x$ ,  $I = (0, e]$ .
9. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = \frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$ ;
  - $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ ;
  - $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$ ;
  - $f(x) = (x-1)e^{3x}$ ;
  - $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ ;
  - $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ ;
  - $f(x) = |x-1| \sqrt[3]{x+2}$ ;
  - $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x \ln x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ ;
  - $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ .

- C<sub>1</sub>** 10.  **Lucrați în perechi!** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ .
- Să se calculeze  $f'$  pe  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .
  - Să se studieze monotonia funcției  $f$ .
  - Să se compare numerele  $\alpha = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{16}$  și  $\beta = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{25}$ .
11. Să se demonstreze inegalitatea: a)  $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ ,  $\forall x \geq -1$ ,  $\forall \alpha > 1$ ;  
b)  $\ln(1+x)^2 < x$ ,  $\forall x > 0$ .
12. (BAC, 2009) Determinați extremele globale ale funcției  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin 2x - 2x$ .

**§2****Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor**

Am stabilit deja ce informații pot fi obținute despre comportarea unei funcții derivabile cunoscând derivata ei, mai precis, zerourile și semnul derivatei. Însă simpla cunoaștere a faptului că o funcție  $f$  este, de exemplu, strict crescătoare pe un interval  $I$  nu este suficientă pentru a stabili forma graficului acesteia. De exemplu, funcția  $f$ , definită pe  $[0, +\infty)$  prin formula  $f(x) = \sqrt{x}$ , este strict crescătoare pe acest interval, însă această informație este insuficientă pentru a decide dacă graficul funcției  $f$  are forma curbei color sau a curbei de culoare neagră (fig. 5.2).

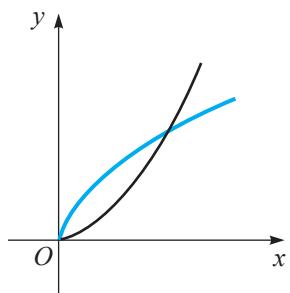


Fig. 5.2

Forma graficului unei funcții poate fi determinată cu ajutorul derivatei a doua.

**2.1. Convexitate și concavitate**

Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) o funcție derivabilă pe intervalul **deschis**  $I$ . Presupunem că tangenta în orice punct al graficului funcției  $f$  se află sub grafic (fig. 5.3 a)) sau deasupra lui (fig. 5.3 b)).

În cazul a) se spune că graficul funcției  $f$  este o **curbă convexă**, iar în cazul b) – o **curbă concavă**.

Vom formula o definiție riguroasă a convexității (concavității) și vom arăta că derivata a doua, dacă există, furnizează informații concrete în această privință.

Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe intervalul deschis  $I$  și  $x_0 \in I$ . Tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  este dreapta de ecuație

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Fie funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Graficul funcției  $F$  este tangenta  $M_0T$  (fig. 5.4).

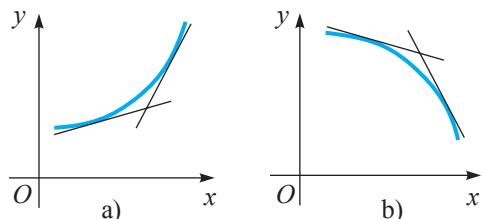


Fig. 5.3

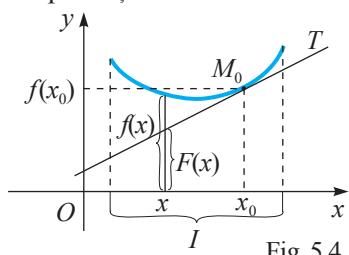


Fig. 5.4

Se spune că tangenta  $M_0T$  se află **sub graficul funcției  $f$**  dacă

$$F(x) \leq f(x), \quad \forall x \in I. \quad (1)$$

Se spune că tangenta  $M_0T$  se află **deasupra graficului funcției  $f$**  dacă

$$F(x) \geq f(x), \quad \forall x \in I. \quad (2)$$

Dacă inegalitatea (1) (inegalitatea (2)) este strictă pentru orice  $x \in I \setminus \{x_0\}$ , se spune că tangenta  $M_0T$  se află **strict sub graficul funcției  $f$**  (**strict deasupra graficului lui  $f$** ).

- Definiții. • Funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) se numește **convexă (strict convexă)** pe intervalul  $I$  dacă tangenta în orice punct al graficului funcției  $f$  se află sub (strict sub) acest grafic.
- Funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) se numește **concavă (strict concavă)** pe intervalul  $I$  dacă tangenta în orice punct al graficului funcției  $f$  se află deasupra (strict deasupra) acestui grafic.
- Vom spune că graficul funcției  $f$  este o **curbă convexă (strict convexă)** sau o **curbă concavă (strict concavă)** pe intervalul  $I$  dacă funcția  $f$  posedă proprietatea respectivă pe acest interval.

**Observații.** 1. Definiția convexității graficului unei funcții poate fi formulată și astfel: pentru orice coardă  $AB$  cu abscisele aparținând intervalului  $I$ , porțiunea graficului care unește punctele  $A$  și  $B$  este situată sub această coardă (fig. 5.5).

2. Funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $I$  dacă și numai dacă funcția  $-f$  este convexă pe  $I$ .

3. Uneori se mai spune că funcțiile convexe au „concavitatea în sus” (graficul lor „ține apa”, fig. 5.6 a)), iar funcțiile concave au „concavitatea în jos” (graficul lor „nu ține apa”, fig. 5.6 b)).

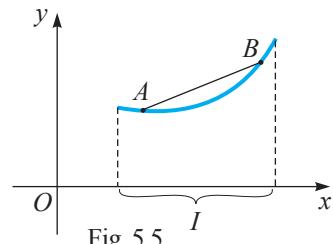


Fig. 5.5

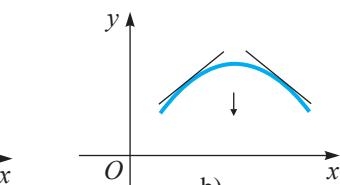
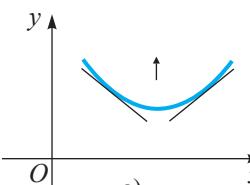


Fig. 5.6

Studiul concavității/convexității în baza definiției este dificil chiar în cazul funcțiilor elementare. Pentru funcțiile derivabile de două ori, determinarea intervalelor de concavitate/convexitate se reduce la studiul semnului derivatei a doua.

**Teorema 3.** Dacă funcția  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  este de două ori derivabilă pe  $(a, b)$  și  $f''(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$ , atunci această funcție este convexă pe acest interval.

Înlocuind  $f$  cu  $-f$  și ținând cont de observația 2, obținem următorul

**Corolar.** Fie  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de două ori derivabilă pe  $(a, b)$ . Dacă  $f''(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$ , atunci funcția  $f$  este concavă pe  $(a, b)$ .

**Observație.** Dacă  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ),  $\forall x \in (a, b)$ , atunci funcția  $f$  este strict convexă (strict concavă) pe  $(a, b)$ .

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ;
- $f(x) = x^3$ .

*Rezolvare:*

- Funcția  $f$  satisfacă condițiile teoremei 3 și  $f''(x) = 2a$ . Așadar, funcția  $f$  este strict convexă pe  $\mathbb{R}$ , dacă  $a > 0$ , și strict concavă pe  $\mathbb{R}$ , dacă  $a < 0$ .
- $f''(x) = 6x$ . Prin urmare, funcția  $f$  este strict concavă pe  $(-\infty, 0)$  și strict convexă pe  $(0, +\infty)$ .

## 2.2. Determinarea intervalelor de concavitate, convexitate.

### Puncte de inflexiune

Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe intervalul deschis  $I$  și  $x_0 \in I$  un punct critic al funcției  $f$ , adică  $f'(x_0) = 0$ . Am stabilit deja că dacă funcția  $f'$  are semne diferite la stânga și la dreapta punctului  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de extrem local al funcției  $f$ . Există însă cazuri în care este dificil de a stabili semnul derivatei la stânga și la dreapta punctelor critice. În aceste situații vom aplica următorul *criteriu suficient pentru extrem*, fără a mai studia semnul funcției  $f'$ , cu condiția că funcția  $f$  este de două ori derivabilă pe  $I$ .

**Teorema 4.** Dacă  $x_0 \in (a, b)$  este un punct critic al funcției  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  de două ori derivabilă pe  $(a, b)$  și dacă  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ), atunci  $x_0$  este un punct de minim local (maxim local) al funcției  $f$ .

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine punctele de extrem local și extremele locale ale funcției definite prin formula  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ .

*Rezolvare:*

Calculăm derivatele de ordinele unu și doi:  $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$  și  $f''(x) = 6x + 12$ . Funcția  $f'$  se anulează în punctele  $x_1 = -3$  și  $x_2 = -1$ . Cum  $f''(-3) = -6 < 0$  și  $f''(-1) = 6 > 0$ , în baza teoremei 4 deducem că  $x_1 = -3$  este punct de maxim local al funcției  $f$  și  $f(-3) = 0$  este maximul ei local, iar  $x_2 = -1$  este punct de minim local al funcției  $f$  și  $f(-1) = -4$  este minimul ei local.

Dacă funcția  $f$  este de două ori derivabilă în vecinătatea punctului  $x_0$  în care  $f''(x_0) = 0$  și dacă funcția  $f''$  are semne diferite la stânga și la dreapta punctului  $x_0$ , atunci funcția  $f$  își schimbă concavitatea în acest punct. De exemplu, dacă  $f''(x) > 0$  pentru  $x < x_0$  și  $f''(x) < 0$  pentru  $x > x_0$  ( $x$  aparține unei vecinătăți a punctului  $x_0$ ), atunci funcția  $f$  este convexă la stânga lui  $x_0$  și concavă la dreapta lui  $x_0$ .

**Definiție.** Fie  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă pe  $(a, b)$ .

Punctul  $x_0 \in (a, b)$  se numește **punct de inflexiune al funcției  $f$**  dacă există o vecinătate  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , astfel încât funcția  $f$  este convexă pe  $(x_0 - \delta, x_0)$  și concavă pe  $(x_0, x_0 + \delta)$  sau invers (fig. 5.7).



Fig. 5.7

**Observație.** Dacă  $x_0$  este un punct de inflexiune al funcției  $f$ , atunci  $M_0(x_0, f(x_0))$  se numește **punct de inflexiune pentru graficul** acestei funcții.

**Teorema 5.** Fie  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate  $V(x_0)$  a punctului  $x_0 \in (a, b)$  și  $f''(x_0) = 0$ . Dacă  $f''(x) < 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x < x_0$ , și  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x > x_0$ , sau invers (dacă  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x < x_0$ , și  $f''(x) < 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x > x_0$ ), atunci  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

Remarcăm: condiția  $f''(x_0) = 0$  nu implică faptul că  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ , după cum condiția  $f'(x_0) = 0$  nu implică faptul că  $x_0$  este punct de extrem local al funcției  $f$ .

Intervalele de convexitate, de concavitate și punctele de inflexiune ale unei funcții  $f$  de două ori derivabilă pe un interval pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se calculează  $f''$  și se rezolvă ecuația  $f''(x) = 0$  (unele dintre soluțiile acestei ecuații pot fi puncte de inflexiune ale funcției  $f$ ).
- ② Se stabilesc intervalele pe care funcția  $f''$  are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate sau de concavitate ale funcției  $f$ .
- ③ Se determină punctele de inflexiune ale funcției  $f$ .

**Observație.** Dacă în punctul  $x_0$  nu există  $f''$  sau  $f''$  este infinită, atunci acest punct de asemenea este un eventual punct de inflexiune al funcției  $f$ .

### Exercițiu rezolvat

• Să se determine extremele locale, punctele de inflexiune, intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ ;
- b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 4x + 6)e^{-x}$ .

*Rezolvare:*

a)  $f'(x) = 3x(x - 2)$ , deci funcția  $f$  are două puncte critice:  $x_1 = 0$  și  $x_2 = 2$ . Cum  $f''(x) = 6(x - 1)$ , rezultă că  $f''(0) = -6 < 0$ ,  $f''(2) = 6 > 0$ . Astfel,  $x_1 = 0$  este punct de

maxim local, iar  $x_2 = 2$  este punct de minim local al funcției  $f$ . Semnul funcției  $f''$  este indicat în tabloul de variație al funcției  $f$ :

Așadar, funcția  $f$  este strict concavă pe  $(-\infty, 1)$  și strict convexă pe  $(1, +\infty)$ , iar 1 este un punct de inflexiune.

b)  $f'(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$  și  $f''(x) = x^2 e^{-x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Ecuția  $f'(x) = 0$  nu are soluții în  $\mathbb{R}$ . Cum funcția  $f'$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  și  $f'(0) = -2$ , rezultă că  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Astfel, funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $\mathbb{R}$ . Ecuția  $f''(x) = 0$  are soluția  $x_1 = 0$ . Punctul 0 nu este punct de inflexiune al funcției  $f$ , deoarece  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Prin urmare, graficul funcției  $f$  este convex pe  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''$	-	0	+
$f$			

## Exerciții propuse

### Profilul real

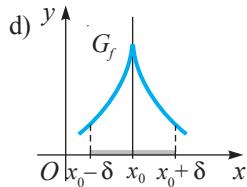
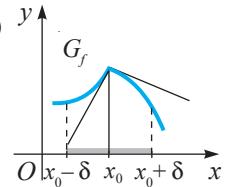
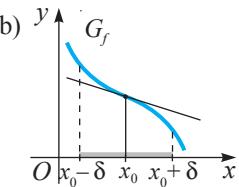
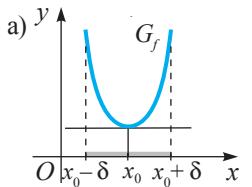
**A1** 1. Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$ ;    b)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ;    c)  $f(x) = \sin x$ ;    d)  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ ;  
e)  $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$ ;    f)  $f(x) = x^2 \ln x$ ;    g)  $f(x) = x \sin(\ln x)$ .

2. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$ ;    b)  $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$ ;  
c)  $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$  ( $a > 0$ );    d)  $f(x) = x + \sin x$ ;  
e)  $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$ ;    f)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ;    g)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ .

**B1** 3. **Lucrați în perechi!** Fie funcțiile reprezentate grafic:



Pentru fiecare funcție să se transcrie și să se completeze tabloul de variație:

4. Fie funcția  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  de două ori derivabilă.

În tabel sunt indicate semnalele funcțiilor  $f'$  și  $f''$ .

1) În baza acestor informații, să se completeze ultima linie indicând:

- a) creșterea ( $\nearrow$ ), descreșterea ( $\searrow$ ), convexitatea ( $\smile$ ), concavitatea ( $\frown$ ) funcției  $f$ ;  
b) punctele de extrem;  
c) punctele de inflexiune.

2) Să se traseze graficul unei funcții cu un astfel de tablou de variație.

$x$	$x_0 - \delta$	$x_0$	$x_0 + \delta$
$f'$			
$f''$			
$f$			

$x$	0	1	2	3	4
$f'$	+		+	-	+
$f''$	+	-		-	+
$f$					

**C<sub>1</sub>** 5.  **Investigați!** Să se arate că:

- a) funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , este concavă și convexă;  
 b) funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , este concavă pentru  $a < 0$  și convexă pentru  $a > 0$ .

**6.**  **Investigați!** Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de două ori derivabile și  $\alpha > 0$ .

- 1) Să se arate că:  
 a) dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt convexe (concave), atunci funcția  $f + g$  este convexă (concavă);  
 b) dacă funcția  $f$  este convexă (concavă), atunci funcția  $\alpha f$  este convexă (concavă) pentru orice  $\alpha > 0$ .  
 2) Să se dea un exemplu de două funcții  $f$  și  $g$  convexe (concave), astfel încât funcția  $f + g$  să nu fie convexă (concavă).

**§3 Reprezentarea grafică a funcțiilor**

A reprezenta grafic o funcție  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  înseamnă a trasa (a desena) graficul ei  $G_f = \{(x, f(x)) | x \in E\}$  într-un sistem de axe ortogonale  $xOy$ . Pentru trasarea graficului funcției  $f$  recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice funcției date.

**I. Domeniul de definiție al funcției.** Dacă domeniul de definiție al funcției  $f$  nu este specificat, se subînțelege că este indicat domeniul ei maxim de definiție, format din mulțimea  $D \subseteq \mathbb{R}$ , pentru care  $f(x)$ ,  $x \in D$ , are sens. În probleme cu conținut fizic, economic, geometric etc. pot fi restricții suplimentare referitoare la domeniul respectiv de definiție (studiu).

După ce a fost determinat domeniul de definiție al funcției  $f$ , se află punctele de intersecție a graficului ei cu axele de coordonate: cu axa  $Ox$  ( $y = 0$ ) – sunt punctele de forma  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ , ...,  $(x_n, 0)$ , ... fiind soluțiile ecuației  $f(x) = 0$  (dacă acestea există); cu axa  $Oy$  ( $x = 0$ ) – este punctul  $(0, f(0))$ , dacă  $0 \in D$ .

**II. Semnul funcției și eventualele simetrii ale graficului.** Dacă  $f \geq 0$  ( $f \leq 0$ ), atunci graficul funcției  $f$  este situat deasupra (respectiv dedesubtul) axei  $Ox$ .

Dacă  $f$  este o funcție pară (impară), atunci graficul ei este simetric față de axa  $Oy$  (respectiv față de originea sistemului  $xOy$ ), și în acest caz este suficient ca domeniul de studiu să fie  $D \cap [0, +\infty)$ .

Dacă  $f$  este o funcție periodică, atunci este suficient să se studieze funcția pe un interval de lungime egală cu perioada principală a acesteia pentru ca apoi graficul ei să se traseze prin translații paralele pe mulțimea  $D$ .

**III. Limite la capetele intervalelor, continuitatea funcției, asimptote.** Dacă mulțimea  $D$  este nemărginită, atunci se calculează (dacă există) limita funcției  $f$  la  $+\infty$  (sau și la  $-\infty$ ), se determină (dacă există) asimptotele orizontale, oblice ale graficului funcției  $f$ .

Dacă  $D$  este o reuniune de intervale, atunci se calculează limitele laterale ale funcției  $f$  la capetele fiecărui dintre aceste intervale. Simultan se determină eventualele asymptote verticale. De asemenea, se determină mulțimea de puncte ale mulțimii  $D$  în care funcția  $f$  este continuă, iar în punctele de discontinuitate se calculează limitele laterale.

**IV. Derivata întâi.** Se calculează  $f'$ . Se stabilește mulțimea  $D_{f'}$  pe care funcția  $f$  este derivabilă. Se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$ , adică se determină punctele critice ale funcției  $f$ . Soluțiile acestei ecuații, precum și punctele în care funcția  $f$  nu este derivabilă sau în care derivata ei este infinită, sunt eventualele puncte de extrem local ale acestei funcții. Ele divizează mulțimea  $D$  într-un număr finit (sau infinit) de intervale. Se studiază semnul funcției  $f'$  pe fiecare dintre intervalele obținute. Astfel se stabilesc intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale funcției  $f$ .

Dacă funcția  $f$  este de două ori derivabilă, atunci, pentru trasarea graficului ei cu o exactitate sporită, se execută etapa V.

**V. Derivata a doua.** Se calculează  $f''$  și se rezolvă ecuația  $f''(x) = 0$ . Soluțiile acestei ecuații, precum și punctele în care derivata a doua nu există sau este infinită, sunt eventualele puncte de inflexiune ale funcției  $f$ . Se stabilesc intervalele pe care derivata a doua are semn constant, se determină semnul funcției  $f''$  pe aceste intervale (acestea fiind intervale de concavitate și/sau de convexitate ale funcției  $f$ ) și se determină punctele ei de inflexiune.

**VI. Tabloul de variație** al funcției  $f$  include rezultatele obținute în etapele I–V.

În linia întâi se trece informația referitoare la domeniul de definiție al funcției  $f$  și la valorile remarcabile ale lui  $x$  (zerourile derivatelor întâi și a doua, punctele în care derivele  $f'$  și  $f''$  nu există ori sunt infinite).

În linia a doua se trece informația referitoare la derivata întâi, obținută în etapa a IV-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei se scrie 0. Se scrie semnul derivatei pe intervalele obținute.

În linia a treia se trece informația referitoare la derivata a doua, obținută în etapa a V-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei a doua se scrie 0. Se scrie semnul derivatei a doua pe intervalele obținute.

În ultima linie, prin săgeți „↗”, „↘” se notează monotonia funcției  $f$ , iar simbolurile „↙”, „↗” arată convexitatea, respectiv concavitatea ei; literele  $\bar{m}$ ,  $\bar{M}$  sau  $i$  semnifică faptul că punctul respectiv este punct de minim local, de maxim local sau punct de inflexiune.

**VII. Trasarea graficului.** Într-un sistem de axe ortogonale  $xOy$  se trasează întâi asimptotele graficului funcției  $f$  (dacă acestea există), apoi punctele remarcabile  $(x, f(x))$  din tabloul de variație al funcției  $f$ . Punctele remarcabile ale graficului funcției  $f$  se unesc printr-o linie curbă, ținându-se cont de paritatea, periodicitatea, monotonia, asimptotele, convexitatea și/sau concavitatea funcției  $f$ .

**Observație.** Etapa a V-a poate fi omisă în cazul unor dificultăți de calcul.

Vom trasa graficele unor funcții, parcurgând sistematic etapele menționate.

### Exerciții rezolvate

1. Să se traseze graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$a) f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x; \quad b) f(x) = \frac{x}{1+x^2}; \quad c) f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}.$$

Rezolvare:

a) I. Domeniul maxim de definiție al funcției  $f$  este  $\mathbb{R}$ .

Pentru  $x=0$  avem  $f(0)=0$ .  $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 3\}$ . Așadar, graficul funcției  $f$  trece prin originea sistemului de axe ortogonale  $xOy$  și intersectează axa  $Ox$  în punctul  $x_0 = 3$ .

II. Funcția  $f$  nu este nici pară, nici impară, deoarece  $f(-x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x$  și  $f(-x) \neq f(x)$ ,  $f(-x) \neq -f(x)$ . Cum  $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \frac{1}{3}x(x-3)^2$ , rezultă că  $f(x) \geq 0$  pentru  $x \geq 0$  și  $f(x) \leq 0$  pentru  $x \leq 0$ .

III. Funcția  $f$  este continuă pe multimea  $\mathbb{R}$ , deci asimptote verticale nu are.

Calculăm limitele la capetele intervalului  $(-\infty, +\infty)$ . Avem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = +\infty.$$

Astfel, graficul funcției  $f$  nu are asimptote oblice și nici orizontale.

IV.  $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 3\}$ . Punctele  $x_1 = 1$  și  $x_2 = 3$  sunt puncte critice.

V. Renunțăm la studiul derivatei a două, încrucișat acest exemplu este prevăzut și pentru profilul umanistic.

VI. Alcătuim tabloul de variație al funcției  $f$ :

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'$	+	0	-	0
$f$	$\nearrow$	$\bar{M}$	$\searrow$	$\bar{m}$

Constatăm că  $\bar{M} = f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$ ,

$$\bar{m} = f(3) = 9 - 18 + 9 = 0.$$

VII. Graficul funcției  $f$  este reprezentat în figura 5.8.

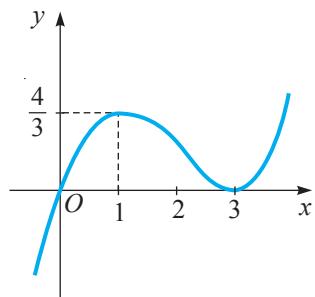


Fig. 5.8

b) I. Domeniul maxim de definiție al funcției  $f$  este multimea  $\mathbb{R}$ .

Graficul funcției  $f$  intersectează axele de coordonate numai în originea lor.

II. Funcția  $f$  nu este periodică;  $f$  este impară, deoarece este definită pe  $\mathbb{R}$  și  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Prin urmare, este suficient să restrângem domeniul de studiu ( $\mathbb{R}$ ) la multimea  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ .

III. Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ . Limitele ei la capetele intervalului  $(-\infty, +\infty)$  sunt  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ . Așadar, dreapta de ecuație  $y=0$  este asimptotă orizontală la  $-\infty$  și la  $+\infty$  a graficului funcției  $f$ .

IV.  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Ecuația  $f'(x)=0$  are soluțiile  $x_1=-1$  și  $x_2=1$  (punctele critice ale funcției  $f$ ). Pentru  $x > 0$  se acceptă numai  $x_2=1$ . Evident,  $f(1)=0,5$ .

V.  $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ . Soluția ecuației  $f''(x)=0$  pentru  $x > 0$  este  $x_3=\sqrt{3}$ .

VI. Tabloul de variație al funcției  $f$  pentru  $x \geq 0$  este cel alăturat, în care  $\bar{M}=f(1)=0,5$  este un maxim local, iar  $\sqrt{3}$  este un punct de inflexiune. Punctul 0 este de asemenea un punct de inflexiune.

$x$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'$	+	0	-	-
$f''$	0	-	-	0
$f$	$i$	$\curvearrowright$	$\bar{M}$	$i$

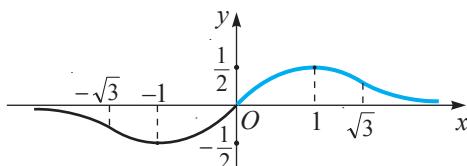


Fig. 5.9

c) I.  $D=\mathbb{R}$ . Pentru  $x=0$  avem  $f(0)=0$ .

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Oy$  în origine, iar axa  $Ox$  – în punctele  $x_k=k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

II. Funcția  $f$  este impară, periodică cu perioada principală  $2\pi$ . Deci, vom studia funcția  $f$  pe  $[0, 2\pi]$ , iar la trasarea graficului ei vom ține cont de simetria acestuia față de originea sistemului de coordinate și de periodicitatea funcției  $f$ .

III. Funcția  $f$  este continuă, asimptote nu are.

IV.  $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$ . Ecuația  $f'(x)=0$  pe  $[0, 2\pi]$  are două soluții:  $x_1=\frac{2\pi}{3}$  și  $x_2=\frac{4\pi}{3}$ .

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a doua.

VI. Alcătuim tabloul de variație al funcției  $f$  (pe  $[0, 2\pi]$ ):

Constatăm că  $\bar{M}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\bar{m}=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi$
$f'$	+	0	-	0
$f$	$\nearrow$	$\bar{M}$	$\searrow$	$\bar{m}$

VII. Trăsăm graficul funcției  $f$  pe  $[0, 2\pi]$ , apoi, prin translații, îl prelungim pe mulțimea  $\mathbb{R}$  periodic cu perioada  $2\pi$ . O porțiune a graficului funcției  $f$  este reprezentată în figura 5.10.

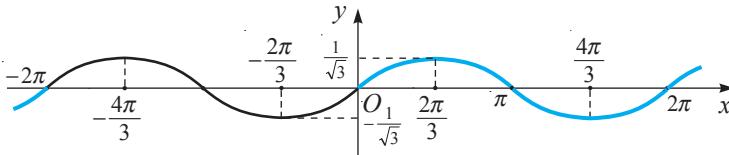


Fig. 5.10

2. Se consideră funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ . Să se traseze graficul funcției  $f$ , știind că el trece prin punctul de coordonate  $(1, 1)$ .

*Rezolvare:*

I. Cum punctul  $(1, 1) \in G_f$ , obținem:  $f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{1(1+a)} = 1 \Leftrightarrow a = 2$ .

Așadar,  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)}$  și domeniul maxim de definiție al funcției  $f$  este mulțimea  $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Graficul funcției  $f$  nu intersectează axele de coordonate.

II. Funcția  $f$  nu este periodică;  $f$  nu este nici pară, nici impară;  $f(x) \geq 0$  dacă și numai dacă  $x(x+2) > 0$  ( $x \in D$ ), adică  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ , și  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$ .

III. Funcția  $f$  este continuă pe  $D$ . Limitele ei la capetele intervalului  $(-2, 0)$  sunt:

$$l_s(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = +\infty, \quad l_d(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = -\infty,$$

$$l_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = -\infty, \quad l_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = +\infty.$$

Prin urmare, dreptele de ecuații  $x = -2$  și  $x = 0$  sunt asimptote verticale la stânga și la dreapta pentru graficul funcției  $f$ .

Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x(x+2)} = 2$ , rezultă că dreapta de ecuație  $y = 2$  este asimptotă orizontală la  $-\infty$  și la  $+\infty$  pentru graficul funcției  $f$ .

IV.  $f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2(x+2)^2}, \quad \forall x \in D$  și  $f'(x) = 0$  dacă  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$ .

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a două.

VI. Tabloul de variație al funcției  $f$  este următorul:

Constatăm că  $\bar{m} = f(1) = 1$

și  $\bar{M} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$	+	+	+	+	0 -	-
$f$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow M$	$\searrow$	$\nearrow \bar{m}$	$\nearrow$

VII. Graficul funcției  $f$  este reprezentat în figura 5.11.

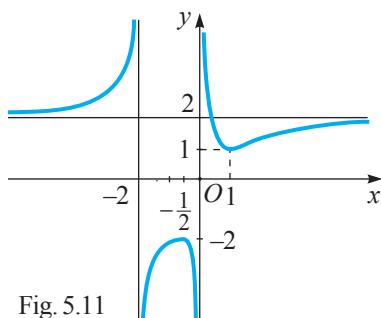


Fig. 5.11

## Exerciții propuse

## Profilul real

**A<sub>1</sub>** 1. Să se traseze graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = -2x^2 + x + 1;$ | b) $f(x) = x^2 + 3x - 4;$ |
| c) $f(x) = x^3 - 3x + 2;$  | d) $f(x) = x^2(x-1)^2.$   |

**B<sub>1</sub>** 2. Să se traseze graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (în cazul unor eventuale dificultăți de calcul, etapa cu derivata a doua poate fi omisă):

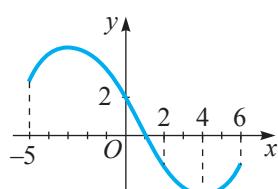
- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = x \ln x;$             | b) $f(x) = \frac{x^2}{x+2};$     |
| c) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2};$    | d) $f(x) = e^{-x^2};$            |
| e) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1};$ | f) $f(x) = \frac{ 1-x^2 }{x};$   |
| g) $f(x) = (x-3)\sqrt{x};$       | h) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$ |

3. Știind că suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu  $a$ :

- a) să se exprime aria acestui triunghi în funcție de lungimea unei catete;
- b) să se construiască graficul funcției obținute;
- c) să se determine aria maximă a acestui triunghi (cea mai mare valoare a funcției obținute).

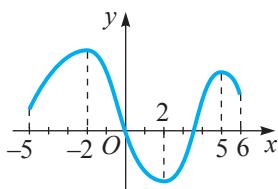
4. (BAC, 2015) În desen este reprezentat graficul funcției derivate  $f: [-5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ . Utilizând desenul, scrieți în casetă unul dintre semnele „ $<$ ”, „ $>$ ” sau „ $=$ ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevarată:

- |                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| a) $f'(-1) \square 0;$  | b) $f'(4) \square 0;$  |
| c) $f''(-4) \square 0;$ | d) $f''(2) \square 0.$ |



5. (BAC, 2014) În desen este reprezentat graficul funcției  $f: [-5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ . Scrieți în casetă mulțimea soluțiilor inecuației:

- |                                      |
|--------------------------------------|
| a) $f'(x) > 0, S = [\boxed{\quad}];$ |
| b) $f'(x) < 0, S = [\boxed{\quad}].$ |



## §4 Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie și economie. Probleme de maxim și minim

Vom aplica rezultatele teoretice obținute anterior privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcții. Astfel, vom exemplifica eficacitatea aplicării metodelor analizei matematice la rezolvarea unor probleme de fizică, geometrie, economie etc. ce au ca obiectiv determinarea parametrilor optimi de funcționare a unor sisteme tehnice, economice, care ar asigura un randament maxim, o putere maximă, ar optimiza consumul de energie, de timp, ar minimaliza pierderile. Rezolvând atare probleme, se realizează un anumit procedeu, numit **optimizare**, care constă în alegerea și în aplicarea celei mai potrivite soluții din mai multe posibile, în selectarea parametrilor ce corespund maximului sau minimului unei funcții. Menționăm că rezolvarea unor astfel de probleme nu întotdeauna este posibilă dacă sunt folosite doar metodele algebrei sau geometriei elementare.

Pentru a determina valoarea maximă sau minimă a unei mărimi, vom exprima valorile acesteia printr-o funcție, apoi vom studia variația funcției obținute.

### Probleme rezolvate

1. Dintr-o bucată de tablă de formă dreptunghiulară cu laturile de 50 cm și 80 cm se decupează în fiecare colț un pătrat (fig. 5.12), apoi se îndoiește marginile formate. Se obține o cutie de formă unui paralelipiped dreptunghic fără capac. Să se determine înălțimea cutiei, astfel încât volumul ei să fie maxim.

*Rezolvare:*

Notăm cu  $x$  lungimea laturii pătratului decupat și calculăm volumul  $\mathcal{V}(x)$  al cutiei obținute:

$$\mathcal{V}(x) = x(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x,$$

unde  $x$  variază în intervalul  $\left[0, \frac{50}{2}\right] = [0, 25]$ . Astfel, problema se reduce la determinarea celei mai mari valori a funcției  $\mathcal{V}: [0, 25] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{V}(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$ .

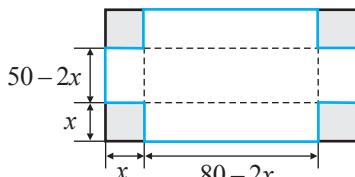


Fig. 5.12

Aflăm extremele funcției  $\mathcal{V}$ . Avem  $\mathcal{V}'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$ . Rezolvăm ecuația  $\mathcal{V}'(x) = 0$  și obținem că în  $[0, 25]$  ea are o soluție unică:  $x_0 = \frac{130 - \sqrt{4900}}{6} = 10$ . Cum  $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(25) = 0$ , rezultă că în punctul  $x_0$  funcția  $\mathcal{V}$  ia cea mai mare valoare.

*Răspuns:* Cutia are volum maxim dacă înălțimea ei este de 10 cm.

2. Dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru  $2a$ , să se afle cel cu aria maximă.

*Rezolvare:*

Fie  $x$  lungimea laturii  $AB$  a dreptunghiului  $ABCD$ ,  $AD > AB$  (fig. 5.13). Atunci  $AD = \frac{2a - 2x}{2} = a - x$ . Aria dreptunghiului  $ABCD$  este  $\mathcal{A}(x) = x(a - x) = -x^2 + ax$ .

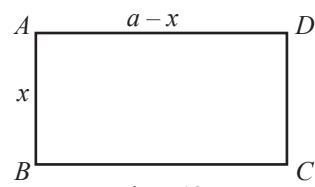


Fig. 5.13

Considerăm funcția  $\mathcal{A}: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}(x) = -x^2 + ax$ .

Atunci  $\mathcal{A}'(x) = -2x + a$ .  $\mathcal{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ .

Obținem tabloul de variație al funcției  $\mathcal{A}: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ :

Dreptunghiul  $ABCD$  are aria maximă  $\mathcal{A}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$   
dacă el este un pătrat cu latura  $\frac{a}{2}$ .

Răspuns:  $\mathcal{A}_{\max} = \frac{a^2}{4}$  unități pătrate.

$x$	0	$\frac{a}{2}$	$a$
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	↗	$\frac{a^2}{4}$	↘

**Consecință.** Dacă suma a două numere pozitive este cunoscută, produsul lor este maxim în cazul în care numerele sunt egale.

Se poate demonstra că suma a două numere pozitive, cu produsul lor constant, este minimă dacă numerele sunt egale.

3. Să se determine coordonatele punctului graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 3$ , aflat la distanță minimă de punctul  $M(10, 5)$  (fig. 5.14).

Rezolvare:

Orice punct  $A$  al graficului funcției  $f$  are abscisa  $x$  și ordonata  $x^2 + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Notăm cu  $\varphi(x)$  distanța dintre punctele  $M$  și  $A$  și obținem:

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-10)^2 + (x^2 + 3 - 5)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}.$$

Problema se reduce la determinarea minimului funcției

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}.$$

$$\text{Avem: } \varphi'(x) = \frac{2x^3 - 3x - 10}{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Punctul  $x_0 = 2$  este punct de minim local pentru funcția  $\varphi$ , deoarece  $\varphi' < 0$ , dacă  $x < 2$ , și  $\varphi' > 0$ , dacă  $x > 2$ .

Atunci  $f(2) = 2^2 + 3 = 7$ . Astfel, coordonatele punctului  $A$  sunt 2 și 7.

Răspuns: Punctul are coordonatele 2 și 7.

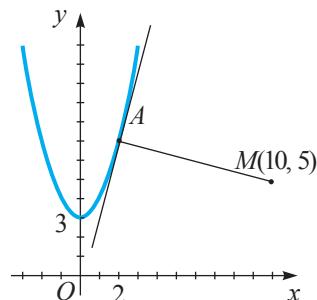


Fig. 5.14

4. Un lot de pământ de formă dreptunghiulară trebuie îngrădit, știind că dintr-o parte este deja construit gard. Prețul unui metru de gard paralel cu gardul deja construit este de 100 de lei, iar al unui metru de restul gardului – de 150 de lei. Să se determine aria maximă care poate fi îngrădită, dacă se dispune de 18 000 de lei.

Rezolvare:

Fie  $x$  și  $y$  dimensiunile lotului, atunci, din condiția problemei, avem:

$$100 \cdot x + 2 \cdot 150 \cdot y = 18000 \Leftrightarrow x + 3y = 180 \Leftrightarrow y = 60 - \frac{x}{3}.$$

$$\text{Aria lotului } \mathcal{A}(x) = x \cdot y = x \left(60 - \frac{x}{3}\right). \quad \mathcal{A}'(x) = 60 - \frac{2}{3}x.$$

Pentru  $\mathcal{A}'(x) = 0$  obținem  $60 - \frac{2}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 90$ .

Deoarece  $\mathcal{A}''(x) = -\frac{2}{3} < 0$ , rezultă că în  $x = 90$  funcția  $\mathcal{A}(x)$  are un maximum.

Prin urmare, aria maximă care poate fi îngădătită  $\mathcal{A}_{\max} = 90 \cdot \left( 60 - \frac{90}{3} \right) = 2700 (\text{m}^2)$ .

Răspuns:  $2700 \text{ m}^2$ .

**5.** Să se determine traseul cel mai economic pentru construirea unei căi ferate între localitățile  $A$  și  $B$ , știind că o porțiune de lungime  $d$  a ei trebuie construită paralel și în imediata vecinătate a unei șosele.

Rezolvare:

Fie  $h_1, h_2$  distanțele dintre  $A$ , respectiv  $B$ , și șosea,  $a$  – distanța dintre proiecțiile punctelor  $A$  și  $B$  pe direcția șoselei (fig. 5.15).

Evident, costul traseului este direct proporțional cu lungimea traseului  $L(x)$ . Din figură avem:

$$L(x) = AM + MN + NB = \sqrt{x^2 + h_1^2} + d + \sqrt{h_2^2 + (a-x-d)^2}.$$

$$\text{Avem } L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{a-x-d}{\sqrt{h_2^2 + (a-x-d)^2}}.$$

$$\text{Soluțiile ecuației } L'(x) = 0 \text{ sunt } x_1 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 + h_2}, \quad x_2 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 - h_2}.$$

În punctul  $x_1 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 + h_2}$ , funcția  $L(x)$  are un minim, deoarece  $L''(x_1) > 0$ .

$$\text{Așadar, } L_{\min} = L(x_1) = \sqrt{(a-d)^2 + (h_1 + h_2)^2} + d.$$

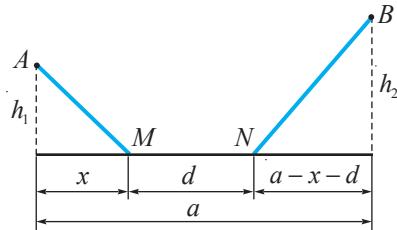


Fig. 5.15

**6.** Cererea pe piață pentru un produs este descrisă de funcția definită prin formula  $p(x) = 780 - 2x - 0,1x^2$ , unde  $x$  este numărul de unități de produs, iar  $p$  – prețul (în lei).

Cheltuielile medii de fabricare a unei unități de produs se descriu de funcția definită prin formula  $\bar{C}(x) = \frac{1000}{x} + 500 + 2x$ . (Funcția cererii și funcția cheltuielilor medii se determină în baza datelor statistice.)

Să se determine beneficiul brut maxim obținut din vânzarea produsului și prețul respectiv.

Rezolvare:

Beneficiul brut  $B(x)$  este egal cu diferența dintre prețul de vânzare și cheltuielile de fabricare a produsului, adică  $B(x) = p(x) \cdot x - \bar{C}(x) \cdot x =$

$$= (780 - 2x - 0,1x^2)x - \left( \frac{1000}{x} + 500 + 2x \right)x = 280x - 4x^2 - 0,1x^3 - 1000.$$

Derivata  $B'(x) = 280 - 8x - 0,3 \cdot x^2$ .

Din  $B'(x) = 0$  obținem ecuația  $0,3x^2 + 8x - 280 = 0$ , cu soluțiile  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = -\frac{28}{0,6}$  (care nu corespunde condiției problemei). Deoarece  $B''(20) < 0$ , în punctul  $x = 20$  avem maxim. Astfel, obținem beneficiul brut maxim  $B(20) = 280 \cdot 20 - 4 \cdot 20^2 - 0,1 \cdot 20^3 - 1000 = 2200$  (lei) și prețul respectiv  $p(20) = 780 - 2 \cdot 20 - 0,1 \cdot 20^2 = 700$  (lei).

Răspuns: 2200 lei; 700 lei.

7. Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză medie de  $v$  km/h (cu condiția că  $40 \leq v \leq 70$ ), consumând  $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right)$  litri/h de benzină. Să se afle viteza optimă (pentru care cheltuielile sunt minime), știind că șoferul este retribuit cu 30 lei/h, iar benzina costă 15 lei/litrul.

Rezolvare:

Distanța a fost parcursă în  $\frac{100}{v}$  ore, în care s-au consumat  $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right) \cdot \frac{100}{v} = \frac{v^2 + 2400}{3v}$  litri de benzină. În aceste condiții, cheltuielile totale pentru întregul parcurs sunt

$$c(v) = 30 \cdot \frac{100}{v} + 15 \cdot \frac{v^2 + 2400}{3v} = \frac{5v^2 + 15000}{v} \text{ (lei).}$$

Viteza optimă este cea pentru care cheltuielile totale sunt minime. Rezolvăm ecuația  $c'(v) = \frac{5v^2 - 15000}{v^2} = 0$  și obținem  $v_0 = \sqrt{3000} \approx 54,77$  (km/h). Prin urmare, pentru această valoare a vitezei cheltuielile totale sunt minime.

Răspuns:  $v_{\text{optim}} \approx 54,77$  km/h.

8. Un muncitor trebuie să deplaseze o piesă de bronz pe o placă de fontă așezată pe un plan orizontal, cu ajutorul unei forțe  $\vec{Q}$ . Masa piesei este de 100 kg, iar coeficientul de frecare dintre bronz și fontă  $\mu = 0,2$ . Să se determine măsura unghiului  $\alpha$ , format de direcția forței și planul orizontal, astfel încât forța  $\vec{Q}$  necesară acestei deplasări să fie minimă.

Rezolvare:

Din figura 5.16 se constată că echilibrul dinamic al forțelor de frecare  $\vec{F}$ , de tracțiune  $\vec{Q}$ , de greutate  $\vec{G}$  și de reacție  $\vec{N}$  este asigurat dacă:

$$\begin{cases} Q \cos \alpha - F = 0, \\ N + Q \sin \alpha - G = 0. \end{cases}$$

Din acest sistem, substituind formula pentru forța de frecare  $F = \mu N$ , determinăm funcția  $Q(\alpha)$ , al cărei minim trebuie aflat:

$$Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

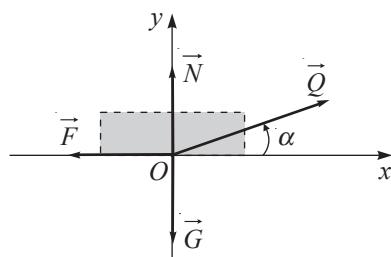


Fig. 5.16

Astfel, problema se reduce la determinarea celei mai mici valori a funcției  $Q: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$ .

Aflăm extretele funcției  $Q$ . Avem  $Q'(\alpha) = -\frac{\mu G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}$ . Soluția ecuației  $Q'(\alpha) = 0$  este  $\alpha = \arctg \mu$ . Pentru această valoare funcția  $Q(\alpha)$  are un minim:

$$Q_{\min} = Q(\arctg \mu) = \frac{\mu G}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Substituind datele problemei, obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 0,2; \quad \alpha \approx 11^\circ 20' \text{ și } Q = \frac{0,2 \cdot 100}{\sqrt{1 + 0,2^2}} \approx 19,6 \text{ kg.}$$

Răspuns:  $\approx 11^\circ 20'$ .

**9.** Să se determine înălțimea la care trebuie așezată o sursă de lumină deasupra unei platforme circulare de rază  $a$  pentru ca iluminarea platformei să fie maximă, știind că intensitatea luminoasă  $I$  pe direcția verticală este constantă, iar iluminarea<sup>1</sup>  $E$  este dată de formula  $E = \frac{I \cdot \cos \alpha}{r^2}$ , unde  $\alpha$  este unghiul de incidentă a razeelor pe această suprafață.

Rezolvare:

Notăm cu  $x$  distanța de la sursa de lumină până la platformă. Din figura 5.17 obținem:

$$r^2 = a^2 + x^2 \text{ și } \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Prin urmare, funcția al cărei maxim trebuie determinat este  $E = E(x) = \frac{I \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad x \in (0, +\infty)$ .

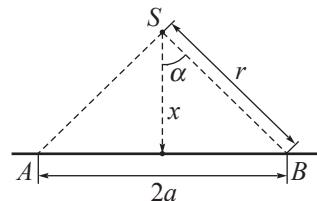


Fig. 5.17

Egalând derivata cu zero, obținem:

$$E'(x) = I \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + x^2)^3} = 0,$$

soluția fiind  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Pentru această valoare funcția  $E(x)$  are un maxim:  $E_{\max} = \frac{2I}{3\sqrt{3}a^2}$ .

Răspuns:  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

**10.** Care trebuie să fie rezistența unui circuit extern, astfel încât sursa de curent cu tensiunea electromotoare  $\varepsilon = 10 \text{ V}$  și rezistența internă  $r = 20 \Omega$  să debiteze o putere maximă? Care este valoarea numerică a acestei puteri?

Rezolvare:

Notăm cu  $x$  rezistența circuitului extern și cu  $P$  puterea curentului electric pe circuitul extern. Atunci, conform formulei pentru puterea curentului, avem:  $P = I^2 x$ , unde  $I$  este intensitatea curentului, care poate fi determinată din legea lui Ohm:  $I = \frac{\varepsilon}{x + r}$ .

<sup>1</sup> Unitatea de măsură pentru iluminare este luxul (lx).

Deci, obținem funcția  $P(x) = \frac{\varepsilon^2 \cdot x}{(x+r)^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , a cărei derivată

$$P'(x) = \varepsilon^2 \frac{(x+r)^2 - 2x(x+r)}{(x+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-x}{(x+r)^3}$$

se anulează pentru  $x=r$ . În  $x=r$  funcția  $P(x)$  are un maximum. Substituind datele problemei, obținem  $P_{\max} = P(r) = \frac{\varepsilon^2}{4r} = \frac{5}{4}$  W.

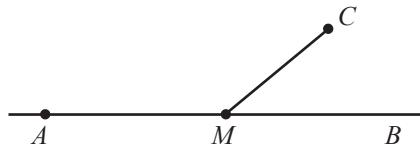
Răspuns:  $x=r$ ,  $P_{\max} = \frac{5}{4}$  W.

### Exerciții propuse

#### *Profilul real*

- A<sub>1</sub>** 1. Un punct material se mișcă rectiliniu conform legii  $s(t) = 12t - t^3$  ( $s$  este distanța exprimată în metri, iar  $t$  – timpul exprimat în secunde).
- Care este viteza punctului material în momentul inițial?
  - Peste cât timp de la plecare punctul material se va opri? Care este distanța parcursă până în acel moment?
2. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este  $s(t) = at^3 + bt + c$ . Să se determine viteza și accelerația mobilului în momentul  $t$ .
3.  **Lucrați în perechi!** Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este  $s(t) = t^3 - 6t^2 + 2$ . Să se determine:
  - momentul în care accelerația sa este nulă;
  - valoarea minimă a vitezei mobilului.
- B<sub>1</sub>** 4. Un element galvanic de tensiune electromotoare  $E$  și rezistență interioară  $r$  produce un curent de intensitate  $I$  într-un circuit extern de rezistență  $R$ . Intensitatea curentului este dată de relația  $I = \frac{E}{r+R}$ . Puterea efectivă a elementului galvanic este  $P(R) = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$ . Să se determine rezistența  $R$  pentru care puterea  $P$  este maximă.
- C<sub>1</sub>** 5. Într-un triunghi cu o latură de lungime  $a$  și înălțimea corespunzătoare acesteia  $h$  se înscrie un dreptunghi, astfel încât una dintre laturile sale este conținută de această latură. Să se afle aria maximă a dreptunghiului.
6. Prețul unei unități de produs este de 225 de lei. Cheltuielile de fabricare  $C(x)$  sunt date de funcția definită prin formula  $C(x) = 95x + x^2$ , unde  $x$  este numărul de unități de produs fabricate. Să se determine beneficiul brut maxim.
7.  **Lucrați în perechi!** Cheltuielile de fabricare ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula  $C(x) = 5 + 36x$ , iar cererea – de funcția definită prin formula  $p(x) = -x^2 + 18x + 3$ ,  $9 < x < 13$ . Să se determine numărul unităților de produs,  $x$ , pentru care beneficiul brut este maxim, precum și valoarea acestuia.

8. (BAC, 2007) În desen,  $AB$  reprezintă o cale ferată, iar  $C$  un punct, care se află la distanță de 8 km de la această cale ferată și la distanță de  $\sqrt{4964}$  km de la punctul  $A$ . Pentru a transporta marfa din punctul  $A$  în punctul  $C$ , se intenționează să se construiască o șosea (rectilinie) din punctul  $C$  până la un punct  $M$  al căii ferate. Se știe că prețul pentru transportarea unei tone de marfă pe calea ferată este de 30 de lei (pentru un kilometru), iar pe șosea – de 50 de lei (pentru un kilometru). Determinați care trebuie să fie distanța  $AM$ , astfel încât prețul pentru transportarea unei tone de marfă din  $A$  în  $C$  (pe calea  $AMC$ ) să fie minim.



9. **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicarea derivatei în economie*. (Descoperirea noțiunii de elasticitate.)

### Exerciții și probleme recapitulative

#### *Profilul real*

- A. 1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = x^3 + 6x^2$ ;      b)  $f(x) = x^3 - \frac{x}{3}$ ;      c)  $f(x) = (x+1)^2$ ;      d)  $f(x) = x^2 + x + 1$ .
2. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și să se alcătuiască tabloul de variație al funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = x^2 + 2x$ ;      b)  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ ;
  - $c) f(x) = (x-1)^2(x+2)^2$ ;      d)  $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$ ;
  - e)  $f(x) = 3 + x - x^2$ ;      f)  $f(x) = x^4 - 4x + 2$ .
3. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $a) f(x) = x^2 + 2x + 1$ ;      b)  $f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 8$ ;
  - c)  $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ;      d)  $f(x) = x^3 + x - 4$ ;
  - e)  $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x + 1$ ;      f)  $f(x) = x^2(x+1)^3$ .
4. Pe intervalul indicat, să se determine extremele globale ale funcției  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ ,  $I = [0; 1]$ ;      b)  $f(x) = x^3 - x + 2$ ,  $I = [0; 2]$ .
5. **Lucrați în perechi!** Să se traseze graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $a) f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ ;      b)  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ .
6. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + ax^2 - 2$ . Să se reprezinte grafic funcția  $f$ , știind că:
- graficul trece prin punctul  $(1, 1)$ ;
  - în punctul  $x=1$  funcția  $f$  are un extrem local.
7. Costul unui lot de produse este de 240 de lei. Cheltuielile de fabricare sunt descrise de funcția definită prin formula  $C(x) = 3x^2 + 6x + 120$ , unde  $x$  este numărul unităților de produs. Să se determine beneficiul brut maxim.
- Indicație:* Beneficiul brut  $B(x)$  se exprimă prin formula  $B(x) = 240x - C(x)$ .

**B<sub>1</sub>** 8. Să se arate că:

- a)  $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2\arctgx, & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ -2\arctgx, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \end{cases}$ ; b)  $\arctg \frac{1+x}{1-x} = \arctgx + \frac{\pi}{4}, x \in (-\infty, 1)$ ;  
 c)  $2\arctgx - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0, x \in (-1; 1)$ .

9. Să se afle intervalele de monotonie și extremele locale și globale ale funcției:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x+1|$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ;  
 c)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x$ .

10.  **Lucrați în perechi!** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx - \ln(1+x^2)$ , să fie descrescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

11. Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2$ ; b)  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ ;  
 c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ; d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + |x|$ .

12. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$   
 c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 4x$ ; d)  $f: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ;  
 e)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\ln x - 1|$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 4x|$ .

13. Să se traseze graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ; b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ; c)  $f(x) = \frac{x^2}{3x - 2}$ ;  
 d)  $f(x) = \frac{x}{x - 2}$ ; e)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ; f)  $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ .

14. Să se arate că pentru orice  $m \in \mathbb{R}$ , funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ , are un maxim și un minim local.

15. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care satisface condițiile:

- a)  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ ; b) există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ ; c) există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ .

Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

*Indicație.* Aplicați regula lui l'Hospital pentru calculul limitei  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x}$ .

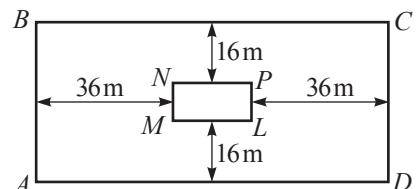
16.  **Investigați!** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{mx^2 - 1}{x - 1}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Să se determine valorile lui  $m$ , astfel încât:

- a) funcția să fie strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele  $(-\infty, 1)$ ;  $(1, +\infty)$ ;  
 b) funcția să fie strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele specificate în a);  
 c) funcția să admită puncte de extrem;  
 d) graficul funcției să nu aibă asymptote.

**C<sub>1</sub>** 17.  **Lucrați în perechi!** Cheltuielile de fabricare (în lei) ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula  $C(x) = 1 + 76x$ , iar cererea – de funcția definită prin formula  $p(x) = -x^2 + 42x - 80$ ,  $2 \leq x \leq 40$ . Să se determine numărul unităților de produs,  $x$ , care trebuie fabricate pentru a obține un beneficiu maxim, precum și valoarea acestui beneficiu.

18. (BAC, 2016) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^2x^4 + 2(a^2 - 1)x^2 + 3$ . Determinați valorile reale ale parametrului  $a$  pentru care funcția  $f$  admite un singur punct de extrem local.

19. (BAC, 2008) Pentru construcția edificiului unui spital, fundamentul căruia are forma unui dreptunghi  $MNKL$  cu aria de  $400 \text{ m}^2$ , este necesar un lot de formă dreptunghiulară  $ABCD$ , astfel încât edificiul spitalului să fie situat la distanțele de  $36 \text{ m}$  și  $16 \text{ m}$  de la marginile lotului (vezi desenul). Determinați lungimea și lățimea fundamentului edificiului spitalului, astfel încât aria lotului  $ABCD$  să fie minimă.



20. **Lucrați în grup!** Proiect **Probleme de optimizare din viața cotidiană**.

### Test sumativ

#### *Profilul real*

*Timp efectiv de lucru:  
45 de minute*

- Determinați valoarea de adevăr a propoziției:  
„Graficul funcției  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ , nu are asymptote”. A / F (2)
- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ .
  - Aflați: a) intervalele de monotonie;
  - b) punctele de extrem local;
  - c) extremele locale.(3) (3) (3) (3)
- Completați tabloul de variație al funcției  $f$ .
- Determinați, pe intervalul  $I = [-1, 2]$ , extremele globale ale funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0 \\ 2 \ln x, & \text{dacă } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$
(6)
- Trasați graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . (8)
- Cunoscând funcția cererii  $p(x) = 800 - 0,5x$  și funcția ofertei  $p_1(x) = 700 + 2x$  ( $x$  – numărul unităților de produs), determinați mărimea impozitului pentru fiecare unitate de produs, astfel încât venitul din impozitare să fie maxim.  
*Indicație.* Venitul din impozitare a  $x$  unități de produs se exprimă prin formula  $V(x) = (p(x) - p_1(x))x$ . (8)

#### Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–17	16–11	10–7	6–4	3–2	1–0

## Aplicații ale derivatelor

### Rolul derivatei în studiul funcțiilor

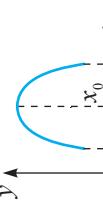
Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , derivabilă pe  $I$ .

1. Dacă  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci  $f(x)$  este constantă pe  $I$ .

2. Funcția  $f$  este crescătoare (crescătoare) pe  $I$  dacă și numai dacă  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ),  $\forall x \in I$ .

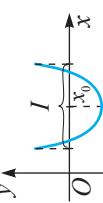
3. Dacă  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x < x_0$ , și  $f''(x) < 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x > x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim local al funcției  $f$ .

Se notează:  $f'(x_0) >$ .



4. Dacă  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x < x_0$ , și  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $x > x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim local al funcției  $f$ .

Se notează:  $f'(x_0) <$ .



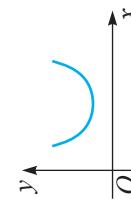
5. Punctele de maxim local și de minim local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local ale acestei funcții**.
6. Soluțiile ecuației  $f'(x) = 0$  sunt eventualele puncte de extrem local ale funcției  $f$ .

### Probleme de maxim și minimum

### Rolul derivatei a două în studiul funcțiilor

Fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , de două ori derivabilă pe  $I$ .

1. Dacă  $f''(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .



2. Dacă  $f''(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci funcția  $f$  este concavă pe  $I$ .



3. Fie  $f'''(x_0) = 0$  și  $V(x_0)$  o vecinătate a punctului  $x_0 \in I$ .  
Dacă  $f'''(x) < 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x < x_0$ , și  $f'''(x) > 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x > x_0$ , sau invers ( $f'''(x) > 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x < x_0$ , și  $f'''(x) < 0$ ,  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x > x_0$ ), atunci  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .



4. Soluțiile ecuației  $f'''(x) = 0$  sunt eventualele puncte de inflexiune ale funcției  $f$ .

### Reprezentarea grafică a funcțiilor

Pentru trasarea grafică a funcțiilor se recomandă parcurserea următoarelor elemente caracteristice ale funcției:

I. Stabilirea domeniului maxim de definiție.

II. Semnul funcției și eventualele simetrii ale graficului.

III. Limitiile la capetele intervalelor, continuitatea funcției, asymptote.

IV. Derivata întâi, studiul monotoniciei și determinarea evenimentelor puncție de extrem.

V. Derivata a două, studiul concavității-convexității și determinarea evenimentelor puncte de inflexiuni.

VI. Tabloul de variație.

VII. Trasarea graficului funcției.

**Obiective**

- ⇒ operarea cu numere reale și complexe pentru a efectua calcule în diverse contexte;
- ⇒ utilizarea numerelor complexe, a numerelor reale scrise sub diferite forme, a terminologiei aferente în diverse contexte;
- ⇒ utilizarea operațiilor cu numere complexe și numere reale, a proprietăților acestora în rezolvări de probleme;
- ⇒ aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu numere complexe pentru rezolvarea ecuațiilor (de gradul II, \*bipătratice, \*binome, \*reciproce) în mulțimea C;
- ⇒ \*rezolvarea geometrică a numerelor complexe, a modulelor numerelor complexe și aplicarea acestor reprezentări în rezolvări de probleme;
- ⇒ \*determinarea rădăcinilor de ordinul 2, 3 și 4 ale unui număr complex scris sub formă trigonometrică sau sub formă algebrică.

### § 1 | Operații cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică

Din cursul gimnazial de matematică se știe că ecuația de gradul II  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , are soluții reale dacă și numai dacă discriminantul ei este nenegativ. Însă dacă discriminantul ei este negativ (de exemplu, discriminanții ecuațiilor  $3x^2 - x + 4 = 0$ ,

$x^2 + 1 = 0$ ), atunci ecuația nu are soluții reale, deoarece în  $\mathbb{R}$  nu există rădăcini de ordinul doi ale unui număr negativ. Pentru ca să existe soluții ale tuturor ecuațiilor de acest tip, matematicienii din secolul al XVI-lea utilizează expresii de forma  $\sqrt{-a}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$ . În secolul al XVIII-lea, L. Euler introduce notația  $\sqrt{-1} = i$  ( $i$  de la cuvântul latin „imaginarius”). Astfel, mulțimea numerelor reale se extinde la mulțimea numerelor de forma  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , numite în secolul al XIX-lea de C. F. Gauss<sup>1</sup> *numere complexe*.

**Definiție.** Se numește **număr complex** expresia de forma  $a + bi$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ , iar  $i$  este un simbol cu proprietatea  $i^2 = -1$ .

<sup>1</sup> Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – matematician, fizician și astronom german.

Vom nota mulțimea numerelor complexe cu  $\mathbf{C}$ , deci  $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ . Prin urmare,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbf{C}$ .

Dacă  $z = a + bi$ , atunci se spune că numărul complex  $z$  este scris sub **formă algebrică** (se admite și scrierea  $z = a + ib$ ). Numărul  $a$  se numește **partea reală** a numărului  $z = a + bi$  și se notează cu  $\operatorname{Re} z$ , iar  $b$  se numește **partea imaginară** a lui  $z$  și se notează cu  $\operatorname{Im} z$ .

Numerele complexe  $z_1 = a + bi$  și  $z_2 = c + di$  se consideră **egale** dacă și numai dacă  $a = c$  și  $b = d$ . Numărul de forma  $a + 0i$  se identifică cu numărul real  $a$ . Prin urmare, mulțimea numerelor reale este o submulțime a mulțimii numerelor complexe. Numărul de forma  $0 + bi$ ,  $b \neq 0$ , se numește **pur imaginar** și se notează  $bi$ . Numărul complex  $i = 0 + 1i$  se numește **unitate imaginară**, însă ea nu ține de efectuarea unor măsurări. Acest număr este o soluție în  $\mathbf{C}$  a ecuației  $x^2 + 1 = 0$  (ecuație care nu are soluții în  $\mathbb{R}$ ).

### Exercițiu rezolvat

Să se determine numerele  $x, y \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $2 + 3i + (x + yi) = 5 + 7i$ .

*Rezolvare:*

$$2 + 3i + (x + yi) = 5 + 7i \Leftrightarrow (2 + x) + (3 + y)i = 5 + 7i.$$

Egalând părțile reale și respectiv cele imaginare, obținem:  $\begin{cases} 2 + x = 5 \\ 3 + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$

Definim **operațiile de adunare, scădere și înmulțire** a numerelor complexe în modul următor:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i; \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i; \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Adunarea (scăderea) se efectuează adunând (scăzând) între ele părțile reale și respectiv părțile imaginare ale numerelor. Scăderea este operație inversă adunării.

### Exemple

1.  $(2 + 3i) + (-3 + 7i) = [2 + (-3)] + (3 + 7)i = -1 + 10i$ ;
2.  $(2 + 3i) \cdot (-3 + 7i) = [2 \cdot (-3) - 3 \cdot 7] + [2 \cdot 7 + 3(-3)]i = -27 + 5i$ .

**Observație.** Operațiile de adunare, scădere, înmulțire cu numere complexe se efectuează similar cu operațiile cu polinoame în nedeterminata  $i$ , considerând  $i^2 = -1$ .

**Definiție.** Se numește **conjugatul** numărului complex  $z = a + bi$  numărul  $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ . (Notația  $\bar{z}$  se citește „z barat”.)

Produsul  $z \cdot \bar{z}$ ,  $z \in \mathbf{C}$ , are o semnificație deosebită deoarece el este un număr real nenegativ:  $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$ .

**Proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire a numerelor complexe** (sunt aceleași ca și pentru numerele reale):

- 1º  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  – adunarea este comutativă;
- 2º  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  – adunarea este asociativă;
- 3º  $0 = 0 + 0 \cdot i$  este elementul neutru pentru adunare;
- 4º  $-z = -a - bi$  este opusul lui  $z = a + bi$ ;
- 5º  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$  – înmulțirea este comutativă;
- 6º  $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$  – înmulțirea este asociativă;
- 7º  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$  – înmulțirea este distributivă față de adunare;
- 8º  $1 = 1 + 0 \cdot i$  este elementul neutru pentru înmulțire;
- 9º  $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$  este inversul pentru  $z = a + bi$ ,  $z \neq 0$ .

Expresia pentru  $z^{-1}$  se poate obține astfel:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

**Împărțirea numerelor complexe** se poate defini ca operație inversă a înmulțirii:  $z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$ ,  $z_2 \neq 0$ , însă, pentru a evita calcule complicate, este mai simplu să se procedeze astfel:

$$\begin{aligned} \text{dacă } z_1 = a + bi, z_2 = c + di, z_2 \neq 0, \text{ atunci } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c+di)}{(c+di)(c+di)} = \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \end{aligned}$$

### Exemple

1.  $\frac{7+3i}{5-i} = \frac{(7+3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{35+7i+15i+3i^2}{25+1} = \frac{35-3+22i}{26} = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i.$
2.  $(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

**Definiție.** Se numește **modulul numărului complex**  $z = a + bi$  numărul real nenegativ  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , notat  $|a + bi|$  sau  $|z|$ . Deci,  $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### Exemple

Pentru  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $z_2 = i$ , obținem  $|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ ,  $|z_2| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ .

**Teorema 1.** Pentru orice numere complexe  $z, z_1, z_2$  sunt adevărate egalitățile:

- 1º  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ;
- 2º  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ;
- 3º  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ,  $z_2 \neq 0$  (deci și  $\bar{z}_2 \neq 0$ );
- 4º  $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ ;
- 5º  $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$ ;
- 6º  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ;
- 7º  $\bar{\bar{z}} = z$ .

**Exercițiu.** Arătați că, fiind date numerele  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ , ecuațiile  $z_1 \cdot u = z_2$  ( $z_1 \neq 0$ ) și  $z_1 + t = z_2$  au soluții unice.

**Observație.** Datorită faptului că operațiile cu numere complexe au aceleași proprietăți ca și operațiile respective cu numere reale, pentru numerele complexe pot fi aplicate: formulele cunoscute pentru calculul prescurtat; noțiunea de putere cu exponent întreg a numărului complex nenul  $z$ :  $z^0 = 1$ ,  $z^k = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{k \text{ ori}}$ ,  $z^{-k} = (z^{-1})^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ; proprietățile acestei puteri:  $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$ ,  $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$ ,  $z \neq 0$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

Astfel:  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ .

De asemenea, pot fi aplicate formulele  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

pentru calculul soluțiilor ecuației de gradul II  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{C}$ ,  $a \neq 0$ .

Menționăm că orice ecuație de gradul II are soluții în mulțimea  $\mathbf{C}$ , deoarece pentru orice număr complex  $z$  există un număr complex  $u$ , astfel încât  $u^2 = z$  (acest fapt va fi demonstrat mai jos).

### Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze:  $A = (2 + 3i)^3 - \frac{7 + 3i}{5 - i}$ .

Rezolvare:

Aplicând formula cubului sumei și rezultatul obținut anterior pentru  $\frac{7 + 3i}{5 - i}$ , obținem:

$$\begin{aligned} A &= 8 + 3 \cdot 4 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot (3i)^2 + (3i)^3 - \left( \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i \right) = 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 - \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i = \\ &= 8 - 54 - \frac{16}{13} + \left( 36 - 27 - \frac{11}{13} \right)i = -\frac{614}{13} + \frac{106}{13}i. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze:

- a)  $i^{73}$ ;      b)  $i^{24k+3}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;      c)  $(7 - 3i)^{-1}$ .

Rezolvare:

a)  $i^{73} = i^{72+1} = (i^4)^{18} \cdot i = 1^{18} \cdot i = i$ .

b)  $i^{24k+3} = (i^4)^{6k} \cdot i^3 = 1^{6k} \cdot (-i) = -i$ .

c)  $(7 - 3i)^{-1} = \frac{1}{7 - 3i} = \frac{7 + 3i}{(7 - 3i)(7 + 3i)} = \frac{7 + 3i}{49 + 9} = \frac{7}{58} + \frac{3}{58}i$ .

3. Să se rezolve în  $\mathbf{C}$  ecuația:

a)  $(2 + i)z - (3 + 6i)z = 5 + 2i$ ;      b)  $z^2 - 2z + 3 = 0$ .

Rezolvare:

a) Folosind proprietățile operațiilor cu numere complexe, obținem:

$$(2 + i - 3 - 6i)z = 5 + 2i \Leftrightarrow (-1 - 5i)z = 5 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{5 + 2i}{-1 - 5i} = -\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i.$$

Răspuns:  $S = \left\{ -\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i \right\}$ .

b)  $\Delta = 4 - 12 = -8 = (i\sqrt{8})^2 = (2\sqrt{2}i)^2$ .

Astfel, soluțiile sunt  $z_1 = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1+i\sqrt{2}$ ,  $z_2 = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1-i\sqrt{2}$ .

Răspuns:  $S = \{1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}\}$ .

### Exerciții propuse

#### *Profilurile umanist, arte, sport*

**A** 1. Să se calculeze:

- |                     |   |  |
|---------------------|---|--|
| a) $(2+3i)+(1-i)$ ; | b) $4+3i-(2+5i)$ ;                      | c) $(\sqrt{3}+i)+(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$ ; |
| d) $(1+3i)(2-4i)$ ; | e) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$ ; | f) $(2+i):(3+2i)$ ;                      |
| g) $(3+i)^{-1}$ ;   | h) $\frac{2+4i}{1+i} + 22 - 23i$ ;      | i) $(1+i)(1+i)^2$ .                      |

2. 1) Să se calculeze: a)  $i^5$ ; b)  $i^6$ ; c)  $i^{16}$ ; d)  $i^{131}$ ; e)  $i^{2020}$ .

2) Pentru care exponent număr natural puterea  $i^k$  este un număr real?

**B** 3. Să se determine numerele reale  $x$  și  $y$ , astfel încât:

- |  |  |
|--|--|
| a) $(1+3i)x + (2+5i)y = 7+i$ ;               | b) $(\overline{2+5i})x + (1+i)y = i$ ;                   |
| c) $i \cdot x + i((i+1)x - (3+i)y) = 3+2i$ ; | d) $7i \cdot x + (\sqrt{3}-i)(\overline{x-iy}) = 4+3i$ . |

4. 1) Care dintre ecuații au soluții numere reale?

- |                                  |                                    |   |
|----------------------------------|------------------------------------|---|
| a) $2z^2 + 3z + 3 = 0$ ;         | b) $\bar{z}^2 + \bar{z} + 1 = 0$ ; | c) $z^2 - z + 4 = 0$ ;                    |
| d) $\sqrt{2}z^2 + z + 1 = -2z$ ; | e) $2z^2 + z - 2 = 3z + 7$ ;       | f) $\frac{2-z}{3+z} = \frac{4z+1}{5-z}$ ; |
| g) $(3-z)(4+z) = (2+z)z + 7$ ;   | h) $z^2 + 2z + 2 = 0$ ;            | i) $z + 2 = \frac{3-z}{z+1}$ .            |

2) Să se rezolve în C ecuațiile din 4.1).

5. Să se calculeze: a)  $(2+i)^3 - (2-i)^3$ ; b)  $(3-i)^3 + (3+i)^3$ .

**C** 6. Să se rezolve în C ecuația:

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| a) $(1+i)z = 3+i$ ;                   | b) $3z \cdot i + (5+2i)z = 3z + 2-i$ ; |
| c) $\frac{z}{2+i} + 7 + i = z(1+i)$ ; | d*) (BAC, 2018) $3 + i\bar{z} = 2z$ .  |

7. Să se rezolve sistemul de ecuații ( $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ):

- |  |   |
|--|---|
| a) $\begin{cases} 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i, \\ (-1+i)z_1 + 3iz_2 = i; \end{cases}$ | b) $\begin{cases} -2z_1 + (2+i)z_2 = i, \\ (4+2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i. \end{cases}$ |
|--|---|

8.  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele complexe  $z$  care satisfac condițiile:

- a)  $\operatorname{Re} z = -1$ ,  $|z| = \sqrt{2}$ ; b)  $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2$ ,  $|\bar{z}| = 1$ ; c)  $\operatorname{Im} z = 3$ ,  $|z+i| = 2$ .

#### *Profilul real*

**A<sub>1</sub>** 1. Să se calculeze:

- |                      |   |  |
|----------------------|---|--|
| a) $(-2+3i)+(1-i)$ ; | b) $4+3i-(-2+5i)$ ;                     | c) $(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$ ; |
| d) $(1-3i)(2-4i)$ ;  | e) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$ ; | f) $(2+i):(3+4i)$ ;                      |
| g) $(3-i)^{-1}$ ;    | h) $\frac{2+4i}{1-i} + 22 - 23i$ ;      | i) $(1-i)(1+i)^2$ .                      |

2. 1) Să se calculeze: a)  $i^3$ ; b)  $i^4$ ; c)  $i^{24}$ ; d)  $i^{131}$ ; e)  $i^{2010}$ .  
 2) Pentru care exponent număr întreg puterea  $i^k$  este un număr real?
3. Să se determine numerele reale  $x$  și  $y$ , astfel încât:  
 a)  $(1+3i)x + (2-5i)y = 7+i$ ; b)  $\overline{(2+5i)}x - (1+i)y = i$ ;  
 c)  $i \cdot x + i((i+1)x - (3-i)y) = 3+2i$ ; d)  $7i \cdot x + (\sqrt{3}-i)(x-iy) = 4-3i$ .
4. Să se rezolve în  $C$  ecuația:  
 a)  $2z^2 - 3z + 3 = 0$ ; b)  $\bar{z}^2 - \bar{z} - 1 = 0$ ; c)  $z^2 + z + 4 = 0$ ;  
 d)  $\sqrt{2}z^2 - z + 1 = -2z$ ; e)  $2z^2 + z - 2 = 3z - 7$ ; f)  $\frac{2-z}{3+z} = \frac{-4z+1}{5-z}$ ;  
 g)  $(3-z)(-4+z) = (2+z)z + 7$ ; h)  $z^2 - 2z + 2 = 0$ ; i)  $z+2 = \frac{-3-z}{z+1}$ .

5. Să se calculeze:  
 a)  $(2+i)^3 + (2-i)^3$ ; b)  $(3-i)^3 - (3+i)^3$ .

6. Să se rezolve în  $C$  ecuația:  
 a)  $(1-i)z = 3+i$ ; b)  $3z \cdot i + (5-2i)z = 3z + 2-i$ ;  
 c)  $\frac{z}{2+i} - 7+i = z(1+i)$ ; d\*)  $|z| - iz = 1-2i$ .

**B<sub>1</sub>** 7. Să se rezolve sistemul de ecuații ( $z_1, z_2 \in C$ ):

$$\text{a) } \begin{cases} 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i, \\ (1-i)z_1 - 3iz_2 = -i; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4+2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i. \end{cases}$$

8.  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele complexe  $z$  care satisfac condițiile:  
 a)  $\operatorname{Re} z = 1$ ,  $|z| = \sqrt{2}$ ; b)  $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2$ ,  $|\bar{z}| = 1$ ; c)  $\operatorname{Im} z = 3$ ,  $|z-i| = 2$ .

9. Să se calculeze:  
 a)  $(3+2i)(-2+3i)^{-1} \cdot (-i)+1$ ; b)  $(\overline{2+i})(5+i)^{-1} - (7+5i)^2 \cdot (3-i)^{-1}$ .

10. Să se calculeze:  
 a)  $(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$ ;  
 b)  $(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)$ ;  
 c)  $(be^2 + ae)(ae^2 + be)$ , dacă  $e = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .

11. Să se arate că următoarele numere sunt reale:  
 a)  $\frac{1}{i}(z-\bar{z})$ ; b)  $\frac{z-1}{i(z+1)}$ , dacă  $z \cdot \bar{z} = 1$ .

**C<sub>1</sub>** 12. Să se demonstreze egalitatea:

- a)  $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; b)  $(1+i)^{4n} = (-1)^n \cdot 2^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

13. Să se determine numărul complex  $z$ , astfel încât  $|z+i| = |z+1| = |z+iz|$ .

14.  **Investigați!** a) Poate fi câtul a 2 numere complexe diferite un număr real?  
 b) Dar câtul dintre un număr complex pur imaginar și un număr real poate fi real?  
 c) Fie  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\alpha - (\alpha+1)i}$ . Să se determine numerele  $\alpha \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $z \in \mathbb{R}$ .

15. Să se arate că  $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ,  $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $\forall z \in C$ .

## §2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Forma trigonometrică a unui număr complex

Interpretarea geometrică a numerelor complexe, propusă de C. F. Gauss la începutul secolului al XIX-lea, a făcut posibil ca ele să fie aplicate în diverse domenii.

Fixăm în plan un sistem de axe ortogonale. Oricărui număr complex  $z = x + iy$  îl se asociază în acest plan punctul  $M(x, y)$ , și invers. Punctul  $M$  se numește **imaginea** numărului  $z$ , iar  $z$  se numește **afixul** punctului  $M$  (fig. 6.1). Astfel se stabilește o bijecție între mulțimea numerelor complexe  $\mathbb{C}$  și mulțimea punctelor din plan, ceea ce permite să identificăm numărul complex  $z = x + iy$  cu punctul  $M(x, y)$ . În baza acestei convenții (identificări) vom putea spune „punctul  $z = x + iy$ ” în loc de „numărul complex  $z$ ”, iar planul respectiv îl vom numi **plan complex**. În plus, observăm că mulțimea numerelor reale se reprezintă prin punctele axei  $Ox$ , pe care o vom numi **axă reală**, iar mulțimea numerelor pur imaginare – prin punctele axei  $Oy$ , pe care o vom numi **axă imaginară**.

### Exemplu

Numerele  $z_1 = 2 + 2i$ ,  $z_2 = 3$ ,  $z_3 = 3i$  sunt reprezentate de punctele  $M_1(2, 2)$ ,  $M_2(3, 0)$  și respectiv  $M_3(0, 3)$  (fig. 6.1).

Numerele complexe pot fi reprezentate geometric și prin vectori dintr-un plan dotat cu un sistem de axe ortogonale. Anume numărul complex  $z = x + iy$  se identifică cu vectorul  $\overrightarrow{OM}$ , unde  $O$  este originea sistemului de coordonate, iar  $M(x, y)$  este imaginea numărului  $z$  (fig. 6.1). Evident,  $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ . Astfel, suma numerelor complexe  $t_1 = a + bi$ ,  $t_2 = c + di$  (aficele punctelor  $A_1(a, b)$ ,  $A_2(c, d)$ ) poate fi realizată ca suma vectorilor  $\overrightarrow{OA}_1$ ,  $\overrightarrow{OA}_2$ , întrucât coordonatele punctului  $A_3$ , unde  $\overrightarrow{OA}_3 = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2$ , sunt  $a+c$  și  $b+d$  (fig. 6.2).

Diferența  $t_1 - t_2$  se identifică cu vectorul  $\overrightarrow{OA}_4$ , unde  $\overrightarrow{OA}_4 = \overrightarrow{A_2 A_1} = \overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_2$  (fig. 6.2).

Deci,  $|t_1 - t_2| = A_2 A_1$ , adică *distanța dintre punctele  $A_1$  și  $A_2$  este egală cu modulul diferenței  $t_1 - t_2$* .

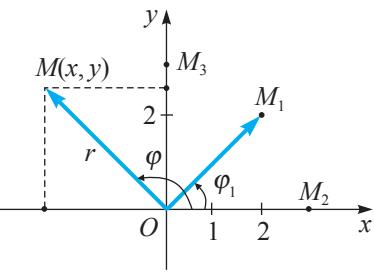


Fig. 6.1

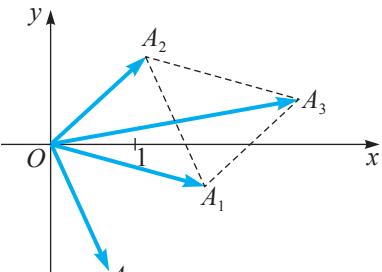


Fig. 6.2

**Proprietățile modulului numărului complex** sunt date de

**Teorema 2.** Pentru orice  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

$$1^\circ |z| = |\bar{z}| = |-z|; \quad 2^\circ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad 3^\circ \|z_1| - |z_2\| \leq |z_1 + z_2|;$$

$$4^\circ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad 5^\circ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0; \quad 6^\circ \|z_1| - |z_2\| \leq |z_1 - z_2|.$$

**Demonstrație**

Proprietatea 1° se obține din definiția numărului conjugat și din definiția modulului. Proprietățile 2°, 3°, 6° rezultă din relația dintre lungimile laturilor unui triunghi, care pot fi  $|z_1|$ ,  $|z_2|$ ,  $|z_1 + z_2|$ , sau, dacă vectorii sunt coliniari, din regulile de adunare a acestora. Proprietățile 4°, 5° vor fi demonstate mai jos. ►

Spre deosebire de adunarea și scăderea numerelor complexe, operațiile de înmulțire și împărțire nu pot fi ilustrate simplu, prin efectuarea unor operații cu vectorii respectivi.

În continuare vom expune reprezentarea numerelor complexe sub formă trigonometrică, care facilitează efectuarea operațiilor de înmulțire, împărțire, ridicare la putere a numerelor complexe.

Reamintim că modulul numărului complex  $z = x + iy$  este  $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ .

Prin **argument** al numărului complex  $z = x + iy$ ,  $z \neq 0$ , vom înțelege mărimea unghiului format de vectorul  $\overrightarrow{OM}$ , unde  $O$  este originea sistemului de coordonate, iar  $M(x, y)$  este imaginea numărului  $z$ , și de semiaxa pozitivă  $Ox$ . Unui număr complex  $z$ ,  $z \neq 0$ , îi corespunde o mulțime infinită de valori ale argumentului, care diferă între ele prin  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Menționăm că *argumentul numărului complex 0 nu este definit*. Există un unic argument  $\varphi$  al numărului dat  $z = x + iy$ , care satisfacă condiția  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Aceasta se numește **argument principal** (sau **redus**) și se notează **arg**  $z$ . Orice argument al numărului  $z$  se notează **Arg**  $z$  și deci se poate scrie:  $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Observație.** În unele manuale se folosește notația  $\text{Arg } z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , iar condiția  $\arg z \in (-\pi, \pi]$  se înlocuiește cu  $\arg z \in [0, 2\pi)$ .

**Exemplu**

Numărul  $z_1 = 2 + 2i$  are modulul  $|z_1| = OM_1 = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$  și argumentul principal  $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ , iar valori ale  $\text{Arg } z_1$  sunt  $-\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$  sau orice număr de forma  $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Evident, pentru  $z = a + bi$ ,  $b \neq 0$ , avem  $\arg \bar{z} = -\arg z$ . Argumentul principal al numărului  $z = a + bi$ ,  $z \neq 0$ , poate fi determinat cu ajutorul funcției arccos:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{r}, & \text{dacă } b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{r}, & \text{dacă } b < 0, r = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (1)$$

**Exemple**

$$1. \arg(2 - 2i) = -\arccos \frac{2}{2\sqrt{2}} = -\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4};$$

$$2. \arg(-2 + 3i) = \arccos \frac{-2}{\sqrt{13}}.$$

Fie  $z = x + iy$ ,  $z \neq 0$ , un număr complex arbitrar,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – modulul lui,  $\varphi$  – un argument al său. Folosind definițiile funcțiilor sin și cos ale unui unghi arbitrar, obținem relațiile:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Atunci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Expresia  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  se numește **forma trigonometrică** a numărului complex  $z$ .

Întrucât argumentul numărului complex se determină neunivoc, pentru numerele complexe scrise sub formă trigonometrică avem:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2)$$

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se scrie sub formă trigonometrică numerele:

- a)  $z_1 = 1 + i$ ;      b)  $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      c)  $z_3 = -1$ ;      d)  $z_4 = 2 - 3i$ .

*Rezolvare:*

a) Calculăm modulul și un argument al lui  $z_1$ :

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \text{ iar } \arg z_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Astfel,  $1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  (expresia din membrul drept este forma trigonometrică a numărului  $z_1$ ).

b) Analog,  $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ , iar conform (1) obținem  $\arg z_2 = \arccos \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$ .

Prin urmare,  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ .

c) Pentru  $z_3$  obținem:  $|z_3| = 1$ ,  $\arg z_3 = \arccos(-1) = \pi$ , deci  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ .

d) Pentru  $z_4 = 2 - 3i$  avem:  $|z_4| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ ,  $\arg z_4 = -\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$ .

Așadar,  $2-3i = \sqrt{13} \left[ \cos \left( -\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) + i \sin \left( -\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \right]$ .

**Observație.** Forme trigonometrice pentru numerele complexe  $z_1, z_2, z_3$  considerate anterior sunt (cu alte valori ale argumentului) de asemenea:

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right), z_2 = \cos \left( -\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{4\pi}{3} \right), z_3 = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi),$$

însă, de regulă, în forma trigonometrică se indică argumentul principal al numărului complex.

Teorema ce urmează determină formulele pentru calculul produsului, câtului, puterii cu exponent întreg a numerelor complexe reprezentate sub formă trigonometrică.

**Teorema 3.** Dacă  $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}^*$ ,  $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ,  $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , atunci:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad (4)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{formula lui Moivre}^1). \quad (5)$$



Abraham de Moivre

### Demonstrație

Pentru formula (3) avem:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Similar se obține formula (4) pentru câtul numerelor.

Formula (5) pentru  $n \in \mathbb{N}$  se demonstrează prin metoda inducției matematice.

Pentru  $n = -k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , formula (5) se verifică astfel:

$$\begin{aligned} z^n = z^{-k} &= \frac{1}{z^k} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^k (\cos k\varphi + i\sin k\varphi)} = r^{-k} (\cos(0 - k\varphi) + i\sin(0 - k\varphi)) = \\ &= r^{-k} (\cos(-k\varphi) + i\sin(-k\varphi)) = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Observații.** 1. Din (3) și (4) rezultă respectiv proprietățile 4° și 5° ale modulului numărului complex, menționate în teorema 2.

2. Din relațiile (3)–(5), respectiv, rezultă: argumentul produsului este egal cu suma argumentelor factorilor; argumentul câtului este egal cu diferența dintre argumentul deîmpărțitului și argumentul împărțitorului; argumentul puterii  $z^n$  este egal cu produsul dintre exponentul întreg  $n$  al puterii și un argument al bazei  $z$ . De menționat că aici egalitățile au loc cu exactitatea unui termen multiplu al lui  $2\pi$ .

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze  $A = \frac{2(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(-\sqrt{3}+i)^{30}}$ .

*Rezolvare:*

Pentru a efectua calculele, este comod să scriem numerele sub formă trigonometrică:

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1-i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right), \\ -\sqrt{3}+i &= 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Abraham de Moivre (1667–1754) – matematician englez de origine franceză.

Folosind formulele (3) – (5), obținem:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{30}} = \frac{4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}{2^{30}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} \cdot 30\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} \cdot 30\right)\right]} = \\ &= \frac{2^{\frac{55}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}{\cos 25\pi + i\sin 25\pi} = -2^{\frac{55}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] = 2^{\frac{55}{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Se știe că rădăcina de ordinul  $n$  a numărului real  $a$  (în caz că există) este un număr real  $b$ , astfel încât  $b^n = a$ . Acest concept se generalizează pentru numerele complexe.

**Definiție.** Numărul complex  $u$  se numește **rădăcină de ordinul  $n$** ,  $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ , a numărului  $z$  dacă  $u^n = z$ .

### Exemple

Rădăcini de ordinul 3 ale numărului 1 sunt  $1, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ , deoarece  $1^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ , iar rădăcini de ordinul doi ale numărului 1 sunt  $\pm 1$ .

Dacă numărul complex este scris sub formă trigonometrică, atunci rădăcinile lui de ordinul  $n$  se determină relativ ușor.

**Observație.** Dacă  $n$  parcurge toate valorile din mulțimea  $\{k, k+1, \dots, m\}$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ ,  $k < m$ , atunci vom nota  $n = \overline{k, m}$ .

**Teorema 4.** Există  $n$  rădăcini distințe de ordinul  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , ale oricărui număr complex nenul  $z$ . Anume dacă  $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , atunci mulțimea tuturor rădăcinilor de ordinul  $n$  ale lui  $z$  este

$$\left\{ \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \mid k = 0, n-1 \right\}. \quad (6)$$

### Demonstratie

Fie  $u = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$  o rădăcină de ordinul  $n$  a lui  $z$ , adică  $u^n = z$ ,  $\rho$  și  $\psi$  rămânând a fi determinate.

În baza formulei lui Moivre, avem  $\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , iar din (2) obținem  $\rho^n = r$  și  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Din prima relație avem  $\rho = \sqrt[n]{r}$  (amintim că  $r \in \mathbb{R}_+$ , deci  $\sqrt[n]{r}$  este un număr real pozitiv unic determinat), iar din a doua obținem  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pentru

$k=0, n-1$  se obțin  $n$  valori distincte pentru  $u$ :

$$u_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right],$$

deoarece aceste numere se reprezintă (verificați!) în planul complex prin vârfurile unui poligon regulat cu  $n$  laturi (dacă  $n \geq 3$ ), înscris în cercul de centru  $O$  (originea sistemului de coordonate) și rază  $\sqrt[n]{|z|}$ .

Se poate arăta că orice  $u_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , este egal cu un oarecare  $u_t$ , unde  $0 \leq t \leq n-1$ . Astfel se obțin exact  $n$  rădăcini distincte de ordinul  $n$  ale lui  $z$ ,  $z \neq 0$ . ►

**Observații.** 1. Argumentele numerelor din (6) nu sunt neapărat argumentele principale ale acestora.

2. În continuare vom calcula doar rădăcinile de ordinul 2, 3, 4.

### Exerciții rezolvate

1. Utilizând teorema 4, să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului  $-4$ .

*Rezolvare:*

Scriem numărul  $-4$  sub formă trigonometrică:  $-4 = 4 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ .

Din (6) obținem:

$$u_0 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i, \quad u_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{2} \right) = -2i.$$

Așadar, rădăcinile de ordinul doi ale numărului  $-4$  sunt  $\pm 2i$ .

2. Să se determine și să se ilustreze geometric rădăcinile de ordinul trei ale numărului  $2i$ .

*Rezolvare:*

Deoarece  $2i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ , din (6) obținem:

$$u_0 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) = -\sqrt[3]{2} \cdot i.$$

Aceste numere se reprezintă geometric prin vârfurile unui triunghi echilateral (fig. 6.3, a)).

 3. Să se determine rădăcinile de ordinul patru ale numărului 1.

*Rezolvare:*

Pentru rădăcinile de ordinul  $n$  ale numărului 1 obținem:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

În figura 6.3 b) sunt reprezentate geometric rădăcinile de ordinul patru ale numărului 1:  $\{\pm 1, \pm i\}$ .

Rădăcinile de ordinul doi,  $\alpha_1, \alpha_2$ , ale numărului complex nenul  $a + bi$  sunt numere opuse și pot fi determinate fără a utiliza forma trigonometrică a acestuia:

$$1) \text{ pentru } b \neq 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right);$$

$$2) \text{ pentru } b=0, \quad \alpha_{1,2} = \begin{cases} \pm \sqrt{a}, & \text{dacă } a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}, \quad \text{unde } \operatorname{sgn} b = \begin{cases} 1, & \text{dacă } b > 0 \\ 0, & \text{dacă } b = 0 \\ -1, & \text{dacă } b < 0. \end{cases}$$

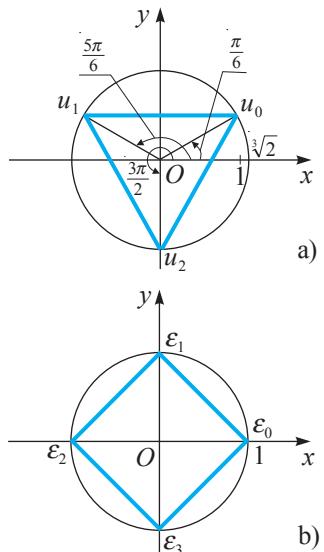


Fig. 6.3

### Exerciții rezolvate

 1. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului  $40 - 42i$ .

*Rezolvare:*

$$\text{Cum } b = -42 < 0, \text{ obținem } \alpha_{1,2} = \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2 + 42^2} + 40)} - i \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2 + 42^2} - 40)} \right).$$

Deci,  $\{-7 + 3i, 7 - 3i\}$  este mulțimea rădăcinilor de ordinul doi ale numărului  $40 - 42i$ .

 2. Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  ecuația  $z^2 - 3z + 3 - i = 0$ .

*Rezolvare:*

Aplicăm formulele cunoscute pentru determinarea soluțiilor ecuației de gradul II. Discriminantul este  $-3 + 4i$ , iar rădăcinile de ordinul doi ale numărului complex  $-3 + 4i$  sunt  $1 + 2i$  și  $-1 - 2i$ .

$$\text{Deci, soluțiile ecuației sunt: } z_1 = \frac{3 + (1 + 2i)}{2}, \quad z_2 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2}.$$

*Răspuns:*  $S = \{2 + i, 1 - i\}$ .

## Exerciții propuse

### Profilul real

**A<sub>1</sub>** 1. a) În planul complex construiți imaginile numerelor:

$$-1, i, 1-i, -5i, 3, -3+i, -1-2i, 1-i\sqrt{2}, \sqrt{2}-i.$$

b) Imaginile căror numere aparțin axei  $Ox$ ? Imaginile căror numere aparțin axei  $Oy$ ?

c) La ce distanță de origine se află imaginea lui  $z$ ?

2. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului:

a)  $-2i$ ;

b)  $-5-12i$ ;

c)  $48+14i$ ;

d)  $2-2\sqrt{3}i$ ;

e)  $1-2i\sqrt{6}$ ;

f)  $-1+2i\sqrt{6}$ .

**B<sub>1</sub>** 3. 1) Să se rezolve în **C** ecuația:

a)  $z^2 + 4z + 4 - 2i = 0$ ;

b)  $i \cdot z^2 - (4+i)z + 6 + 12i = 0$ ;

c)  $z^2 + (3-2i)z - 1-3i = 0$ ;

d)  $(1+i)z^2 + (2+i)z - 7 - i = 0$ ;

e)  $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$ ;

f)  $z^2 - (48+14i) = 0$ .

2) Poate avea ecuația de gradul doi cu coeficienți complecsi (nerealii) soluții reale?

4.  **Lucrați în perechi!** Fie  $\alpha + \beta i$  și  $-\alpha - \beta i$  rădăcinile de ordinul doi ale numărului  $z$ .

Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului  $-z$ .

5. Să se reprezinte sub formă trigonometrică numărul:

a)  $-5$ ;

b)  $-3i$ ;

c)  $1-i\sqrt{3}$ ;

d)  $2-2i$ ;

e)  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;

f)  $-4\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)$ ;

g)  $3+4i$ ;

h)  $\sin \varphi - i \cos \varphi$ ;

i)  $\left(\frac{1}{i-1}\right)^{100}$ .

**C<sub>1</sub>** 6. Să se calculeze:

$$\text{a) } \frac{\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}\right)}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}, \quad \text{b) } (1+i\sqrt{3})^3 \cdot \overline{(1+i)^7}, \quad \text{c) } \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}.$$

7. Să se determine rădăcinile:

a) de ordinul trei ale numărului  $i$ ;

b) de ordinul trei ale numărului  $-27$ ;

c) de ordinul patru ale numărului  $2-2i\sqrt{3}$ ;

d) de ordinul patru ale numărului  $-1$ .

8. Să se determine numerele complexe  $z$  care satisfac condițiile:

a)  $\operatorname{Im} z \geq 1, |z| \leq 1$ ;

b)  $\operatorname{Re}(iz) = 1, |z+i| = 2$ .

9. (BAC, 2019) Determinați valorile reale ale  $p, q$  pentru care  $2+i$  este soluție a ecuației  $x^2 + px + q = 0$ .

### §3 Aplicații ale numerelor complexe

#### 3.1. Rezolvarea ecuațiilor de forma $mz^k + p = 0$ , $m \in \mathbb{C}^*$ , $p \in \mathbb{C}$ , $k \in \mathbb{N}^*$

**Definiție.** Ecuațiile de forma  $mz^k + p = 0$ ,  $m \in \mathbb{C}^*$ ,  $p \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , se numesc **ecuații binome**.

Ecuația binomă  $mz^k + p = 0$  este echivalentă cu ecuația  $z^k = -\frac{p}{m}$ . De aceea, pentru a rezolva, determinăm toate rădăcinile de ordinul  $k$ ,  $k \geq 2$ , ale numărului  $-\frac{p}{m}$ .

##### Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  ecuația  $2z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ .

Rezolvare:

$2z^4 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Pentru a determina rădăcinile de ordinul 4 ale numărului complex  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , îl scriem sub formă trigonometrică:  $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ .

Aplicând (6) din § 2, obținem:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}; \quad z_1 = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}; \\ z_2 &= \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}; \quad z_3 = \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}. \end{aligned}$$

Răspuns:

$$S = \left\{ \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}, \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}, \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right\}$$

#### 3.2. Rezolvarea ecuațiilor bipătratice $mz^4 + pz^2 + q = 0$ , $m \in \mathbb{C}^*$ , $p, q \in \mathbb{C}$

**Definiție.** Ecuațiile de forma  $mz^4 + pz^2 + q = 0$ ,  $m \in \mathbb{C}^*$ ,  $p, q \in \mathbb{C}$ , se numesc **ecuații bipătratice**.

Prin substituția  $z^2 = u$ , ecuația bipătratică se reduce la sistemul  $\begin{cases} mu^2 + pu + q = 0, \\ z^2 = u. \end{cases}$

##### Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  ecuația  $z^4 - 3z^2 + 3 - i = 0$ .

Rezolvare:

Notăm  $z^2 = u$  și obținem ecuația  $u^2 - 3u + 3 - i = 0$ . Aplicăm formulele din § 2 și obținem  $u_1 = 2 + i$ ,  $u_2 = 1 - i$ . Pentru  $z$  avem două cazuri:  $z^2 = 2 + i$  și  $z^2 = 1 - i$ .

Soluțiile primei ecuații sunt  $z_{1,2} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{4+1}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{4+1}-2}{2}} \right) = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \right)$ .

Soluțiile ecuației a două se determină cu ajutorul formulei (6) din § 2, unde

$$1-i = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

$$\text{Obținem } z_3 = \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right), \quad z_4 = \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right).$$

Răspuns:

$$S = \left\{ \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \right); \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right); \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right) \right\}.$$

### 3.3. Rezolvarea ecuațiilor reciproce

Vom examina ecuații de forma  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ ,  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , care sunt **ecuații reciproce** de gradul trei și respectiv patru.

#### *Exemplu*

Ecuația  $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$  este ecuație reciprocă de gradul patru.

La rezolvarea acestor ecuații se va ține cont de următoarele *proprietăți*:

1° Ecuația  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$  are soluție numărul  $x_0 = -1$ .

2° Prin substituția  $y = x + \frac{1}{x}$ , ecuația  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  se reduce la un sistem format dintr-o ecuație de gradul II în  $y$  și o totalitate de două ecuații de gradul II în  $x$ .

#### **Exercițiu rezolvat**

↳ Să se rezolve în C ecuația  $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ .

*Rezolvare:*

Se observă că  $x = 0$  nu este soluție, de aceea, împărțind la  $x^2$ , obținem ecuația echivalentă:  $x^2 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$ .

Notăm  $y = x + \frac{1}{x}$ , atunci  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$  și obținem ecuația  $y^2 - 3y + 2 = 0$ , cu soluțiile  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 2$ . Revenind la necunoscuta  $x$ , avem:  $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1, \\ x + \frac{1}{x} = 2. \end{cases}$

Astfel, obținem următoarea totalitate de ecuații de gradul II:  $\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases}$

Deci, soluțiile ecuației inițiale sunt  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ .

Răspuns:  $S = \left\{ 1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$ .

### 3.4. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

Numerele complexe pot fi aplicate în acele domenii în care sunt examineate mărimi vectoriale. În acest caz, operațiile asupra vectorilor, care se efectuează, de obicei, sub formă geometrică, se înlocuiesc cu operațiile respective cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică sau trigonometrică, care se efectuează mai ușor.

Pentru comoditate, în continuare vom nota cu  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , ... afixele punctelor  $M$ ,  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ , ..., respectiv.

a) Ecuația cercului de centru  $M_0$  și rază  $r$  este  $|z - z_0| = r$ , sau  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .

Într-adevăr,  $M \in \mathcal{C}(M_0, r)$  dacă și numai dacă  $|\overrightarrow{MM_0}| = r$ , adică  $|z - z_0| = r$ .

b) Inecuația ce determină discul de centru  $M_0$  și rază  $r$  este  $|z - z_0| \leq r$ .

c) Inecuația ce determină inelul cuprins între cercurile concentrice  $\mathcal{C}(M_0, r_1)$  și  $\mathcal{C}(M_0, r_2)$ ,  $r_1 < r_2$ , este  $r_1 < |z - z_0| < r_2$  (fig. 6.4).

d) Măsura unghiului  $M_1 M_2 M_3$  admite reprezentarea  $m(\angle M_1 M_2 M_3) = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + 2\pi k$ , pentru un oarecare  $k \in \mathbb{Z}$ .

Formula se obține din proprietatea

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(fig. 6.5).

#### Exerciții rezolvate

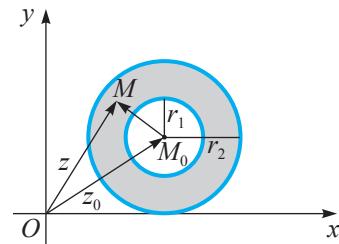


Fig. 6.4

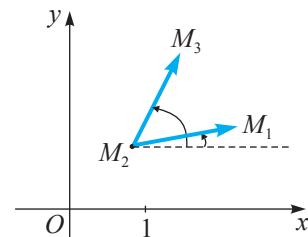


Fig. 6.5

1. Să se scrie ecuația cercului de centru  $M_0(1, -2)$  și rază 3.

*Rezolvare:*

Punctul  $M_0$  este imaginea numărului  $z_0 = 1 - 2i$ , deci  $M \in \mathcal{C}(M_0, 3)$  dacă și numai dacă  $|z - (1 - 2i)| = 3$ , unde  $z = x + iy$  este afixul lui  $M(x, y)$ . Aplicând formula modulului numărului complex, obținem:  $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

2. Să se reprezinte în sistemul de axe ortogonale  $xOy$  locul geometric al punctelor  $M(x, y)$  ale căror afixe  $z = x + iy$  satisfac condiția  $|z - 1 + i| \leq 3$ .

*Rezolvare:*

$$\begin{aligned} |z - 1 + i| \leq 3 &\Leftrightarrow |x + iy - 1 + i| \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| \leq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 9 = 3^2. \end{aligned}$$

Se obține discul de centru  $A(1, -1)$  și rază 3 (fig. 6.6).

- 3.** Să se decidă dacă imaginea numărului  $z = 1 + i$  aparține domeniului determinat de inecuația dublă  $2 \leq |z - 1 + i| \leq 3$ .

*Rezolvare:*

Prin substituție în inecuație, ne convingem că  $M(1, 1)$  aparține inelului cuprins între cercurile de centru  $A(1, -1)$  și rază 2, respectiv 3.

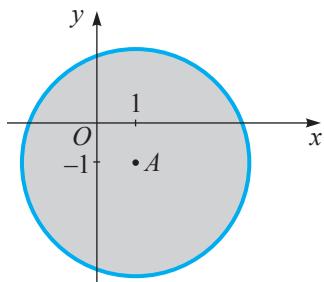


Fig. 6.6

### Exerciții propuse

#### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Să se rezolve în C ecuația:

a)  $(1-i)z^4 = 1 - i\sqrt{3}$ ;      b)  $(1+i\sqrt{3})z^3 = 1+i$ ;      c)  $z^4 - 7z^2 + 6 = 0$ ;  
d)  $z^4 + z^2 - 2 = 0$ ;      e)  $z^4 + z^2 - 6 = 0$ .

2. Să se rezolve în C ecuația  $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$ .

- B<sub>1</sub>** 3. Să se rezolve în C ecuația  $(z+1)^4 = (z-1)^4$ .

4. Să se rezolve în C ecuația reciprocă:

a)  $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$ ;      b)  $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ ;      c)  $x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ .

- C<sub>1</sub>** 5. **Lucrați în perechi!** Să se arate că soluțiile ecuației  $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$  sunt numere reale.

6. a) Să se calculeze  $a = \frac{5}{1-2i} - (1-i)(2-i)$ .      b) Să se determine  $|a|$ .

c) Să se determine dacă imaginea lui  $a$  aparține cercului de centru  $A(1, -1)$  și rază 3.

7. **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale numerelor complexe în știință și tehnică*.

### Exerciții și probleme recapitulative

#### Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Să se calculeze:

a)  $(2+3i) + (-1-i)$ ;      b)  $(4+3i) - (2+5i)$ ;      c)  $(1-3i) \cdot (2-4i)$ ;  
d)  $(2+i) : (3+4i)$ ;      e)  $i^3$ ;      f)  $(-i)^4$ ;      g)  $(-i)^{13}$ .

2. **Lucrați în perechi!** Să se arate că numărul este real:

a)  $(1+i)^{24}$ ;      b)  $\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}\right)^2$ ;      c)  $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$ .

3. Să se rezolve în C ecuația:

a)  $z^2 = -4$ ;      b)  $z\bar{z} + 2(z - \bar{z}) = 25 + 12i$ ;      c)  $2z^2 + 2z + 1 = 0$ .

- B** 4. Să se calculeze modulul numărului  $z = \left(\frac{8+i}{7-4i}\right)^{-1}$ .

5. Fie  $z_1 = \sqrt{3} + i$ ,  $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ . Să se calculeze: a)  $\bar{z}_1 \cdot z_2$ ;      b)  $(z_1 : \bar{z}_2)^2$ .

- C** 6. Să se calculeze: a)  $(1+i)(2+i) + \frac{5}{1+2i}$ ; b)  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^{12}$ ;  
 c)  $\frac{(1+2i)^3 - (1-2i)^3}{(2-i)^2 - (2+i)^2}$ ; d)  $\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ .

7. Să se determine  $z = x + iy$ , dacă  $2z = |z| - 2i$ .

**Profilul real**

**A<sub>1</sub>** 1. Să se calculeze:

- a)  $(2-3i) + (-1+i)$ ; b)  $(4-3i) - (2-5i)$ ; c)  $(1+3i) \cdot (2+4i)$ ;  
 d)  $(2-i) : (3-4i)$ ; e)  $(-i)^3$ ; f)  $(-i)^4$ ; g)  $i^{13}$ .

2. Să se arate că numărul este real:

- a)  $(1-i)^{24}$ ; b)  $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$ ; c)  $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$ ; d)  $(\sqrt{3}+i)^6$ .

3. Să se rezolve în C ecuația: a)  $z^2 = -9$ ; b)  $z\bar{z} + 2(z-\bar{z}) = 20 + 8i$ ; c)  $2z^2 - 2z + 1 = 0$ .

4. Să se calculeze modulul numărului  $z = \frac{8+i}{7-4i}$ .

5. Fie  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ,  $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ . Să se calculeze: a)  $\bar{z}_1 \cdot z_2$ ; b)  $(z_1 : \bar{z}_2)^2$ .

6. Să se rezolve exercițiul 6, **C**.

**B<sub>1</sub>** 7. **Lucrează în perechi!** Să se determine  $z = x + iy$ , dacă  $2z = |z| + 2i$ .

8. Să se determine partea reală a numărului  $(\sqrt{3}+i)^6$ .

9. Să se rezolve în C ecuația:

- a)  $z^2 - 3|z| + 3 = 0$ ; b)  $|z| - 2z + 2i = 0$ ; c)  $\begin{cases} |z| = |z-2i|, \\ |z-i| = |z-1|; \end{cases}$   
 d)  $z^2 + |z| = 0$ ; e)  $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$ .

10. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul:

- a)  $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}$ ; b)  $\sin \alpha - i \cos \alpha$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

11. Să se determine rădăcinile de ordinul trei ale numărului:

- a)  $-2 + 2i\sqrt{3}$ ; b)  $-\frac{3}{8}(\sqrt{3} + i)$ .

12. Să se calculeze:

- a)  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12}$ ; b)  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12} + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}$ ; c)  $\frac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{12}}$ .

**C<sub>1</sub>** 13. Știind că  $z^2 + z + 1 = 0$ , să se calculeze  $z^4 + \frac{1}{z^4}$ .

14. Să se determine  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pentru care este adeverată egalitatea  $(1+i)^n = (1-i)^n$ .

**15.** **Investigați!** Fie numerele complexe  $z_0 = 1+i$ ,  $z_1 = 2+i$ ,  $z_2 = 2+3i$ ,  $z_3 = 3+i$  și  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  respectiv imaginile lor.

a) Să se calculeze  $|z_1 - z_0|$ ,  $|z_2 - z_0|$ ,  $|z_3 - z_0|$ .

b) Să se determine care dintre punctele  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  aparțin discului de centru  $M_0$  și rază 2.

16. a) Să se rezolve în C ecuația  $z^2 + 2z + 3 = 0$ .

b) Să se determine modulele soluțiilor ecuației.

c) Să se afle imaginea cărei soluții aparține cercului de centru  $M(1, 1)$  și rază 3.

**Test sumativ****Profilurile umanist, arte, sport**

*Timp efectiv de lucru:  
45 de minute*

1. Pentru care  $x, y \in \mathbb{R}$  sunt egale numerele  $z_1 = (2+3i)x - 3x + 4i$  și  $z_2 = (2i-5y)(3-i)$ ?

(6)

2. Calculați: a)  $(2-3i) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right)$ ; b)  $\frac{2-3i}{7+i}$ .

(8)

3. Rezolvați în  $\mathbb{C}$  ecuația  $(3+2i)z + 5z = 4$ .

(4)

4. a) Argumentați că ecuația  $7z^2 - 2z + 13 = 0$  nu are soluții reale.

(2)

b) Rezolvați în  $\mathbb{C}$  această ecuație.

(6)

5. Fie  $z = -1 - i$ .

(2)

a) Calculați  $z^2$ .

(8)

b) Indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

Numărul  $z$  este soluție a ecuației

A  $x^2 + (2+i)x - 3i = 0$ .

B  $x^2 + 4x + 1 = 0$ .

C  $x^2 + (2+2i)x + 2i = 0$ .

D  $x^2 + 1 = 0$ .

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

*Timp efectiv de lucru:  
45 de minute*

**Profilul real**

1. Calculați: a)  $(1-2i)^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ; b)  $\frac{3-i}{2i-7}$ .

(4)

2. a) Determinați dacă ecuația  $2z^2 + \sqrt{7}z + 7 = 0$  are soluții reale.

(2)

b) Rezolvați în  $\mathbb{C}$  această ecuație.

(4)

3. Determinați  $z = x + iy$ , dacă  $1 - z - z\bar{z} = i$ .

(6)

4. Scrieți în formă algebrică numărul  $a = \frac{(1+i\sqrt{3})^{12}}{(-2+2i)^5}$ .

(8)

5. a) Argumentați că ecuația  $2z^3 = 3i$  are soluții doar numere complexe nereale.

(2)

b) Rezolvați în  $\mathbb{C}$  această ecuație.

(4)

6. a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale  $xOy$  locul geometric al punctelor  $M(x, y)$  ale căror afixe  $z = x + iy$  satisfac condiția  $1 \leq |z - 2i| \leq 3$ .

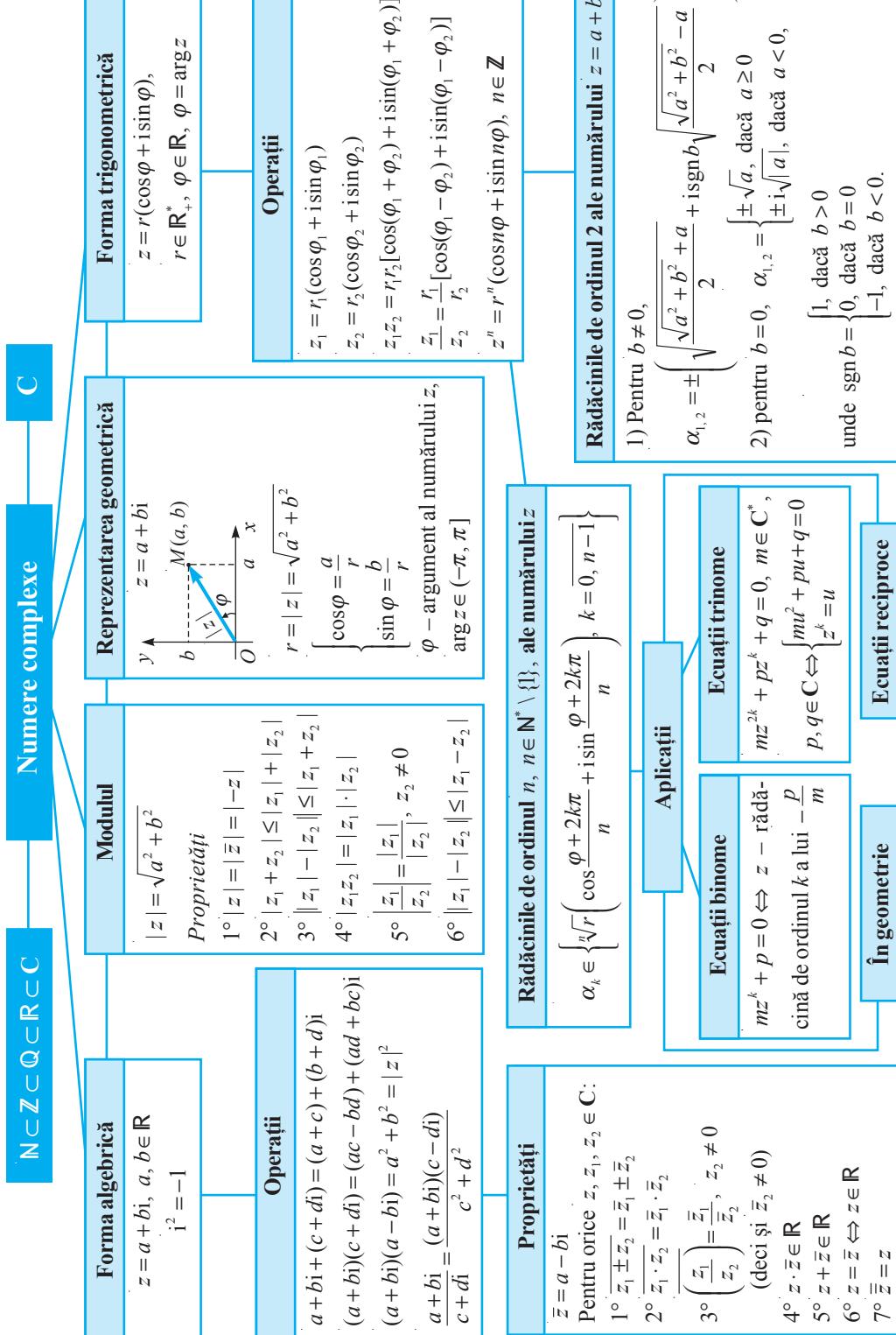
(6)

b) Aparține acestui domeniu imaginea numărului  $z = 1 - i$ ?

Argumentați răspunsul.

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0



## Modulul

# 7

# Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare

### Obiective

- ⇒ identificarea tipurilor de matrice, utilizarea terminologiei aferente noțiunii de matrice în diverse contexte;
- ⇒ aplicarea operațiilor cu matrice și a proprietăților acestora în diverse contexte, \*inclusiv la rezolvarea ecuațiilor matriciale;
- ⇒ recunoașterea în diverse situații a determinanților de ordinele 2, 3, calculul lor prin diferite metode; \*aplicarea proprietăților determinanților la calculul determinanților de ordinul 4;
- ⇒ rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, \*inclusiv a celor omogene, prin diferite metode;
- ⇒ utilizarea elementelor de algebră superioară studiate în abordarea unor situații cotidiene și/sau pentru rezolvarea unor probleme din diverse domenii.

## §1 Matrice

### 1.1. Noțiuni generale

Două întreprinderi produc înghețată. Pentru aceasta ele folosesc 4 componente principale: lapte, frișcă, zahăr și cacao. Prima întreprindere folosește zilnic: 890 l de lapte, 400 kg de frișcă, 250 kg de zahăr, 90 kg de cacao. A doua întreprindere folosește zilnic 1500 l de lapte, 700 kg de frișcă, 400 kg de zahăr și 160 kg de cacao. O întreprindere de transport a încheiat un contract de livrare a acestor produse întreprinderilor menționate. Managerul firmei de transport a aranjat (pentru comoditate) aceste date în următorul tablou:

$$\begin{pmatrix} 890 & 400 & 250 & 90 \\ 1500 & 700 & 400 & 160 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tablourile de acest fel (numite matrice) se aplică în matematică, statistică, economie și în alte domenii.

**Definiție.** Se numește **matrice** de tip  $(m, n)$  sau  $m \times n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , un tablou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

format din  $m \cdot n$  elemente aranjate în  $m$  linii și  $n$  coloane.

Se notează:  $A = (a_{ij})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Elementele  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  formează **linia i**, iar elementele  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$  – **coloana j** a matricei (2). Deci, primul indice ( $i$ ) al elementului  $a_{ij}$  (se citește a-i-j; de exemplu,  $a_{12}$  – a-unu-doi, și nu a-doisprezece) indică linia, iar al doilea ( $j$ ) – coloana în care el se află.

De exemplu, matricea (1) este de tip  $(2, 4)$ ,  $a_{21} = 1500$ ,  $a_{22} = 700$ .

**Exercițiu.** Scrieți: a) elementele matricei (1); b) liniile și coloanele matricei (1).

Mulțimea matricelor de tip  $(m, n)$  cu elemente din  $\mathbb{C}$  (respectiv din  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ) se notează cu  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  (respectiv  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ ,  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ ). În cele ce urmează vom studia matrice cu elemente numere complexe, dacă nu este specificat altceva.

Deosebim mai multe tipuri de matrice. Pentru  $m=n$  matricea (2) are forma

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  și se numește **matrice pătratică de ordinul n**. În acest caz,

mulțimile  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , ... se notează, respectiv,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ... În matricea pătratică, elementele  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  formează **diagonala principală**, iar elementele  $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n-1,2}, a_{n1}$  – **diagonala secundară** a acesteia. O matrice pătratică în care toate elementele situate deasupra (respectiv dedesubtul) diagonalei principale sunt egale cu 0 se numește **inferior** (respectiv **superior**) **triunghiulară**.

Pentru  $n=1$  matricea (2) ia forma  $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$  și se numește **matrice-coloană**, iar

pentru  $m=1$  matricea (2) devine  $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$  și se numește **matrice-linie**. Matricea pătratică de ordinul  $n$  de forma  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  se numește **matrice unitate** și se mai notează cu  $I$ .

Dacă toate elementele matricei (2) sunt egale cu zero, atunci ea se numește **matrice nulă** sau **zero** și se notează cu  $O_{m,n}$  sau cu  $O$ , dacă tipul ei este subînțeles.

### Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice pătratică  
de ordinul 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Matrice unitate  
de ordinul 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrice superior  
triunghiulară de ordinul 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3,2}$$

Matrice nulă  
de tip  $(3, 2)$

Dacă se știe că matricea  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , atunci o vom nota simplu  $A = (a_{ij})$ .

**Definiție.** Două matrice  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  se numesc **egale** dacă  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

## 1.2. Operații cu matrice

- Adunarea matricelor, înmulțirea matricelor cu scalari, transpusa unei matrice**

**Definiție.** Fie  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ . Se numește **suma** matricelor  $A$  și  $B$  matricea  $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , unde  $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Se scrie:  $D = A + B$ .

**Exemplu**

Suma matricelor  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  este matricea  $D = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-7 & 3+5 \\ -1+2 & 0-3 & -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ .

**Definiție.** Se numește **produsul** matricei  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  cu numărul  $\alpha \in \mathbb{C}$  matricea  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , unde  $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Se scrie:  $B = \alpha A$ .

**Observații. 1.** Cu  $-A$  vom nota matricea  $(-1)A$ , fiindcă  $A + (-1)A = (-1)A + A = O$ . Matricea  $-A$  se numește **opusa matricei  $A$** .

Pentru suma  $B + (-A)$  se va folosi notația  $B - A$ .

**2.** Suma matricelor se definește doar pentru oricare două matrice de același tip, însă orice matrice poate fi înmulțită cu un număr.

**Exemplu**

Pentru matricele din exemplul precedent avem:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad iB = \begin{pmatrix} -i & -7i & 5i \\ 2i & -3i & 0 \end{pmatrix}$$

**Definiție.** Se numește **transpusa matricei**  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  matricea  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ , astfel încât  $b_{ij} = a_{ji}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Dacă matricea  $A$  este de tip  $(m, n)$ , atunci transpusa ei este de tip  $(n, m)$  și se notează  $'A$ ; coloanele (liniile) ei coincid cu liniile (coloanele) respective ale matricei  $A$ .

**Exemplu**

**1.** Dacă  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , atunci  $'A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**2.** Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Să se determine dacă pot fi efectuate operațiile  $3 \cdot 'A - 5B$ .

Întrucât matricele  $'A$  și  $B$  (deci și  $3 \cdot 'A$  și  $5B$ ) sunt de diferite tipuri, rezultă că nu poate fi calculată „matricea”  $3 \cdot 'A - 5B$ .

Proprietățile operațiilor cu matrice, definite mai sus, sunt expuse în

**Teorema 1.** Pentru orice matrice  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,  $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  și pentru orice numere  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , au loc egalitățile:

- 1°  $A + B = B + A$  (adunarea este comutativă);
- 2°  $A + (B + D) = (A + B) + D$  (adunarea este asociativă);
- 3°  $A + O = O + A = A$  (matricea nulă  $O$  este element neutru la adunare);
- 4°  $A + (-A) = -A + A = O$  (orice matrice are opusă);

- 5°  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;
- 6°  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;
- 7°  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ ;
- 8°  $1 \cdot A = A$ ;
- 9°  $'(\alpha A) = \alpha'A$ ;
- 10°  $'(A + B) = 'A + 'B$ ;
- 11°  $'('A) = A$ .

### Demonstrație

Pentru demonstrație se aplică definiția egalității matricelor și proprietățile operațiilor cu numere complexe. Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 2°.

Matricea  $F = A + (B + D)$  este de același tip ca și matricea  $F' = (A + B) + D$ . Elementul  $f_{ij}$  al matricei  $F$  are forma  $f_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + d_{ij})$ , iar elementul respectiv  $f'_{ij}$  al matricei  $F'$  are forma  $f'_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + d_{ij}$ . Deoarece adunarea numerelor complexe este asociativă, avem  $f_{ij} = f'_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Deci, matricele  $F$  și  $F'$  sunt egale. ►

**Exercițiu.** Demonstrați celelalte proprietăți (în mod analog).

Proprietățile operațiilor cu matrice facilitează rezolvarea **ecuațiilor matriciale**, adică a ecuațiilor cu necunoscută o matrice.

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve ecuația  $2 \cdot 'A + 3X - 4I_3 = O$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3i \\ -2 & 3 & -i \end{pmatrix}$ .

*Rezolvare:*

În baza proprietăților 2°–4° din teorema 1, putem trece termenii cunoscuți în membrul drept, schimbându-le semnul.

Astfel,

$$3X = -2 \cdot 'A + 4I_3 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ i & 0 & 3 \\ 0 & 3i & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2i & 0 & -6 \\ 0 & -6i & 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2i & 4 & -6 \\ 0 & -6i & 4+2i \end{pmatrix}$$

Prin urmare,  $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2i & 4 & -6 \\ 0 & -6i & 4+2i \end{pmatrix}$ .

## Înmulțirea matricelor

Vom ilustra operația de înmulțire a matricelor printr-un exemplu.

O întreprindere mică produce jucării: păpuși (p) și bufoni (b).

Volumul vânzărilor (mii bucăți) în primul trimestru este reflectat de matricea:

$$A = \begin{pmatrix} p & b \\ 5 & 3 \\ 6 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{ian.} \\ \text{febr.} \\ \text{mar.} \end{array}$$

Prețul de vânzare al fiecărei jucării (în lei) este indicat în matricea  $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}$ .

Determinăm venitul lunar (mii lei) pe care îl obține întreprinderea:

$$v_{11} = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 90 = 520 \quad (\text{în luna ianuarie}),$$

$$v_{21} = 6 \cdot 50 + 7 \cdot 90 = 930 \quad (\text{în luna februarie}),$$

$$v_{31} = 4 \cdot 50 + 8 \cdot 90 = 920 \quad (\text{în luna martie}).$$

Se observă că  $v_{11}$  (respectiv  $v_{21}, v_{31}$ ) se obține adunând produsele elementelor liniei întâi (respectiv liniei a doua, a treia) a matricei  $A$  cu elementele respective ale matricei coloană  $B$ .

Matricea  $V = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}$  reprezintă produsul matricei  $A$  cu matricea  $B$ .

**Definiție.** Fie matricele  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ . Se numește **produsul** matricei  $A$  cu matricea  $B$  (în această ordine) matricea  $D = (d_{sp}) \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{C})$  ale cărei elemente  $d_{sp}$  se calculează astfel:

$$d_{sp} = a_{s1}b_{1p} + a_{s2}b_{2p} + \dots + a_{sn}b_{np} = \sum_{i=1}^n a_{si}b_{ip}, \quad s = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, k}.$$

Se scrie:  $D = A \cdot B$  sau  $D = AB$ .

Altfel spus, elementul  $d_{sp}$  al matricei produs este egal cu suma produselor elementelor liniei  $s$  a matricei  $A$  cu elementele respective ale coloanei  $p$  a matricei  $B$  (se mai spune că elementul  $d_{sp}$  este produsul dintre linia  $s$  a matricei  $A$  și coloana  $p$  a matricei  $B$ ).

**Atenție.** Produsul  $AB$  este definit numai în cazul în care numărul de coloane ale matricei  $A$  este egal cu numărul de linii ale matricei  $B$ . Numărul de linii (coloane) ale matricei  $AB$  coincide cu numărul de linii (coloane) ale matricei  $A$  ( $B$ ).

### **Exemplu**

Să se calculeze  $D = A \cdot B$ , dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

În baza definiției, obținem:

$$D = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Observație.** Spre deosebire de înmulțirea numerelor, operația de înmulțire a matricelor nu este comutativă. În exemplul precedent s-a calculat produsul  $AB$ , iar  $BA$  nici nu are sens (nu există). Dar și în cazul în care ambele produse  $AB$  și  $BA$  au sens, ele nu sunt neapărat egale.

$$\text{De exemplu: } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Proprietățile înmulțirii matricelor sunt expuse în

**Teorema 2.** Dacă pentru matricele  $A, B, D$  sunt definite expresia dintr-un membru al unei egalități de mai jos, atunci este definită expresia și din celălalt membru și are loc egalitatea respectivă:

- 1°  $A(BD) = (AB)D$  (înmulțirea este asociativă);
- 2°  $A(B + D) = AB + AD$ ,  $(A + B)D = AD + BD$  (înmulțirea este distributivă față de adunare);
- 3°  $'(AB) = 'B \cdot 'A$ ;
- 4°  $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ ,  $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ( $I_n$  este element neutru la înmulțire în  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ );
- 5°  $A \cdot O = O$ ,  $O \cdot A = O$ .

### Demonstrație

Aceste proprietăți se demonstrează în baza definiției egalității matricelor și a definițiilor operațiilor cu matrice.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1°.

Fie  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ ,  $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$  matrice arbitrară. Pentru ele are sens produsul  $(AB)D$ . Să observăm mai întâi că are sens și produsul  $A(BD)$ : matricea  $BD$  conține  $n$  linii și  $q$  coloane, deci este definit produsul  $A(BD)$  și el este o matrice de tip  $(m, q)$  – același tip ca și al matricei  $(AB)D$ . Pentru a obține egalitatea elementelor respective, notăm:  $U = AB = (u_{ij})$ ,  $V = BD = (v_{ij})$ ,  $S = (AB)D = (s_{ij})$ ,  $T = A(BD) = (t_{ij})$ .

Aveam:

$$u_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}, \quad v_{kj} = \sum_{l=1}^p b_{kl} d_{lj}, \quad s_{ij} = \sum_{l=1}^p u_{il} d_{lj} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} d_{lj}, \quad t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} b_{kl} d_{lj},$$

adică  $s_{ij} = t_{ij}$  pentru  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, q}$ , și, în final,  $A(BD) = (AB)D$ . Aici am aplicat proprietățile operațiilor cu numere complexe. ►

**Exercițiu.** Demonstrați celelalte proprietăți.

Toate operațiile examineate anterior au sens în mulțimea  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , de aceea pot fi calculate puteri cu exponent natural ale unei matrice. Dacă  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , atunci  $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$ . Se verifică fără dificultate egalitățile  $A^s \cdot A^t = A^{s+t}$ ,  $(A^s)^t = A^{st}$ ,  $s, t \in \mathbb{N}^*$ .

**Exerciții rezolvate**

**1.** a) Fie  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ .

Să se calculeze  $f(A) = A^3 - 2A^2 + 3I_2$ , pentru  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

b) Se poate calcula  $f(B)$  dacă  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ ?

*Rezolvare:*

$$\text{a)} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci, } f(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Nu există  $B^2$ , deci nu se poate calcula  $f(B)$ .

**2.**  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

**3.** Să se determine  $A^n$ , dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Rezolvare:*

Vom aplica metoda inducției matematice.

Să intuim o formulă pentru  $A^n$ . Pentru aceasta, calculăm  $A^2$ ,  $A^3$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se poate presupune că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ . Cu ajutorul inducției matematice se poate demonstra că această egalitate este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Noțiunile ce urmează vor fi aplicate la rezolvarea sistemelor arbitrar de ecuații liniare.

**Definiție.** Se spune că matricea nenulă  $A$  este o **matrice eșalon** (sau **matrice în trepte**) dacă primul (de la stânga) element nenul al fiecărei linii, începând cu a doua, este situat mai la dreapta decât primul element nenul al liniei precedente.

**Exemplu**

Matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  este matrice eșalon, iar matricea  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  – nu.

**Observații.** 1. Dacă matricea eșalon are linii nule, atunci ele sunt ultimele în această matrice.

2. Orice matrice eșalon patratică este o matrice superior triunghiulară.

Pentru a obține dintr-o matrice dată o matrice eșalon, vom efectua asupra liniilor ei transformări asemănătoare cu cele pe care le efectuăm asupra ecuațiilor unui sistem pentru a obține un sistem echivalent.

**Definiție.** Se numesc **transformări elementare asupra liniilor** unei matrice următoarele transformări:

- 1) permutarea a două linii;
- 2) înmulțirea elementelor unei linii cu un număr nenul;
- 3) adunarea la elementele unei linii a elementelor respective ale altrei linii, înmulțite cu același număr.

Matricele  $A$  și  $B$  de același tip se numesc **matrice echivalente** dacă una dintre ele se obține din celalătă prin efectuarea unui număr finit de transformări elementare asupra liniilor.

Se scrie:  $A \sim B$ .

**Exemplu**

Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ . Efectuăm asupra liniilor ei următoarele transformări (indicate cu ajutorul săgeților):

a) permutează linilele întâi și a doua.

$$\xrightarrow{\text{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

b) înmulțim elementele liniei întâi cu  $i$

$$\xrightarrow{i} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 2i \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

c) la elementele liniei întâi adunăm elementele respective ale liniei a doua înmulțite cu 2

$$\xrightarrow[2]{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

d) la elementele liniei întâi înmulțite cu 3 adunăm elementele liniei a doua înmulțite cu 2

$$\xrightarrow[2]{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 3.** Pentru orice matrice nenulă  $A$  există cel puțin un sir finit de transformări elementare asupra liniilor care, efectuate consecutiv, reduc  $A$  la o matrice eșalon.

**Exemplu**

Vom reduce o matrice la o matrice eșalon, arătând cu săgeți transformările elementare efectuate consecutiv:

$$\xrightarrow[1]{\text{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \xrightarrow[2]{\text{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \xrightarrow[3]{\text{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \xrightarrow[2]{\text{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

**Observații.** 1. Există mai multe siruri de transformări elementare asupra liniilor cu ajutorul cărora din matricea dată  $A$  se obține o matrice eșalon.

2. Matricea eșalon la care poate fi redusă  $A$  nu este unică, însă toate au același număr de linii nenule.

## Exerciții și probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

**A** 1. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{b)} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}; & \text{c)} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3i \end{pmatrix}; \\
 \text{d)} \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; & \text{e)} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & i \end{pmatrix}; & \text{f)} 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 2 & 0 & -i \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}; & \text{g)} 2i \cdot \begin{pmatrix} 3 & i & 5 \\ 0 & 2 & i \\ 1 & i-1 & -3 \end{pmatrix}; \\
 \text{h)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{i)} \begin{pmatrix} 7i & -1 \\ 3 & 8i \end{pmatrix} - i \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ i & 3 \end{pmatrix}; & \text{j)} \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

**2.**  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele  $x, y$ , dacă

$$x \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.** Să se calculeze  $AB$ ,  $BA$  (în caz dacă există produsul respectiv):

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; & \text{b)} A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \\
 \text{c)} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}; & \text{d)} A = \begin{pmatrix} a & 1 & x \\ b & 1 & y \\ c & 1 & z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \text{e)} A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{f)} A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}, B = I_3.
 \end{array}$$

**4.** Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left[ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]; & \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \\
 \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2; & \text{e)} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^2; & \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3; & \text{g)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^4.
 \end{array}$$

**B** 5. Să se calculeze  $A^2 - B^2$  (în caz dacă există), unde  $A, B$  sunt din exercițiul 3.

 6. Să se afle matricea  $X$ , astfel încât  $3X + A = 2B$ , unde  $A, B$  sunt din exercițiul 3 a), c).

**7.**  **Lucrați în perechi!** Să se calculeze  $f(A)$ , dacă:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} f(X) = X^3 - 2X + I_3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \text{b)} f(X) = X^3 - 3X + 2I_3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

- C** 8. Cinci șantiere de construcție  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  folosesc cărămidă produsă la fabrici amplasate în localitățile  $A, B, C$ . Prețurile (sute lei) pentru transportarea unui palet cu 1000 de cărămizi de la fiecare fabrică la fiecare șantier sunt indicate în următoarea matrice:

$$T = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

Începând cu luna viitoare, prețurile se vor majora cu 10%. Folosind operația de înmulțire a matricei cu un scalar, să se afle noile prețuri.

9. Numărul de paleți cu cărămidă transportați de la fabrici la șantiere (a se vedea problema 8) în primele trei luni ale anului sunt date respectiv de matricele  $M_1, M_2, M_3$ :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicând operații cu matrice, să se determine numărul total de paleți cu cărămidă transportați de la fiecare fabrică la fiecare șantier în aceste trei luni.

10.  **Investigați!** În matricele de mai jos sunt indicate rezultatele testării la matematică în două clase (linia a doua conține numărul de note respective).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 & 5 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) În care clasă nota medie este mai mare?

b) Să se propună o variantă de schimbare a rezultatelor testării în prima clasă, astfel încât nota medie să fie mai mare decât în a doua clasă.

11. Este adevărată egalitatea matricială  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ , pentru orice  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; & \text{b)} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -2 & i \end{pmatrix}; & \text{c)} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3i \end{pmatrix}; \\ \text{d)} \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 3 \end{pmatrix}; & \text{e)} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & i \end{pmatrix}; & \text{f)} 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & 0 & 7 \\ 2 & -i & 3 \end{pmatrix}; \\ \text{g)} 2i \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 2 & i-1 \\ 5 & i & -3 \end{pmatrix}; & \text{h)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; & \\ \text{i)} \begin{pmatrix} 7i & 3 \\ -1 & 8i \end{pmatrix} - i \cdot \begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; & \text{j)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

2.  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele  $x, y, z, u$ , dacă

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & z & 6 \\ 1 & u & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Să se calculeze  $AB$ ,  $BA$  (în caz dacă există produsul respectiv):

a)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

c)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

d)  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

f)  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Să se calculeze:

a)  $\left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; b)  $\left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right]$ ; c)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ;

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$ ;

e)  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^2$ ;

f)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3$ ;

g)  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^4$ .

**B<sub>1</sub>** 5. 1) Să se calculeze  $A^2 - B^2$  (în caz dacă există), unde  $A, B$  sunt din exercițiul 3.

2) Este adevărată egalitatea matricială  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ?

6. Să se afle matricea  $X$ , astfel încât  $3X + A = 2B$ , unde  $A, B$  sunt din exercițiul 3.

7. Să se rezolve problema 8, **C**.

8. Să se rezolve problema 9, **C**.

9. Să se calculeze:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

c)  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ;

d)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 18 & 8 \\ -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ ;

e)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

10. Să se calculeze  $f(A)$ , dacă:

a)  $f(X) = X^3 - 2X + I_3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $f(X) = X^3 - 3X + 2I_3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- C<sub>1</sub>** 11. Să se arate că egalitatea  $AB - BA = I$  este falsă, oricare ar fi matricele  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
12. O întreprindere preconizează să procure 3 tipuri de mașini  $T_1, T_2, T_3$  de la 3 furnizori  $F_1, F_2, F_3$ . Numărul de mașini procurate de la fiecare furnizor este indicat în următoarea matrice:

$$M = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}.$$

În funcție de varianta de completare a acestor mașini (două variante:  $V_1$  și  $V_2$ ), întreprinderea le poate procura de la fiecare furnizor la următoarele prețuri (u.m.):

$$P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 5,1 & 4,1 \\ 5,2 & 4,0 \\ 5,0 & 3,8 \end{pmatrix} \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}.$$

Să se determine suma care trebuie achitată fiecărui furnizor (în ambele variante).

- 13.**  **Investigați!** În matricele de mai jos sunt indicate rezultatele testării la matematică în două clase (linia a doua conține numărul de note respective).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 8 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) În care clasă nota medie este mai mare?
- b) Să se propună o variantă de schimbare a rezultatelor testării în prima clasă, astfel încât nota medie să fie mai mare decât în a doua clasă.
14. a) Dacă  $A \cdot B = B \cdot A$ , atunci matricele  $A, B$  sunt neapărat pătratice de aceeași dimensiune?  
Să se argumenteze răspunsul.
- b) Să se aducă un exemplu de matrice  $A, B$  ( $A \neq B$  și diferite de matricea unitate) ce satisfac egalitatea menționată.

## §2 Determinanți

Multe probleme pot fi rezolvate cu ajutorul sistemelor de ecuații liniare (adică ecuații de tipul  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$ ,  $c, a_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, n$ ). De exemplu, un elev a cumpărat 22 de caiete și creioane, achitând cumpărătura cu 20 u.m. Câte caiete și câte creioane au fost procurate, dacă un caiet costă 1,5 u.m., iar un creion 0,5 u.m.? Notăm cu  $x$  numărul de caiete, cu  $y$  – numărul de creioane cumpărate. Din condiția problemei obținem sistemul de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute:  $\begin{cases} x + y = 22, \\ 2,5x + 1,5y = 42. \end{cases}$  Aplicând una dintre metodele cunoscute (metoda reducerii, metoda substituției), obținem  $x = 9$ ,  $y = 13$ .

În caz general, se examinează sisteme de ecuații liniare care conțin mai multe ecuații și mai multe necunoscute, pentru rezolvarea cărora metodele menționate sunt mai puțin eficiente. În cele ce urmează vom expune alte metode de rezolvare, axate pe noțiunea de matrice și pe noțiunea de determinant al matricei.

**Observație.** În acest paragraf, termenul „matrice” va semnifica „matrice pătratică”.

## 2.1. Determinanți de ordinul 2 (3).

### Sisteme de 2 (3) ecuații liniare cu 2 necunoscute

Forma generală a unui sistem arbitrar de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Matricea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  se numește **matricea sistemului** (1).

Considerând că în fiecare ecuație cel puțin o necunoscută are coeficient nenul, rezolvăm sistemul aplicând metoda reducerii. Obținem:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases} \quad (2)$$

Evident, orice soluție a sistemului (1) este soluție și pentru (2). Fie  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ , atunci obținem

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

**Definiție.** Numărul  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  se numește **determinantul matricei**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ sau } \mathbf{determinant de ordinul 2}.$$

Se mai notează:  $\det A$ ,  $|A|$  sau  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ . Deci,  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta$ .

Expresia  $\Delta$  se numește și **determinant principal al sistemului** (1).

Se observă că numărătorii rapoartelor din (3) de asemenea sunt valori ale unor determinanți, și anume:  $b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1$ ,  $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_2$ , numiți **determinanți secundari** (sau **auxiliari**) ai sistemului (1).

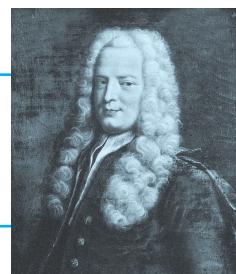
Menționăm că  $\Delta_1$  (sau  $\Delta_2$ ) este determinantul care se obține din  $|A|$  prin substituirea coloanei 1 (respectiv coloanei 2) cu coloana  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  a termenilor liberi ai sistemului inițial.

#### Exemplu

Determinantul matricei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  este numărul  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$ .

Rezultatul obținut (3) stă la baza următoarei propoziții:

**Teorema 4 (regula lui Cramer<sup>1</sup>).** Dacă determinantul principal  $\Delta$  al sistemului (1) este nenul, atunci sistemul are o soluție unică:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ,  $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ .



<sup>1</sup> Gabriel Cramer (1704–1752) – matematician elvețian.

Gabriel Cramer

**Demonstrație**

Din transformările efectuate mai sus rezultă unicitatea soluției: dacă  $x_1 = c_1$ ,  $x_2 = c_2$  este o soluție a sistemului (1), atunci ea coincide cu valorile pentru  $x_1$ ,  $x_2$  calculate din (3). Faptul că expresiile (3) pentru  $x_1$ ,  $x_2$  sunt soluții se verifică prin substituirea lor în (1). ►

**Exercițiu rezolvat**

↳ Să se rezolve în  $\mathbb{R}$ , prin metoda (regula) lui Cramer, sistemul de ecuații  $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

*Rezolvare:*

Întrucât  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16 \neq 0$ , putem aplica regula lui Cramer. Obținem:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7. \quad \text{Prin urmare, } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{8}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{7}{16}.$$

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ \left( \frac{5}{8}, -\frac{7}{16} \right) \right\}.$$

Aplicând metoda reducerii pentru a rezolva sistemul de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute, a cărui formă generală este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, i, j = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

se pot obține ecuațiile  $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$ ,  $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$ ,  $\Delta \cdot x_3 = \Delta_3$ , (5)

unde  $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ ,

$$\Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32},$$

$$\Delta_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33},$$

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3.$$

**Definiție.** Se numește **determinant al matricei**  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  sau **determinant de ordinul 3** numărul

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Se mai notează:  $\det A$ ,  $|A|$  sau  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ .

**Exemplu**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot (-4) = -11.$$

**Observații.** 1. Determinantul matricei  $A$  de ordinul 3 este o sumă de șase termeni, fiecare fiind produsul a 3 elemente situate câte unul în fiecare linie și în fiecare coloană a matricei  $A$  (a determinantului).

2. Pentru memorizarea algoritmului de calcul al determinantului de ordinul 3, se poate utiliza **regula triunghiurilor** (fig. 7.1) sau **regula lui Sarrus** (fig. 7.2): se iau cu semnul plus produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vârfurile unui triunghi din figura 7.1 a) sau 7.2 a), iar cu semnul minus – produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vârfurile unui triunghi din figura 7.1 b) sau 7.2 b).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

b)

Fig. 7.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

b)

Fig. 7.2

Revenim la rezolvarea sistemului (4). Expresia  $\Delta$  se numește **determinant principal** al acestui sistem (determinant matricei  $A$  a sistemului). Mai observăm că termenii liberi  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  ai ecuațiilor (5) sunt și ei determinanți de ordinul trei (verificați!):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Menționăm că  $\Delta_i$  ( $i=1, 3$ ) (numit **determinant auxiliar**) este determinantul matricei care se obține din matricea  $A$  a sistemului (4) prin substituirea coloanei  $i$  cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4).

Aplicând egalitățile (5), obținem următoarea teoremă, similară cu teorema 4.

**Teorema 5 (regula lui Cramer).** Dacă determinantul principal  $\Delta$  al sistemului (4) este diferit de zero, atunci sistemul are o soluție unică:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine dacă poate fi aplicată regula lui Cramer și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Deoarece  $\Delta = -6 + 4 - 12 + 2 = -12$  și este nenul, rezultă că regula lui

Cramer poate fi aplicată.

Calculăm determinanții auxiliari:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

Obținem soluția:  $x_1 = \frac{-12}{-12} = 1$ ,  $x_2 = \frac{0}{-12} = 0$ ,  $x_3 = \frac{-12}{-12} = 1$ .

Răspuns:  $S = \{(1, 0, 1)\}$ .

**Observație.** Rezolvarea sistemelor de acest fel, în caz că determinantul principal este nul, se va examina în § 3.

## 2.2. Determinanți de ordinul $n$

Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor de 2 (sau 3) ecuații liniare cu 2 (respectiv 3) necunoscute se va extinde pentru un sistem de  $n$  ecuații liniare cu  $n$  necunoscute ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ). Rezolvarea sistemului se axează pe noțiunea de determinant de ordinul  $n$ .

Inițial, pentru comoditate, vom considera determinantul de ordinul 1,  $\det(a_{11}) = a_{11}$ , și vom expune un alt algoritm de calcul al determinantilor de ordinul 3, numit **dezvoltarea determinantului după o linie/coloană**. În acest scop, grupăm termenii din definiția determinantului de ordinul 3, evidențierind elementele liniei întâi:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Acest rezultat poate fi scris sub forma:

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Determinanții de ordinul doi din această expresie se numesc **minori complementari** ai elementelor respective  $a_{ij}$ , din fața lor: ei reprezintă determinanții matricelor obținute din matricea inițială suprimând linia 1 și coloana  $j$ . Minorul complementar al elementului  $a_{ij}$  se notează cu  $\bar{M}_j^i$ . În aceste notății, pentru determinantul matricei  $A$  se obține expresia  $|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \bar{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2} \bar{M}_1^2 + a_{13}(-1)^{1+3} \bar{M}_1^3$ , care se numește **dezvoltarea determinantului după linia întâi**. În mod analog se obține dezvoltarea același determinant de ordinul 3 după oricare linie sau coloană. De exemplu, se verifică ușor egalitatea:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13}(-1)^4 \bar{M}_3^1 + a_{23}(-1)^5 \bar{M}_3^2 + a_{33}(-1)^6 \bar{M}_3^3, \end{aligned}$$

care reprezintă **dezvoltarea determinantului după coloana a treia**.

În mod analog se obțin dezvoltările determinantului după oricare altă linie/coloană.

**Exercițiu.** Scrieți dezvoltările determinantului de ordinul 3 după alte linii, coloane.

**Exercițiu rezolvat**

↳ Să se calculeze  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ , dezvoltându-l după o coloană.

*Rezolvare:*

Dezvoltăm determinantul după coloana întâi (elementul nul facilitează calculul):

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) + 0 + 4 \cdot (-2) = -12.$$

Vom introduce noțiunea de determinant al matricei pătratice de ordinul  $n$  (pe scurt – determinant de ordinul  $n$ ),  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , inductiv, presupunând cunoscute noțiunea de determinant de orice ordin mai mic sau egal cu  $n-1$  și noțiunea de **minor complementar** al elementului  $a_{ij}$  al matricei  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, n$ . Acesta este determinantul matricei obținute din  $A$  prin suprimarea liniei  $i$  și coloanei  $j$ ; se notează cu  $\bar{M}_j^i$ .

**Definiție.** Se numește **determinant al matricei**  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $n \geq 2$ , sau **determinant de ordinul  $n$**  numărul

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1} \bar{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2} \bar{M}_2^1 + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n} \bar{M}_n^1 = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1. \quad (6)$$

Se mai notează:  $|A|$ ,  $\det A$  sau  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ .

Noțiunea ce urmează este extrem de utilă pentru calculul determinanților, precum și pentru rezolvarea altor probleme.

**Definiție.** Se numește **complement algebric** al elementului  $a_{ij}$  al matricei  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $n \geq 2$ , (al determinantului  $|A|$ ) numărul  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}_j^i$ .

De exemplu, minorul complementar al elementului  $a_{23}$  al determinantului  $|A|$  din exercițiul precedent este  $\bar{M}_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$ , iar complementul algebric al acestuia este numărul  $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot 6 = -6$ .

În acești termeni, definiția determinantului poate fi formulată astfel:

Determinantul matricei este egal cu suma produselor elementelor liniei întâi cu complementii algebrici respectivi:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}. \quad (7)$$

Formulele (6) și (7) (pentru  $n = 3$ , ele coincid cu formula de dezvoltare a determinantului de ordinul 3 după prima linie, obținută anterior) sunt numite **dezvoltare a determinantului după linia întâi**.

**Exercițiu rezolvat**

↳ Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ (-3) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (+15) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \cdot 0 = -15. \end{aligned}$$

Dacă în definiția determinantului am putea înlocui elementele primei linii cu cele ale altor linii (ca și pentru determinanții de ordinul 3), atunci am calcula determinantul precedent mai simplu: dezvoltându-l după linia a patra, vom avea nevoie doar de un minor complementar, deoarece ceilalți se vor înmulți cu 0. Teorema de mai jos stabilește că acest fapt este posibil.

**Teorema 6.** Fie  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $n \geq 2$ . Pentru orice  $i = \overline{1, n}$  sunt loc egalitățea

$$\Delta = |A| = a_{i1}(-1)^{i+1} \bar{M}_1^i + a_{i2}(-1)^{i+2} \bar{M}_2^i + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \bar{M}_n^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}. \quad (8)$$

Formula (8) se numește **formula dezvoltării determinantului după linia  $i$** .

**Exercițiu rezolvat**

↳ Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

*Rezolvare:*

Aplicăm teorema 6 dezvoltând determinantul după linia a patra (deoarece ea conține cele mai multe elemente egale cu 0).

$$|A| = 0 \cdot (-1)^{4+1} \bar{M}_1^4 + 0 \cdot (-1)^{4+2} \bar{M}_2^4 + 3 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+4} \bar{M}_4^4 = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Ideea de dezvoltare a determinantului după o linie care are mai multe elemente egale cu 0 generează o altă idee: posibilitatea dezvoltării determinantului după o coloană. Teorema ce urmează confirmă acest fapt.

**Teorema 7.** Fie  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $n \geq 2$ . Oricare ar fi  $j = \overline{1, n}$ ,

$$\Delta = |A| = a_{1j}(-1)^{1+j} \bar{M}_j^1 + a_{2j}(-1)^{2+j} \bar{M}_j^2 + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j} \bar{M}_j^n = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Această formulă se numește **formula dezvoltării determinantului după coloana j**.

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se calculeze determinantul din exercițiul precedent, dezvoltându-l după coloana a doua.

*Rezolvare:*

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \bar{M}_2^2 + 0 \cdot (-1)^{3+2} \bar{M}_2^3 + 0 \cdot (-1)^{4+2} \bar{M}_2^4 = -1 \cdot 15 = -15.$$

## 2.3. Proprietățile determinantilor

Calculul determinantelor în baza definiției este dificil dacă elementele lor conțin expresii voluminoase (radicali, logaritmi, numere complexe, ...). Următoarele proprietăți ale determinantelor vor facilita calculul lor. În plus, proprietățile  $2^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $8^\circ$  arată cum se modifică determinantul matricei dacă aplicăm transformări elementare asupra liniilor lui.

$1^\circ$  Determinantul matricei  $A$  este egal cu determinantul matricei transpuse  $'A'$ .

Proprietatea poate fi demonstrată pentru  $n = 2$ ,  $n = 3$  calculând  $|A|$ ,  $|'A'|$  sau utilizând inducția matematică pentru  $n > 3$  (determinantul  $|A|$  se dezvoltă după linia întâi, iar  $|'A'|$  – după coloana întâi).

**Observație.** Din această proprietate rezultă că orice propoziție adevărată pentru liniile unui determinant va fi adevărată și pentru coloanele lui. Din acest motiv, proprietățile care urmează vor fi formulate doar pentru linii, însă ele sunt valabile și pentru coloane.

$2^\circ$  Dacă matricea  $B$  se obține din matricea  $A$  permutând două linii, atunci  $|B| = -|A|$ .

### Demonstrație

Aplicăm metoda inducției matematice: pentru  $k = 2$  proprietatea se verifică imediat, iar trecerea de la  $k - 1$  la  $k$ ,  $k \geq 3$ , se efectuează dezvoltând determinantul după o linie diferită de cele ce se permute. ►

$3^\circ$  Dacă o matrice  $A$  are două liniile egale, atunci determinantul ei este egal cu zero.

### Demonstrație

Într-adevăr, permutând liniile egale, obținem o matrice  $B$ , astfel încât, în baza proprietății  $2^\circ$ ,  $|B| = -|A|$ . De fapt,  $B = A$ , deoarece am permuatat liniile egale. Prin urmare,  $|A| = |B| = -|A|$ , adică  $2|A| = 0$  și deci  $|A| = 0$ . ►

**4°** Suma produselor elementelor unei linii a matricei  $A$  cu complementii algebrici respectivi ai elementelor oricărei altei linii este egală cu zero:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k).$$

#### Demonstrație

Expresia din membrul stâng al egalității reprezintă dezvoltarea după linia  $k$  a determinantului matricei care se obține din matricea  $A$  prin substituirea elementelor liniei  $k$  cu elementele respective ale liniei  $i$ , adică al unei matrice cu două linii egale, care este egal cu zero. ►

**5°** Dacă înmulțim toate elementele unei linii a unei matrice  $A$  cu un număr  $\alpha$ , atunci determinantul matricei obținute  $A'$  este egal cu produsul dintre  $\alpha$  și determinantul matricei  $A$ .

Se mai spune: factorul comun al elementelor unei linii poate fi scos în fața determinantului.

#### Demonstrație

Elementele  $a'_{ij}$  ale liniei  $i$  a matricei  $A'$  au forma:  $a'_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ . Dezvoltând determinantul  $|A'|$  după linia  $i$ , obținem:  $|A'| = \sum_{j=1}^n (\alpha \cdot a_{ij}) \cdot A_{ij} = \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \alpha \cdot |A|$ . ►

#### Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2i & 3i \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16i - 15i = i, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{deci} \quad \begin{vmatrix} 2i & 3i \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

**6°** Dacă toate elementele unei linii a unei matrice sunt egale cu 0, atunci determinantul acestei matrice este egal cu 0.

Proprietatea rezultă imediat din proprietatea 5° pentru  $\alpha = 0$ .

Analog cu proprietatea 5° se demonstrează proprietatea 7°.

**7°** Dacă o matrice conține două linii proporționale, atunci determinantul ei este egal cu 0.

Liniile  $i$  și  $s$  ale unei matrice  $A$  se numesc **linii proporționale**, dacă  $a_{ij} = \beta \cdot a_{sj}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

#### Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2 & i & -3 \\ 4 & 2i & -6 \\ 7 & \pi & i\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{fiindcă liniile 1 și 2 sunt proporționale.}$$

**8°** Dacă la elementele unei linii a matricei  $A$  adunăm elementele respective ale altor linii înmulțite cu unul și același număr nenul  $\alpha$ , atunci se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei  $A$ .

#### Demonstrație

Fie la elementele liniei  $k$  a matricei  $A$  se adună elementele respective ale liniei  $s$  înmulțite cu numărul  $\alpha$ . Elementele liniei  $k$  a matricei obținute  $A'$  au forma:  $a_{kj} + \alpha a_{sj}$ . Dezvoltând determinantul  $|A'|$  după linia  $k$ , obținem

$$|A'| = \sum_{j=1}^n (a_{kj} + \alpha \cdot a_{sj}) A_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{sj} A_{kj} = |A| + \alpha \cdot 0 = |A|. \quad \blacktriangleright$$

**Exemplu**

Dacă la elementele liniei a doua a matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  adunăm elementele respective ale liniei a treia înmulțite cu  $-2$ , obținem matricea  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ . Astfel,  $|A| = |B| = 0$ .

## 2.4. Calculul determinantilor

Pentru a evita calcule complicate, se recomandă, în prealabil, să se efectueze transformări ale determinantului (utilizând proprietățile) pentru a obține unele elemente egale cu zero.

**Observații.** a) Determinantul matricei pătratice (de ordinul 2, 3) inferior/superior triunghiular este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

b) Determinantul matricei ale cărei elemente mai sus/jos de diagonala secundară sunt nule este egal cu opusul produsului elementelor de pe această diagonală:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}.$$

2. Pentru determinanții matricelor pătratice de ordinul patru situația este următoarea:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}.$$

Aceste rezultate se obțin dezvoltând determinantul (și cei noi obținuți) după linia ce conține doar un element nenul.

### Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze  $\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 2 & 3i \\ i & 2+i & i \\ 1 & 4+i & 4i \end{vmatrix}$ .

*Rezolvare:*

La elementele liniei a două adunăm elementele respective ale liniei întâi (proprietatea  $8^\circ$ ):  $\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 2 & 3i \\ 1 & 4+i & 4i \\ 1 & 4+i & 4i \end{vmatrix}$ . Acest determinant este egal cu zero, fiindcă are 2 linii identice (proprietatea  $3^\circ$ ).

2. Să se calculeze  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ .

*Rezolvare:*

Aplicând proprietățile  $2^\circ, 8^\circ$ , se obține un determinant de formă triunghiulară:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 \cdot (-5) = 30.$$

**Teorema 8 (determinantul produsului matricelor).** Dacă  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , atunci  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ .

*Exemplu*

$$\text{Dacă } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ atunci } AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem  $|A| = 1$ ,  $|B| = -2$ ,  $|AB| = -2$ .

## 2.5. Matrice inversabile

Este bine cunoscut faptul că pentru orice număr complex nenul  $a$  există  $a^{-1}$ , astfel încât  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ . În intenția de a găsi o matrice  $B$  pentru matricea  $A$ , astfel încât  $A \cdot B = B \cdot A = I$ , se introduce următoarea noțiune:

**Definiție.** O matrice pătratică  $A$  se numește **inversabilă** dacă există o matrice pătratică  $B$ , astfel încât  $AB = BA = I$ .

Matricea  $B$  se numește **inversă** matricei  $A$  și se notează  $A^{-1}$ .

Este clar că matricele  $B$  și  $I$  sunt de același ordin ca și  $A$ . Din relațiile  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$  rezultă că  $A^{-1}$  de asemenea este inversabilă și că inversa ei este  $A$ , adică  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

*Exemple*

Inversele matricelor  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  sunt  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  și respectiv  $B^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ , deoarece  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Proprietăți ale matricelor inversabile

1° Inversa unei matrice inversabile este unică.

#### Demonstrație

Presupunem contrariul.

Fie  $B$  și  $C$  două matrice inverse ale matricei  $A$ , adică  $CA = AC = I$  și  $BA = AB = I$ .

Din aceste egalități obținem:  $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$ . ►

2° Dacă matricele  $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  sunt inversabile, atunci matricea  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k$  este inversabilă și  $(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$ .

#### Demonstrație

Într-adevăr, de exemplu pentru  $k = 2$  avem

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot (A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}) = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_2^{-1}) \cdot A_1^{-1} = A_1 I_2 A_1^{-1} = A_1 A_1^{-1} = I_2. \quad \blacktriangleright$$

Utilizând determinanții, complementii algebrici ai elementelor unei matrice pătratice, vom prezenta un criteriu de inversabilitate a matricei și o metodă de calcul al inversei unei matrice.

**Teorema 9.** Matricea pătratică este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este diferit de zero.

#### Demonstrație

Necesitatea rezultă din teorema 8. Într-adevăr, dacă matricea  $A$  este inversabilă, atunci  $I = A \cdot A^{-1}$ . Deci,  $1 = |I| = |A| \cdot |A^{-1}|$ , de unde rezultă că  $|A| \neq 0$  și (foarte important!)  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$ .

Suficiența este de o mare importanță: demonstrația ei furnizează o formulă pentru calculul matricei inverse. Astfel, vom arăta că pentru  $n \geq 2$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Într-adevăr, în baza proprietății 4° a determinanților, obținem:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{i1}a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{i1}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{i1}a_{in} \\ \sum_{i=1}^n A_{i2}a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{i2}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{i2}a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{in}a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{in}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{in}a_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \frac{|A|}{|A|} I = I. \end{aligned}$$

În mod analog se arată că  $A \cdot A^{-1} = I_n$ .

Pentru  $n=1$ , din condiția  $|A| = |a_{11}| \neq 0$  scriem  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} \end{pmatrix}$ .

Deci,  $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ . ►

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se determine inversa matricei  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Rezolvare:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculăm determinantul matricei:  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 12 = 22$ .

Inversa există, întrucât determinantul matricei  $A$  este diferit de zero. Determinăm complementii algebrici ai elementelor matricei  $A$ :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\text{Conform formulei (9), obținem: } A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicând inversa unei matrice, pot fi rezolvate diverse ecuații matriciale. Dacă matricele  $A$  și  $B$  au același număr de linii, atunci ecuația  $AX = B$ , unde  $A$  este pătratică cu  $\det A \neq 0$ , poate fi rezolvată în modul următor: înmulțind ambii membri ai ecuației la stânga cu  $A^{-1}$ , obținem, consecutiv, egalitățile matriciale:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad I \cdot X = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

De exemplu, pentru matricea  $A$  din exercițiul precedent și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avem

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Exercițiu.** Arătați că soluția ecuației  $XA = B$ ,  $|A| \neq 0$ , este matricea  $X = B \cdot A^{-1}$ .

### Probleme rezolvate

**1.** Pentru producerea 1 t de bomboane „Masca” se folosesc 0,2 t de produse de cacao și 0,5 t de zahăr, iar pentru producerea 1 t de bomboane „Griliaj” se folosesc 0,14 t de produse de cacao și 0,6 t de zahăr (în afară de alte componente). Să se afle cantitatea de bomboane produse de fiecare fel, dacă s-au folosit 0,15 t de produse de cacao și 0,5 t de zahăr.

*Rezolvare:*

Fie  $x_1$  și  $x_2$  cantitatea (în tone) de bomboane produse „Masca” și respectiv „Griliaj”.

Alcătuim sistemul de ecuații:  $\begin{cases} 0,2x_1 + 0,14x_2 = 0,15 \\ 0,5x_1 + 0,6x_2 = 0,5 \end{cases}$  sau, în formă matricială,  $AX = B$ ,

unde  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,14 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ .

Calculăm:  $A^{-1} = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,14 \\ -0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$

Înmulțind egalitatea  $AX = B$  la stânga cu  $A^{-1}$ , obținem:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,14 \\ -0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Astfel, au fost produse 0,4 t de bomboane „Masca” și 0,5 t de bomboane „Griliaj”.

**2.** Se poate demonstra că aria triunghiului  $M_1M_2M_3$ , unde  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,

$M_3(x_3, y_3)$ , se calculează conform formulei:  $\mathcal{A}_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ . În particular,

punctele  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  vor fi coliniare, dacă determinantul respectiv este nul.

Fie punctele  $M_1(2, 3)$ ,  $M_2(3, 0)$ ,  $M_3(2, 2)$ . Să se calculeze aria triunghiului  $M_1M_2M_3$  sau să se arate că punctele respective sunt coliniare.

*Rezolvare:*

Determinantul  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  este egal cu  $-1$ , deci punctele în cauză nu sunt coliniare.

Aria  $\Delta M_1M_2M_3$  este  $\frac{1}{2} \cdot |-1| = \frac{1}{2}$  (unități pătrate).

## Exerciții propuse

## Profilurile umanist, arte, sport

**A** 1. 1) Să se calculeze determinantul:

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; & \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}; & \text{c)} \begin{vmatrix} 2a & 3a \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; & \text{d)} \begin{vmatrix} 5i & i \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; & \text{e)} \begin{vmatrix} 5-i & 5 \\ 3 & 5-i \end{vmatrix}; \\ \text{f)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 9 & 1 & 9 \\ 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}; & \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; & \text{h)} \begin{vmatrix} -3 & 3 & -7 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}; & \text{i)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}; & \text{j)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}. \end{array}$$

2) Să se calculeze determinantul din 1.1) g) utilizând regula triunghiului, apoi, aplicând proprietățile determinanților, să se obțină zerouri de o parte a diagonalei principale/secundare. Să se compare rezultatele.

2. 1) Să se determine dacă sistemul poate fi rezolvat prin regula lui Cramer:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 = 2; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 = 3; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = -3, \\ x_1 - x_2 = 6; \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} mx_1 + nx_2 = p, \\ -nx_1 + mx_2 = q, \end{cases} m \cdot n \neq 0; & \text{f)} \begin{cases} x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2; \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases} \\ \text{h)} \begin{cases} x_1 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7; \end{cases} & \text{j)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \end{array}$$

2) Să se rezolve în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemele din 2.1) aplicând regula lui Cramer.

**B** 3. Să se rezolve în  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  sistemul de ecuații:

$$\text{a)} \begin{cases} (3+i)x + (4-2i)y = 2-6i, \\ (4-2i)x - (2-3i)y = 5-4i; \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} (2-i)x + (2+i)y = 6, \\ (3-2i)x + (3+2i)y = 8; \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x - iy - 2z = 10, \\ x - y - 2iz = 20, \\ ix + 3iy + (1-i)z = -30. \end{cases}$$

4. Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  ecuația  $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$ , unde  $f(x) = 16x + 6$ ,  $g(x) = 4x^2 + 2x$ .

**C** 5.  **Investigați!** Dependența dintre cantitatea  $y$  (litri) a combustibilului consumat și greutatea  $x$  (tone),  $x \in [1, 4]$ , a încărcăturii unui automobil este dată de funcția

$$f(x) = \begin{vmatrix} 4 & x & 2 \\ x-1 & 2 & x \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

- a) Să se scrie  $f(x)$  în formă analitică.      b) Pentru care  $x$ ,  $x \in [1, 4]$ ,  $f(x) = 0$ ?  
 c) Pentru care  $x$ ,  $x \in [1, 4]$ , pierderile combustibilului vor fi minime? Să se calculeze consumul respectiv.

6. Utilizând proprietățile determinanților, să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a^2 \\ b+1 & 1 & b^2 \\ c+1 & 1 & c^2 \end{vmatrix}; & \text{b)} \begin{vmatrix} x+a & a & a \\ x+a & x & a \\ 2a & a & x \end{vmatrix}; & \text{c)} \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}. \end{array}$$

7.  **Lucrați în perechi!** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $\begin{vmatrix} 2x-4 & 2 & -2 \\ x & -3 & 1 \\ 2 & -5 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

b)  $\begin{vmatrix} -x & a & a \\ x & a-x & a \\ 0 & a & a-x \end{vmatrix} = 0.$

### Profilul real

- A1** 1. 1) Să se calculeze determinantul:

a)  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$

b)  $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix};$

c)  $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & 3 \end{vmatrix};$

d) (BAC, 2019)  $\begin{vmatrix} 5i & 2 \\ i & -3 \end{vmatrix};$

e)  $\begin{vmatrix} 2-i & i \\ 3 & 5-i \end{vmatrix};$

f)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix};$

g)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix};$

h)  $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix};$

i)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix};$

j)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix};$

- 2) Să se calculeze determinantul din 1.1) g) utilizând regula triunghiului, apoi, aplicând proprietățile determinantilor, să se obțină zerouri de o parte a diagonalei principale/secundare. Să se compare rezultatele.

2. 1) Să se determine dacă sistemul poate fi rezolvat prin regula lui Cramer:

a)  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 1, \\ 7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_2 = 2; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 6; \end{cases}$

e)  $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c, \\ -bx_1 + ax_2 = d, \quad a \cdot b \neq 0, \quad a \neq b; \end{cases}$

f)  $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

g)  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

h)  $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases}$

i)  $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$

j)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

- 2) Să se rezolve în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemele din 2.1) aplicând regula lui Cramer.

3. Să se calculeze determinantul:

a)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix};$

b)  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix};$

c)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix};$

d)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

e)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix};$

4. 1) Să se determine dacă este inversabilă matricea:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

c)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

d)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

e)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

f)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

g)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix};$

- 2) Utilizând complementii algebrici ai elementelor, să se calculeze inversa matricei din 4.1).

**B<sub>1</sub>** 5. Să se rezolve în  $\mathbf{C}$  ecuația  $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$ , unde  $f(x) = 8x + 3$ ,  $g(x) = 2x^2 + x$ .

6.  **Investigați!** Dependența dintre cantitatea  $y$  (litri) a combustibilului consumat și greutatea  $x$  (tone),  $x \in [1, 4]$ , a încărcăturii unui automobil este dată de funcția

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

- a) Să se scrie  $f(x)$  în formă analitică.  
 b) Pentru care  $x$ ,  $x \in [1, 4]$ ,  $f(x) = 0$ ?  
 c) Pentru care  $x$ ,  $x \in [1, 4]$ , pierderile combustibilului vor fi minime? Să se calculeze consumul respectiv.

7. Aplicând proprietățile determinanților, să se demonstreze egalitatea:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \text{ b)} \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8. Să se rezolve în  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$  sistemul de ecuații:

$$\text{a)} \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i; \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8; \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x+iy-2z=10, \\ x-y+2iz=20, \\ ix+3iy-(1+i)z=30. \end{cases}$$

9. Să se calculeze aria triunghiului  $M_1M_2M_3$  sau să se arate că punctele  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  sunt coliniare.  
 a)  $M_1(2, 1)$ ,  $M_2(3, 4)$ ,  $M_3(1, 6)$ ;      b)  $M_1(0, 0)$ ,  $M_2(2, 1)$ ,  $M_3(4, 2)$ ;  
 c)  $M_1(-2, 4)$ ,  $M_2(0, -3)$ ,  $M_3(1, 7)$ ;      d)  $M_1(5, 4)$ ,  $M_2(11, 0)$ ,  $M_3(0, 3)$ .

10. Să se rezolve ecuațiile matriciale  $AX = B$ ,  $YA = B$ , unde  $A$  este din 4 a) și  $B$  este din 4 b).

$$\text{11. Să se rezolve în } \mathbb{R} \text{ ecuația: a)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ x & -3 & 1 \\ 2 & -5 & x+1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} a-x & a & a \\ a & a-x & a \\ a & a & a-x \end{vmatrix} = 0.$$

**C<sub>1</sub>** 12. Dacă vom schimba semnele tuturor elementelor determinantului, cum se va modifica determinantul de ordinul: a) 3; b) 4?

13. Cum se va schimba determinantul matricei  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{C})$  dacă fiecare element va fi înlocuit cu conjugatul său?

14. Cum se va schimba determinantul de ordinul 3 dacă fiecare element se va înmulții cu același număr nenul  $\alpha$ ?

15. Să se arate că determinantul  $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & c_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & c_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $z_i \in \mathbf{C}$ , este un număr pur imaginär sau 0.

16. Utilizând proprietățile determinanților, să se calculeze:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ c & b & a \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

17. Să se calculeze determinantul și să se scrie rezultatul sub formă de produs:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}.$$

### §3 | Sisteme de ecuații liniare

#### 3.1. Noțiuni generale

În acest paragraf vom determina condițiile în care un sistem arbitrar de ecuații liniare are soluții și vom expune unele metode de determinare a mulțimii soluțiilor acestuia.

Forma generală a unui sistem de  $m$  ecuații liniare cu  $n$  necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Numerele  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , se numesc **coeficienți ai necunoscutelor**, iar  $b_1, b_2, \dots, b_m$  – **termeni liberi** ai sistemului. Din coeficienții necunoscutelor și din termenii

liberi formăm două matrice:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ ,

numite, respectiv, **matricea sistemului** și **matricea extinsă** a sistemului.

**Definiție.** Sistemul ordonat de  $n$  numere complexe  $(c_1, \dots, c_n)$  se numește **soluție** a sistemului (1) dacă, înlocuind necunoscutele  $x_j$ , respectiv, cu  $c_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , fiecare ecuație din (1) se transformă într-o propoziție adevărată, adică

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

**Observație.** Pentru comoditate, vom prezenta soluția unui sistem de ecuații cu  $n$  necunoscute (fiind stabilită ordinea  $x_1, \dots, x_n$ ) și ca o matrice-coloană  $X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  din  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , considerând că se substitue  $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ .

Se poate arăta că dacă un sistem de ecuații liniare are cel puțin două soluții, atunci mulțimea soluțiilor lui este infinită.

Un sistem de ecuații liniare se numește **compatibil** dacă el are cel puțin o soluție. Sistemul care are o soluție unică se numește **compatibil determinat**, iar cel care are mai mult decât o soluție – **compatibil nedeterminat**. Un sistem de ecuații care nu are soluții se numește **incompatibil**.

#### Exemplu

Fie sistemele de ecuații liniare  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = -1; \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 = 12; \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$

Primul sistem este compatibil determinat, fiindcă determinantul matricei sistemului este nenul și prin metoda lui Cramer stabilim că el are o soluție unică. Al doilea sistem este compatibil nedeterminat: soluții ale sistemului sunt, de exemplu,  $x_1 = 1, x_2 = -1$ ;  $x_1 = -3, x_2 = -3$ . Ultimul sistem este incompatibil fiindcă membrii din stânga ai ecuațiilor sunt aceiași, iar cei din dreapta diferă.

A rezolva un sistem de ecuații liniare înseamnă:

- a) a stabili dacă el este compatibil;
- b) în caz afirmativ, a determina mulțimea soluțiilor sale.

În caz general, vom considera că rezolvăm sistemul de ecuații în mulțimea numerelor complexe.

Scrierea matricială a sistemului (1) este:

$$AX = B, \quad (2)$$

unde  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$ .

Fie încă un sistem de ecuații liniare:

$$A_1 X = B_1, \quad (3)$$

unde matricele  $A_1, B_1$  sunt de același tip ca și matricele  $A, B$ , respectiv.

**Definiție.** Sistemele (2) și (3) se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale (în particular, dacă ambele nu au soluții).

#### Exemplu

Sistemele  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$  și  $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$  au soluție comună  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ ,

însă totuși nu sunt echivalente, fiindcă  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$  este soluție a sistemului al doilea, dar nu este soluție pentru primul sistem.

**Lemă.** Dacă  $A, A_1 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $B, B_1 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$  și există o matrice inversabilă  $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ , astfel încât  $UA = A_1$ ,  $UB = B_1$ , atunci sistemele (2) și (3) sunt echivalente.

#### Demonstrație

Fie sistemul (2) compatibil,  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  o soluție arbitrară pentru (2), adică este adevărată egalitatea  $AX_0 = B$ . Înmulțind la stânga această egalitate cu  $U$ , obținem  $UAX_0 = UB$ , sau  $A_1X_0 = B_1$ . Deducem că orice soluție a sistemului (2) este soluție și pentru sistemul (3). Analog se obține că orice soluție a sistemului (3) este soluție și pentru (2), deoarece  $A = U^{-1}A_1$ ,  $B = U^{-1}B_1$ . Deci, sistemele (2) și (3) sunt echivalente. ►

## 3.2. Metode de rezolvare a sistemelor de $n$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute

### □ Metoda matricială

Considerând în sistemul (1)  $m = n$ , se obține următorul sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4)$$

Scrierea matricială a acestui sistem este

$$AX = B, \quad (5)$$

unde  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  este matricea pătratică a sistemului,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

**Teorema 10.** Dacă matricea  $A$  a sistemului (4) este inversabilă, atunci sistemul are o soluție unică:

$$X_0 = A^{-1}B. \quad (6)$$

### Demonstrație

Înmulțind la stânga egalitatea (5) cu  $A^{-1}$ , obținem consecutiv:  $A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B$ ,  $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ ,  $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ ,  $X = A^{-1} \cdot B$ . În baza lemei din secvența 3.1, sistemele (5) și  $X = A^{-1} \cdot B$  sunt echivalente: în calitate de  $U$  din lemă s-a luat matricea inversabilă  $A^{-1}$ . ►

### Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  sistemul de ecuații:  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Rezolvare:

$$\text{Matricea sistemului este } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem  $|A| = -3$ ,  $A_{11} = 2$ ,  $A_{12} = -1$ ,  $A_{13} = -1$ ,  $A_{21} = 1$ ,  $A_{22} = -2$ ,  $A_{23} = 1$ ,  $A_{31} = -7$ ,  $A_{32} = 5$ ,  $A_{33} = -1$ .

Așadar,  $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , adică

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Răspuns:  $S = \{(1, 0, 1)\}$ .

□ **Regula lui Cramer** (demonstrată în § 2 pentru  $n = 2$ ,  $n = 3$ ) este o altă metodă de rezolvare a sistemelor de  $n$  ecuații liniare cu  $n$  necunoscute,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Aplicând proprietatea 4° (secvența 2.3), formula (7) (secvența 2.2) și formula (9) (secvența 2.5) pentru  $A^{-1}$ , din (6) obținem formulele pentru calculul valorilor necunoscutelelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\text{Astfel, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{i1} b_i \\ \sum_{i=1}^n A_{i2} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{in} b_i \end{pmatrix}, \text{ de unde:}$$

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n A_{ij} b_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta_j \text{ fiind determinanțul matricei care se obține din } A \text{ prin substituirea coloanei } j \text{ cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4). Determinantul } \Delta = |A| \text{ se numește determinant principal, iar } \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \text{ - determinanți secundari ai sistemului (4).}$$

Rezultatul obținut este

**Teorema 11 (regula lui Cramer).** Dacă determinantul  $\Delta$  al matricei sistemului de ecuații liniare (4) este diferit de zero, atunci sistemul este compatibil determinat și soluția sa este:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

### Exemplu

Aplicând teorema 11 sistemului de ecuații din exercițiul precedent, obținem  $\Delta = -3$ ,  $\Delta_1 = -3$ ,  $\Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_3 = -3$ . Deci,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ .

### 3.3. Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Spre deosebire de metodele examineate, **metoda lui Gauss** (numită și **metoda eliminărilor succesive**), expusă în continuare, poate fi aplicată la rezolvarea oricărui tip de sisteme de ecuații liniare (1). Asupra sistemelor vom efectua următoarele transformări ce permit să se obțină sisteme echivalente cu cel inițial (echivalența se verifică nemijlocit):

- permutarea a două ecuații;
- înmulțirea ambilor membri ai unei ecuații cu un număr nenul;
- adunarea la fiecare membru al unei ecuații a membrilor respectivi ai altrei ecuații, înmulțiti cu unul și același număr.

Este clar că efectuarea acestor transformări asupra ecuațiilor unui sistem este echivalentă cu efectuarea transformărilor elementare respective asupra liniilor matricei extinse  $\bar{A}$  a sistemului (a se vedea secvența 1.2).

Exemplele ce urmează vor facilita înțelegerea metodei lui Gauss și reprezintă două tipuri de sisteme care pot fi obținute ca rezultat al aplicării acestei metode.

1. Să se rezolve în C sistemul de ecuații liniare
- $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Observăm că matricea sistemului este superior triunghiulară, având toate elementele de pe diagonala principală nenele. Se spune că un astfel de sistem este **triunghiular**.

Sistemele de acest tip se rezolvă relativ simplu: din ultima ecuație calculăm valoarea ultimei necunoscute și o substituim în toate celelalte ecuații; din penultima ecuație calculăm valoarea penultimei necunoscute și.a.m.d., până calculăm valoarea primei necunoscute din prima ecuație. Prin urmare, sistemul va avea o unică soluție.

În exemplul dat, din ultima ecuație obținem  $x_3 = \frac{1}{2}$ ; substituim valoarea lui  $x_3$  în primele două ecuații și din ecuația a doua obținem  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ; în final, substituind valoarea lui  $x_2$  în prima ecuație, obținem  $x_1 = 1$ . Unica soluție a sistemului este:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ .

Răspuns:  $S = \left\{ \left( 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ .

2. Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  sistemul de ecuații  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

Observăm că sistemul nu conține o ecuație de forma  $0 = b$ ,  $b \neq 0$ , numărul necunoscutelor lui este mai mare decât numărul ecuațiilor și matricea sistemului are forma eșalon. Se spune că un atare sistem este **trapezic** (altfel zis, un sistem de ecuații liniare este un sistem trapezic dacă matricea lui are forma eșalon, numărul  $r$  de linii nenule ale matricei sistemului este egal cu numărul de linii nenule ale matricei extinse a sistemului și  $r$  este mai mic decât numărul de necunoscute ale sistemului). Necunoscutele ai căror coeficienți sunt primii nenuli în liniile matricei sistemului trapezic se consideră, de regulă, **necunoscute principale**, iar celelalte – **necunoscute secundare**.

În exemplul dat, considerăm  $x_1$  și  $x_2$  necunoscute principale, iar  $x_3$  – necunoscută secundară.

Sistemul trapezic (inițial) se reduce la un sistem triunghiular în necunoscutele principale  $x_1$ ,  $x_2$  în următorul mod:

Lăsăm în membrul stâng al fiecărei ecuații toți termenii ce conțin necunoscutele principale, iar ceilalți termeni îi trecem în membrul drept, schimbându-le semnul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - x_3, \\ 3x_2 = 1 + x_3. \end{cases}$$

Notând necunoscuta secundară  $x_3$  cu  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , și rezolvând sistemul, obținem așa-numita *soluție generală* a sistemului:  $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha$ ,  $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Este clar că pentru fiecare valoare atribuită parametrului  $\alpha$  se determină în mod unic valorile necunoscutele principale. De exemplu, pentru  $\alpha = 0$  obținem o soluție a sistemului  $x_1 = \frac{2}{3}$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_3 = 0$ , numită *soluție particulară*.

Pentru  $\alpha = -1$  se obține  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -1$  – o altă soluție particulară a sistemului.

Parametrului  $\alpha$ , deci și necunoscutei secundare  $x_3$ , îi putem atribui o infinitate de valori din  $\mathbb{C}$ . Din acest motiv, sistemul este compatibil nedeterminat.

**Observații.** 1. Lista necunoscutele principale se determină neunivoc: e important doar să se obțină un sistem triunghiular în raport cu necunoscutele principale.

De exemplu, în sistemul precedent pot fi numite necunoscute principale  $x_1$ ,  $x_3$ .

2. Sistemele triunghiulare și sistemele trapezice sunt compatibile: sistemul triunghiular are soluție unică, iar sistemul trapezic are o mulțime infinită de soluții.

Compatibilitatea sistemelor de ecuații liniare este determinată de

**Teorema 12.** Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$  și  $\bar{A} = (A \mid B)$ . Sistemul de ecuații liniare  $AX = B$  este compatibil dacă și numai dacă matricele eșalon  $A_1$ ,  $\bar{A}_1$  obținute din  $A$  și respectiv  $\bar{A}$  au același număr de linii nenule.

## Exerciții rezolvate

4. Să se determine compatibilitatea sistemului  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$

*Rezolvare:*

Formăm matricea extinsă  $\bar{A}$  a sistemului și o reducem la forma eșalon:

$$\sim -1 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & 8 \end{array} \right) \sim -1 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \end{array} \right) \sim \frac{1}{3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Matricele eșalon obținute din matricea sistemului, respectiv din matricea extinsă au câte 2 linii nenule. Prin urmare, sistemul inițial este compatibil.

5. Dacă în exemplul precedent termenul liber al ecuației a treia ar fi, de exemplu, 5,

atunci ultima matrice ar fi:  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$ .

Astfel, matricele eșalon obținute din matricea sistemului și din cea extinsă conțin 2 și respectiv 3 linii nenule, deci sistemul este incompatibil.

Ideea reducerii matricei extinse a sistemului la forma eșalon constituie baza **metodei lui Gauss** de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. De reținut că această metodă are avantajul de a fi ușor programabilă pe calculator. Ea constă în următoarele:

1. Scriem matricea extinsă  $\bar{A} = (A \mid B)$  a sistemului (1).
2. Prin transformări elementare ale liniilor, reducem această matrice la o matrice eșalon  $\bar{A}_1 = (A_1 \mid B_1)$ , unde  $A_1$  este matricea eșalon obținută din  $A$ .
3. Dacă numărul de linii nenule ale matricei  $A_1$  nu este egal cu numărul de linii nenule ale matricei  $\bar{A}_1$ , atunci sistemul este incompatibil.
4. Dacă numărul de linii nenule ale matricei  $A_1$  este  $r$  și este egal cu numărul de linii nenule ale matricei  $\bar{A}_1$ , atunci sistemul este compatibil.

Distingem două cazuri posibile.

- 4.1. Numărul  $r$  menționat în punctul 4 este egal cu numărul necunoscutelor. În atare caz, matricea eșalon  $A_1$  este superior triunghiulară, toate elementele de pe diagonala principală sunt nenule. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă  $\bar{A}_1$ ; evident, el este triunghiular și, prin urmare, are o soluție unică.

- 4.2. Numărul menționat  $r$  este mai mic decât numărul  $n$  al necunoscutelor. În acest caz, matricea eșalon  $A_1$  conține mai multe coloane decât linii nenule. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă  $\bar{A}_1$  (acest sistem este trapezic și este echivalent cu sistemul (1)). În continuare, specificăm necunoscutele principale (numărul lor este  $r$ ), apoi necunoscutele secundare, pe care le notăm  $x_p = \alpha, x_q = \beta, \dots$ , unde  $\alpha, \beta, \dots$  sunt parametri cu valori din  $\mathbb{C}$ . Lăsăm în membrul stâng al fiecărei ecuații toți termenii ce conțin necunoscutele principale,

iar ceilalți termeni îi trecem în membrul drept, schimbându-le semnul. Deoarece  $r < n$ , în membrii din dreapta se va contine cel puțin un parametru. După aceste transformări se obține un sistem triunghiular de  $r$  ecuații cu  $r$  necunoscute (cele principale). Pentru fiecare set de valori atribuite parametrilor, într-un mod unic se determină valorile necunoscutelor principale. Sirul obținut de valori pentru  $x_1, \dots, x_n$  va constitui ***o soluție particulară*** a sistemului. În acest mod se obține o infinitate de soluții, deoarece parametrilor le putem atribui o infinitate de valori.

***Observație.*** Pentru a descrie mulțimea infinită de soluții care se obțin în cazul 4.2, vom proceda astfel. Din sistemul redus  $A_1 X = B_1$  exprimăm necunoscutele principale  $x_k, x_l, \dots$  prin parametrii  $\alpha, \beta, \dots$ . Sistemul de relații obținut:

$$\begin{cases} x_k = f_k(\alpha, \beta, \dots) \\ \dots \\ x_l = f_l(\alpha, \beta, \dots) \\ \dots \\ x_p = \alpha \\ x_q = \beta \\ \dots \end{cases} \quad (7)$$

se numește ***soluție generală*** a sistemului (1) și descrie mulțimea tuturor soluțiilor acestui sistem, în sens că orice soluție a acestuia se obține din (7) pentru unele valori ale parametrilor.

### Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve în  $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$  sistemul de ecuații
- $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Dacă el este compatibil nedeterminat, să se afle și o soluție particulară.

*Rezolvare:*

În exercițiul rezolvat 1 (p. 218) s-a arătat că sistemul este compatibil nedeterminat. Pentru a determina soluția generală, scriem sistemul corespunzător matricei eșalon:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ -x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Necunoscute principale pot fi alese  $x_1$  și  $x_2$ , atunci necunoscută secundară va fi  $x_3$ . Notând necunoscuta secundară cu  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{C}$ , obținem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 + 2\alpha, \\ -x_2 = 2 - 3\alpha. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem în necunoscutele  $x_1, x_2$ , aflăm soluția generală:

$$x_1 = 6 - 4\alpha, \quad x_2 = -2 + 3\alpha, \quad x_3 = \alpha.$$

Dacă atribuim lui  $\alpha$ , de exemplu, valoarea 0, obținem o soluție particulară a sistemului:  $x_1 = 6, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0$ .

*Răspuns:*  $S = \{(6 - 4\alpha, -2 + 3\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbf{C}\}$ ;

soluție particulară:  $(6, -2, 0)$ .

2. Să se rezolve în  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  sistemul de ecuații  $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = \alpha \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$  analizând toate cazurile posibile (în funcție de valorile parametrului  $\alpha \in \mathbb{C}$ ).

*Rezolvare:*

Formăm matricea extinsă a sistemului și o reducem la o matrice eșalon:

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & \alpha \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & -1+\alpha & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 6-3\alpha & -3+\alpha-\alpha^2 \end{array} \right)$$

- 1) Dacă  $6-3\alpha \neq 0$ , adică  $\alpha \neq 2$ , atunci sistemul este triunghiular, deci este compatibil determinat, cu soluția unică:  $x_1 = \frac{3+\alpha}{6-3\alpha}$ ,  $x_2 = \frac{3+\alpha}{-6+3\alpha}$ ,  $x_3 = \frac{\alpha^2-\alpha+3}{-6+3\alpha}$ .
- 2) Dacă  $6-3\alpha = 0$ , adică  $\alpha = 2$ , atunci sistemul obținut este incompatibil, deoarece matricea eșalon  $A_1$  obținută din matricea sistemului are 2 linii nenele, iar cea obținută din matricea extinsă – 3 linii nenele.

3. Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  sistemul de ecuații  $\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 3+2i, \\ 2x_1 + x_2 + (-2+i)x_3 + 2ix_4 = 4+5i, \\ x_1 + 2ix_2 + (-1+i)x_3 + (2+i)x_4 = 3. \end{cases}$

*Rezolvare:*

Scriem matricea extinsă a sistemului și o reducem la forma eșalon:

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2i & -1 & 1+i & 3+2i \\ 2 & 1 & -2+i & 2i & 4+5i \\ 1 & 2i & -1+i & 2+i & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2i & -1 & 1+i & 3+2i \\ 0 & 1-4i & i & -2 & -2+i \\ 0 & 0 & i & 1 & -2i \end{array} \right)$$

Obținem sistemul trapezic respectiv:  $\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 3+2i, \\ (1-4i)x_2 + ix_3 - 2x_4 = -2+i, \\ ix_3 + x_4 = -2i. \end{cases}$

Declarăm necunoscute principale  $x_1, x_2, x_4$ , iar  $x_3$  – necunoscută secundară și rezolvăm sistemul  $\begin{cases} x_1 + 2ix_2 + (1+i)x_4 = 3+2i + x_3 \\ (1-4i)x_2 - 2x_4 = -2+i - ix_3 \\ x_4 = -2i - ix_3 \end{cases}$  în necunoscutele  $x_1, x_2, x_4$ .

Notând  $x_3 = \alpha$ , obținem soluția generală  $x_1 = \frac{1}{17}(-5+48i-(6+7i)\alpha)$ ,

$x_2 = \frac{1}{17}(10-11i+(12-3i)\alpha)$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $x_4 = -2i - i\alpha$ .

*Răspuns:*  $S = \left\{ \left( \frac{1}{17}(-5+48i-(6+7i)\alpha), \frac{1}{17}(10-11i+(12-3i)\alpha), \alpha, -2i - i\alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$ .

**Observație.** Soluția generală nu este univoc determinată, deoarece ea depinde de sirul de transformări elementare aplicate pentru a obține un sistem trapezic din cel dat, de necunoscutele principale selectate. Însă în toate soluțiile generale, în expresiile din membrii din dreapta, figurează același număr de necunoscute secundare ( $n-r$ ),  $n$  fiind numărul necunoscutorilor și  $r$  – numărul de linii nenele ale matricei eșalon.

De exemplu, dacă în exercițiul 1 numim  $x_1, x_3$  necunoscute principale, atunci, notând  $x_2 = \alpha$ , avem sistemul  $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 2 - 2\alpha \\ 3x_3 = 2 + \alpha \end{cases}$  de unde obținem soluția generală  $x_1 = \frac{1}{3}(10 - 4\alpha)$ ,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}(2 + \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

### 3.4. Sisteme de ecuații liniare omogene

Sistemul de ecuații liniare (1) se numește **omogen** dacă termenii liberi ai tuturor ecuațiilor sunt 0. Forma generală a unui sistem de  $m$  ecuații liniare omogene cu  $n$  necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (8)$$

**Observație.** Matricea extinsă a sistemului omogen se deosebește de matricea sistemului printr-o coloană nulă (ultima), de aceea numărul de linii nenule ale matricelor eșalon obținute din ele este același.

Aplicând rezultatele obținute anterior, obținem fără dificultate următoarele *propoziții*:

1. Orice sistem omogen de ecuații liniare este compatibil, având cel puțin soluția nulă:  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ .

2. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eșalon obținute din matricea sistemului (8) este egal cu numărul  $n$  al necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil determinat, cu soluția unică nulă:  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ .

3. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eșalon obținute din matricea sistemului (8) este mai mic decât numărul necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil nedeterminat. În particular, aceasta are loc în cazul în care numărul ecuațiilor sistemului inițial este mai mic decât numărul necunoscutelor sau dacă  $m = n$  și determinantul matricei sistemului este egal cu 0.

#### Exercițiu rezolvat

↳ Să se rezolve în  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  sistemul de ecuații  $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

*Rezolvare:*

Reducem matricea sistemului la forma eșalon:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \frac{4}{3}R_1 \end{matrix}} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 18 & 0 \\ 0 & -5 & -30 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2 \end{matrix}} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Sistemul respectiv are forma  $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

E comod să numim principale necunoscutele  $x_1$  și  $x_2$ . Notăm necunoscuta secundară  $x_3 = \alpha$  și rezolvăm sistemul  $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -6\alpha \\ x_2 = -6\alpha \end{cases}$  în necunoscutele  $x_1, x_2$ . Obținem soluția generală:  $x_1 = 8\alpha$ ,  $x_2 = -6\alpha$ ,  $x_3 = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

*Răspuns:*  $S = \{(8\alpha, -6\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$ .

## Exerciții propuse

### Profilurile umanist, arte, sport

**A** 1. Să se determine care dintre tripletele de numere sunt soluții ale sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x + 2y + z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

(necunoscutele se ordonează  $(x, y, z)$ ):

- a)  $(0, 0, 0)$ ;      b)  $(1, 1, 1)$ ;      c)  $(0, -1, 1)$ ;      d)  $(3, 1, 0)$ .

2. Să se rezolve în C, aplicând metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ x + 2y = -1; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} -x + 3y = 5, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x + 3y = 1; \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 4x + 4y - 2z = 2, \\ 2x + 4y - z = 1, \\ 2x - z = 1; \end{cases}$

f)  $\begin{cases} 2y + 6z = 12, \\ x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$

g)  $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 4z = -7, \\ x + 2y - 2z = 7; \end{cases}$

h)  $\begin{cases} 3y + 5z = -4, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases}$

**B** 3.  **Lucrați în perechi!** Petru a achitat pentru o tartină și o ceașcă de cafea 8,5 u.m., iar colegul său a plătit pentru o cafea și 2 tartine 13 u.m. Să se determine prețul unei tartine și al unei cești de cafea, compunând un sistem de ecuații liniare.

4. Aplicând operațiile de adunare, scădere membru cu membru a ecuațiilor sistemului, arătați că sistemul a) este compatibil nedeterminat, iar b) – incompatibil.

a)  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1. \end{cases}$

**C** 5.  **Investigați!** Trei antreprenori,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , procură acțiuni de la trei fonduri diferite.

Numărul de acțiuni procurate de la fiecare fond și suma achitată (u.m.) sunt date în tabel:

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	Suma
$A_1$	3	3	2	52,9
$A_2$	1	2	1	24,6
$A_3$	1	1	2	24,3

a) Să se compună un sistem de ecuații liniare cu ajutorul căruia se pot afla prețurile acțiunilor de la fiecare fond.

b) Ce se poate spune despre prețurile acțiunilor, dacă al treilea antreprenor cumpără de la  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  trei, trei și respectiv două acțiuni, achitând 77,2 u.m.?

6. Sistemul de ecuații din 2 e) are o unică soluție. Schimbând doar o ecuație, să se obțină un sistem: a) incompatibil; b) compatibil nedeterminat.

### Profilul real

**A<sub>1</sub>** 1. Să se determine care dintre tripletele de numere sunt soluții ale sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

(necunoscutele se ordonează  $(x, y, z)$ ):

- a)  $(0, 0, 0)$ ;      b)  $(1, 1, 1)$ ;      c)  $(0, -1, 1)$ ;      d)  $(3, 1, 0)$ .

2. Să se rezolve în C, aplicând metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) 
$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2y = -1; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -2x + y = 0, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + 3y = 1; \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} -x + 8y + 3z = 2, \\ 2x + 4y - z = 1, \\ 2x - z = 1; \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} x + 4y + 9z = 16, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} x + 4z = -7, \\ -2x + y + 3z = -7, \\ x + 2y - 2z = 7; \end{cases}$$

h) 
$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -2, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases}$$

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, prin metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) 
$$\begin{cases} 2x_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + ix_2 + 2x_3 = i, \\ x_2 + (2-i)x_3 = 0; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

4.  **Lucrați în perechi!** Să se rezolve în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul omogen (efectuând studiul în funcție de  $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

a) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

**B<sub>1</sub>** 5. a) Nelu a achitat pentru 3 tartine și 2 cești de cafea 21,5 u.m., iar colegul său a plătit pentru o cafea și 2 tartine 13 u.m. Să se determine prețul unei tartine și al unei cești de cafea, compunând un sistem de ecuații liniare.

b) Altă dată Nelu a achitat pentru 2 chifle, un ceai și 2 prăjituri 20 u.m., iar colegul său a plătit pentru o chiflă, un ceai și 3 prăjituri 22 u.m. Să se compună un sistem de ecuații corespunzător acestei situații. Se pot determina prețurile produselor cumpărate? De ce?

6. Să se stabilească dacă este compatibil sistemul:

a) 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6; \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = \lambda, \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemele compatibile din exercițiul 6.

8. Să se determine toate matricele  $X$  pentru care  $AX = XA$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**C<sub>1</sub>** 9.  **Investigați!** Trei antreprenori,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , procură acțiuni de la trei fonduri diferite. Numărul de acțiuni procurate de la fiecare fond și suma achitată (u.m.) sunt date în tabel:

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	Suma
$A_1$	2	1	1	28,3
$A_2$	1	2	1	24,6
$A_3$	1	1	2	24,3

- a) Să se compună un sistem de ecuații liniare cu ajutorul căruia se pot afla prețurile acțiunilor de la fiecare fond.
- b) Ce se poate spune despre prețurile acțiunilor, dacă al treilea antreprenor cumpără de la  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  trei, trei și respectiv două acțiuni, achitând 77,2 u.m.?
10. Sistemul de ecuații din 1 are o unică soluție. Schimbând doar o ecuație, să se obțină un sistem: a) incompatibil; b) compatibil nedeterminat.
11. Să se determine toate matricele  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
12.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale elementelor de algebră superioară în diverse domenii*.

### Exerciții și probleme recapitulative

#### *Profilurile umanist, arte, sport*

A 1. Să se calculeze:

a)  $A - iB$ ;      b)  $iA + B$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2 & 3i \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & i+1 \end{pmatrix}$

2. 1) Să se determine care produs există și să se determine tipul matricei-produs respective:

a)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 3)$ ;    c)  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ -3i & 1 \end{pmatrix} (1 \ -2i)$ ;  
 d)  $(2 \ -4 \ 5) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ ;    e)  $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} (3 \ 5 \ 5)$ ;    f)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (3 \ 1)$ .

2) Să se afle produsele din 2.1).

3.  **Investigați!** Să se determine valorile  $x, y \in \mathbb{R}$  pentru care este adeverată egalitatea:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2x-3y \\ -7x+6y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-x-11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\begin{pmatrix} y+3x & -1 \\ 3 & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. Să se calculeze determinantul matricei  $A$ :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -2i \end{pmatrix}$	b) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$	c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	e) $A = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b-a & c-b & a-c \\ b & c & a \end{pmatrix}$	f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2i & 3i & -2i \end{pmatrix}$
g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	

5. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicând metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 5; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 - i, \\ 2x_1 - ix_2 = i; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2x_2 + 5x_2 - 6x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$

f)  $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12; \end{cases}$

g)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 17, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

h)  $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$

- B 6. Să se calculeze  $A^2 - 5A + 7I_2$ , dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7.  **Lucrați în perechi!** Să se determine tipul matricei  $X$  care satisface egalitatea

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Un elev are o colecție de gândaci și păianjeni, în total 8 insecte. Gândacii au câte 6 picioare, iar păianjenii – câte 8. Câți gândaci și câți păianjeni sunt în colecție, dacă insectele au în total 54 de picioare?

- C 9. Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul  $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 4 - \alpha \\ \alpha x_1 + 4x_2 = 4, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \end{cases}$  are o unică soluție.

10. În două vase se află soluție de același acid, dar de diferită concentrație: în primul vas sunt 15 l, iar în al doilea – 10 l de soluție. Dacă se amestecă aceste cantități de soluție, se obține o soluție cu o concentrație de 42% de acid. Dacă se vor lua aceste soluții în cantități egale, se va obține o soluție cu o concentrație de 50% de acid. Ce cantitate de acid este în fiecare vas?

11. Trei persoane au plasat capitalul disponibil cu dobânzile anuale de 2%, 2,5% și respectiv 3%. Peste un an, ei au obținut în total 265 u.m. dobândă. Persoana a doua a primit o dobândă cu 35 u.m. mai mare decât prima. Dacă tot capitalul ar fi fost plasat cu dobândă de 2,5% anual, atunci dobândă ar fi constituit 250 u.m. Să se determine suma plasată de fiecare persoană.

### Profilul real

- A 1. Să se calculeze:

a)  $3A - 2iB$ ; b)  $iA + 2B$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2 & 3i \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & i+1 \end{pmatrix}$

2. 1) Să se determine care produs există și să se determine tipul matricei-produs respective:

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3)$ ; c)  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

d)  $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ .

- 2) Să se afle produsele din 2.1).

3. Să se determine valorile parametrilor  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$  pentru care sunt adevărate egalitățile:

$$a) \begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Să se calculeze determinantul matricei  $A$ :

$$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3i & -2i \end{pmatrix}; \quad b) A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad c) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad d) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$e) A = \begin{pmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+a & a-c & a \end{pmatrix}; \quad f) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2i \\ 2 & 1 & 3i \\ 4 & 5 & -2i \end{pmatrix}; \quad g) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad h) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. 1) Să se determine compatibilitatea sistemului:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 5; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 = 1, \\ 2x_1 - ix_2 = i; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 4x_1 + 8x_2 - 11x_3 = 17, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases} \quad f) \begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12; \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_3 = 10; \end{cases} \quad h) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$$

2) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemele de ecuații din 5.1).

6. Să se calculeze determinantul matricei  $A$ :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}; \quad b) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad c) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Să se calculeze inversele matricelor  $A$  din exercițiul 4 (dacă există).

8. Să se calculeze inversele matricelor  $A$  din exercițiul 6 (dacă există).

9. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicând metoda lui Cramer sau metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

$$a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1; \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

10. În două vase se află soluție de același acid, dar de diferită concentrație: în primul vas sunt  $75\text{ l}$ , iar în al doilea  $- 50\text{ l}$ . Dacă se amestecă aceste cantități, se obține o soluție cu o concentrație de  $42\%$  de acid. Dacă se vor lua aceste soluții în cantități egale, se va obține o soluție cu o concentrație de  $50\%$  de acid. Ce cantitate de acid este în fiecare vas?

B<sub>1</sub> 11. Să se calculeze  $A^2 - 5A + 7I_2$ , dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

12. Să se determine tipul matricei  $X$  care satisface egalitatea  $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

13. Să se determine valorile parametrului  $\alpha \in \mathbb{C}$  pentru care sistemul are doar soluția nulă:

a)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

14. Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  ecuația: a) (BAC, 2012)

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 3;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

15.  **Investigați!** Să se determine compatibilitatea (în funcție de  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) și să se rezolve sistemul omogen:

a)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \lambda x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

16. Distanța dintre două orașe este de  $90\text{ km}$ . Doi bicicliști pornesc din aceste orașe unul spre celălalt. Dacă primul se pornește cu  $2$  ore mai devreme decât al doilea, atunci ei se vor întâlni peste  $2,5$  ore după ce a plecat al doilea biciclist. Dacă al doilea biciclist se va porni cu  $2$  ore mai devreme decât primul, atunci ei se vor întâlni peste  $3$  ore după ce a plecat primul. Care este viteza fiecărui biciclist?

- C<sub>1</sub> 17. Fie o matrice pătratică  $A$  de ordinul  $3$  cu elementele  $a_{ij} \in \{0, 1\}$ . Să se determine valoarea cea mai mare a  $\det A$ .

18. Să se determine  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

19. Fie o matrice pătratică  $A$ , de ordinul  $3$ , ale cărei elemente  $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ .

a) Să se arate că  $\det A$  este un număr par.

b) Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua  $\det A$ .

20. Se poate arăta că volumul paralelipipedului  $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$ , unde  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_4(x_3, y_3, z_3)$ ,  $A'_1(x_4, y_4, z_4)$ , se calculează conform formulei:

$$V = \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_4}$ ,  $\overrightarrow{A_1A'_1}$ , dacă  $A_1(1, 1, 1)$ ,  $A_2(1, 2, 2)$ ,  $A_4(0, 4, 2)$ ,  $A'_1(5, 6, 8)$ .

21.  **Lucrăți în perechi!** Să se determine o matrice  $X$ ,  $X \neq I_3$ , care comută cu matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Să se discute compatibilitatea sistemului  $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 4 - \alpha \\ \alpha x_1 + 4x_2 = 4, \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$ , în funcție de valorile parametrului  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
23. Trei persoane au plasat capitalul disponibil cu dobânzile anuale de 4 %, 5 % și respectiv 6 %. Peste un an, au obținut în total 530 u.m. dobândă. Persoana a doua a primit o dobândă cu 70 u.m. mai mare decât prima. Dacă tot capitalul ar fi fost plasat cu dobânda de 5 % anual, atunci dobânda ar fi constituit 500 u.m. Să se determine suma plasată de fiecare persoană.
24. Să se determine matricea  $X$  care verifică egalitatea  $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .
25. (BAC, 2018) Să se afle valorile parametrului  $\alpha \in \mathbb{R}$  pentru care matricea  $\begin{pmatrix} \alpha^2 - x & \alpha^2 + |x| \\ 1 & \alpha^2 + x \end{pmatrix}$  este inversabilă  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

### Test sumativ

#### *Profilurile umanist, arte, sport*

*Timp efectiv de lucru:*  
 45 de minute

1. 1) Determinați expresia a cărei valoare poate fi calculată: (2)  
 a)  $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;    c)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2$ . (4)  
 2) Calculați valorile expresiilor din 1. 1).
2. a) Argumentați că este posibil de aplicat regula lui Cramer pentru rezolvarea sistemului: (4)  

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$
 (8)
- b) Rezolvați sistemul aplicând regula lui Cramer. (8)
3. Fie  $\mathcal{M}$  matricea sistemului din 2 a). Calculați  $\mathcal{M}^3$ . (10)
4. Trei fermieri,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , utilizează serviciul „Deservire la domiciliu” oferit de 4 magazine,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ . Prețurile (u.m.) pentru transportarea produselor de la magazin la fiecare fermier sunt indicate în următoarea matrice:  $T = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$  (8)
- Începând cu luna viitoare, magazinele au decis să micșoreze prețurile pentru transport cu 5 %. Folosind operația de înmulțire a matricei cu un scalar, aflați prețurile noi.

### Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

**Profilul real**

*Timp efectiv de lucru:  
45 de minute*

1. 1) Determinați expresia a cărei valoare poate fi calculată:

a)  $i \cdot \begin{pmatrix} 3i & 2-i & 7+2i \\ 3-i & 0 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & i-1 & 7-i \\ i-1 & 2 & 3+i \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1+i \\ 3i & 2+i \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \sqrt{3} \\ i & \pi \end{pmatrix}^3$ .

- 2) Calculați valorile expresiilor din 1. 1).

2. Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ .

- a) Indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

$|A|$  este egal cu **A** 1. **B** 0. **C** -4. **D** 6.

- b) Calculați  $A^{-1}$ , dacă există.

c) Rezolvați ecuația  $XA = B$ , dacă  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

3. a) Determinați compatibilitatea sistemului  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

- b) În cazul în care sistemul este compatibil, determinați soluția generală și o soluție particulară.

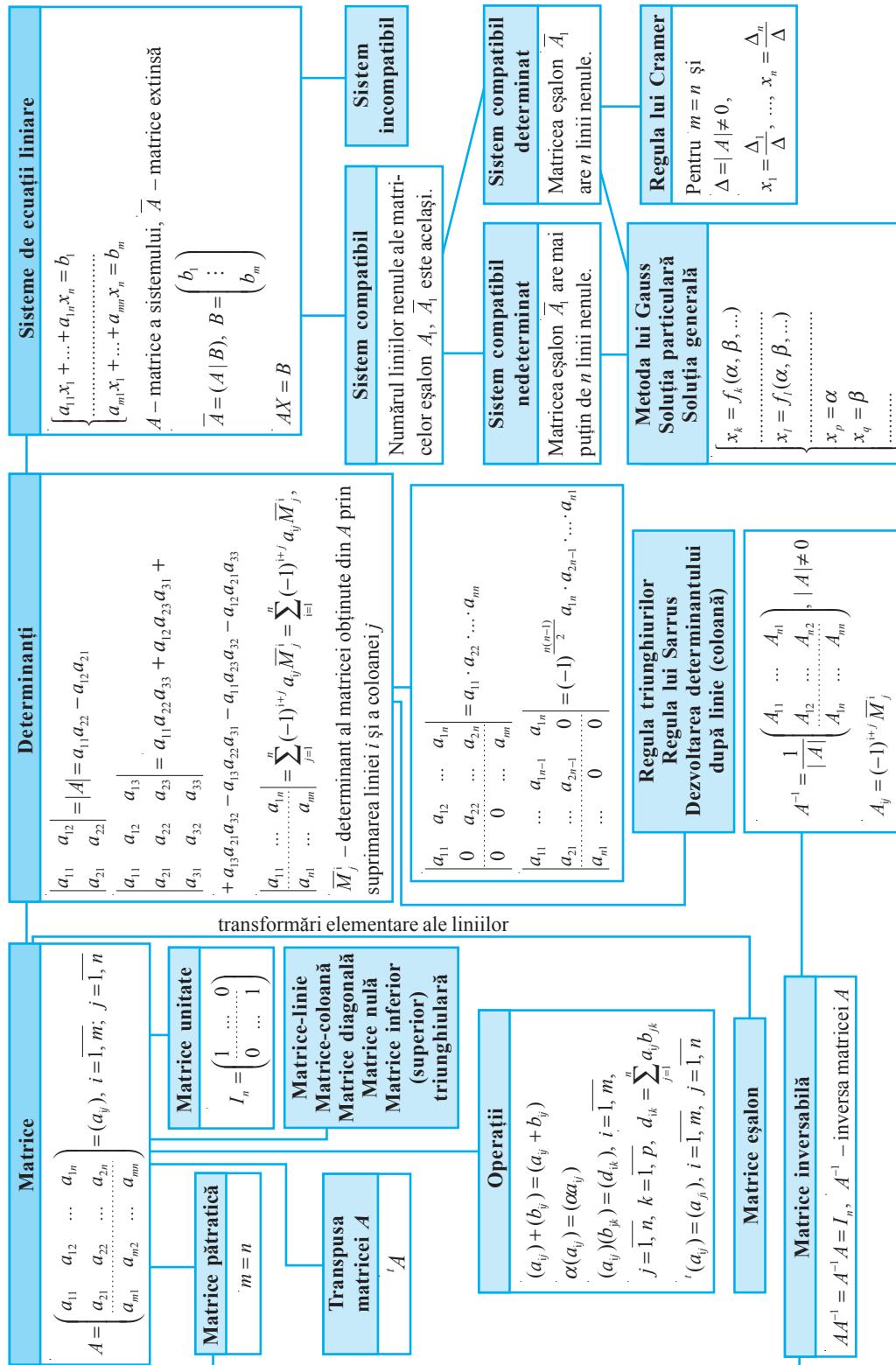
4. Proprietarul unui iaz pune în vânzare pește proaspăt în containere de 3 tipuri:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Managerii  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  de la 3 restaurante au procurat diferite cantități de pește și au achitat sumele (u.m.) indicate în tabel:

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Suma
$M_1$	1	2	1	2 700
$M_2$	2	1	1	3 350
$M_3$	1	2	2	3 100

Aflați prețul fiecărui container compunând și rezolvând un sistem de ecuații.

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0



**Obiective**

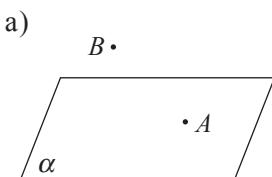
- ⇒ identificarea în diverse contexte și utilizarea axiomelor, definițiilor și teoremelor specifice geometriei în spațiu în diverse contexte;
- ⇒ identificarea în situații reale și/sau modelate și construirea dreptelor concurente, necoplanare, paralele;
- ⇒ identificarea în diverse contexte a pozițiilor relative a două drepte în spațiu, ale dreptei și planului, ale planelor;
- ⇒ construirea dreptelor ce intersectează planul, a planelor ce se intersectează și a planelor paralele;
- ⇒ aplicarea criteriilor de paralelism al dreptelor, al dreptei cu planul și a două plane în diferite contexte;
- ⇒ utilizarea paralelismului dreptelor și planelor pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

**§1 Axiomele geometriei în spațiu**

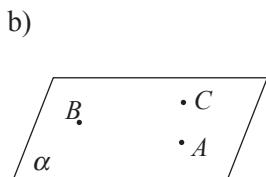
În geometria în spațiu, ca și în geometria în plan, noțiunile și proprietățile figurilor se stabilesc prin definiții, axiome și teoreme. În spațiu, pe lângă noțiunile fundamentale deja cunoscute: *punct*, *dreaptă*, *distanță* și *măsură a unghiurilor*, apare și noțiunea *plan*. Prin urmare, sistemul de axiome ale geometriei în plan necesită o extindere.

Vom completa grupul de axiome ale geometriei în plan cu trei axiome care exprimă proprietățile fundamentale ale punctelor, dreptelor și planelor în spațiu:

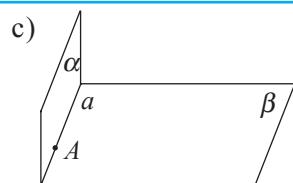
- S<sub>1</sub>** Oricare ar fi planul, există puncte care aparțin acestui plan și puncte care nu-i aparțin (fig. 8.1 a)).
- S<sub>2</sub>** Trei puncte necoliniare determină un plan și numai unul (fig. 8.1 b)).
- S<sub>3</sub>** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă (fig. 8.1 c)).



$A \in \alpha, B \notin \alpha$



$A, B, C \in \alpha$



$(A \in \alpha, A \in \beta, \alpha \neq \beta) \Rightarrow \alpha \cap \beta = a$

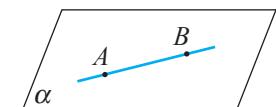
Fig. 8.1

În baza acestor axiome pot fi demonstreate următoarele teoreme:

**Teorema 1.** Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci orice punct al dreptei aparține acestui plan (fig. 8.2 a)).

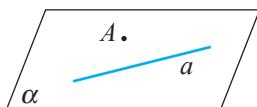
**Teorema 2.** O dreaptă și un punct ce nu aparține acestei drepte determină un unic plan (fig. 8.2 b)).

**Teorema 3.** Două drepte concurente determină un unic plan (fig. 8.2 c)).



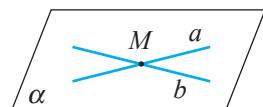
$$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$$

a)



$$A \notin \alpha \Rightarrow \text{punctul } A \text{ și dreapta } \alpha \text{ determină planul } \alpha$$

b)



$$a \cap b = \{M\} \Rightarrow \text{dreptele } a \text{ și } b \text{ determină planul } \alpha$$

c)

Fig. 8.2

Planul se notează cu literele mici ale alfabetului grecesc:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Planul determinat de o dreaptă  $d$  și un punct  $A$  se notează  $(A, d)$  sau  $(d, A)$ . Planul determinat de punctele necoliniare  $A, B, C$  se notează  $(ABC)$ .

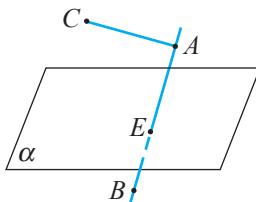
Punctele care aparțin unui plan se numesc **puncte coplanare**, în caz contrar – **necoplanare**.

**Teorema 4 (de separare a spațiului).** Orice plan  $\alpha$  împarte mulțimea punctelor spațiului în două submulțimi nevide disjuncte de puncte, astfel încât pentru orice două puncte  $A, B$  din submulțimi diferențiale, segmentul  $AB$  intersectează planul  $\alpha$ , iar pentru orice două puncte  $C, A$  din aceeași submulțime, segmentul  $CA$  nu intersectează planul  $\alpha$  (fig. 8.3).

**Definiții.** • Fiecare dintre submulțimile din teorema 4 se numesc **semispații deschise** determine de planul  $\alpha$ , numit **frontiera semispațiului**.

• Reuniunea semispațiului deschis cu frontieră să se numește **semispațiu închis**.

Se notează:  $(\alpha A$  – semispațiu deschis cu frontieră  $\alpha$  și care conține punctul  $A$ ;  $[\alpha A$  – semispațiu închis cu frontieră  $\alpha$  și care conține punctul  $A$  (fig. 8.3).



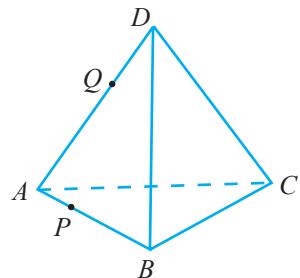
$$C \in [\alpha A, [CA] \cap \alpha = \emptyset, B \notin [\alpha A, [AB] \cap \alpha = \{E\}]$$

Fig. 8.3

## Probleme propuse

### *Profilurile umanist, arte, sport*

- A** 1. Este posibil ca numai trei vârfuri ale unui paralelogram să aparțină unui plan?
2. Centrul unui cerc și două puncte de pe cerc aparțin unui plan.  
Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:  
„Orice punct al cercului aparține acestui plan”. **A / F**
3.  **Investigați!** Poate oare o dreaptă să aibă cu un plan exact:
- două puncte comune;
  - 2020 de puncte comune;
  - un punct comun?
- B** 4. Fie  $DABC$  un tetraedru,  $P \in (AB)$ ,  $Q \in (AD)$ . Să se construiască după figura alăturată liniile de intersecție a planelor:
- $ABD$  și  $CPQ$ ;
  - $CPQ$  și  $ABC$ ;
  - $CPQ$  și  $ADC$ .
5. Se dă trei drepte care au un punct comun și nu sunt situate în același plan. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.
6.  **Lucrați în perechi!** Fie patru puncte necoplanare. Să se afle:
- numărul de drepte determinate de aceste puncte;
  - numărul de plane determinate de aceste puncte.
7. Câte puncte comune poate avea un plan cu:
- un segment;
  - o semidreaptă;
  - un cerc?
8. Trei puncte arbitrar ale unui dreptunghi aparțin unui plan. Aparține oare dreptunghiul acestui plan?
- C** 9. Lungimea fiecărei muchii a tetraedrului  $ABCD$  este  $a$ . Să se afle aria triunghiului  $APQ$ , dacă  $P$  este mijlocul muchiei  $BD$ , iar  $Q$  – mijlocul muchiei  $DC$ .
10.  **Investigați!** Se dă patru drepte care au un punct comun, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coplanare. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.
11.  **Investigați!** Fie cinci puncte, astfel încât oricare patru nu sunt coplanare. Să se determine:
  - numărul de drepte determinate de aceste puncte;
  - numărul de plane determinate de aceste puncte.



### *Profilul real*

- A<sub>1</sub>** 1. Dreptele  $a$  și  $b$  nu se intersectează și sunt situate în același plan. Să se arate că dacă dreapta  $a$  intersectează un plan  $\alpha$ , atunci și dreapta  $b$  intersectează acest plan.
2. Dreptele  $d_1$ ,  $d_2$  și  $d_3$  sunt concurente două în puncte diferite. Să se demonstreze că aceste drepte sunt situate în același plan.
3. Punctul  $A$  nu aparține planului determinat de punctele necoliniare  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Să se demonstreze că dreptele  $AD$  și  $CB$  nu sunt conținute de același plan.

- B<sub>1</sub>** 4. Fie patru puncte ce nu aparțin unuia și aceluiași plan. Să se demonstreze că oricare trei puncte din cele date nu sunt coliniare.
5.  **Lucrați în perechi!** Fie  $\alpha$  și  $\beta$  plane distințe. Să se arate că există cel puțin o dreaptă neinclusă în nici unul dintre cele două plane.
6. Dreptele  $AB$  și  $CD$  nu sunt situate în același plan. Să se arate că și dreptele  $AC$  și  $BD$  nu sunt situate în același plan.
- C<sub>1</sub>** 7. Dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt neconcurrente. Să se arate că există un unic plan ce conține dreapta  $AB$  și care este paralel cu dreapta  $CD$ .
8. Punctele  $A, B, C, D$  aparțin și planului  $\alpha$ , și planului  $\beta$ . Să se demonstreze că aceste puncte sunt coliniare, dacă se știe că planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt distințe.
9.  **Lucrați în perechi!** Fie  $\alpha$  și  $\beta$  plane care se intersectează după dreapta  $a$ , iar punctele  $A, B$  aparțin planului  $\alpha$  și sunt separate de dreapta  $a$ . Să se arate că planul  $\beta$  separă punctele  $A$  și  $B$ .

**§2****Pozitiiile relative a două drepte în spațiu**

Fie dreptele  $a$  și  $b$  în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două drepte în spațiu:

- a) dreptele  $a$  și  $b$  au două puncte comune diferite (în acest caz, dreptele coincid, fiindcă două puncte diferite determină o dreaptă și numai una);
- b) dreptele  $a$  și  $b$  au un unic punct comun (în cazul dat, dreptele se numesc **concurrente** în acest punct) (fig. 8.4);
- c) dreptele  $a$  și  $b$  sunt situate în același plan și nu au puncte comune (fig. 8.5);
- d) dreptele  $a$  și  $b$  nu se află în același plan. Astfel de drepte se numesc **necoplanare** (fig. 8.6).

În cazurile a), b), c) dreptele  $a, b$  se numesc **coplanare** (fig. 8.4, 8.5).

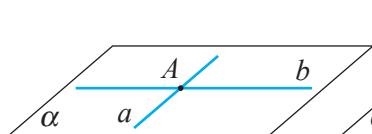


Fig. 8.4

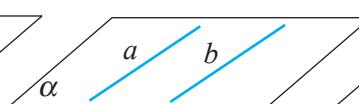


Fig. 8.5

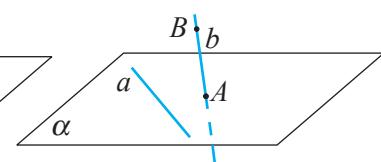


Fig. 8.6

Existența dreptelor necoplanare se demonstrează astfel:

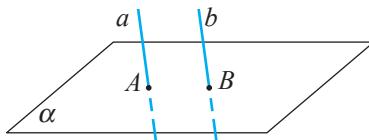
În spațiu există un plan  $\alpha$  și un punct  $B$  ce nu aparține acestui plan. În planul  $\alpha$  există o dreaptă  $a$  și un punct  $A$  ce nu aparține acestei drepte (fig. 8.6). Punctele distincte  $A$  și  $B$  determină dreapta  $b$ , care este necoplanară cu dreapta  $a$ .

**Definiție.** Două drepte în spațiu se numesc **paralele** dacă ele sunt situate în același plan și nu au puncte comune sau dacă coincid (fig. 8.5).

**Observație.** Dacă două drepte distincte în spațiu nu au puncte comune, aceasta încă nu înseamnă că ele sunt paralele (fig. 8.6). Pentru a confirma că două drepte distincte sunt paralele în spațiu, trebuie să verificăm dacă ele sunt situate într-un plan și nu au puncte comune.

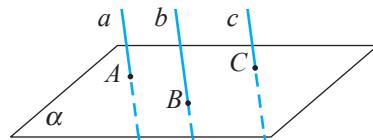
**Teorema 5.** Dacă una dintre două drepte distincte paralele intersectează un plan, atunci și cealaltă dreaptă intersectează acest plan (fig. 8.7).

**Teorema 6.** Dacă două drepte sunt paralele cu o a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele (fig. 8.8).



$$(a \parallel b, a \cap \alpha = \{A\}) \Rightarrow b \cap \alpha \neq \emptyset$$

Fig. 8.7



$$(a \parallel b, a \parallel c) \Rightarrow b \parallel c$$

Fig. 8.8

**Exercițiu.** Demonstrați teoremele 5 și 6.

### Probleme rezolvate

1. Fie punctele necoplanare  $A, B, C, D$ . Să se demonstreze că mijloacele segmentelor  $AD, DC, CB$  și  $BA$  sunt vârfurile unui paralelogram.

*Rezolvare:*

Fie  $M, N, P$  și  $Q$  mijloacele segmentelor  $AD, DC, CB$  și respectiv  $BA$  (fig. 8.9). Atunci  $[MQ]$  este linie mijlocie a triunghiului  $ABD$ , de unde rezultă că  $[MQ] \parallel [DB]$ , iar  $[NP]$  este linie mijlocie a triunghiului  $BDC$ , deci  $[NP] \parallel [DB]$ . Conform teoremei 6,  $[MQ] \parallel [NP]$ . În mod analog se demonstrează că  $[MN] \parallel [QP]$ . Prin urmare, laturile opuse ale patrulaterului  $MNPQ$  sunt paralele, ceea ce demonstrează că el este un paralelogram.

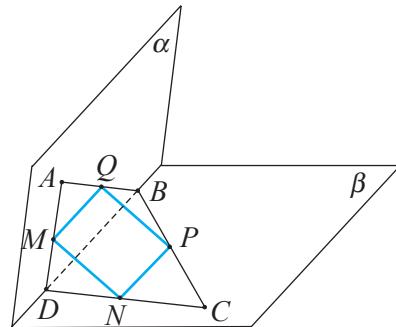


Fig. 8.9

2. Fie punctele necoplanare  $A, B, C, D$ . Punctul  $E \in (AB)$ , iar punctul  $F \in (DC)$  (fig. 8.10). Să se arate că:

- a) punctele  $E$  și  $F$  sunt distincte;
- b) dreptele  $EF$  și  $AD$ ,  $EF$  și  $BC$ ,  $EF$  și  $AC$ ,  $EF$  și  $BD$  sunt necoplanare.

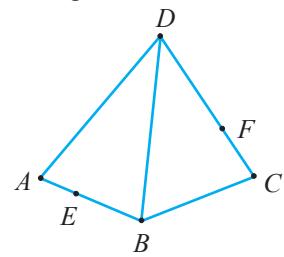


Fig. 8.10

*Rezolvare:*

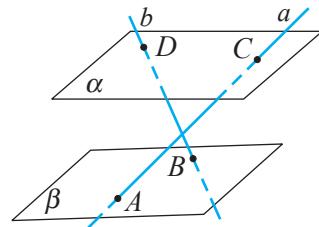
- Dacă am presupune că  $E$  și  $F$  ar coincide, ar rezulta că dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt concurente în punctul  $E$ . Aceasta ar însemna că punctele  $A, B, C, D$  sunt coplanare, ceea ce contrazice condiția problemei.
- Fie dreptele  $EF$  și  $AD$  coplanare. Atunci punctele  $A, E, F, D$  sunt coplanare și cum  $B \in (AE)$ ,  $C \in (DF)$ , rezultă că punctele  $A, B, C$  și  $D$  aparțin aceluiași plan, dar aceasta contrazice condiția problemei.

Raționamente asemănătoare se aplică la demonstrarea necoplanarității celorlalte perechi de drepte.

### Probleme propuse

#### *Profilurile umanist, arte, sport*

- A** 1. Dreapta  $d$  intersectează dreptele distincte  $d_1$  și  $d_2$ . Rezultă de aici că dreptele  $d$ ,  $d_1$  și  $d_2$  aparțin aceluiași plan?
2. Dreapta  $a$  intersectează planul  $\alpha$ . Dreapta  $b$  este paralelă cu dreapta  $a$ . Va intersecta dreapta  $b$  planul  $\alpha$ ?
- B** 3. **Investigați!** Dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele, iar dreapta  $c$  intersectează dreapta  $b$ . Să se determine în ce relație sunt dreptele  $a$  și  $c$ .
- C** 4. Prin vârfurile unui paralelogram sunt construite patru drepte paralele care nu sunt situate în planul paralelogramului. Să se arate că punctele de intersecție a oricărui plan cu aceste patru drepte sunt vârfurile unui paralelogram.
5. **Lucrați în perechi!** În figură, planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt paralele ( $AB \parallel DC$ ). Să se determine poziția relativă a dreptelor  $a$  și  $b$ .



#### *Profilul real*

- A<sub>1</sub>** 1. Fie două drepte paralele și una dintre ele paralelă cu un plan. Să se demonstreze că și cealaltă dreaptă este paralelă cu acest plan.
2. Fie o dreaptă paralelă cu două plane care se intersectează. Să se demonstreze că această dreaptă este paralelă cu dreapta de intersecție a acestor plane.
- B<sub>1</sub>** 3. **Investigați!** Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt necoplanare, iar dreapta  $d$  este paralelă cu dreapta  $d_1$ . În ce relație sunt dreptele  $d$  și  $d_2$ ?
4. **Investigați!** Intersecția planelor  $\alpha$  și  $\beta$  este dreapta  $d$ . Punctul  $A \in \alpha$  și  $A \notin d$ , punctul  $B \in \beta$  și  $B \notin d$ . În ce relație sunt dreptele  $d$  și  $AB$ ?
- C<sub>1</sub>** 5. **Investigați!** Dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele, iar dreptele  $c$  și  $b$  sunt necoplanare. În ce relație pot fi dreptele  $c$  și  $a$ ?
6. Punctul  $A$  nu aparține dreptei  $d$ . Prin punctul  $A$  se construiesc toate dreptele necoplanare cu dreapta  $d$ . Să se determine reuniunea dreptelor construite.

### §3 Drepte și plane

Fie o dreaptă și un plan în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative ale unei drepte și unui plan în spațiu:

- dreapta are un unic punct comun cu planul (vom spune că planul și dreapta **se intersectează** sau dreapta este **secantă** cu planul) (fig. 8.11 a));
- dreapta nu are niciun punct comun cu planul (fig. 8.11 b));
- dreapta este inclusă în plan (fig. 8.11 c)).

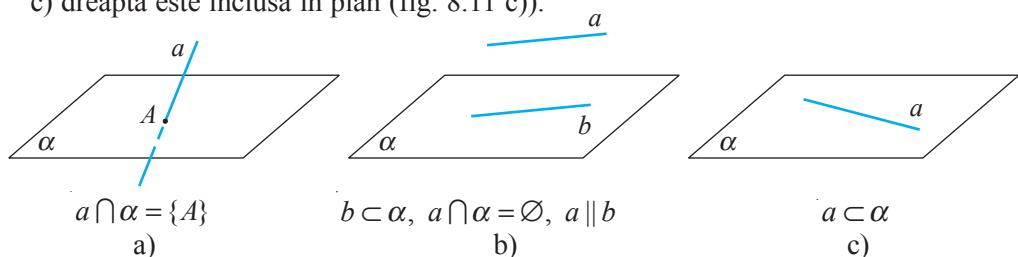


Fig. 8.11

**Definiție.** O dreaptă se numește **paralelă** cu un plan dacă ea nu are puncte comune cu acest plan sau dacă este inclusă în acest plan.

În figurile 8.11 b), c), dreapta  $a$  este paralelă cu planul  $\alpha$ .

**Teorema 7 (criteriul de paralelism al dreptei și planului).** Pentru ca o dreaptă să fie paralelă cu un plan este necesar și suficient ca dreapta să fie paralelă cu o dreaptă din acest plan.

#### Demonstrație

**Necesitatea.** Fie dreapta  $a$  ( $a \not\subset \beta$ ) paralelă cu planul  $\beta$ . Considerăm în planul  $\beta$  un punct  $A$ , apoi construim planul  $\alpha$  determinat de acest punct și de dreapta  $a$  (fig. 8.12). Planele  $\alpha$  și  $\beta$  se intersectează după dreapta  $b$ . Constatăm că dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele, deoarece, în caz contrar, ele, fiind situate în planul  $\alpha$ , ar avea un punct comun, care ar apartine și planului  $\beta$ , ceea ce ar contrazice ipoteza că  $a \parallel b$ .

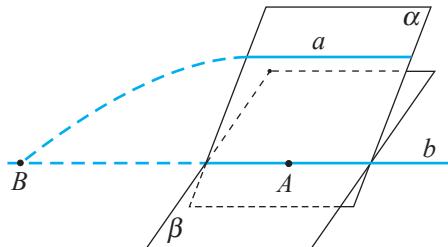


Fig. 8.12

**Suficiența.** Fie dreapta  $a$  ( $a \not\subset \beta$ ) paralelă cu o dreaptă  $b$  inclusă în planul  $\beta$ . În acest caz, dreapta  $a$  este paralelă și cu planul  $\beta$ . Într-adevăr, dacă vom presupune că dreapta  $a$  ar avea un punct comun,  $B$ , cu planul  $\beta$ , atunci acest punct ar trebui să aparțină și liniei de intersecție a planelor  $\beta$  și  $\alpha$  (fig. 8.12), adică și dreptei  $b$ , dar aceasta ar contrazice ipoteza că  $a \parallel b$ .

Cazul  $a \subset \beta$  este evident. ►

**Teorema 8.** Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci intersecția acestui plan cu orice alt plan, care nu este paralel cu cel dat și trece prin dreapta dată, este o dreaptă paralelă cu dreapta dată (fig. 8.13).

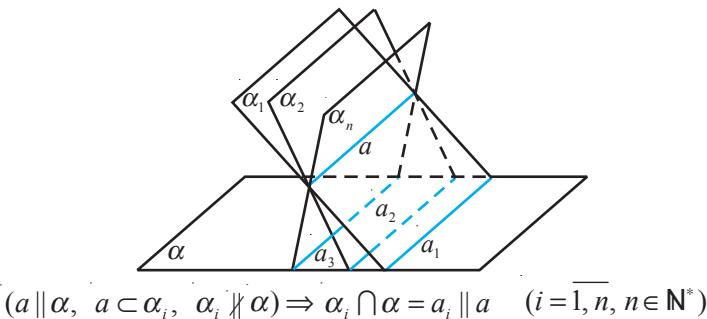


Fig. 8.13

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 8.

**Teorema 8' (teorema „acoperișului”).** Fie dreptele parallele  $d_1$  și  $d_2$ . Dacă un plan ce conține dreapta  $d_1$  este secant unui plan ce conține dreapta  $d_2$ , atunci dreapta  $d$  de intersecție a acestor plane este paralelă cu dreptele  $d_1$  și  $d_2$  (fig. 8.14).

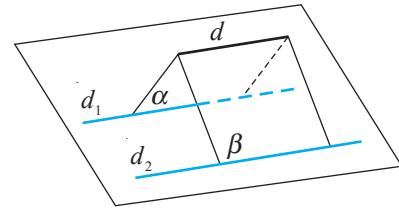


Fig. 8.14

### Probleme rezolvate

1. Considerăm punctul  $E$  care nu aparține planului paralelogramului  $ABCD$  și punctul  $F$  – mijlocul segmentului  $AE$ . Să se arate că dreapta  $FC$  intersectează planul  $BED$  în centrul de greutate  $G$  al triunghiului  $BED$  (fig. 8.15).

*Rezolvare:*

Fie planul  $EAC$ . Punctul  $F$  și mijlocul  $O$  al diagonalei  $AC$  a paralelogramului  $ABCD$  aparțin acestui plan. Prin urmare, punctul  $G$  de intersecție a medianelor  $CF$  și  $EO$  ale triunghiului  $EAC$  aparține planului  $EAC$ . Cum segmentul  $EO$  este mediană și a triunghiului  $BED$ , rezultă că  $(FC) \cap (BED) = \{G\}$ .

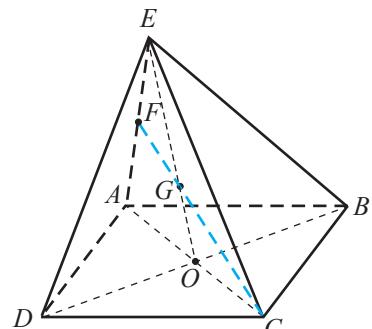


Fig. 8.15

2. Fie punctele necoplanare  $A, B, C, D$ . Punctele  $E, F$  și  $G$  aparțin segmentelor  $AD, DC$  și respectiv  $BC$ , fără a coincide cu extremitățile lor și, în plus,  $\frac{DE}{EA} \neq \frac{DF}{FC}$  (fig. 8.16 a)). Să se reprezinte intersecțiile planului  $EFG$  cu planele  $ADC, DBC, ABC$  și  $ABD$ .

*Rezolvare:*

Evident, intersecțiile planului  $EFG$  cu planele  $ADC$  și  $DBC$  sunt dreptele  $EF$  și respectiv  $FG$  (fig. 8.16 b)).

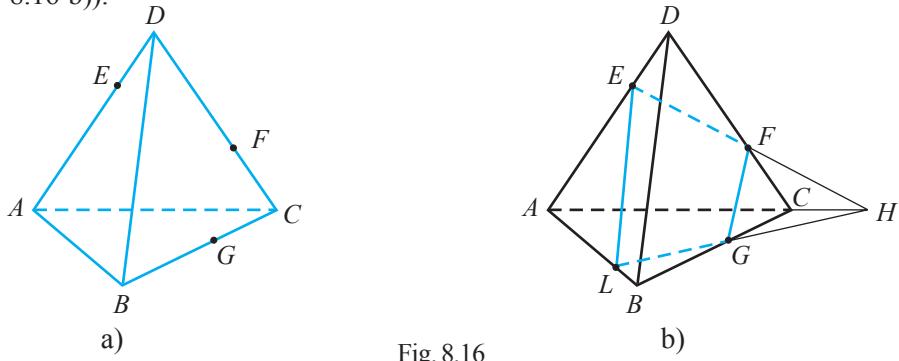


Fig. 8.16

Fie dreptele  $EF$  și  $AC$  se intersectează în punctul  $H$ . Acest punct există, deoarece  $\frac{DE}{EA} \neq \frac{DF}{FC}$ . Punctul  $H$  aparține planului  $EFG$  și planului  $ABC$ . Prin urmare, dreapta  $HG$  este dreapta de intersecție a planelor  $EFG$  și  $ABC$ . Fie  $HG \cap AB = \{L\}$ . Atunci dreapta  $EL$  este dreapta de intersecție a planelor  $EFG$  și  $ADB$ .

3. Fie  $d_1$  și  $d_2$  drepte concurente situate în planul  $\alpha$ , iar  $d$  o dreaptă ce intersectează planul  $\alpha$  într-un punct  $D$  ce nu aparține dreptelor  $d_1$  și  $d_2$  (fig. 8.17). Să se determine mulțimea dreptelor care intersectează dreptele  $d$ ,  $d_1$  și  $d_2$ .

*Rezolvare:*

Fie  $O$  punctul de intersecție a dreptelor  $d_1$  și  $d_2$ . Orice dreaptă care trece prin punctul  $O$  și printr-un punct  $A$  al dreptei  $d$  verifică condițiile problemei. De asemenea, orice dreaptă din planul  $\alpha$  care trece prin punctul  $D$  și intersectează ambele drepte  $d_1$  și  $d_2$  verifică condițiile problemei. Alte drepte care ar intersecta toate dreptele  $d$ ,  $d_1$  și  $d_2$  nu există.

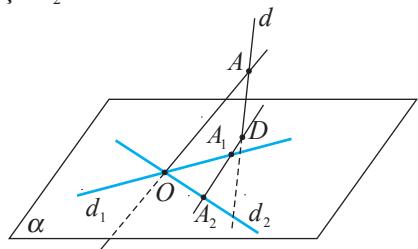


Fig. 8.17

4. Planul  $\alpha$  este intersectat de dreptele necoplanare  $a$  și  $b$  în punctele  $A$  și  $B$ . Prin fiecare punct  $M$  al dreptei  $a$  se duce paralela cu dreapta  $b$  și se notează cu  $M'$  punctul de intersecție a acestei paralele cu planul  $\alpha$  (fig. 8.18). Să se arate că atunci când punctul  $M$  descrie dreapta  $a$ , punctul  $M'$  descrie o dreaptă din planul  $\alpha$  ce trece prin punctul  $A$ .

*Rezolvare:*

Fie  $b'$  dreapta care trece prin punctul  $A$  și este paralelă cu dreapta  $b$  (care există și este unică). Planul determinat de dreptele  $a$  și  $b'$ , concurente în  $A$ , intersectează planul  $\alpha$  după dreapta  $c$ . Dreapta  $c$  este dreapta căutată.

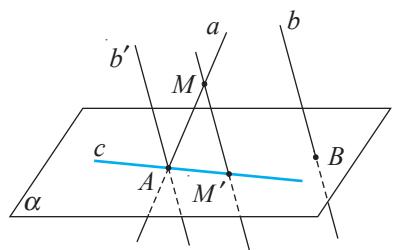


Fig. 8.18

## Probleme propuse

### Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. În tetraedrul  $ABCD$ , punctul  $M$  este mijlocul muchiei  $BD$ , iar punctul  $N$  este mijlocul muchiei  $AD$ . Dreapta  $d$  este intersecția planului  $ABC$  cu planul determinat de dreapta  $MN$  și vârful  $C$ . În ce relație sunt dreptele  $d$  și  $MN$ ?
- B** 2.  **Investigați!** Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare. Punctul  $E \in AD$  ( $AE = 2ED$ ), punctul  $L \in AB$  ( $AL = 2LB$ ), punctul  $F \in DC$  ( $DF = 2FC$ ), punctul  $M \in CB$  ( $BM = 2MC$ ). Determinați relația dintre dreptele  $EL$  și  $FM$ .
- C** 3. Se dă punctele necoliniare  $A, B, C$ . Un plan paralel cu dreapta  $AB$  intersectează segmentele  $BC$  și  $AC$  în punctele  $M$  și respectiv  $N$ . Să se afle lungimea segmentului  $MN$ , dacă:  
 a)  $AB = 30$  cm și  $MB : BC = 2 : 3$ ;      b)  $AB = 16$  cm și  $BM : MC = 5 : 3$ ;  
 c)  $CM = 20$  cm și  $AB : BC = 4 : 5$ ;      d)  $BM = a$ ,  $MC = c$ ,  $AB = b$ .

### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare. Pe segmentele  $AB, BC, CD$  și  $DA$  se iau punctele  $A_1, B_1, C_1$  și respectiv  $D_1$ , astfel încât  $AA_1 : A_1B = 1 : 3$ ,  $BB_1 : B_1C = 3 : 1$ ,  $CC_1 : C_1D = 2 : 1$  și respectiv  $DD_1 : D_1A = 1 : 2$ . Să se demonstreze că punctele  $A_1, B_1, C_1, D_1$  sunt coplanare.
- B<sub>1</sub>** 2.  **Investigați!** Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare. Punctul  $M \in AD$  și punctul  $N \in BD$ . În ce relație se află dreapta  $MN$  și planul  $ABC$ , dacă se știe că  $AM : MD = BN : ND$ ?
- C<sub>1</sub>** 3. Fie punctele  $A, B, C$  și  $D$  necoplanare. Pe segmentele  $AB, BC$  și  $CD$  se iau punctele  $A_1, B_1$  și respectiv  $C_1$ , astfel încât  $AA_1 : A_1B = a$ ,  $BB_1 : B_1C = b$  și  $CC_1 : C_1D = c$ . Planul  $A_1B_1C_1$  intersectează segmentul  $AD$  în punctul  $D_1$ . Să se afle raportul  $DD_1 : DA$ .
4.  **Lucreți în perechi!** Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare. Punctul  $M$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABD$ , iar punctul  $N$  este centrul de greutate al triunghiului  $BDC$ . Să se demonstreze că dreapta  $MN$  este paralelă cu planul  $ABC$ .

## §4 Plane paralele

Fie două plane în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două plane în spațiu:

- a) planele se intersectează după o dreaptă (fig. 8.19 a));
- b) planele nu au niciun punct comun (fig. 8.19 b));
- c) planele coincid (fig. 8.19 c)).

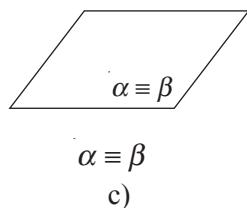
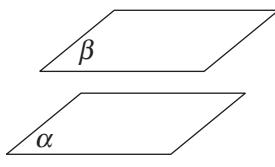
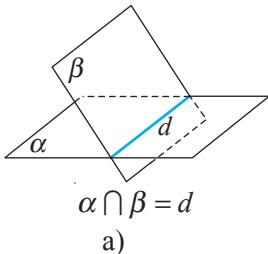
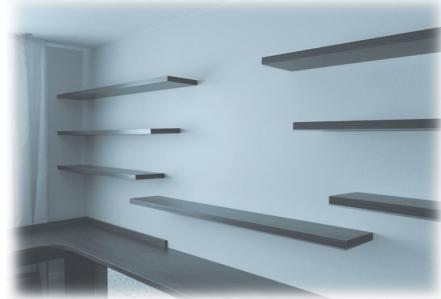


Fig. 8.19

**Definiție.** Două plane se numesc **paralele** dacă ele nu au puncte comune sau dacă coincid.

**Teorema 9 (criteriul de paralelism al planelor).** Dacă două drepte concurente situate într-un plan sunt paralele cu un alt plan, atunci planele sunt paralele.

### Demonstrație

Fie dreptele concurente  $a$  și  $b$ , situate în planul  $\alpha$ , paralele cu planul  $\beta$  (fig. 8.20).

Presupunem că planele  $\alpha$  și  $\beta$  nu sunt paralele. Atunci intersecția lor este dreapta  $c$ .

Conform teoremei 8, dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele cu dreapta  $c$ ,

dar aceasta contrazice axioma dreptelor paralele, deoarece obținem că în planul  $\alpha$  printr-un punct trec două drepte diferite,  $a$  și  $b$ , paralele cu dreapta  $c$ , ceea ce este imposibil. Prin urmare, planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt paralele. ►

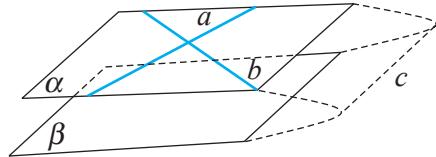
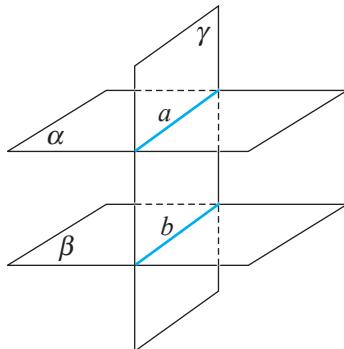


Fig. 8.20

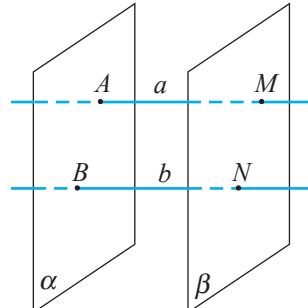
**Teorema 10.** Dacă două plane paralele sunt intersectate de un al treilea plan, atunci dreptele de intersecție sunt paralele (fig. 8.21 a)).

**Teorema 11.** Dacă două drepte paralele intersectează două plane paralele, atunci segmentele dreptelor cuprinse între aceste plane sunt congruente (fig. 8.21 b)).



$$(\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b) \Rightarrow a \parallel b$$

a)



$$(a \parallel b, \alpha \parallel \beta) \Rightarrow [AM] \equiv [BN], \\ A, B \in \alpha, M, N \in \beta$$

b)

Fig. 8.21

**Exercițiu.** Demonstrați teoremele 10 și 11.

### Probleme rezolvate

1. Segmentul  $AB$  nu intersectează planul  $\alpha$  și este împărțit de punctele  $M$  și  $N$  în trei segmente, astfel încât  $AM : MN = MN : NB = 1 : 2$ . Prin punctele  $A, M, N$  și  $B$  sunt trasate drepte paralele ce intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A_1, M_1, N_1$  și respectiv  $B_1$  (fig. 8.22). Să se afle lungimea segmentelor  $MM_1$  și  $NN_1$ , știind că  $AA_1 = 2$  cm,  $BB_1 = 16$  cm.

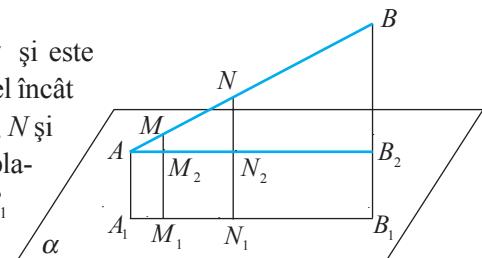


Fig. 8.22

*Rezolvare:*

Construim prin punctul  $A$  o dreaptă paralelă cu  $A_1B_1$ , care intersectează dreptele  $MM_1$ ,  $NN_1$  și  $BB_1$  în punctele  $M_2$ ,  $N_2$  și respectiv  $B_2$ . Triunghiurile  $AM_2M$  și  $AB_2B$  sunt asemenea, deci  $MM_2 : BB_2 = AM : AB$ .

Din  $AM : MN = MN : NB = 1 : 2$  rezultă că  $AB = 7AM$ . Atunci  $MM_2 : BB_2 = 1 : 7$ ,  $MM_2 = BB_2 : 7 = 14 : 7 = 2$ .

Astfel,  $MM_1 = MM_2 + M_2M_1 = 2 + 2 = 4$  (cm).

În mod analog, constatăm că  $\Delta ANN_2 \sim \Delta ABB_2$ .

Așadar,  $NN_2 : BB_2 = AN : AB = 3AM : 7AM = 3 : 7$ , de unde  $NN_2 = \frac{3}{7}BB_2 = 6$  cm.

Prin urmare,  $NN_1 = NN_2 + N_2N = 6 + 2 = 8$  (cm).

*Răspuns:*  $MM_1 = 4$  cm,  $NN_1 = 8$  cm.

2. Punctele  $A_1, A_2, A_3$  sunt situate pe muchia piramidei  $VABC$ , astfel încât  $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ . Prin aceste puncte sunt trasate plane paralele cu baza piramidei, care intersectează muchiile  $VB$  și  $VC$  în punctele  $B_1, B_2, B_3$  și respectiv  $C_1, C_2, C_3$  (fig. 8.23). Să se afle perimetrele triunghiurilor  $A_1B_1C_1$  și  $A_2B_2C_2$ , dacă perimetrele triunghiurilor  $ABC$  și  $A_3B_3C_3$  sunt  $\mathcal{P}$  și respectiv  $\mathcal{P}_3$ .

*Rezolvare:*

Segmentul  $A_2B_2$  este linie mijlocie a trapezului  $A_1A_3B_3B_1$ , adică  $\mathcal{P}_2 = \frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_3}{2}$  (1), unde  $\mathcal{P}_1$  și  $\mathcal{P}_3$  sunt perimetrele triunghiurilor  $A_1B_1C_1$  și respectiv  $A_3B_3C_3$ .

În mod similar,  $\mathcal{P}_1 = \frac{\mathcal{P} + \mathcal{P}_2}{2}$  (2). Din (1) și (2) obținem:

$$\mathcal{P}_2 = \frac{2\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}}{3}, \quad \mathcal{P}_1 = \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_3}{3}.$$

*Răspuns:*  $\mathcal{P}_1 = \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_3}{3}$ ,  $\mathcal{P}_2 = \frac{2\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}}{3}$ .

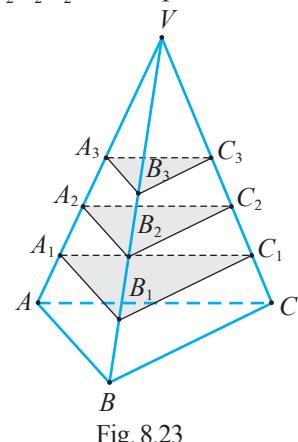


Fig. 8.23

3. Tetraedrul regulat  $ABCD$  este secționat de un plan paralel cu planul feței  $BCD$  și care trece prin punctul  $E \in AC$ , astfel încât  $AE : EC = 2 : 3$  (fig. 8.24). Să se afle aria secțiunii, dacă lungimea muchiei tetraedrului este  $a$ .

*Rezolvare:*

Este evident că laturile triunghiului  $FGE$  sunt paralele cu laturile feței  $BDC$  și că triunghiul  $FGE$  este echilateral.

Cum  $\Delta AEF \sim \Delta ACB$ , obținem:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AE + EC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE}, \quad \frac{BC}{FE} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\text{de unde } FE = \frac{2a}{5}.$$

$$\text{Astfel, } \mathcal{A}_{FGE} = \frac{(EF)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{25 \cdot 4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}.$$

$$\text{Răspuns: } \mathcal{A}_{FGE} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}.$$

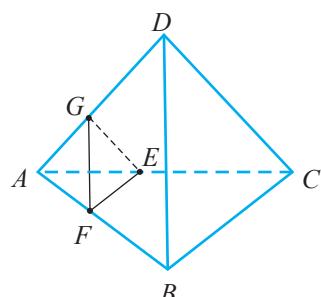


Fig. 8.24

- 4\*. Să se construiască secțiunea prismei drepte  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  cu planul determinat de diagonală  $BD_1$  și de un punct  $M \in (CC_1)$ .

*Rezolvare:*

Evident că două laturi ale poligonului obținut în secțiune sunt segmentele  $BM$  și  $MD_1$  (fig. 8.25).

Punctul  $N \in CD \cap D_1 M$  este comun planului  $ABC$  și planului secțiunii căutate. Prin urmare, punctul  $P \in BN \cap AD$  este comun planului  $ADD_1$  și planului acestei secțiuni.

Punctul  $L \in AA_1 \cap PD_1$  este cel de-al patrulea vârf al poligonului obținut în secțiune.

*Răspuns:* Secțiunea este patrulaterul  $BLD_1 M$ .

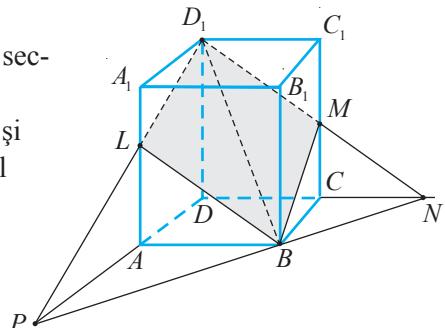
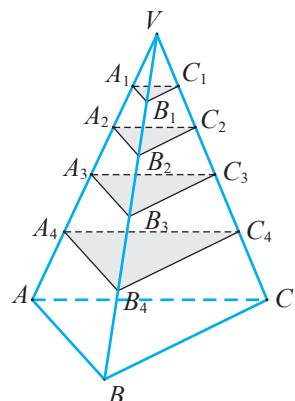


Fig. 8.25

### Probleme propuse

#### Profilurile umanist, arte, sport

- A 1. Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare. Punctele  $M, N, P$  sunt mijloacele segmentelor  $AD, BD$  și respectiv  $CD$ . Să se arate că planele  $MNP$  și  $ABC$  sunt paralele.
- B 2. **Lucrați în perechi!** Pe muchiile tetraedrului  $ABCD$  sunt luate punctele  $L \in AD, P \in AD (AL = LP = PD), M \in BD (DM = 2BM), N \in CD (ND = 2NC)$ .
- Să se arate că planul  $MNL$  este paralel cu planul  $ABC$ .
  - Să se construiască punctul  $I_1$  de intersecție a dreptei  $PM$  cu planul  $ABC$ .
  - Să se construiască punctul  $I_2$  de intersecție a dreptei  $PN$  cu planul  $ABC$ .
  - Să se construiască intersecția planelor  $ABC$  și  $PMN$ .
- C 3. Punctele  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sunt situate pe muchia  $AV$  a piramidei triunghiulare  $VABC$ , astfel încât  $[AA_4] \equiv [A_4 A_3] \equiv [A_3 A_2] \equiv [A_2 A_1]$ . Prin aceste puncte sunt construite plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchiile  $VB$  și  $VC$  în punctele  $B_1, B_2, B_3, B_4$  și respectiv  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Să se determine perimetrele triunghiurilor obținute în secțiuni, dacă perimetrul triunghiului  $A_1 B_1 C_1$  este de 5 cm, iar perimetrul triunghiului  $ABC$  este de 40 cm.
4. **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale paralelismului dreptelor și planelor în construcțiile edificiilor din localitate*.
5. **Activitate practică.** Determinarea relațiilor de paralelism în curtea școlii.



#### Profilul real

- A 1. Tetraedrul  $ABCD$  este secționat de un plan ce trece prin punctul  $M \in [AD]$  și care este paralel cu planul bazei  $ABC$ . Să se afle perimetrul poligonului obținut în secțiune, dacă  $AM = 5$  cm,  $AD = 15$  cm,  $AB = 20$  cm,  $BC = 19$  cm,  $AC = 18$  cm.

- B<sub>1</sub>** 2. Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $E$  un punct ce nu aparține planului suport al patrulaterului  $ABCD$ . Punctele  $M, N, P$  sunt punctele de intersecție a medianelor triunghiurilor  $ABE, BCE$  și respectiv  $CDE$ . Să se demonstreze că planul  $MNP$  trece prin punctul  $Q$  de intersecție a medianelor triunghiului  $ADE$ .
- C<sub>1</sub>** 3. Prisma triunghiulară dreaptă  $ABC_1B_1C_1$  este secționată de un plan ce trece prin punctul  $M \in [AA_1]$  și care este paralel cu dreptele  $AB_1$  și  $AC_1$ . Să se determine perimetru poligonului obținut în secțiune, dacă  $AM = 1\text{ cm}$ ,  $AA_1 = 3\text{ cm}$ ,  $AB = AC = 4\text{ cm}$ ,  $BC = 2\text{ cm}$ .
4. Pe muchia  $VA$  a piramidei triunghiulare  $VABC$  se iau punctele  $A_1, A_2, A_3$ , astfel încât  $A_1A_2 = 2AA_1$  și  $A_2A_3 = 2A_1A_2$ . Prin aceste puncte sunt trasate plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchia  $VB$  în punctele  $B_1, B_2, B_3$ , iar muchia  $VC$  – în punctele  $C_1, C_2, C_3$ . Să se afle perimetrele  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  și  $\mathcal{P}_3$  ale triunghiurilor  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$  și respectiv  $A_3B_3C_3$ , dacă se știe că perimetru triunghiului  $ABC$  este  $\mathcal{P}$ , iar  $AA_1 : VA_3 = \lambda$ .
5.  **Lucrați în perechi!** Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $E$  un punct ce nu aparține planului suport al patrulaterului  $ABCD$ . Pe segmentele  $AE, BE, CE, DE$  se iau punctele  $M, N, P$  și respectiv  $R$ , astfel încât  $2AM = 3ME$ ,  $2BN = 3NE$ ,  $2CP = 3PE$ ,  $3DR = 2RE$ .
- a) Să se demonstreze că planul  $MNP$  este paralel cu planul suport al patrulaterului  $ABCD$ .
- b) Să se construiască punctul  $I$  de intersecție a dreptei  $NR$  cu planul suport al patrulaterului  $ABCD$ .
6.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicarea elementelor de paralelism în spațiu în construcțiile edificiilor din localitate*.
7. **Activitate practică.** Determinarea relațiilor de paralelism în curtea școlii.

### Probleme recapitulative

#### *Profilurile umanist, arte, sport*

- A** 1. Segmentul  $AB$  nu intersectează planul  $\alpha$ . Prin extremitățile segmentului  $AB$  și prin mijlocul lui, punctul  $M$ , sunt trasate drepte paralele, care intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A_1, B_1$  și respectiv  $M_1$ . Să se afle lungimea segmentului  $MM_1$ , dacă:
- a)  $AA_1 = 3,2\text{ m}$ ,  $BB_1 = 2,3\text{ dm}$ ; b)  $AA_1 = 19\text{ cm}$ ,  $BB_1 = 2\text{ dm}$ ; c)  $AA_1 = 33\text{ cm}$ ,  $BB_1 = 75\text{ cm}$ .
2. Segmentul  $AB$  nu intersectează planul  $\alpha$  și este împărțit de punctele  $M$  și  $N$  în trei segmente congruente:  $AM, MN, NB$ . Prin extremitățile segmentului  $AB$  și prin punctele  $M$  și  $N$  sunt trasate drepte paralele ce intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A_1, B_1, M_1$  și respectiv  $N_1$ . Să se afle lungimile segmentelor  $MM_1$  și  $NN_1$ , dacă se știe că  $AA_1 = 16\text{ cm}$ ,  $BB_1 = 4\text{ cm}$ .
- B** 3. Fie planele paralele  $\alpha, \beta$  și un punct  $M$ . Planul  $\beta$  și punctul  $M$  sunt situate în semispații diferite limitate de planul  $\alpha$ . Prin punctul  $M$  sunt trasate două drepte care intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A_1$  și  $A_2$ , iar planul  $\beta$  – în punctele  $B_1$  și  $B_2$ . Să se determine lungimea segmentului  $A_1A_2$ , dacă  $B_1B_2 = 20\text{ cm}$  și  $MA_1 : A_1B_1 = 3 : 2$ .
- C** 4.  **Lucrați în perechi!** Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare. Punctul  $L \in DC$ , astfel încât  $DL = 2LC$ , iar punctul  $M$  este centrul de greutate al  $\triangle ABD$ . Să se arate că dreapta  $ML$  este paralelă cu planul  $ABC$ .

## Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Printr-un punct  $O$ , ce nu aparține niciunui dintre planele paralele  $a$  și  $b$ , sunt construite dreptele  $a_1, a_2, a_3$  și  $a_4$ , care intersectează planul  $a$  în punctele  $A_1, A_2, A_3$  și respectiv  $A_4$ , iar planul  $b$  – în punctele  $B_1, B_2, B_3$  și respectiv  $B_4$ .

Să se demonstreze că  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \frac{OA_4}{OB_4}$ .

2. Să se demonstreze că dacă orice dreaptă ce intersectează unul dintre cele două plane date intersectează și al doilea plan, atunci planele sunt paralele.

3. O dreaptă intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $A$ . Prin punctele  $B$  și  $C$  ( $B$  se află între  $A$  și  $C$ ) ale dreptei, situate în același semispațiu limitat de planul  $\alpha$ , sunt trasate două drepte paralele care intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $B_1$  și respectiv  $C_1$ . Să se afle lungimea segmentului  $BB_1$ , dacă:

- a)  $CC_1 = a$  și  $AC : BC = \lambda$ ;  
 b)  $CC_1 = a$  și  $AB : AC = \mu$ ;  
 c)  $AB = l$  și  $AC : CC_1 = k$ ;  
 d)  $AC = a$ ,  $BC = b$ ,  $CC_1 = c$ .

4.  **Lucrați în perechi!** Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare și  $AC = 12$  cm,  $BD = 20$  cm. Să se determine perimetrul patrulaterului ale cărui vârfuri sunt mijloacele segmentelor  $AB, BC, CD, DA$ .

5. Punctul  $E$  nu aparține planului trapezului  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ). Punctele  $M$  și  $L$  sunt mijloacele laturilor  $AB$  și  $CD$  ale trapezului, iar punctele  $N$  și  $P$  – mijloacele segmentelor  $BE$  și  $CE$ . Să se arate că dreptele  $MN$  și  $PL$  sunt concurente.

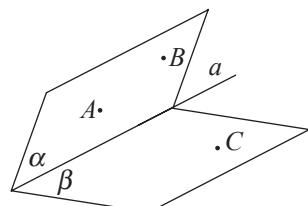
6. Fie punctele  $A, B, C, D$  necoplanare. Pe segmentele  $AC$  și  $BC$  se iau punctele  $M$  și respectiv  $N$ , astfel încât  $AM : MC = BN : NC = m : n$ . Să se afle lungimea segmentului determinat de mijloacele segmentelor  $AD$  și  $BD$ , dacă  $MN = a$ .

7. Tetraedrul regulat  $ABCD$  este secționat de un plan ce trece prin vârful  $A$  și prin mijloacele muchiilor  $BD$  și  $CD$ . Să se afle aria secțiunii obținute, dacă lungimea muchiei tetraedrului este  $2a$ .

- B<sub>1</sub>** 8. Fie trei drepte necoplanare care se intersectează două câte două. Să se demonstreze că dreptele au un punct comun.

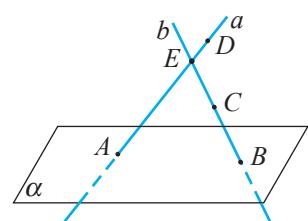
9. Se dau planele  $\alpha$  și  $\beta$ , a căror intersecție este dreapta  $a$ .

Punctele  $A$  și  $B$  aparțin planului  $\alpha$ , iar punctul  $C$  aparține planului  $\beta$ . Să se construiască liniile de intersecție a planului  $ABC$  cu planele  $\alpha$  și  $\beta$ .



10. Punctul  $E$  nu aparține planului paralelogramului  $ABCD$ .

Să se demonstreze că linia de intersecție a planelor  $ABE$  și  $CDE$  este o dreaptă paralelă cu dreapta  $DC$ .

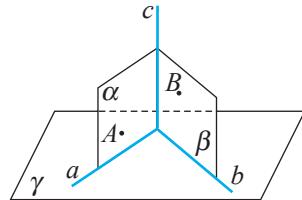


11. Prin punctul  $E$  ce nu aparține planului  $\alpha$  sunt duse dreptele

$a$  și  $b$ , care intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A$  și respectiv  $B$ . Punctul  $D$  aparține dreptei  $a$ , iar punctul  $C$  – dreptei  $b$ . Să se construiască punctul de intersecție a dreptei  $DC$  cu planul  $\alpha$ .

12. Se dau punctele necoplanare  $A, B, C$  și  $D$ . Să se demonstreze că dreapta  $a$  care trece prin mijloacele segmentelor  $AB$  și  $DC$ , dreapta  $b$  ce trece prin mijloacele segmentelor  $AD$  și  $BC$  și dreapta  $c$  care trece prin mijloacele segmentelor  $AC$  și  $DB$  au un punct comun.

13. Planele  $\alpha$  și  $\beta$ , a căror intersecție este dreapta  $c$ , intersectează planul  $\gamma$  după dreptele  $a$  și  $b$ . Punctul  $A$  aparține planului  $\alpha$ , iar punctul  $B$  aparține planului  $\beta$ , astfel încât  $AB \parallel \gamma$ . Să se construiască punctul de intersecție a dreptei  $AB$  cu planul  $\gamma$ .



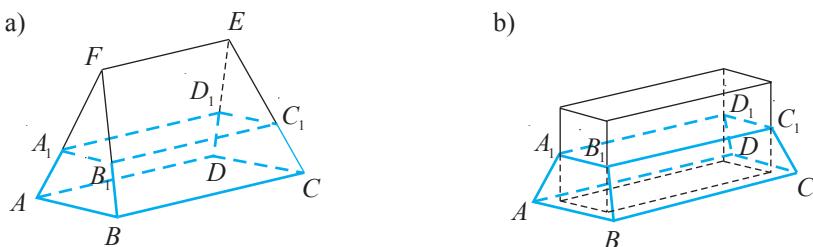
14. Fie patrulaterul convex  $ABCD$  situat în planul  $\alpha$ .

Presupunem că patrulaterul  $ABCD$  are laturile opuse neparalele.

Punctul  $E$  nu aparține planului  $\alpha$ . Să se traseze intersecțiile planelor:

- a)  $EAB$  și  $EDC$ ;      b)  $EAD$  și  $EBC$ ;      c)  $EAC$  și  $EBD$ .

- C<sub>1</sub> 15. La reconstrucția acoperișului unei case s-a luat decizia de a ridica o mansardă. Căpriorii  $AF, BF, CE$  și  $DE$  urmează să fie tăiați în punctele  $A_1, B_1, C_1$  și respectiv  $D_1$ , astfel încât planul dreptunghiului  $A_1B_1C_1D_1$  să fie paralel cu planul podului (fig. a)). Capetele căpriorilor se vor sprijini pe colțurile pereților mansardei (fig. b)). La ce distanță de la colțurile podului casei trebuie tăiați căpriorii, astfel încât lățimea mansardei în exterior să fie de 9 m, dacă se știe că lățimea podului casei este de 12 m, iar lungimea căpriorilor – de 8 m?



16. Se dau punctele necoplanare  $A, B, C$  și  $D$ . Punctul  $M$  aparține segmentului  $DC$ . Să se construiască liniile de intersecție a planelor  $ADC, CBD, ABC$  și  $ABD$  cu planul care trece prin punctele  $M$  și  $A$  și este paralel cu dreapta  $BD$ .

17. Fie punctele necoplanare  $A, B, C$  și  $D$  și punctul  $E$  ce aparține segmentului  $AC$ , astfel încât  $AE : EC = 3 : 2$ . Să se construiască liniile de intersecție a planelor  $ADC, ADB, ABC$  cu planul ce trece prin punctul  $E$  și este paralel cu planul  $BCD$ .

18. Fie punctele necoplanare  $A, B, C$  și  $D$ . Punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AD$ , iar punctul  $G$  este intersecția medianelor triunghiului  $ABC$ .

a) Să se construiască punctul  $F$  de intersecție a dreptei  $MG$  cu planul  $BCD$ .

b) Să se demonstreze că punctele  $B, D, C, F$  sunt vârfurile unui paralelogram.

19. Se dau punctele necoplanare  $A, B, C$  și  $D$ . Punctele  $E, F$  și  $H$  sunt situate pe dreptele  $AD$ ,  $DC$  și respectiv  $BC$ , astfel încât  $EF \parallel AC$  și  $FH \parallel DB$ . Să se construiască punctele de intersecție a planului  $EFH$  cu dreptele  $AB$  și  $DB$ .

20. **Investigați!** Punctele  $A, B, C$  și  $D$  sunt necoplanare. Câte plane pot fi duse la aceeași distanță de aceste puncte?

**Test sumativ**

*Timp efectiv de lucru:  
45 de minute*

**Profilurile umanist, arte, sport**

- Prin două puncte distincte  $A$  și  $B$ , ce aparțin unuia dintre cele două plane paralele, sunt construite două drepte paralele care intersectează celălalt plan în punctele  $A_1$  și respectiv  $B_1$ . Determinați lungimea segmentului  $A_1B_1$ , dacă  $AB = 8$  cm. (4)
- Construiți cubul  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  și indicați:
  - drepte paralele cu planul  $BCD$ ;
  - plane paralele cu dreapta  $A_1B_1$ .
(7)
- Punctul  $M$  este mijlocul muchiei  $AD$  a tetraedrului regulat  $ABCD$  cu muchiile de lungime  $a$ . Aflați perimetrul triunghiului  $MNC$ , unde  $N$  este punctul de intersecție a dreptei  $BD$  cu planul ce trece prin dreapta  $MC$ , paralel cu dreapta  $AB$ . (7)
- Paralelogramele  $ABCD$  și  $ABB_1A_1$  sunt situate în plane diferite. Determinați lungimea segmentului  $B_1C$ , dacă  $A_1D = 8$  cm. (6)

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	24–23	22–21	20–18	17–15	14–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

*Timp efectiv de lucru:  
45 de minute*

**Profilul real**

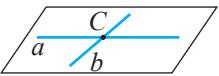
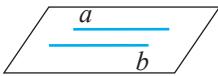
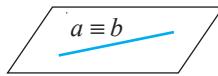
- Dreapta  $a$  este paralelă cu planul  $\alpha$ , iar dreapta  $b$  intersectează acest plan. Stabiliți poziția relativă a dreptelor  $a$  și  $b$ . (5)
- Fie punctele necoplanare  $A, B, C, D$ . Determinați poziția față de planul  $ABC$  a dreptei:
  - $EF$ , unde  $E$  este mijlocul segmentului  $AD$ ,  $F$  – mijlocul segmentului  $BD$ ;
  - $GH$ , unde  $G$  aparține segmentului  $BD$ ,  $H$  aparține segmentului  $CD$  și  $\frac{BG}{GD} = \frac{CH}{HD} = \frac{1}{3}$ .
(7)
- Fie piramida  $SABCD$  și punctul  $E \in (SD)$ . Secționați această piramidă cu planul ce trece prin punctul  $E$  și care este paralel cu planul bazei  $ABCD$ . (3)
- Construiți secțiunea tetraedrului regulat  $ABCD$ , formată de planul care trece prin punctul  $E \in (AD)$ , astfel încât  $AE : ED = 1 : 2$ , și care este paralel cu planul bazei  $ABC$ . Aflați aria secțiunii obținute, dacă se știe că aria unei fețe a tetraedrului este  $\mathcal{A}$ . (8)

**Baremul de notare**

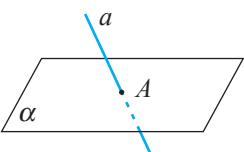
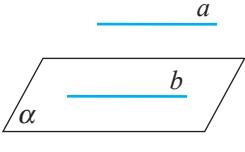
Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	23–22	21–20	19–17	16–14	13–11	10–8	7–6	5–4	3–2	1–0

## Pozitiiile relative ale dreptelor si planelor

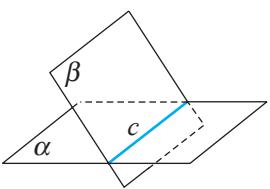
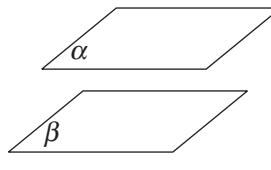
### 1. Pozitiiile relative a două drepte

$a$ și $b$ coplanare		$a$ și $b$ necoplanare
		
$a \cap b = \{C\}$	$a \cap b = \emptyset$	$a \equiv b$

### 2. Pozitiiile relative ale unei drepte și unui plan

$a$ secantă cu $\alpha$	$a$ paralelă cu $\alpha$
 $a \cap \alpha = \{A\}$	 $b \subset \alpha, a \parallel b, a \cap \alpha = \emptyset$

### 3. Pozitiiile relative a două plane

$\alpha$ și $\beta$ secante	$\alpha$ și $\beta$ paralele
 $\alpha \cap \beta = c$	 $\alpha \cap \beta = \emptyset$

**Obiective**

- ⇒ recunoașterea în diverse contexte, descrierea, construirea dreptelor perpendiculare, a dreptei perpendiculare pe plan;
- ⇒ calcularea lungimilor segmentelor, măsurilor unghiurilor diedre, aplicând teorema celor trei perpendiculare;
- ⇒ utilizarea în situații reale și/sau modelate a criteriilor de perpendicularitate a două drepte, a dreptei și planului, a două plane;
- ⇒ recunoașterea, descrierea și construirea proiecțiilor ortogonale ale punctelor, segmentelor, dreptelor pe plan;
- ⇒ calcularea lungimilor proiecțiilor ortogonale ale segmentelor în contexte diverse;
- ⇒ aplicarea perpendicularității în spațiu pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

**§1 Drepte și plane perpendiculare**

**Lemă.** Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare (fig. 9.1 a)).

**Demonstrație**

Fie unghiurile proprii  $AMB$  și  $A_1M_1B_1$  cu  $[MA] \parallel [M_1A_1]$ ,  $[MB] \parallel [M_1B_1]$ ,  $MA = M_1A_1$  și  $MB = M_1B_1$ . Considerăm cazul când punctul  $A_1$  aparține semiplanului determinat de dreapta  $MM_1$  și punctul  $A$ , iar punctul  $B_1$  aparține semiplanului determinat de dreapta  $MM_1$  și punctul  $B$  (fig. 9.1 c)). În aceste condiții,  $MAA_1M_1$  și  $MBB_1M_1$  sunt paralelograme, deci  $MM_1 = AA_1 = BB_1$ . Prin urmare,  $ABB_1A_1$  de asemenea este paralelogram și  $AB = A_1B_1$ . Concluzia lemei rezultă din faptul că  $\DeltaAMB \equiv \DeltaA_1M_1B_1$ . ►

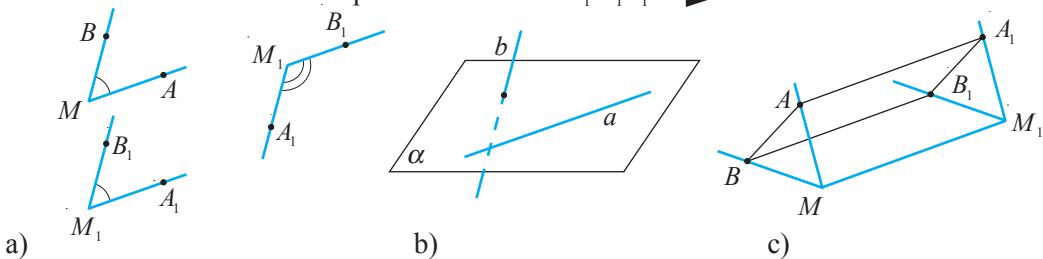


Fig. 9.1

Rezultatul obținut ne permite să vorbim despre unghiul format de două drepte necoplanare. Anume prin **unghiul format de două drepte** necoplanare  $a$  și  $b$  se înțelege un astfel de unghi  $BMA$ , încât  $M$  este un punct oarecare al spațiului,  $MB \parallel b$ ,  $MA \parallel a$  și  $m(\angle BMA) \in [0^\circ, 180^\circ]$  (fig. 9.1 a), b)).

**Definiție.** Două drepte în spațiu se numesc **perpendicularare** dacă măsura unghiului format de ele este de  $90^\circ$  (fig. 9.2).

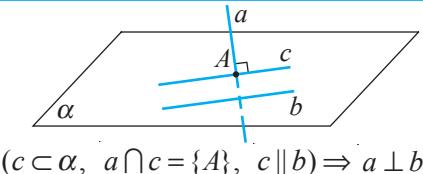


Fig. 9.2

Dreptele perpendiculare  $a, b$  se notează:  $a \perp b$ .

Ușor se deduce că în cubul din figura 9.3,  
 $AA_1 \perp BC$ ,  $AD_1 \perp CB_1$ .

În modulul 8 am constatat că o dreaptă și un plan în spațiu pot fi sau paralele, sau secante.

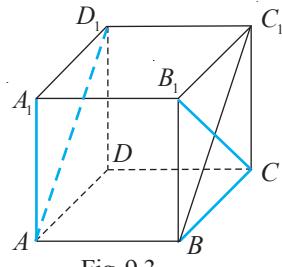


Fig. 9.3

**Definiții.** • Dreapta perpendiculară pe orice dreaptă dintr-un plan se numește **perpendiculară pe acest plan**. În acest caz, se mai spune că **planul este perpendicular pe dreaptă**.

• Dreapta care nu este perpendiculară pe plan și nu este paralelă cu el se numește **oblică** pe acest plan (fig. 9.4).

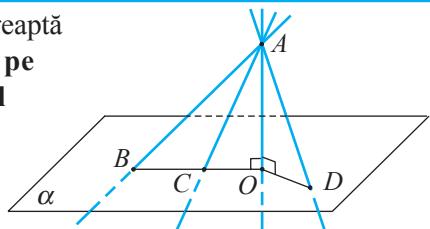


Fig. 9.4

În figura 9.4, dreapta  $AO$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ , iar dreptele  $AB, AC, AD$  sunt oblice pe acest plan.

**Teorema 1.** Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente situate într-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe acest plan.

#### Demonstratie

Fie dreptele  $a$  și  $b$  din planul  $\alpha$  concurente în punctul  $O$  și o dreaptă  $c$  perpendiculară pe dreptele  $a$  și  $b$  (fig. 9.5), iar  $d \subset \alpha$  o dreaptă arbitrară.

În virtutea definiției unghiului format de două drepte în spațiu, se poate admite că dreptele  $c$  și  $d$  conțin de asemenea punctul  $O$ . Luăm pe dreptele  $a$  și  $b$  două puncte arbitrară,  $A$  și res-

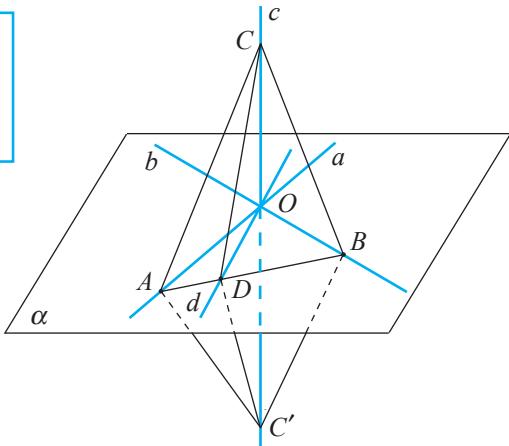


Fig. 9.5

pectiv  $B$ , diferite de  $O$ . Dreapta  $d$  intersectează  $[AB]$  în punctul  $D$ . Pe dreapta  $c$  luăm punctele  $C$  și  $C'$ , astfel încât  $[OC'] \equiv [CO]$  (fig. 9.5).

Cum  $\Delta COA \cong \Delta C'OA$  și  $\Delta COB \cong \Delta C'OB$  (ca triunghiuri dreptunghice cu catetele respective congruente), deducem că  $[AC] \equiv [AC']$  și  $[BC] \equiv [BC']$ . Rezultă că  $\Delta ACB \cong \Delta AC'B$  și  $\angle CAB \cong \angle C'AB$ . Aplicând criteriul LUL, constatăm că  $\Delta CAD \cong \Delta C'AD$ , deci triunghiul  $CDC'$  este isoscel. Segmentul  $DO$  este mediana corespunzătoare bazei triunghiului  $CDC'$ . Prin urmare,  $[DO]$  este și înălțime, adică  $c \perp d$ . ►

Existența și unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă dată, ce trece printr-un punct al acestei drepte, rezultă din

**Teorema 2.** Prin orice punct al unei drepte trece un unic plan perpendicular pe această dreaptă.

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 2.

#### Problema rezolvată

• Să se demonstreze că printr-un punct arbitrar  $A$ , ce nu aparține dreptei date  $a$ , trece un unic plan perpendicular pe dreapta  $a$ .

*Rezolvare:*

În planul  $\alpha = (A, a)$  construim  $AA' \perp a$  (fig. 9.6). Conform axiomei  $S_1$  (modulul 8), există un punct  $B$  ce nu se află în planul  $\alpha$ , care cu dreapta  $a$  determină planul  $\beta$ . În planul  $\beta$  din punctul  $A'$  construim perpendiculara  $A'C$  pe dreapta  $a$ . Planul determinat de punctele  $A, A', C$  este planul care verifică condiția problemei.

Unicitatea planului  $\alpha$  rezultă din teorema 2.

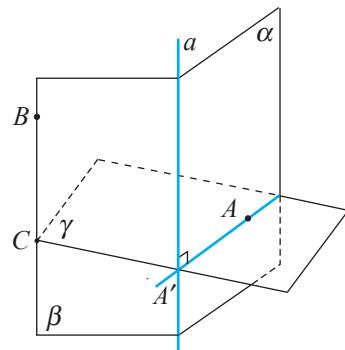


Fig. 9.6

**Teorema 3.** Pentru orice plan și orice punct există o unică dreaptă care trece prin punctul dat și este perpendiculară pe planul dat.

Prezentăm unele *proprietăți ale perpendicularității dreptelor și planelor*.

**Teorema 4.** Dacă un plan este perpendicular pe una dintre două drepte paralele, atunci el este perpendicular și pe cealaltă dreaptă (fig. 9.7 a)).

**Teorema 5.** Dacă două drepte sunt perpendiculare pe același plan, atunci ele sunt paralele (fig. 9.7 b)).

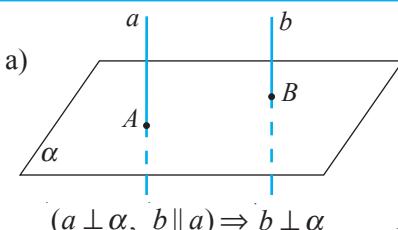
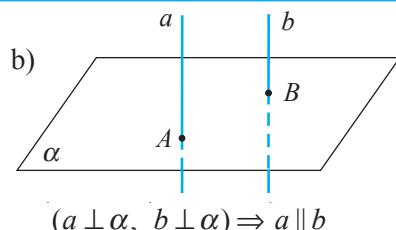


Fig. 9.7



**Exercițiu.** Demonstrați teoremele 4 și 5.

## Probleme propuse

### *Profilurile umanist, arte, sport*

- A** 1. Dreptunghiurile  $CDAB$  și  $CDEF$  au o latură comună și planele suport distincte. Să se arate că  $CD \perp BF$ .
2. Triunghiurile  $CAD$  și  $BAD$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  au o catetă comună și planele suport distincte. Să se arate că  $AD$  este perpendiculară pe dreapta  $MN$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $CD$ , iar  $N$  este mijlocul segmentului  $BD$ .
- B** 3. Dreapta suport a segmentului  $AB$  cu lungimea de 5 cm este perpendiculară pe planul  $\alpha$ . Segmentul  $AB$  intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $C$ . În planul  $\alpha$  se ia un punct  $D$ , astfel încât  $AD = 3$  cm,  $BD = 4$  cm. Să se determine lungimea segmentului  $CD$ .
4. Din vârful  $A$  al pătratului  $ABCD$  este construită perpendiculara  $AM$  pe planul pătratului. Să se determine  $MB$ ,  $MD$  și  $MC$ , știind că  $AB = 4$  cm,  $MA = 3$  cm.
5.  **Lucrați în perechi!** Din vârful  $A$  al triunghiului  $ACB$  dreptunghic în  $C$  este construită perpendiculara  $AE$  pe planul triunghiului. Să se afle ipotenuza  $AB$ , dacă  $AE = CB = a$ ,  $EC = b$ .
- C** 6. Din vârful  $A$  al dreptunghiului  $ABCD$ , pe planul dreptunghiului, este construită perpendiculara  $AE$ , astfel încât  $AE = 4$  cm. Să se determine  $DE$ ,  $CE$ ,  $BE$  și înălțimea triunghiului  $EBD$  dusă din vârful  $E$ , dacă  $AB = 6$  cm și  $AD = 4$  cm.

### *Profilul real*

- A<sub>1</sub>** 1. Distanțele de la punctele  $A$  și  $B$ , situate în diferite semispații mărginite de planul  $\alpha$ , până la acest plan sunt egale cu  $a$  și respectiv  $b$ . Să se afle lungimea segmentului  $AB$ , dacă  $A_1B_1 = c$ , unde  $A_1$  și  $B_1$  sunt punctele de intersecție a perpendicularelor ce trec prin punctele  $A$  și respectiv  $B$  pe planul  $\alpha$ .
2. Punctul  $D$ ,  $D \notin (ABC)$ , este egal depărtat de vîrfurile triunghiului isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Să se afle distanța  $DE$ , unde  $DE \perp (ABC)$ ,  $E \in (ABC)$ , dacă  $BC = a$ ,  $AD = b$ ,  $m(\angle CAB) = \alpha$ .
- B<sub>1</sub>** 3. Punctul  $M$  este egal depărtat de vîrfurile poligonului  $ABCDE$ . Să se arate că segmentele  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  și  $OE$  sunt congruente, unde  $MO \perp (ABC)$ ,  $O \in (ABC)$ .
4. Punctul  $E$ , ce nu aparține planului dreptunghiului  $ABCD$ , este egal depărtat de vîrfurile dreptunghiului. Să se arate că dreapta ce trece prin punctul  $O$  de intersecție a diagonalelor dreptunghiului  $ABCD$  și punctul  $E$  este perpendiculară pe planul suport al dreptunghiului  $ABCD$ .
- C<sub>1</sub>** 5.  **Lucrați în perechi!** Din vârful  $A$  al paralelogramului  $ABCD$  pe planul lui este construită perpendiculara  $AE$  de lungime  $c$ . Să se determine  $BE$ ,  $CE$ ,  $DE$ , dacă  $AB = a$ ,  $AD = b$  și  $m(\angle BAD) = \alpha$ .
6. Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt concurente în punctul  $A$ . Prin punctul  $A$  se construiesc planele  $\alpha$  și  $\beta$ , astfel încât  $d_1 \perp \alpha$ ,  $d_2 \perp \beta$ . Să se arate că linia de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$  este perpendiculară pe planul definit de dreptele  $d_1$  și  $d_2$ .

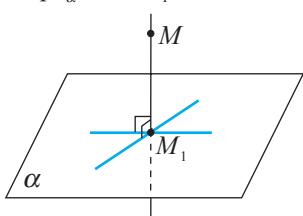
## §2 Proiecții ortogonale.

### Unghi format de o dreaptă și un plan

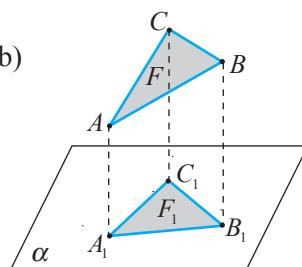
**Definiție.** Proiecție ortogonală a unui punct  $M$  pe un plan  $\alpha$  se numește piciorul perpendicularării (punctul  $M_1$ ) construit din  $M$  pe acest plan (fig. 9.8 a)).

Se notează:  $pr_\alpha M = M_1$ .

a)



b)



$$(MM_1 \perp \alpha, M_1 \in \alpha) \Rightarrow M_1 = pr_\alpha M$$

$$F_1 = pr_\alpha F$$

Fig. 9.8

Proiecția ortogonală a unei figuri geometrice  $F$  pe un plan este mulțimea  $F_1$  formată din proiecțiile ortogonale ale tuturor punctelor figurii geometrice date pe acest plan (fig. 9.8 b)).

Fie o dreaptă  $a$  și un punct  $M$ .

Ştim că există un unic plan  $\alpha$  care trece prin punctul  $M$  și este perpendicular pe dreapta  $a$ . Fie  $M_1$  punctul de intersecție a dreptei  $a$  cu planul  $\alpha$  (fig. 9.9 a),  $M \in a$ ; fig. 9.9 b),  $M \notin a$ .

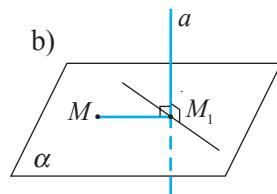
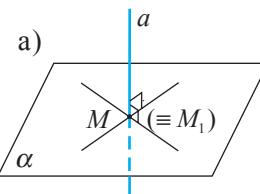


Fig. 9.9

**Definiție.** Punctul  $M_1$  se numește proiecție ortogonală a punctului  $M$  pe dreapta  $a$ , iar lungimea segmentului  $MM_1$  se numește distanță de la punctul  $M$  la dreapta  $a$  (fig. 9.9).

**Observație.** În cele ce urmează, prin proiecție se va înțelege proiecția ortogonală.

**Teorema 6.** Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

#### Demonstratie

Dacă dreapta  $a$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ , atunci proiecția ei este punctul de intersecție a acestei drepte cu planul  $\alpha$ .

Considerăm că dreapta  $a$  nu este perpendiculară pe planul  $\alpha$  (fig. 9.10).

Fie  $A$  și  $B$  puncte distincte pe dreapta  $a$ . Notăm cu  $A_1$  și  $B_1$  proiecțiile lor pe planul  $\alpha$ .

În baza teoremei 5, dreptele  $AA_1$  și  $BB_1$  sunt paralele, deci ele determină un plan  $\beta$ .

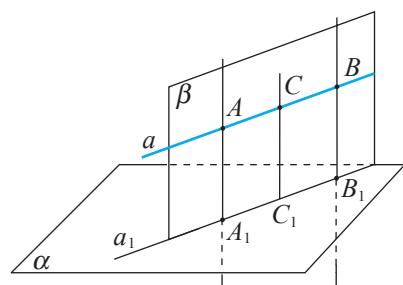


Fig. 9.10

Planului  $\beta$  îi aparține și dreapta  $a$ , și dreapta  $a_1 = A_1B_1$ . Dacă luăm un punct arbitrar  $C \in a$ , constatăm că punctul  $C_1 = pr_\alpha C$  aparține planului  $\beta$  ( $CC_1 \parallel AA_1$  și  $C \in a \subset \beta$ ), deci  $C_1$  aparține dreptei de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$ , care este dreapta  $A_1B_1$ .

Astfel, am demonstrat că proiecția oricărui punct al dreptei  $a$  este un punct al dreptei  $a_1$ , adică  $pr_\alpha a = a_1$ . ►

**Teorema 7 (teorema celor trei perpendiculare).** Dacă proiecția  $a_1$  pe planul  $\alpha$  a unei drepte oblice  $a$  este perpendiculară pe o dreaptă  $b$  din planul  $\alpha$ , atunci și dreapta  $a$  este perpendiculară pe dreapta  $b$ .

#### Demonstrație

Fie dreapta  $AA_1$  perpendiculară pe planul  $\alpha$ ,  $A \in a$ ,  $A_1 \in \alpha$ , deci  $AA_1 \perp b \subset \alpha$  (fig. 9.11). Din enunțul teoremei rezultă că dreapta  $b$  este perpendiculară pe  $a_1$ , adică dreapta  $b$  este perpendiculară și pe dreapta  $AA_1$ , și pe dreapta  $BA_1$ . Deducem că dreapta  $b$  este perpendiculară pe planul determinat de punctele  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$ . Prin urmare, dreapta  $b$  este perpendiculară și pe dreapta  $AB = a$  care aparține acestui plan. ►

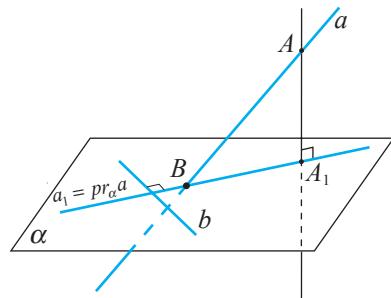


Fig. 9.11

**Teorema 8 (reciproca teoremei celor trei perpendiculare).** Dacă dreapta  $a$  este perpendiculară pe o dreaptă  $b$  din planul  $\alpha$  și nu este perpendiculară pe plan, atunci proiecția  $a_1$  a dreptei  $a$  pe planul  $\alpha$  este perpendiculară pe dreapta  $b$ .

#### Demonstrație

Dreapta  $AA_1$  (fig. 9.11) este perpendiculară pe planul  $\alpha$ , deci  $AA_1 \perp b \subset \alpha$  și din enunțul teoremei rezultă că  $AB \perp b$ , adică dreapta  $b$  este perpendiculară pe planul  $ABA_1$ . Prin urmare,  $b$  este perpendiculară pe dreapta  $a_1 = BA_1 = pr_\alpha a$ . ►

Fie un plan  $\alpha$  și un punct  $A$  ce nu aparține planului (fig. 9.12).

**Definiții.** • **Segment perpendicular** pe planul  $\alpha$ , construit din punctul  $A$ , se numește segmentul ce unește punctul  $A$  cu punctul de pe plan și care aparține dreptei perpendiculară pe plan. Extremitatea ce aparține planului se numește **piciorul perpendicularării**.

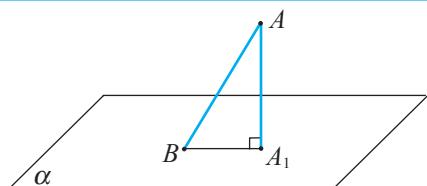


Fig. 9.12

• **Segment oblic** pe planul  $\alpha$ , construit din punctul  $A$ , se numește segmentul ce unește punctul  $A$  cu orice punct al planului  $\alpha$  și nu este perpendiculară pe plan. Extremitatea ce aparține planului se numește **piciorul oblicei** (fig. 9.12).

**Teorema 9.** Fie un plan  $\alpha$ , un punct  $A$  ce nu aparține planului  $\alpha$ , un punct  $B$  ce aparține planului  $\alpha$  și  $A_1 = pr_\alpha A$ . Atunci  $AA_1 \leq AB$  (fig. 9.12).

**Demonstrație**

Într-adevăr, segmentul  $AA_1$  este perpendicular pe planul  $\alpha$ , deci și pe segmentul  $BA_1$ . Rezultă că triunghiul  $AA_1B$  este dreptunghic în  $A_1$ . Prin urmare,  $AA_1 \leq AB$ , egalitatea având loc numai dacă  $B$  coincide cu  $A_1$  ( $AB \perp \alpha$ ). ►

**Definiție.** Distanță de la un punct la un plan se numește lungimea segmentului având o extremitate punctul dat și cealaltă – proiecția punctului pe acest plan.

În figura 9.12, lungimea segmentului  $AA_1$  este distanța de la punctul  $A$  la planul  $\alpha$ .

**Teorema 10.** Dacă între laturile triunghiurilor  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  au loc relațiile  $[AB] \equiv [A_1B_1]$ ,  $[AC] \equiv [A_1C_1]$  și  $BC > B_1C_1$ , atunci  $m(\angle BAC) > m(\angle B_1A_1C_1)$  (fig. 9.13).

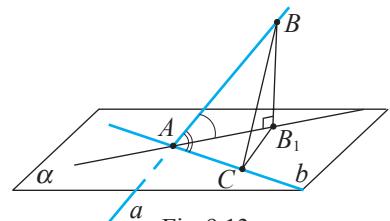


Fig. 9.13

În cazul în care dreapta nu este perpendiculară pe plan este justificată următoarea

**Definiție.** Unghi format de o dreaptă și un plan se numește unghiul ascuțit format de această dreaptă și proiecția ei ortogonală pe acest plan.

În figura 9.14, unghiul  $\varphi$  este unghiul format de dreapta  $a$  și planul  $\alpha$ .

**Observație.** Prin **unghiul format de un segment și un plan** vom înțelege unghiul format de dreapta suport a segmentului dat și acest plan.

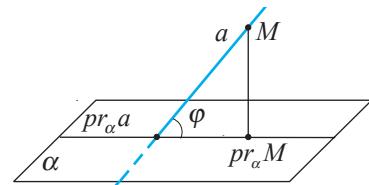


Fig. 9.14

**Teorema 11.** Lungimea proiecției unui segment pe un plan este egală cu produsul dintre lungimea acestui segment și cosinusul unghiului format de segment și plan.

**Demonstrație**

Fie un segment  $AB$ , un plan  $\alpha$  ( $[AB] \nparallel \alpha$ ), proiecțiile  $A_1$  și  $B_1$  ale punctelor  $A$  și respectiv  $B$  pe planul  $\alpha$  și  $D$  – punctul de intersecție a dreptei  $AB$  cu planul  $\alpha$  (fig. 9.15).

Fie  $C$  punctul de intersecție a dreptei  $BB_1$  cu dreapta ce trece prin  $A$  paralelă cu dreapta  $A_1B_1$ . Constatăm că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $C$  și au loc relațiile  $m(\angle BAC) = m(\angle ADA_1) = \varphi$ . Astfel, în triunghiul  $ABC$  avem  $AC = AB \cos \varphi$  și, cum  $AC = A_1B_1$ , rezultă că  $A_1B_1 = AB \cos \varphi$ .

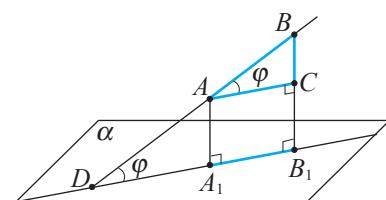


Fig. 9.15

Fie punctele  $A, B$  situate în semispații diferite limitate de planul  $\alpha$  (fig. 9.16).

Atunci  $A_1B_1 = A_1D + DB_1$  și din triunghiurile  $AA_1D$  și  $BB_1D$  avem

$$A_1D = AD \cos \varphi, \quad DB_1 = DB \cos \varphi.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= AD \cos \varphi + DB \cos \varphi = \\ &= (AD + DB) \cos \varphi = AB \cos \varphi. \end{aligned}$$

Celelalte cazuri ( $[AB] \parallel \alpha, \dots$ ) sunt evidente. ►

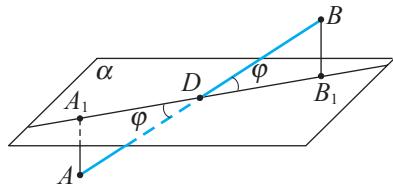


Fig. 9.16

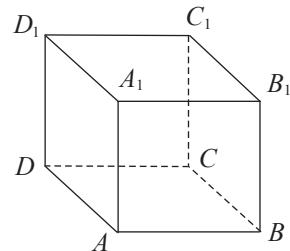
### Probleme propuse

#### *Profilurile umanist, arte, sport*

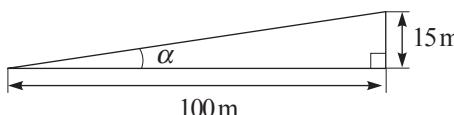
- A** 1. Segmentul  $A_1B_1$  este proiecția ortogonală a segmentului  $AB$  pe planul  $\alpha$ . Să se afle:
- lungimea segmentului  $A_1B_1$ , dacă  $AA_1 = 9$  cm,  $BB_1 = 13$  cm,  $AB = 5$  cm;
  - cosinusul unghiului format de segmentul  $AB$  și planul  $\alpha$ .
2. **Lucrați în perechi!** Dintr-un punct care nu aparține unui plan sunt construite două oblice la acest plan, cu lungimile de 30 cm și 25 cm. Diferența lungimilor proiecțiilor oblicelor este egală cu 11 cm. Să se determine distanța de la punctul la plan.
- B** 3. Într-o încăpere, o grindă este instalată pe doi piloni, cu lungimile de 3 m și 5 m. Să se afle distanța de la podea la punctul ce împarte lungimea grindei în raportul de 2 : 3, considerând de la pilonul mai scurt.
4. (BAC, 2011) În desen,  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  este un cub.
- Desenați proiecția ortogonală a segmentului  $BD_1$  pe planul  $(ABB_1)$ .
- 
- C** 5. Distanța de la punctul  $A$  la planul  $\alpha$  este de 3 cm. Oblicele  $AC$  și  $AB$  ( $C, B \in \alpha$ ) la planul  $\alpha$  au lungimile de 6 cm. Punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $CB$ , iar  $A_1M = pr_{\alpha}A$ . Să se determine lungimea segmentului  $A_1M$ , dacă:
- $m(\angle CAB) = 90^\circ$ ;
  - $m(\angle CAB) = 60^\circ$ .
6. Distanțele de la punctele  $A$  și  $B$ , situate în același semispațiu mărginit de planul  $\alpha$ , până la acest plan sunt egale cu  $a$  și respectiv  $b$ . Să se afle lungimea segmentului  $AB$ , dacă  $A_1B_1 = c$ , unde  $A_1$  și  $B_1$  sunt punctele de intersecție a perpendicularelor din  $A$  și respectiv  $B$  pe planul  $\alpha$ .

*Profilul real*

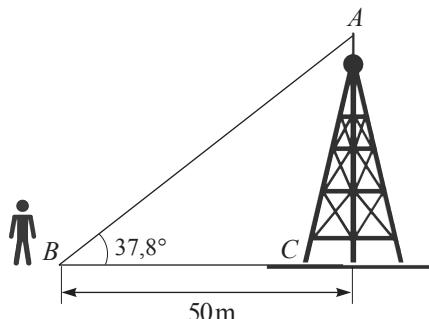
- A<sub>1</sub>** 1. (BAC, 2013) Completați caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată. Cubul  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  are muchia de 2 cm. Atunci distanța de la vârful  $B_1$  la planul  $(AA_1C)$  este egală cu  $\boxed{\quad}$  cm.



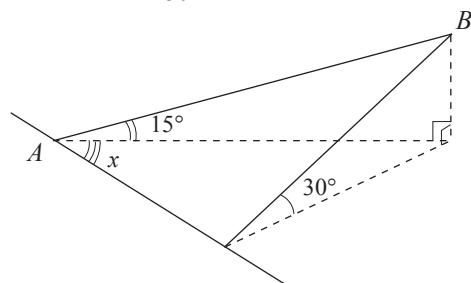
- B<sub>1</sub>** 2. a) Panta drumului este de 15% dacă la parcurgerea unei distanțe de 100 m pe orizontală urcăm la o înălțime de 15 m. Să se afle unghiul  $\alpha$ .  
b) Care este unghiul ce corespunde unei pante de 100%?



3. Să se afle înălțimea releului de televiziune, dacă observatorul ce se află în planul orizontal la o distanță de 50 m de baza releului are înălțimea de 1,65 m, iar unghiul  $ABC$  format de semidreapta orizontală  $BC$  și semidreapta  $BA$  orientată de la ochii observatorului spre vârful releului este de  $37,8^\circ$ .



4. Unghiul pantei unui munte este de  $30^\circ$ . Sub ce unghi față de poalele muntelui (vezi figura alăturată) trebuie construit un drum rectiliniu  $AB$ , pentru ca unghiul lui de înclinație față de planul orizontului să fie egal cu  $15^\circ$ ? (Unghiul pantei este unghiul liniar al unghiului diedru format de planul muntelui și planul orizontal.)



5. Punctul  $D$  este situat la distanța de 9 cm de la vârfurile triunghiului  $ABC$  dreptunghic în  $C$ ,  $AC = 8$  cm,  $BC = 6$  cm. Să se determine distanța  $DE$ , unde  $DE \perp (ABC)$ ,  $E \in (ABC)$ .

- C<sub>1</sub>** 6. Semidreapta  $[OC]$  formează unghiuri congruente cu semidreptele  $[OA]$  și  $[OB]$ . Să se afle lungimea proiecției segmentului  $OC$  pe planul  $AOB$ , dacă  $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha$ ,  $m(\angle AOB) = 2\beta$ , iar  $OC = c$ .

### §3 Unghi format de două plane (unghi diedru)

Amintim că orice dreaptă  $a$  dintr-un plan  $\alpha$  împarte mulțimea punctelor planului  $\alpha$  ce nu aparțin dreptei  $a$  în două submulțimi  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$ , care se numesc **semiplane deschise**. Dreapta  $a$  determină atât semiplanul  $\alpha_1$ , cât și semiplanul  $\alpha_2$ . Reuniunea semiplanului deschis cu dreapta ce-l determină se numește **semiplan închis**. Planul  $\alpha$  se numește **plan suport** și pentru semiplanul  $\alpha_1$ , și pentru semiplanul  $\alpha_2$ .

**Definiție.** Reuniunea a două semiplane închise, limitate de aceeași dreaptă, se numește **unghi diedru** (fig. 9.17).

Unghiul diedru al semiplanelor  $\alpha_1, \beta_1$  se notează  $\angle(\alpha_1\beta_1)$ .

Dreapta  $a$  se numește **muchia unghiului diedru**  $\angle(\alpha_1\beta_1)$ , iar semiplanele  $\alpha_1$  și  $\beta_1$  se numesc **fețele unghiului diedru**.

Unghiul diedru format de două semiplane ce coincid se numește **unghi nul**.

Unghiul diedru format de semiplanele  $\alpha_1$  și  $\beta_1$  a căror reuniune este un plan se numește **unghi diedru plat**.

**Unghi diedru propriu** se numește unghiul diedru diferit de cel nul și de cel plat.

**Interiorul unghiului diedru propriu** se numește intersecția semispațiului determinat de planul suport al lui  $\alpha_1$ , ce conține semiplanul  $\beta_1$ , cu semispațiul determinat de planul suport al lui  $\beta_1$ , ce conține semiplanul  $\alpha_1$ .

Fie  $\angle(\alpha_1\beta_1)$  un unghi diedru propriu și  $A$  un punct oarecare pe muchia  $m$  a acestuia. Din punctul  $A$ , în fiecare dintre semiplanele  $\alpha_1$  și  $\beta_1$ , construim perpendicularele  $a$  și  $b$  (fig. 9.18 a)). Astfel, am obținut un unghi plan cu vârful în punctul  $A$ , laturile lui fiind semidreptele  $[AB]$  și  $[AC]$  ( $C \in b, B \in a$ ).

Acest unghi plan poate fi obținut la intersecția unghiului diedru  $\angle(\alpha_1\beta_1)$  cu un plan  $\gamma$  perpendicular pe muchia  $m$  a acestui unghi, ce trece prin punctul  $A$  (fig. 9.18 b)).



Fig. 9.18

**Definiție.** Intersecția unui unghi diedru cu un plan perpendicular pe muchia lui se numește **unghi liniar (unghi plan) al unghiului diedru**.

Se poate arăta că toate unghiurile liniare ale unuia și aceluiași unghi diedru sunt congruente.

**Definiție.** Măsură a unghiului diedru se numește măsura unui unghi liniar al acestuia.

Revenind la figura 9.18 a), scriem că

$$m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = m(\angle BAC).$$

**Definiții.** • Semiplanele  $\alpha_1$  și  $\beta_1$  se numesc **perpendiculare** dacă  $m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = 90^\circ$ .  
• În acest caz, planele suport respective,  $\alpha$  și  $\beta$ , se numesc **plane perpendiculare**.

Se notează:  $\alpha_1 \perp \beta_1$ , respectiv  $\alpha \perp \beta$ .

**Teorema 12.** Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan.

### Demonstratie

**Necesitatea.** Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci dreapta suport a oricărei laturi a unghiului liniar este perpendiculară pe planul ce nu o conține.

**Suficiența.** Fie planul  $\alpha$  trece prin dreapta  $a$ , perpendiculară pe planul  $\beta$  (fig. 9.19).

Planele  $\alpha$  și  $\beta$  se intersectează după dreapta  $c$ , iar dreptele  $a$  și  $c$  se intersectează în punctul  $A$ .

În planul  $\beta$ , prin punctul  $A$  construim o dreaptă  $b$  perpendiculară pe dreapta  $c$ . Constatăm că unghiul  $BAC$  este unghiul liniar al unghiului diedru format de planele  $\alpha$  și  $\beta$ . Cum  $a \perp \beta$ , rezultă că  $a \perp b$ . Așadar,  $m(\angle(\alpha\beta)) = 90^\circ$ , de unde  $\alpha \perp \beta$ . ►

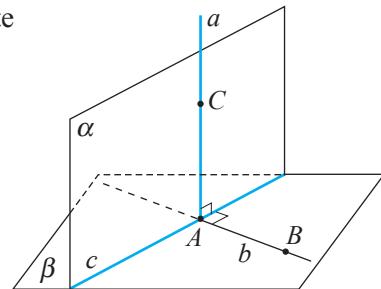
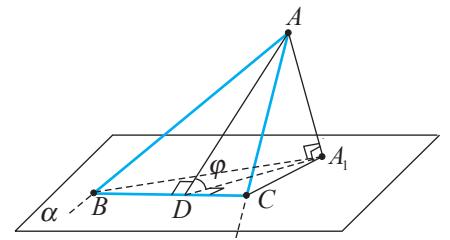


Fig. 9.19

**Teorema 13.** Dacă  $\varphi$  este măsura unghiului diedru format de planul unui triunghi  $ABC$  și un plan  $\alpha$ ,  $\mathcal{A}_\Delta$  – aria triunghiului  $ABC$ ,  $\mathcal{A}_{pr_\alpha \Delta}$  – aria proiecției ortogonale a triunghiului  $ABC$  pe planul  $\alpha$ , atunci  $\mathcal{A}_{pr_\alpha \Delta} = \mathcal{A}_\Delta \cdot \cos \varphi$  (fig. 9.20).



$$\Delta_{pr_\alpha \Delta} = pr_\alpha \Delta_{ABC}, \quad \mathcal{A}_{pr_\alpha \Delta} = \mathcal{A}_{\Delta_{ABC}} \cdot \cos \varphi$$

Fig. 9.20

### Probleme rezolvate

1. Fie triunghiul isoscel  $ABC$  cu  $AB = BC = 8$  cm și  $AC = 5$  cm. Din vîrfurile  $A$  și  $B$  se construiesc perpendicularele  $AA_1$  și  $BB_1$  în același semispațiu mărginit de planul  $ABC$ , astfel încât  $AA_1 = 12$  cm și  $BB_1 = 6$  cm (fig. 9.21). Să se determine:

- lungimea segmentului  $CD_1$ , unde  $D_1$  este mijlocul  $[A_1B_1]$ ;
- distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $A_1B_1$ ;
- măsura unghiului diedru format de planele  $ABC$  și  $A_1B_1C$ .

*Rezolvare:*

a) Distanța de la punctul  $C$  la mijlocul  $D_1$  al segmentului  $A_1B_1$  se calculează folosind triunghiul dreptunghic  $DD_1C$  ( $AA_1 \parallel DD_1 \Rightarrow DD_1 \perp (ABC)$ ). Segmentul  $DD_1$  este linie mijlocie a trapezului  $AA_1B_1B$ , deci  $DD_1 = 9$  cm, iar segmentul  $DC$  este mediană a triunghiului  $ABC$ . Folosind formula de calcul al lungimii medianei unui triunghi ( $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ ), obținem că  $DC = \frac{1}{2}\sqrt{114}$  cm.

Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic  $CDD_1$ , obținem că  $D_1C = \sqrt{DC^2 + DD_1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 114 + 81} = \sqrt{109,5}$  (cm).

b) Distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $A_1B_1$  este egală cu înălțimea triunghiului  $A_1CB_1$ , construită din vârful  $C$ . Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic  $A_1AC$ , obținem că  $A_1C = 13$  cm. În mod analog, în triunghiurile dreptunghice  $B_1BC$  și  $A_1KB_1$  avem  $B_1C = 10$  cm și respectiv  $A_1B_1 = 10$  cm.

Distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $A_1B_1$  poate fi determinată astfel:  $h_c = \frac{2\mathcal{A}_{A_1B_1C}}{A_1B_1}$ .

Aflăm aria triunghiului  $A_1B_1C$  folosind formula lui Heron<sup>1</sup>:

$$\mathcal{A}_{A_1B_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{33}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{13}{4}\sqrt{231} \text{ (cm).}$$

$$\text{Atunci } h_c = \frac{2 \cdot \frac{13}{4}\sqrt{231}}{10} = \frac{13}{20}\sqrt{231} \text{ (cm).}$$

c) Triunghiul  $ABC$  este proiecția triunghiului  $A_1B_1C$  pe planul triunghiului  $ABC$ . Prin urmare, măsura  $\varphi$  a unghiului diedru format de planele  $ABC$  și  $A_1B_1C$  se determină folosind relația  $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{A_1B_1C} \cdot \cos \varphi$ .

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5}{4}\sqrt{231} \text{ cm}^2, \text{ deci } \cos \varphi = \frac{5}{13}, \text{ iar } \varphi = \arccos \frac{5}{13}.$$

$$\text{Răspuns: a) } \sqrt{109,5} \text{ cm; b) } \frac{13}{20}\sqrt{231} \text{ cm; c) } \varphi = \arccos \frac{5}{13}.$$

**Observație.** Problema 1 c) arată că măsura unui unghi diedru poate fi calculată fără a construi unghiuri liniare ale unghiului diedru respectiv.

**2.** Semidreptele necoplanare  $[OA]$ ,  $[OB]$ ,  $[OC]$  cu originea comună sunt construite astfel încât  $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha < 90^\circ$ ,  $m(\angle AOB) = 2\beta$  (fig. 9.22).

a) Să se demonstreze că proiecția semidreptei  $[OC]$  pe planul  $OAB$  este bisectoarea unghiului  $AOB$ .

<sup>1</sup> Heron din Alexandria (sec. 1 d.H.) – matematician grec.

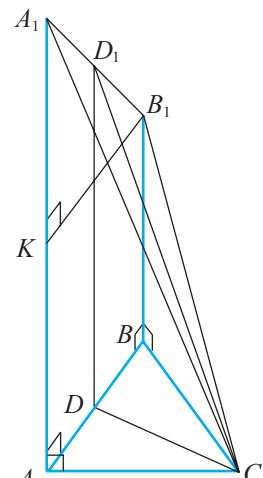
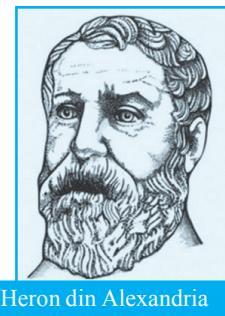


Fig. 9.21



Heron din Alexandria

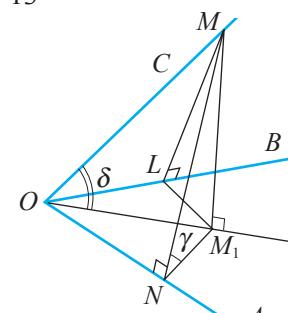


Fig. 9.22

- b) Să se determine măsura unghiului diedru care are muchia  $OA$ .  
c) Să se afle măsura unghiului format de dreapta  $OC$  și planul  $OAB$ .

*Rezolvare:*

a) Fie  $M_1$  proiecția unui punct  $M \in [OC]$  pe planul  $OAB$ , iar  $N$  și  $L$  punctele de intersecție a dreptelor ce trec prin punctul  $M$  și care sunt perpendiculare pe dreptele  $OA$  și respectiv  $OB$ . Dreptele  $NM_1$  și  $LM_1$  sunt proiecțiile dreptelor  $MN$  și respectiv  $ML$  pe planul  $OAB$ . Conform teoremei celor trei perpendiculare,  $NM_1 \perp OA$  și  $LM_1 \perp OB$ .

Cum  $\Delta ONM \stackrel{IU}{\equiv} \Delta OLM$ , rezultă că  $[ON] \equiv [OL]$  și  $[MN] \equiv [ML]$ .

Deoarece  $\Delta MNM_1 \stackrel{IC}{\equiv} \Delta MLM_1$ , rezultă că  $[NM_1] \equiv [LM_1]$ .

$\Delta ONM_1 \stackrel{CC}{\equiv} \Delta OLM_1 \Rightarrow \angle NOM_1 \equiv \angle LOM_1$ , adică semidreapta  $[OM_1]$  este bisectoare a unghiului  $AOB$ , c.c.t.d.

b) Din triunghiurile dreptunghice  $ONM$ ,  $ONM_1$ ,  $MNM_1$  obținem:

$$ON = OM \cos \alpha, \quad NM = OM \sin \alpha; \quad NM_1 = ON \operatorname{tg} \beta = OM \cos \alpha \operatorname{tg} \beta;$$

$$\cos \gamma = \frac{NM_1}{NM} = \frac{OM \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{OM \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta. \text{ Astfel, } \gamma = \arccos(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

c) Din triunghiurile dreptunghice  $ONM_1$  și  $MOM_1$  avem:

$$OM_1 = \frac{ON}{\cos \beta} = \frac{OM \cos \alpha}{\cos \beta}, \quad \cos \delta = \frac{OM_1}{OM} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \text{ de unde } \delta = \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right).$$

Răspuns: b)  $\gamma = \arccos(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$ ; c)  $\delta = \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right)$

3. Se știe că punctul  $M$ , care nu se conține în planul unui poligon, este egal depărtat de vârfurile acestuia. Să se demonstreze că acest poligon este inscriptibil.

*Rezolvare:*

Fie punctul  $M$  nu aparține planului poligonului  $A_1A_2A_3\dots A_n$  și  $[MA_1] \equiv [MA_2] \equiv [MA_3] \equiv \dots \equiv [MA_n]$  (fig. 9.23). Punctul  $O$  este proiecția punctului  $M$  pe planul poligonului. Atunci triunghiurile  $OMA_1$ ,  $OMA_2$ ,  $OMA_3$ , ...,  $OMA_n$  sunt dreptunghice și congruente (criteriul IC), de unde deducem că  $[OA_1] \equiv [OA_2] \equiv \dots \equiv [OA_n]$ . Prin urmare, punctul  $O$  din planul poligonului este egal depărtat de vârfurile lui, adică poligonul este inscriptibil și punctul  $O$  este centrul cercului circumscris.

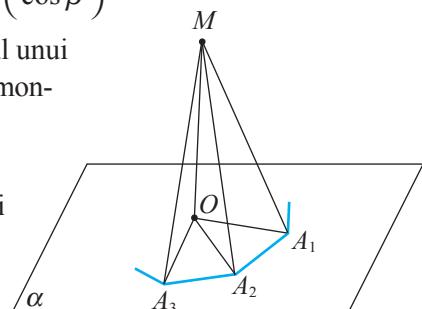


Fig. 9.23

**Observație.** Punctele dreptei  $OM$  sunt egal depărtate de vârfurile poligonului  $A_1\dots A_n$ .

4. În una dintre fețele unghiului diedru  $\angle(\alpha\beta)$  de măsură  $\varphi$  este dusă dreapta  $AD$ , care formează cu muchia  $b$  a unghiului diedru un unghi de măsură  $\delta$  (fig. 9.24). Să se determine măsura  $\gamma$  a unghiului format de dreapta  $AD$  cu cealaltă față a unghiului diedru.

*Rezolvare:*

Fie  $\angle ABC$  unghiul liniar al unghiului diedru  $\angle(\alpha\beta)$ . Conform condiției,  $m(\angle ABC) = \varphi$ ,  $m(\angle ADB) = \delta$ . Deoarece  $AC \perp \beta$ , rezultă că  $\angle ADC$  este cel vizat în problemă. Din triunghiurile dreptunghice  $ABD$ ,  $ACB$  și  $ACD$  avem:  $AB = AD \sin \delta$ ,

$$AC = AB \sin \varphi = AD \sin \delta \sin \varphi, \quad AC = AD \sin \gamma.$$

De aici obținem  $AD \sin \gamma = AD \sin \delta \sin \varphi$ .

Prin urmare,  $\sin \gamma = \sin \delta \sin \varphi$ . Deci,  $\gamma = \arcsin(\sin \delta \cdot \sin \varphi)$ .

5. Fie punctul  $A \notin \alpha$  și din acest punct sunt construite oblica  $AB$  și perpendiculara  $AO$  pe planul  $\alpha$ , unde  $B$  este piciorul oblicei, iar  $O$  – piciorul perpendicularei. Prin piciorul oblicei este construită în planul  $\alpha$  dreapta  $BC$ , care formează cu proiecția oblicei un unghi de măsură  $\delta$ . Fie  $\varphi$  și  $\gamma$  mărimile unghiurilor formate de oblica  $AB$  cu proiecția ei  $OB$  și respectiv cu dreapta  $BC$  (fig. 9.25). Să se arate că  $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \delta$ .

*Rezolvare:*

Construim în planul  $\alpha$  dreapta  $OD \perp BC$ . Conform teoremei celor trei perpendiculare,  $AD \perp BC$ . Fie  $AB = x$ . Atunci din triunghiurile dreptunghice  $AOB$ ,  $BDO$  și  $ADB$  obținem:  $BO = x \cos \varphi$ ,  $BD = BO \cos \delta = x \cos \varphi \cos \delta$ ,  $BD = x \cos \gamma$ .

De aici rezultă:  $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \delta$ .

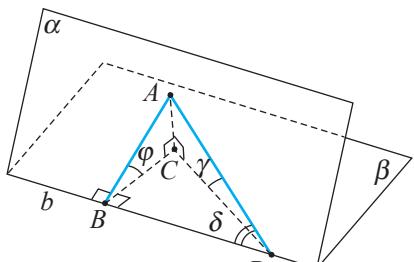


Fig. 9.24

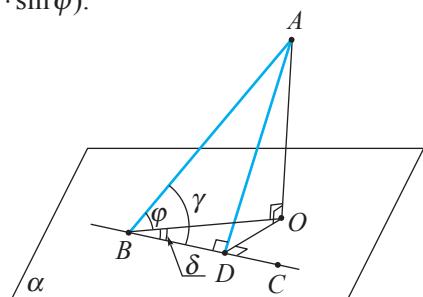


Fig. 9.25

## Probleme propuse

### *Profilurile umanist, arte, sport*

- A 1. Triunghiurile echilaterale  $ABC$  și  $ABD$  au o latură comună  $AB$  și planele suport ale acestor triunghiuri formează un unghi diedru drept. Să se determine lungimea segmentului  $CD$ , dacă  $AB = 2$  cm.
- B 2. Laturile triunghiului echilateral  $ABC$  sunt de 3 cm. Latura  $AB$  a triunghiului este situată în planul  $\alpha$ . Unghiul diedru format de planul  $ABC$  și planul  $\alpha$  are măsura de  $30^\circ$ . Să se afle:
  - a) lungimea proiecției medianei triunghiului  $ABC$  corespunzătoare vârfului  $C$  pe planul  $\alpha$ ;
  - b) distanța de la punctul  $C$  la planul  $\alpha$ .
- C 3. ***Lucrați în perechi!*** Prin baza mică a unui trapez este construit un plan. Distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor trapezului la plan este de 6 cm, iar raportul lungimilor bazelor este 3 : 2. Să se afle distanța de la baza mare la planul construit.
- 4. Prin una dintre laturile unui paralelogram este construit un plan. Distanța de la latura opusă până la plan este de 10 cm. Să se determine distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului până la plan.
- 5. ***Activitate practică.*** Determinarea relațiilor de perpendicularitate în curtea școlii.
- 6. ***Lucrați în grup!*** Proiect ***Aplicarea elementelor de perpendicularitate în construcțiile edificiilor din localitate.***

**Profilul real**

- A<sub>1</sub>** 1. Triunghiul  $A_1B_1C_1$  este proiecția ortogonală a  $\triangle ABC$  pe planul  $\alpha$ . Să se afle cosinusul unghiului diedru format de planul  $ABC$  cu planul  $\alpha$ , dacă  $AA_1 = BB_1 = 3$  cm,  $CC_1 = 8$  cm,  $A_1B_1 = 13$  cm,  $A_1C_1 = C_1B_1 = 12$  cm.
- B<sub>1</sub>** 2. Punctul  $E$  este egal depărtat de laturile rombului  $ABCD$  și nu aparține planului suport al rombului. Să se demonstreze că:
- a) proiecția punctului  $E$  pe planul rombului coincide cu punctul de intersecție a diagonalelor rombului;
  - b) cele patru unghiuri diedre formate de planele  $EAB, EBC, ECD, EDA$  cu planul  $\alpha$  sunt congruente.
3. Fie  $ABCD$  un patrulater convex și punctul  $E$ , astfel încât cele patru unghiuri diedre formate de planele  $EAB, EBC, ECD, EDA$  cu planul patrulaterului sunt congruente. Să se demonstreze că patrulaterul  $ABCD$  este circumscriptibil și că proiecția punctului  $E$  pe planul patrulaterului  $ABCD$  este egal depărtată de laturile lui.
- C<sub>1</sub>** 4. Triunghiul isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ) și triunghiul echilateral  $ADE$  se află în plane diferite și au o mediană comună,  $AF$ . Să se demonstreze că dreapta  $AF$  este perpendiculară pe planul determinat de punctele  $F, B, D$ .
5. Prin una dintre catetele triunghiului dreptunghic isoscel s-a construit un plan care formează cu cealaltă catetă un unghi de  $45^\circ$ . Să se afle măsura unghiului format de ipotenuză și acest plan.
6. În trapezul  $ABCD$ ,  $m(\angle BAD) = 60^\circ$ . Prin baza mare  $AB$  este dus un plan care formează cu latura  $AD$  un unghi de  $45^\circ$ . Să se afle raportul dintre aria trapezului și aria proiecției lui pe acest plan.
7. **Activitate practică.** Determinarea relațiilor de perpendicularitate în curtea școlii.
8.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicarea elementelor de perpendicularitate în spațiu în construcțiile edificiilor din localitate*.

**Probleme recapitulative****Profilurile umanist, arte, sport**

- A** 1. Dreptele  $AB, AC$  și  $AD$  sunt perpendiculare. Să se afle lungimea segmentului  $CD$ , știind că:
- a)  $AB = 6$  cm,  $BC = 14$  cm,  $AD = 3$  cm;    b)  $BD = 18$  cm,  $BC = 32$  cm,  $AD = 10$  cm;
  - c)  $AB = m$ ,  $BC = n$ ,  $AD = p$ ;                        d)  $BD = s$ ,  $BC = n$ ,  $AD = p$ .
2. Distanța de la punctul  $M$  la vârfurile unui triunghi echilateral este  $b$ . Să se afle distanța de la punctul  $M$  la planul triunghiului, dacă latura triunghiului are lungimea  $a$ , iar  $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .
3.  **Lucrați în perechi!** Din vârful  $B$  al trapezului isoscel  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) pe planul acestuia este construită perpendiculara  $BE$  cu lungimea de 4 cm. Să se determine distanțele  $d_1$  și  $d_2$  de la punctul  $E$  la dreptele  $CD$  și respectiv  $AD$ , știind că înălțimea trapezului este de 4 cm,  $BC = 4$  cm și  $AD = 12$  cm.
- B** 4. Din vârful  $A$  al hexagonului regulat  $ABCDEF$  pe planul acestuia este construită perpendiculara  $AM$ , astfel încât  $AM = AB$ . Să se afle măsura unghiurilor formate de planele:
- a)  $MDC$  și  $AEF$ ;    b)  $DCM$  și  $DEM$ .

5. Punctul  $D$  este egal depărtat de laturile triunghiului  $ABC$ . Știind că  $AB = AC = 6$  cm,  $BC = 4$  cm și că distanța de la punctul  $D$  la planul triunghiului este de  $\sqrt{2}$  cm, să se afle distanțele de la punctul  $D$  la laturile triunghiului.

- C 6. Un cablu trebuie întins de la un stâlp cu înălțimea de 8 m pe acoperișul unei clădiri cu înălțimea de 20 m. Distanța dintre stâlp și clădire este de 9 m. Să se determine lungimea cablului.

**Profilul real**

- A<sub>1</sub> 1. Se știe că punctul  $M$ , care nu aparține planului unui poligon, este egal depărtat de laturile poligonului. Să se demonstreze că acest poligon este circumscris unui cerc.

2. Punctul  $M$  este egal depărtat de laturile poligonului  $ABCDE$ . Să se arate că unghurile diedre formate de planele  $AMB, BMC, CMD, DME, EMA$  cu planul  $ABC$  au aceeași măsură.

3.  **Lucrați în perechi!** Dreapta  $a$  intersectează planul  $\alpha$ , iar  $P$  este un punct situat în acest plan. Există în planul  $\alpha$  o dreaptă ce trece prin  $P$  și care este perpendiculară pe dreapta  $a$ ?

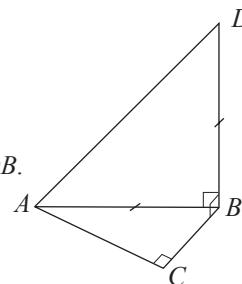
4. Prin vârful unghiului ascuțit al unui triunghi dreptunghic este construit un plan  $\alpha$  paralel cu o catetă a acestui triunghi. Catetele sunt de 30 cm și 40 cm, iar proiecția catetei mai mari pe planul  $\alpha$  este de  $2\sqrt{31}$  cm. Să se afle lungimea proiecției ipotenuzei pe planul  $\alpha$ .

- B<sub>1</sub> 5. Punctul  $M$  este egal depărtat de vîrfurile unui hexagon regulat cu latura de lungime  $a$ . Să se determine distanța de la punctul  $M$  la planul hexagonului, dacă distanța de la punctul  $M$  la un vîrf al hexagonului este  $b$ .

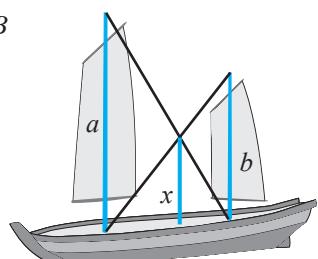
6. Punctul  $C$  nu aparține planului unghiului drept  $AOB$  și este egal depărtat de laturile unghiului. Să se afle distanța de la punctul  $C$  la planul unghiului, știind că  $CO = a$ , iar distanța de la punctul  $C$  la o latură a unghiului este  $b$ .

7. (BAC, 2011) Completăți astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

„Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic  
 $(m(\angle ACB) = 90^\circ)$ ,  $BD \perp (ABC)$ ,  $AB = DB$ .  
 $m(\angle DAB) + m(\angle DCA) = \boxed{\phantom{00}}$ ”.

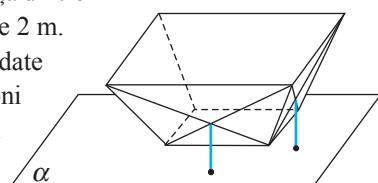


- C<sub>1</sub> 8. Două catarge ale unui iaht sunt unite cu funii, astfel încât fiecare vîrf al unui catarg este unit cu baza celuilalt catarg. La ce distanță de la puntea iahtului se află punctul de intersecție a funiilor, dacă înălțimile catargelor sunt  $a$  și  $b$ ?



9. Coșul de receptie a grăunțelor la o moară are patru pereți în formă de trapeze isoscele cu bazele de 0,4 m și 1,2 m. Distanța dintre planul orificiului de sus și planul bazei coșului este de 2 m. Pentru a mări rigiditatea pereților coșului, au fost sudate bare de fier de-a lungul diagonalelor fiecărei fețe și piloni verticali din punctul de intersecție a acestor bare până la planul bazei coșului.

Să se determine înălțimea pilonilor.



## Test sumativ

*Timp efectiv de lucru:*  
45 de minute

**Profilurile umanist, arte, sport**

- Determinați distanța de la mijlocul segmentului  $AB$  la un plan ce nu intersectează acest segment, dacă distanțele de la punctele  $A$  și  $B$  la plan sunt de 2,4 cm și respectiv 4,6 cm. (4)
- Lungimea laturii unui triunghi echilateral este de 6 cm. Un punct, care nu este conținut de planul triunghiului, se află la distanța de 3 cm de fiecare latură a triunghiului. Aflați distanța de la acest punct la planul triunghiului dat. (6)
- Punctul  $M$  este situat la distanțe egale de la vârfurile unui dreptunghi cu dimensiunile de 4 cm și 10 cm. Determinați distanța de la punctul  $M$  la dreptele suport ale laturilor dreptunghiului, dacă distanța de la punctul  $M$  la planul dreptunghiului este de 5 cm. (6)
- Latura triunghiului echilateral  $ABC$  este de 12 cm. Dreptele  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  formează cu planul triunghiului  $ABC$  unghiuri congruente de  $30^\circ$ . Aflați distanța de la punctul  $M$  la planul triunghiului  $ABC$ . (7)

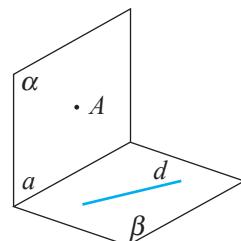
**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	23–22	21–20	19–17	16–14	13–11	10–8	7–6	5–4	3–2	1–0

*Timp efectiv de lucru:*  
45 de minute

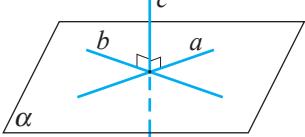
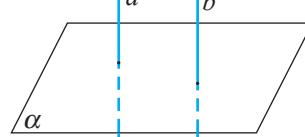
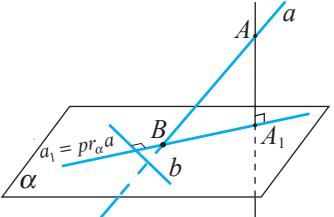
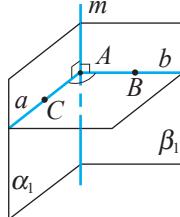
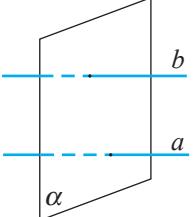
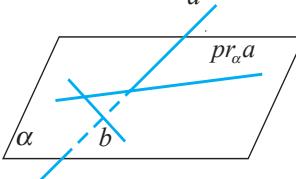
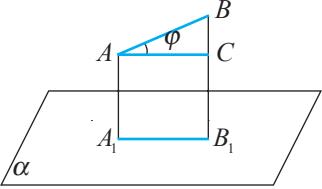
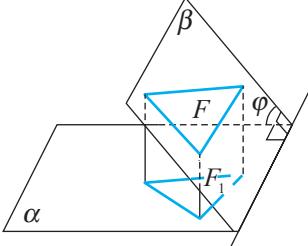
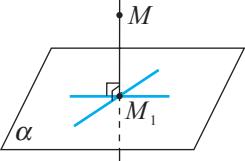
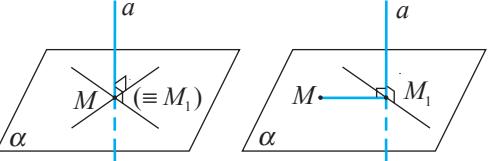
**Profilul real**

- Un segment intersectează un plan. Extremitățile segmentului sunt situate la distanțele  $a$  și  $b$  de la plan. Aflați distanța de la mijlocul segmentului la acest plan. (3)
- Prin mediana unui triunghi este construit un plan. Demonstrați că vârfurile triunghiului, ce nu aparțin planului construit, sunt egal depărtate de acest plan. (6)
- Lungimile laturilor unui triunghi isoscel  $ABC$  sunt de 5 cm, 5 cm și 2 cm. Distanța de la punctul  $M$  la planul  $ABC$  este de 8 cm, iar proiecția lui pe planul  $ABC$  coincide cu mijlocul celei mai mari înălțimi a triunghiului. Determinați distanța de la punctul  $M$  la laturile triunghiului. (6)
- Aflați măsura unghiului format de muchia laterală și planul bazei unei piramide patrulateră, dacă se știe că toate muchiile ei sunt congruente. (4)
- Unghiul diedru  $\angle(\alpha\beta)$  este drept. Punctul  $A \in \alpha$ , dreapta  $d \subset \beta$ . Să se construiască punctul  $M$ , proiecția ortogonală a punctului  $A$  pe dreapta  $d$ , indicând construcțiile ajutătoare în planele  $\alpha$  și  $\beta$ . (5)

**Baremul de notare**

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	24–23	22–21	20–18	17–15	14–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

## Perpendicularitatea în spațiu

 <p><math>(a \subset \alpha, b \subset \alpha, \alpha \nparallel b, c \perp a, c \perp b) \Rightarrow c \perp \alpha</math></p>	 <p><math>(a \parallel b, a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha</math></p>
 <p><math>(a \perp \alpha, AB - \text{oblică}, B \in \alpha, A_1 \in \alpha, A_1 B_1 \perp a) \Rightarrow AB \perp \alpha</math></p>	 <p><math>\angle(\alpha_1 \beta_1)</math> – unghi diedru, <math>\alpha \cap \beta = m</math>,  <math>(ABC) \perp m</math>, <math>m(\angle(\alpha_1 \beta_1)) = m(\angle BAC)</math></p>
 <p><math>(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b</math></p>	 <p><math>b \subset \alpha</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>a \perp b \Rightarrow pr_\alpha a \perp b</math></li> <li>2) <math>b \perp pr_\alpha a \Rightarrow a \perp b</math></li> </ol>
 <p><math>([A_1 B_1] \equiv pr_\alpha [AB], AC \parallel A_1 B_1) \Rightarrow</math>  <math>\Rightarrow</math> lungimea proiecției <math>[AB]</math> este <math>AB \cos \varphi</math></p>	 <p><math>(F \subset \beta, F_1 = pr_\alpha F, m(\angle(\alpha \beta)) = \varphi) \Rightarrow</math>  <math>\Rightarrow \mathcal{A}_{F_1} = \mathcal{A}_F \cos \varphi</math></p>
 <p><math>(MM_1 \perp \alpha, M_1 \in \alpha) \Rightarrow</math> lungimea <math>MM_1</math> este      egală cu distanța de la punctul <math>M</math> la planul <math>\alpha</math></p>	 <p><math>a \perp \alpha, M, M_1 \in \alpha, M_1 \in a, MM_1</math> – distanța      de la punctul <math>M</math> la dreapta <math>a</math></p>

**Obiective**

- ⇒ recunoașterea în situații variate și utilizarea în diferite contexte a noțiunilor: simetrie axială, simetrie centrală, simetrie față de un plan, \*translație, \*asemănare, \*rotație în spațiu;
- ⇒ utilizarea terminologiei aferente transformărilor geometrice în diverse contexte;
- ⇒ construirea imaginilor unor figuri obținute în urma transformărilor geometrice studiate;
- ⇒ utilizarea transformărilor geometrice în rezolvări de probleme;
- ⇒ aplicarea transformărilor geometrice pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

În clasele anterioare s-au studiat simetria axială, simetria centrală, translația, asemănarea în plan. De asemenea, a fost definită congruența triunghiurilor. Congruența figurilor mai complicate se definește cu ajutorul transformărilor geometrice, care au o aplicație largă. De exemplu, pentru a elabora un program ce permite vizualizarea pe ecranul calculatorului a unei figuri spațiale în mișcare sunt necesare transformările geometrice.

**§ 1 Noțiunea de transformare geometrică.****Transformări izometrice**

Fie  $X$  și  $Y$  mulțimi nevide de puncte din spațiu. Amintim că dacă fiecărui punct  $x$  al mulțimii  $X$  i se asociază un singur punct  $y$  al mulțimii  $Y$ , atunci este definită o **aplicație** a mulțimii  $X$  în mulțimea  $Y$ . Se notează:  $f: X \rightarrow Y$  sau  $X \xrightarrow{f} Y$ . Punctul  $y = f(x)$  se numește  **imaginea** punctului  $x \in X$ , iar  $x$  este o  **preimagine** a punctului  $y \in Y$ . Se mai spune că punctul  $x$  se aplică pe punctul  $y$  la aplicația  $f$ .

**Exemple**

1. Fie  $\alpha$  un plan și  $d$  o dreaptă ce intersectează acest plan. Prin orice punct  $M$  al spațiului trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta  $d$ . Fie  $M'$  punctul de intersecție a acestei drepte cu planul  $\alpha$  (fig. 10.1).

Aplicația spațiului în planul  $\alpha$ , care îi asociază fiecărui punct  $M$  al spațiului un punct  $M' \in \alpha$ , astfel încât  $MM' \parallel d$ , se numește **proiecțare paralelă** a spațiului pe planul  $\alpha$  în direcția dreptei  $d$ .

2. Fie  $O$  un punct din spațiu. Aplicația spațiului în el însuși, care îi asociază fiecărui punct  $M$  diferit de  $O$  un punct  $M'$ , astfel încât punctul  $O$  este mijlocul segmentului  $MM'$ ,

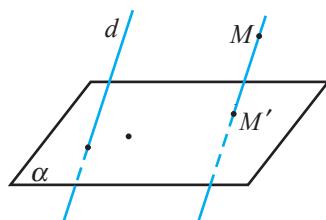


Fig. 10.1

iar punctului  $O$  – însuși punctul  $O$ , se numește **simetrie centrală** de centru  $O$  a spațiului (fig. 10.2).

Se notează:  $S_o$ .

Punctul  $O$  se numește în acest caz **centru de simetrie**.

Evident, dacă la simetria centrală, punctul  $M'$  este imaginea punctului  $M$ , atunci punctul  $M$  este imaginea punctului  $M'$ ; se spune că  $M$  și  $M'$  sunt **simetrice** față de centrul de simetrie.

Observăm că la proiectarea paralelă a spațiului pe un plan orice punct din plan posedă mai multe preimagini, iar la simetria centrală orice punct posedă o singură preimagine.

**Definiție.** Orice aplicație a spațiului pe el însuși la care fiecare punct posedă o singură preimagine se numește **transformare geometrică** a spațiului.

În continuare, pentru a ne exprima mai laconic, vom folosi cuvântul „transformare” în loc de „transformare geometrică”.

Fie  $F$  o figură din spațiu și  $g$  o transformare a spațiului. Figura  $F' = g(F)$ , ce constă din imaginile tuturor punctelor figurii  $F$  la transformarea  $g$ , se numește **imagină** a figurii  $F$  la transformarea  $g$ .

Deoarece transformările sunt un caz particular al aplicațiilor, ele posedă toate proprietățile generale ale aplicațiilor. Astfel, compunerea transformărilor este o transformare; are loc legea asociativă a compunerii transformărilor, se poate defini restricția transformării la o figură etc.

Dacă prin transformarea  $g$  figura  $F$  se aplică pe ea însăși, adică  $g(F) = F$ , atunci restricția transformării  $g$  la figura  $F$  se numește **transformare de simetrie** a figurii  $F$ . Pentru concizie, vom spune că  $g$  este transformare de simetrie a figurii  $F$ .

**Definiție.** Transformarea  $g$  a spațiului se numește **transformare de izometrie** (sau **izometrie**) a spațiului dacă pentru orice două puncte  $M$  și  $N$  ale spațiului și imaginile lor  $M' = g(M)$ ,  $N' = g(N)$  are loc egalitatea  $MN = M'N'$ .

Altfel spus, izometria este aplicația spațiului în el însuși care păstrează distanțele. Izometriile se mai numesc și **deplasări** sau **mișcări** ale spațiului.

Evident, transformarea identică a spațiului, adică transformarea care aplică fiecare punct al spațiului pe el însăși, este o izometrie.

Două figuri se numesc **congruente** dacă există o izometrie care aplică una dintre aceste figuri pe celalătă.

**Teorema 1.** Orice izometrie aplică trei puncte coliniare pe trei puncte coliniare. De asemenea, izometria aplică un punct situat între alte două puncte pe un punct situat între imaginile acestor două puncte.

### Demonstrație

Fie  $A, B, C$  puncte coliniare distincte. Atunci unul și numai unul dintre ele este situat între celelalte două. Fie  $B$  situat între  $A$  și  $C$ . Astfel, are loc egalitatea  $AB + BC = AC$ .

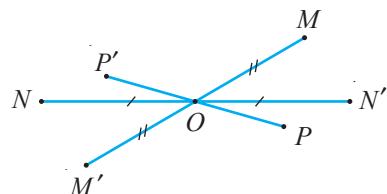


Fig. 10.2

Fie  $A', B', C'$  imaginile respective ale punctelor  $A, B, C$  la o izometrie. Din definiția izometriei rezultă egalitățile  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $BC = B'C'$ , iar din ele rezultă egalitatea  $A'B' + B'C' = A'C'$ . Adică  $B'$  este situat între  $A'$  și  $C'$ , iar aceasta înseamnă că punctele  $A', B', C'$  sunt coliniare. ►

**Definiție.** Punctul  $A$  se numește **punct invariant** al izometriei  $g$  dacă  $g(A) = A$ ; dreapta  $d$  se numește **dreaptă invariantă** a lui  $g$  dacă  $g(d) = d$ ; planul  $\alpha$  se numește **plan invariant** al lui  $g$  dacă  $g(\alpha) = \alpha$ .

Dacă toate punctele unei drepte sunt puncte invariante ale izometriei  $g$ , atunci această dreaptă se numește **invariantă punct cu punct** la această izometrie.

### Problema rezolvată

↳ Să se arate că dacă o izometrie nu are puncte invariante, atunci dreptele invariante ale acestei izometrii (în cazul în care există) sunt paralele.

*Rezolvare:*

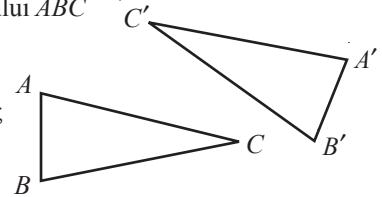
Presupunem contrariul, fie  $a$  și  $b$  drepte invariante neparalele la izometria dată  $g$ . Deci, aceste drepte se intersectează sau sunt necoplanare. Dacă dreptele  $a$  și  $b$  se intersectează în punctul  $M$ , atunci punctul  $M' = g(M)$  aparține acestor drepte (invariante), adică  $g(M) = M$ . Aceasta contrazice ipoteza problemei. În cazul în care dreptele  $a$  și  $b$  sunt necoplanare, există perpendiculara lor comună  $AB$ ,  $A \in a$ ,  $B \in b$ . Deoarece  $AB$  este cea mai mică distanță dintre dreptele  $a$  și  $b$ , rezultă că punctele  $A$  și  $B$  sunt puncte invariante la izometria  $g$  și iarăși obținem o contradicție.

### Probleme propuse

#### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Să se dea exemple de transformări geometrice în spațiu din diverse domenii.  
2. Să se decidă dacă proiecțarea paralelă a spațiului pe un plan este o izometrie.
- B<sub>1</sub>** 3. Fie unghiul  $AOB$  și o aplicație a spațiului în el însuși, astfel încât au loc următoarele două condiții:  
a) imaginea oricărui punct  $M$  al spațiului, ce nu aparține unghiului  $AOB$ , este însuși acest punct  $M$ ;  
b) imaginea oricărui punct ce aparține unghiului  $AOB$  este simetricul lui față de bisectoarea acestui unghi.  
Este această aplicație o transformare geometrică a spațiului? Dar o izometrie?  
4. În urma unei transformări geometrice a spațiului, o figură se aplică pe ea însăși. Este oare o astfel de transformare o izometrie a spațiului? Să se dea exemple.
- 5. Să se demonstreze că orice izometrie aplică:  
a) un segment pe un segment congruent cu el;  
b) un triunghi pe un triunghi congruent cu el.
- 6. Să se demonstreze că orice izometrie aplică un unghi pe un unghi congruent cu el.
- 7. Să se demonstreze că aplicația inversă izometriei este de asemenea o izometrie.

8.  **Lucrați în perechi!** Fie  $\Delta A'B'C'$  imaginea triunghiului  $ABC$  la izometria  $g$ . Să se construiască imaginea:
- medianei  $BK$ ;
  - bisectoarei  $BL$ ;
  - înălțimii  $BM$ ;
  - centrului de greutate  $G$ ;
  - centrului cercului înscris  $I$ ;
  - ortocentrului  $H$ ;
  - centrului  $O$  al cercului circumscris triunghiului  $ABC$



9. a) Să se arate că dacă  $A$  și  $B$  sunt puncte invariante distincte ale izometriei  $f$ , atunci orice punct al dreptei  $AB$  este invariant.

b) Poate oare izometria spațiului să posede exact două puncte invariante distincte?

10.  **Investigați!** a) Să se arate că dacă  $A, B, C$  sunt puncte necoliniare invariante ale izometriei  $f$ , atunci orice punct al planului  $ABC$  este invariant.  
b) Să se decidă dacă izometria spațiului posedă exact trei puncte invariante.

C<sub>1</sub> 11. Izometria  $f$  are un punct invariant.

a) Are oare un punct invariant izometria  $f^{-1}$ ? b) Dar izometria  $f \circ f$ ?

12. Izometria  $f$  posedă următoarea proprietate: pentru un punct  $A$ ,  $f(A) = B$ , iar  $f(B) = A$ . Să se decidă dacă izometria  $f \circ f$  are puncte invariante.

## §2 Simetria centrală

În § 1 am definit simetria spațiului față de un punct și am numit-o simetrie centrală.

**Teorema 2.** Simetria centrală a spațiului este o izometrie.

### Demonstrație

Presupunem că simetria centrală  $S_O$  aplică punctele arbitrar  $M$  și  $N$  ale spațiului pe punctele  $M'$  și respectiv  $N'$ .

Dacă punctele  $M, N$  și  $O$  sunt necoliniare (fig. 10.3 a)), afirmația teoremei rezultă din congruența triunghiurilor  $MON$  și  $M'ON'$  (criteriul LUL), deci  $MN = M'N'$ .

Dacă punctele  $M, N$  și  $O$  sunt coliniare și, de exemplu,  $M$  este situat între  $O$  și  $N$  (fig. 10.3 b)), atunci

$$MN = ON - OM = ON' - OM' = M'N'.$$

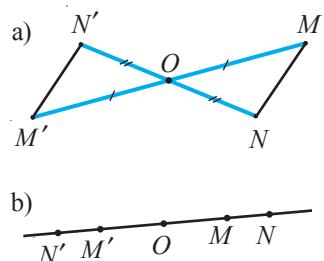


Fig. 10.3

Analog se obține egalitatea  $MN = M'N'$  și în celelalte cazuri de amplasare a punctelor  $M, N$  și  $O$  pe aceeași dreaptă. Așadar, simetria centrală păstrează distanțele dintre puncte, prin urmare, este o izometrie. ►

**Definiție.** Figurile  $F$  și  $F'$  se numesc **simetrice** față de punctul  $O$  dacă  $S_O(F) = F'$ .

În particular, dacă figura  $F$  este simetrică cu ea însăși față de punctul  $O$ , atunci  $F$  se numește **figură centrală simetrică**, iar  $O$  se numește **centru de simetrie al figurii**  $F$ . De exemplu, cercul, pătratul, sfera sunt figuri central simetrice.

### Problemă rezolvată

 Punctul  $A$  este situat în interiorul unghiului  $BOC$  (fig. 10.4). Să se construiască segmentul cu extremitățile pe laturile acestui unghi, astfel încât mijlocul lui să fie punctul  $A$ .

*Rezolvare:*

Prin punctul  $O' = S_A(O)$  ducem dreptele  $O'C'$  și  $O'B'$  paralele cu  $OC$  și respectiv  $OB$ . Segmentul  $DE$ , unde  $D \in O'C' \cap OB$  și  $E \in O'B' \cap OC$ , este segmentul care trebuie construit.

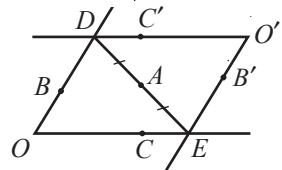


Fig. 10.4

### Probleme propuse

#### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Să se dea exemple de figuri geometrice central simetrice.  
 2. Să se stabilească dacă sunt simetrice orice două puncte ale spațiului față de un al treilea punct al spațiului.  
 3.  **Lucrați în perechi!** Câte centre de simetrie are figura formată din două drepte paralele? Ce figură reprezintă mulțimea acestor centre?  
 4. Să se decidă dacă sunt simetrice față de un punct două segmente necongruente.  
 5. Pot oare să fie simetrice față de un punct două segmente concurente? Dar neconcurente?
- B<sub>1</sub>** 6. Punctele  $A, B, C, D$  sunt situate în spațiu, astfel încât  $A$  și  $C$  sunt simetrice față de  $B$ , iar  $B$  și  $D$  sunt simetrice față de  $C$ . Ce se mai poate spune despre amplasarea acestor puncte?  
 7. Să se construiască simetricul unui triunghi față de:  
 a) un vârf al triunghiului;                                  b) mijlocul unei laturi a triunghiului.  
 8. Să se decidă dacă există puncte, drepte și plane invariante la o simetrie centrală.  
 9. Ce aplicație reprezintă compunerea  $S_o \circ S_o$ ?  
 10.  **Lucrați în perechi!** Poate fi un triunghi figură central simetrică?  
 11. Să se demonstreze că aplicația inversă unei simetrii centrale este aceeași simetrie centrală.  
 12. Să se demonstreze că simetria centrală aplică:  
 a) orice plan pe un plan paralel cu el;  
 b) orice două plane paralele pe două plane paralele;  
 c) două plane ce se intersectează după o dreaptă pe două plane ce se intersectează după imaginea dreptei respective;  
 d) două plane perpendiculare pe două plane perpendiculare.  
 13. Să se arate că, la o simetrie centrală, orice dreaptă și imaginea ei sunt coplanare.
- C<sub>1</sub>** 14.  **Lucrați în perechi!** Fie punctul  $A$  și figura  $F$ ,  $A \notin F$ . Se consideră mulțimea tuturor punctelor spațiului simetrice punctului  $A$  față de toate punctele figurii  $F$ . Să se determine această mulțime, dacă figura  $F$  este:  
 a) un segment;    b) o dreaptă;    c) un plan.  
 15. Să se arate că dacă figura  $F = [AB] \cup [CD]$  este central simetrică, atunci și figura  $[AC] \cup [BD]$  este central simetrică față de același centru.

### §3 Simetria axială

Fie dreapta  $d$  și punctul  $A \notin d$ . Punctul  $A'$  se numește **simetricul** punctului  $A$  față de dreapta  $d$  dacă  $AA' \perp d$ ,  $AA' \cap d = \{M\}$  și  $AM = A'M$ . Punctele dreptei  $d$  se numesc simetrice cu ele însăși față de această dreaptă.

**Definiție.** Transformarea spațiului care aplică fiecare punct al spațiului pe simetricul său față de dreapta dată  $d$  se numește **simetrie a spațiului față de dreapta  $d$**  sau **simetrie axială de axă  $d$** .

Se notează:  $S_d$ ,  $S_d(A) = A'$ ,  $S_d(B) = B'$  (fig. 10.5).

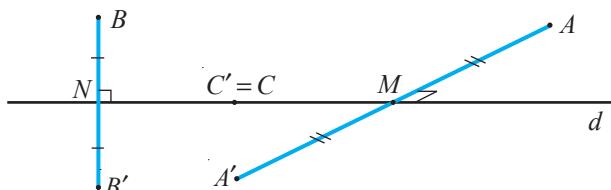


Fig. 10.5



**Teorema 3.** Simetria axială a spațiului este o izometrie.

#### Demonstrație

Presupunem că simetria axială de axă  $d$  aplică punctele arbitrarе  $A$  și  $B$  pe punctele  $A'$  și respectiv  $B'$ . Să demonstrăm că  $AB = A'B'$ . Dacă dreptele  $AB$  și  $d$  sunt coplanare, atunci este evident că  $AB = A'B'$ . Presupunem că dreptele  $AB$  și  $d$  sunt necoplanare (fig. 10.6) și  $BB' \cap d = \{N\}$ . Ducem prin punctul  $N$  dreapta paralelă cu  $AA'$  și construim pe ea segmentele simetrice  $A_1N$  și  $NA_1'$ , astfel încât  $A_1A_1' = AA'$ . Patrulaterul  $AA_1A_1'A'$  este dreptunghi și, prin urmare,  $AA_1 = A_1A'$ . Cum axa  $d$  este perpendiculară pe dreptele  $BB'$  și  $A_1A_1'$ , ea este perpendiculară și pe planul determinat de aceste drepte. De aici și din faptul că  $AA_1 \parallel d \parallel A_1A_1'$  rezultă că  $AA_1 \perp A_1B$  și  $A_1A_1' \perp A_1B'$ . Din congruența triunghiurilor  $A_1NB$  și  $A_1'NB'$  rezultă că  $BA_1 = B'A_1'$ . Având catetele congruente, rezultă că triunghiurile dreptunghice  $AA_1B$  și  $A_1'A_1'B'$  sunt congruente și deci  $AB = A_1B'$ . ►

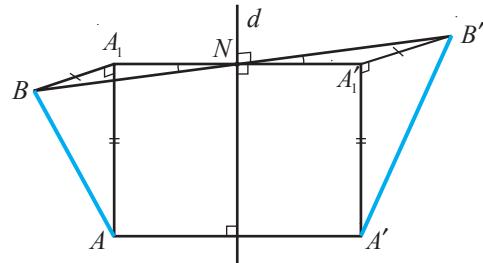


Fig. 10.6

Dacă la simetria axială  $S_d$ , figura  $F'$  este imaginea figurii date  $F$ , adică  $F' = S_d(F)$ , atunci aceste figuri se numesc **simetrice față de dreapta  $d$** .

Dreapta  $d$  este o axă de simetrie a figurii  $F$ , dacă simetria axială de axă  $d$  aplică această figură pe ea însăși:  $S_d(F) = F$ . De exemplu, dreptele ce conțin diagonalele și mediatoarele laturilor pătratului sunt axe de simetrie ale acestuia; orice dreaptă ce trece prin centrul cercului și aparține planului cercului sau este perpendiculară pe el este o axă de simetrie a cercului.

### Problemă rezolvată

Pe laturile  $AB$  și  $AC$  ale triunghiului  $ABC$  cu  $m(\angle A) < 90^\circ$  sunt date punctele fixe  $P$  și respectiv  $Q$  (fig. 10.7). Să se determine pe latura  $BC$  punctul  $X_1$ , astfel încât perimetru  $\Delta PQX$  să fie minim.

*Rezolvare:*

Fie  $P_1 = S_{BC}(P)$ , atunci  $P_1X = PX, \forall X \in (BC)$ .

Perimetru  $\Delta PQX$  este minim dacă suma  $P_1X + XQ$  este minimă; deci  $X = X_1$ , unde  $\{X_1\} = BC \cap P_1Q$ .

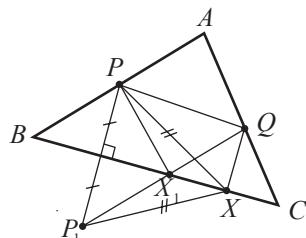
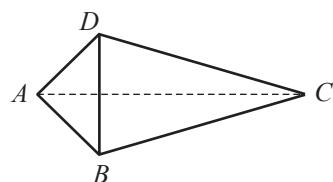


Fig. 10.7

### Probleme propuse

#### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. Să se dea exemple de figuri geometrice care:  
a) au cel puțin o axă de simetrie;    b) nu au axă de simetrie.
- B<sub>1</sub>** 2. Să se determine axele de simetrie ale cubului.
3. Să se construiască imaginea unui cub la simetria axială față de:  
a) dreapta suport a unei muchii a cubului;  
b) dreapta suport a diagonalei unei fețe.
4. Fie punctele distincte  $A$  și  $B$ . Să se indice axele tuturor simetriilor axiale care aplică  $A$  pe  $B$ . Ce figură este reuniunea tuturor acestor axe?
5. **Lucrați în perechi!** Să se indice toate axele de simetrie ale:  
a) unui segment;    b) unei semidrepte;    c) unei drepte;  
d) unui plan;    e) unui paralelogram.
6. Să se determine care poate fi poziția reciprocă la simetria axială:  
a) a unei drepte și a imaginii ei;    b) a unui plan și a imaginii lui.
7. **Lucrați în perechi!** Să se determine:  
a) dreptele invariante ale simetriei  $S_d$ ;  
b) dreptele invariante punct cu punct ale simetriei  $S_d$ .
- C<sub>1</sub>** 8. Să se determine poziția reciprocă a axei de simetrie  $d$  și a imaginii  $\alpha'$  a planului dat  $\alpha$  la simetria  $S_d$ , dacă:  
a)  $\alpha \supset d$ ;    b)  $d \perp \alpha$ ;    c)  $d$  este oblică față de  $\alpha$ .
9. Să se construiască imaginea figurii reprezentate la simetria față de dreapta  $AB$ , dacă punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare,  $ABC$  și  $ABD$  sunt triunghiuri isoscele cu baza comună  $AB$ .
10. **Investigați!** Să se dea exemple de simetrii axiale în biologie, în fizică, în natură, în tehnică, în arte, în construcții și în alte domenii.



## §4 Simetria față de un plan

Fie planul  $\alpha$  și punctele  $A, A'$  ce nu aparțin acestui plan. Punctele  $A$  și  $A'$  se numesc **simetrice față de planul  $\alpha$**  dacă acest plan este **planul mediator** al segmentului  $AA'$ , adică planul  $\alpha$  este perpendicular pe segmentul  $AA'$  și îl împarte în jumătate. Orice punct  $B$  al planului  $\alpha$  se consideră simetric cu el însuși (fig. 10.8).

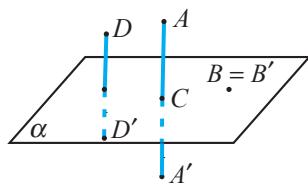


Fig. 10.8

**Definiție.** Transformarea spațiului care aplică orice punct al spațiului pe simetricul lui față de un plan dat  $\alpha$  se numește **simetrie a spațiului față de planul  $\alpha$** .

Se notează:  $S_\alpha$ .

Planul  $\alpha$  se numește **plan de simetrie**.

Dacă pentru figura  $F$  are loc relația  $F = S_\alpha(F)$ , planul  $\alpha$  se numește **plan de simetrie al figurii  $F$** , iar figura  $F$  se numește **figură simetrică față de planul  $\alpha$** .

De exemplu, cilindrul circular drept este simetric față de orice plan ce conține axa lui.

### Problemă rezolvată

• Planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt perpendiculare (fig. 10.9). Patrulaterul  $ABCD$  și  $AECF$  sunt romburi. Să se demonstreze că  $EBFD$  este romb.

*Rezolvare:*

Observăm că la simetria  $S_\alpha$ ,  $S_\alpha([FB]) = [BE]$ ,  $S_\alpha([FD]) = [DE]$ .

Prin urmare,  $[FB] \equiv [BE]$ ,  $[FD] \equiv [DE]$ .

În mod analog, la simetria  $S_\beta$ ,

$S_\beta([FB]) = [FD]$ , adică  $[FB] \equiv [FD]$ .

Astfel, patrulaterul  $EBFD$  are toate laturile congruente, adică este romb.

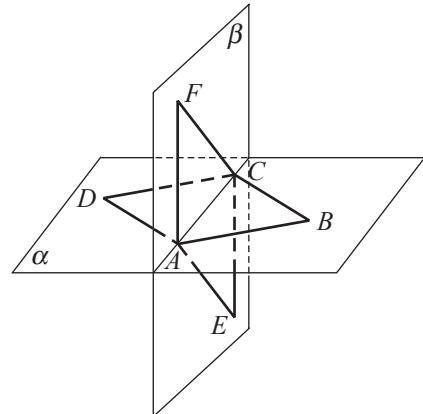


Fig. 10.9

## Probleme propuse

### Profilul real

1. Să se dea exemple de figuri geometrice care au plane de simetrie.
2. Să se determine dreptele care se aplică pe ele însăși la simetria față de un plan.
3. Să se indice planele de simetrie (dacă ele există) ale:
  - a) unui segment;
  - b) unei drepte;
  - c) unui plan;
  - d) reuniunii a două drepte concurente;
  - e) reuniunii a două drepte paralele;
  - f) reuniunii a două plane paralele.
4. **Lucrați în perechi!** Se știe că segmentele  $AB$  și  $A'B'$  sunt simetrice față de un plan. Sunt oare coplanare sau necoplanare dreptele lor suport?
5. Fie  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  un cub. Să se reprezinte simetricul punctului  $A$  față de planul:
  - a)  $CC_1D_1$ ;
  - b)  $BDD_1$ ;
  - c)  $CDA_1$ ;
  - d)  $BDC_1$ ;
  - e)  $BCB_1$ .

6. Două plane reciproc perpendiculare se intersectează după dreapta  $d$ . Punctele  $A$  și  $B$  sunt simetricele punctului  $C$  față de aceste plane. Să se afle distanța de la punctul  $C$  până la dreapta  $d$ , dacă  $AB = 10$  m.

7. Să se demonstreze că simetria spațiului față de un plan  $\alpha$ :
- este o izometrie;
  - coincide cu inversa sa, adică  $S_\alpha = S_\alpha^{-1}$ ;
  - aplică orice dreaptă pe o dreaptă și orice plan pe un plan.



- C<sub>1</sub>** 8. Planul  $\alpha$  este simetricul planului  $\beta$  față de planul  $\gamma$ . Care poate fi poziția reciprocă a planelor  $\alpha$  și  $\beta$ ?

9. Punctele  $A$  și  $B$  sunt situate de aceeași parte a planului  $\alpha$ . Să se găsească în planul  $\alpha$  un punct  $M$ , astfel încât suma  $AM + MB$  să fie minimă.

10. **Lucrați în perechi!** Punctele  $A$  și  $B$  sunt situate de părți diferite ale planului  $\alpha$ , la distanțe diferite de planul  $\alpha$ . Să se afle în planul  $\alpha$  un punct  $M$ , astfel încât valoarea absolută a diferenței  $AM - MB$  să fie maximă.

11. **Investigați!** Prin dreapta  $d$  sunt duse toate planele posibile. Se consideră un punct  $A$  ce nu aparține dreptei  $d$  și mulțimea tuturor simetricelor punctului  $A$  față de aceste plane. Ce reprezintă această mulțime?

12. Să se demonstreze: compunerea a trei simetrii în raport cu trei plane reciproc perpendiculare este o simetrie centrală.

13. **Investigați!** Să se dea exemple de aplicații ale simetriei față de un plan în diverse domenii.

## §5 Translația

Două semidrepte cu aceeași dreaptă suport se numesc **semidrepte la fel orientate** (sau **coorientate**), dacă intersecția lor este o semidreaptă, respectiv **semidrepte opus orientate**, dacă intersecția lor nu este o semidreaptă.

Semidreptele  $[AC$  și  $[BC$  din figura 10.10 sunt la fel orientate, iar semidreptele  $[BA$  și  $[AC$  – opus orientate.

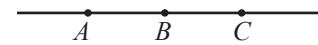
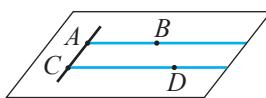


Fig. 10.10

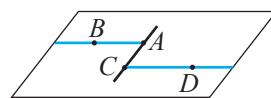
Se notează:  $[AC \uparrow\uparrow [BC$ ,  $[BA \uparrow\downarrow [AC$ .

Dacă dreptele suport a două semidrepte sunt drepte paralele distincte, atunci ele aparțin unui plan. Dreapta ce trece prin originile acestor semidrepte împarte planul în două semiplane. Dacă aceste semidrepte sunt situate în același semiplan, atunci ele se numesc **semidrepte la fel orientate** (fig. 10.11 a)), iar dacă sunt situate în semiplane diferite – **semidrepte opus orientate** (fig. 10.11 b)).



$[AC \uparrow\uparrow [BC$

a)



$[AB \uparrow\downarrow [CD$

b)

Fig. 10.11

Evident, două semidrepte la fel orientate cu a treia sunt de asemenea la fel orientate.

**Definiție.** Se numește **translație a spațiului determinată de perechea ordonată de puncte distincte**  $(A, A')$  transformarea spațiului care aplică fiecare punct  $M$  al spațiului pe punctul  $M'$ , astfel încât  $[MM'] \uparrow\uparrow [AA']$  și  $MM' = AA'$  (fig. 10.12).

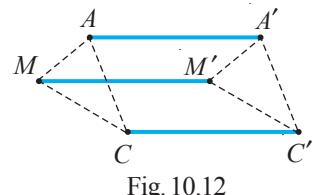


Fig. 10.12

Pentru translația determinată de perechea  $(A, A')$  se folosește notația  $t_{AA'}$ . Deci,  $M' = t_{AA'}(M)$ ,  $C' = t_{AA'}(C)$  etc.

Evident, dacă  $t_{AA'}(M) = M'$ , atunci  $t_{MM'}(A) = A'$  și, în acest caz,  $t_{AA'} = t_{MM'}$ . Aceasta înseamnă că translația poate fi determinată de orice pereche de puncte, unul dintre care este imaginea celuilalt la această translație.

Transformarea identică a spațiului este considerată drept o translație determinată de orice pereche de puncte ce coincid:  $t_{AA'}(M) = t_{BB'}(M) = M$ ,  $\forall M$  și  $\forall A, B$ .

Dacă  $M' = t_{AA'}(M)$  și  $M \notin AA'$ , atunci patrulaterul  $AA'M'M$  este paralelogram.

### Problema rezolvată

↳ Două sate,  $A$  și  $B$ , sunt despărțite de un râu ale cărui maluri au forma a două drepte paralele. Unde trebuie să fie construit podul peste râu, astfel încât lungimea drumului dintre aceste sate să fie minimă (podul se construiește perpendicular pe maluri)?

*Rezolvare:*

Fie vectorul  $\bar{a}$  perpendicular pe malurile râului și modulul lui este egal cu distanța dintre maluri (fig. 10.13). Dacă  $B_1 = t_{\bar{a}}(B)$ , atunci punctul  $M$ , din care se va construi podul, este situat pe malul pe care se află satul  $A$  și pe segmentul  $AB_1$ . Pentru orice alt punct  $M_1 \neq M$ ,  $AM_1 + M_1B_1 > AM + MB_1 = AB_1 = AM + NB$ .

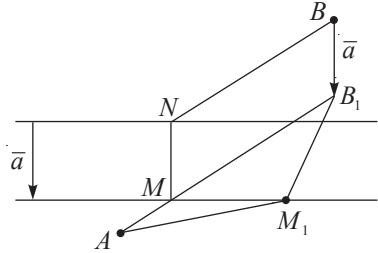


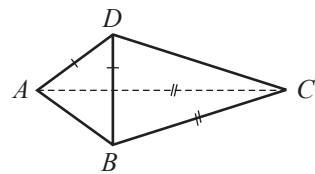
Fig. 10.13

### Probleme propuse

#### Profilul real

- Să se construiască imaginea paralelogramului  $ABCD$  la translația  $t_{AM}$ , dacă punctul  $M$  coincide cu:
  - vârful  $B$ ;
  - vârful  $C$ ;
  - vârful  $D$ ;
  - intersecția diagonalelor.
- Să se construiască imaginea cubului  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  la translația  $t_{AM}$ , dacă punctul  $M$  coincide cu:
  - vârful  $B$ ;
  - vârful  $B_1$ ;
  - vârful  $C_1$ ;
  - mijlocul muchiei  $AB$ ;
  - centrul  $O$  al cubului.
- Trei drepte paralele distincte intersectează două plane paralele distincte în vîrfurile triunghiurilor  $ABC$  și respectiv  $A_1B_1C_1$ . Să se arate că aceste triunghiuri sunt congruente.

4. Punctele  $A, B, C, D$  sunt necoplanare, astfel încât triunghiurile  $ABD$  și  $ABC$  sunt isoscele cu aceeași bază  $AB$ . Să se construiască imaginea figurii  $ABCD$  la translația  $t_{AC}$ .



- B<sub>1</sub>** 5. **Investigați!** Să se decidă dacă există puncte, drepte și plane invariante la o translație diferită de cea identică.
6. Să se determine translația inversă pentru  $t_{AB}$ .
7. Să se demonstreze că:
- translația este o izometrie a spațiului;
  - translația aplică orice dreaptă pe o dreaptă paralelă cu ea, orice semidreaptă pe o semidreaptă coorientată, orice plan pe un plan paralel cu el;
  - compunerea a două translații este o translație.
8. **Lucrați în perechi!** Există oare o translație care aplică unul dintre cele două plane date pe celălalt, dacă aceste plane: a) se intersectează; b) sunt paralele?
9. Să se arate că dacă laturile unui unghi sunt coorientate cu laturile unui alt unghi, atunci aceste unghiuri sunt congruente.
- C<sub>1</sub>** 10. Să se arate că  $S_B \circ S_A = t_{AA_1}$ , unde  $A_1 = S_B(A)$ .
11. Să se demonstreze: compunerea a două simetrii față de două plane paralele este o translație în direcție perpendiculară pe aceste plane de la primul plan spre al doilea la distanța egală cu dublul distanței dintre aceste plane.
12. Să se demonstreze că orice translație este compoziția a două simetrii față de plane. Cum se construiesc astfel de plane?
13. Să se demonstreze: compoziția a două simetrii axiale cu axele paralele este o translație. Cum se determină această translație?
14. **Investigați!** Să se aducă exemple de aplicații ale translației în diverse domenii.

## § 6 Transformarea de asemănare. Omotetia

**Definiție.** Fie  $k$  un număr real pozitiv. Se numește **transformare de asemănare de coeficient  $k$**  (sau **asemănare de coeficient  $k$** ) a spațiului aplicația spațiului în el însuși care pentru orice două puncte  $A, B$  și imaginile lor respective  $A', B'$  satisfac condiția  $A'B' = kAB$ .



Observăm că orice izometrie este o asemănare de coeficient  $k = 1$ .

Din egalitatea  $A'B' = kAB$  rezultă că dacă  $A \neq B$ , atunci  $A' \neq B'$ , adică asemănarea spațiului este o aplicație bijectivă a spațiului.

**Teoremă.** 1) Compunerea a două asemănări de coeficienți  $k_1$  și  $k_2$  este o asemănare de coeficient  $k_1 k_2$ .

2) Transformarea inversă asemănării de coeficient  $k$  este o asemănare de coeficient  $\frac{1}{k}$ .

**Demonstrație**

1) Admitem că punctele arbitrară  $A, B$  se aplică, prin asemănarea de coeficient  $k_1$ , pe punctele  $A'$  și respectiv  $B'$ , iar acestea, la rândul lor, prin asemănarea de coeficient  $k_2$ , se aplică pe  $A''$ , respectiv  $B''$ . Atunci  $A'B' = k_1 AB$  și  $A''B'' = k_2 A'B'$ . De aici obținem  $A''B'' = k_1 \cdot k_2 AB$ , adică transformarea care aplică punctele  $A, B$  respectiv pe  $A'', B''$  este o asemănare de coeficient  $k_1 k_2$ .

2) La asemănarea de coeficient  $k$ , pentru punctele arbitrară  $A$  și  $B$  ale spațiului și pentru imaginile respective  $A'$  și  $B'$  are loc egalitatea  $A'B' = kAB$ . De aici obținem că  $AB = \frac{1}{k} A'B'$ , adică transformarea care aplică punctele  $A', B'$  pe punctele  $A$  și respectiv  $B$  este o asemănare de coeficient  $\frac{1}{k}$ . ►

Două figuri se numesc **asemenea** dacă există o transformare de asemănare a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe celalătă. Congruența figurilor este un caz particular al asemănării ( $k = 1$ ).

**Definiție.** Fie  $O$  un punct al spațiului și  $k$  un număr real nenul. Se numește **omotetie de centru  $O$  și de coeficient  $k$**  aplicația spațiului în el însuși care satisface condițiile:

1. Punctul  $O$  se aplică pe el însuși.
2. Dacă  $M \neq O$  și  $M'$  este imaginea lui  $M$ , atunci punctele  $O, M$  și  $M'$  sunt coliniare. Punctul  $O$  este exterior segmentului  $MM'$  pentru  $k > 0$  și interior acestui segment pentru  $k < 0$ .
3. Pentru orice punct  $M$  al spațiului și imaginea sa  $M'$  are loc egalitatea  $OM' = |k| OM$  (fig. 10.14).

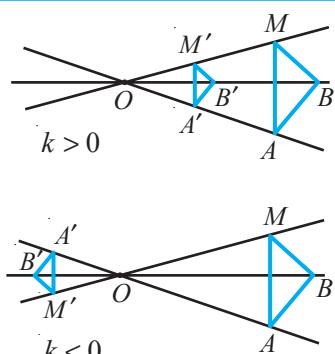


Fig. 10.14

Două figuri se numesc **figuri omotetice** dacă există o omotetie a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe celalătă.

Omotetia este un caz particular al asemănării.

**Problemă rezolvată**

✳️ Fie cubul  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (fig. 10.15). Să se construiască o secțiune a cubului cu un plan care este un hexagon regulat.

*Rezolvare:*

Planul determinat de punctele  $A_1, D$  și  $B$  taie trei fețe ale cubului după diagonalele  $A_1D$ ,  $DB$  și respectiv  $BA_1$ . Triunghiul  $A_1DB$  este echilateral. Considerăm omotetia de centru  $A$  și coeficient  $k = \frac{3}{2}$ . La această omotetie, imaginea planului  $A_1DB$  este planul  $A_2D_2B_2$ , care taie cubul după hexagonul regulat  $MNPQRS$ . Punctele  $M, N, P, Q, R, S$  sunt respectiv mijloacele muchiilor  $DC, CB, BB_1, A_1B_1, A_1D_1, D_1D$ .

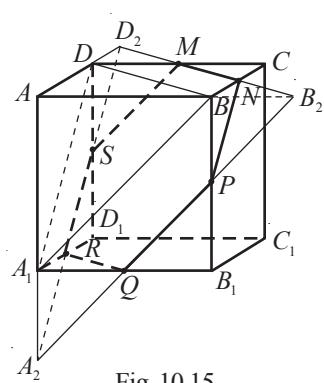


Fig. 10.15

## Probleme propuse

### Profilul real

- A<sub>1</sub>** 1. **Investigați!** Să se dea exemple de asemănare din diverse domenii.
2. Să se decidă dacă o sferă este asemenea cu un cub.
  3. Sunt oare asemenea un cub și fotografia sa?
  4. **Investigați!** Câte puncte invariante are o omotetie de coeficient  $k \neq 1$ ? Dar drepte invariante?
- B<sub>1</sub>** 5. Lungimea muchiei unui cub este de trei ori mai mare decât lungimea muchiei altui cub. Pentru vopsirea fețelor cubului mai mic s-a folosit o cutie de vopsea. Câte cutii de vopsea sunt necesare pentru a vopsi cubul mai mare?
6. La omotetia de centru  $O$ , punctul  $A'$  este imaginea punctului  $A$ . Să se găsească imaginile punctelor  $B$  și  $C$  (cercetați cazurile a) și b) din figura alăturată.
- a)
- 
- b)
- 
- $(OA = 3OA')$
- C<sub>1</sub>** 8. Să se demonstreze că, în urma transformării de asemănare, intersecția și reuniunea a două figuri se aplică respectiv pe intersecția și reuniunea imaginilor lor.
9. **Lucrați în perechi!** Trei drepte care trec printr-un punct  $O$  intersectează planele paralele  $\alpha$  și  $\beta$  în punctele  $A, B, C$  și respectiv  $A_1, B_1, C_1$ . Să se demonstreze că triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  sunt omotetice.

### § 7

## Rotăția în jurul unei drepte (rotăția axială)



**Definiție.** Se numește **rotăție de axă  $l$  și unghi de măsură  $\varphi$**  (sau **rotăție în jurul dreptei  $l$  cu un unghi  $\varphi$** ) aplicația spațiului în el însuși la care fiecare punct al dreptei  $l$  se aplică pe el însuși, iar fiecare punct  $A$  ce nu aparține dreptei  $l$  se aplică pe punctul  $A'$ , astfel încât  $A$  și  $A'$  aparțin unui plan  $\alpha$  perpendicular pe  $l$ ,  $A_0A = A_0A'$  și  $m(\angle AA_0A') = \varphi$ , unde  $\{A_0\} = \alpha \cap l$ .

Se notează:  $R_l^\varphi$ .

Se consideră că direcția rotăției (în planul  $\alpha$ ) de la punctul  $A$  la punctul  $A'$  este aceeași pentru toate punctele  $A$  dacă privim într-un sens al dreptei  $l$  (fig. 10.16).

Dreapta  $l$  se numește **axă de rotație**, iar unghiul  $\varphi$  – **unghi de rotație**.

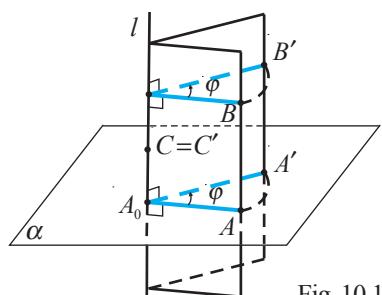


Fig. 10.16

Dacă  $R_l^\varphi(F) = F$ , atunci dreapta  $l$  este o axă de rotație a figurii  $F$ . Se poate arăta că rotația axială este o izometrie.

**Definiție.** O figură se numește **figură de rotație** dacă există o dreaptă, astfel încât orice rotație în jurul acestei drepte aplică figura pe ea însăși. O astfel de dreaptă se numește **axă a figurii**.

De exemplu, cercul, discul, sfera, cilindrul, conul sunt figuri de rotație.

### Problemă rezolvată

↳ Să se determine câte axe de rotație are cubul.

*Rezolvare:*

Fie cubul  $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$  (fig. 10.17).

Dacă  $M$  este centrul feței  $ABCD$  și  $N$  – centrul feței  $A_1B_1C_1D_1$ , atunci  $R_{MN}^{90^\circ}(K) = R_{MN}^{180^\circ}(K) = R_{MN}^{270^\circ}(K) = R_{MN}^{360^\circ}(K) = K$ . Deci,  $MN$  este axă de rotație a cubului. Cubul mai are două axe de rotație de acest tip.

Dreapta  $AC_1$  este axă de rotație a cubului, unghiurile de rotație fiind de  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  și  $360^\circ$ .

Astfel de axe mai sunt  $DB_1$ ,  $CA_1$ ,  $DD_1$ .

Cubul mai are șase axe de rotație cu unghiurile de  $180^\circ$  și  $360^\circ$ . Acestea sunt dreptele determinate de mijloacele muchiilor opuse ale cubului.

Așadar, cubul are 13 axe de rotație.

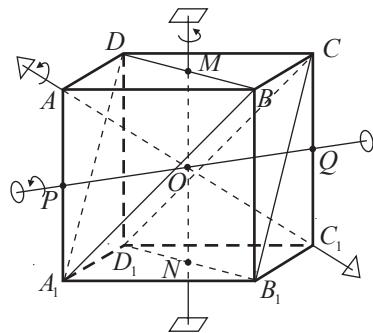


Fig. 10.17

### Probleme propuse

#### Profilul real

**A<sub>1</sub>** 1. **Lucrați în perechi!** Câte axe de rotație poate avea:

- a) o sferă;
- b) o sferă fără un punct;
- c) o sferă fără două puncte;
- d) o sferă fără trei puncte.

**B<sub>1</sub>** 2. Să se demonstreze că rotația în jurul unei axe este o izometrie.

3. Să se arate că simetria axială este o rotație în jurul unei axe.

4. Să se arate că orice dreaptă  $a$  perpendiculară pe axa de rotație se aplică la această rotație pe dreapta  $a'$  situată cu dreapta  $a$  în același plan și că unghiul format de  $a$  și  $a'$  este egal cu unghiul de rotație.

**C<sub>1</sub>** 5. Să se arate că dacă o izometrie are cel puțin două puncte invariante distincte  $A$  și  $B$ , dar nu are puncte invariante ce nu aparțin dreptei  $AB$ , atunci această izometrie este o rotație de axă  $AB$ .

6. **Investigați!** Fie  $A$  și  $B$  două puncte distincte. Să se indice o rotație axială care aplică punctul  $A$  pe punctul  $B$ . \*Ce figură formează axele tuturor rotațiilor de acest fel?

7. Fie dreapta  $l$  și punctele distincte  $A$  și  $B$ , astfel încât dreptele  $l$  și  $AB$  sunt necoplanare. Să se determine pe dreapta  $l$  un punct  $M$ , astfel încât  $AM + MB$  să fie minimă.

## Probleme recapitulative

### Profilul real

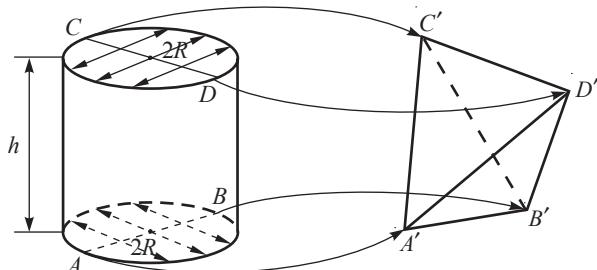
- A<sub>1</sub>** 1. Fie două drepte  $d_1, d_2$  și două puncte  $A, C$ . Să se determine punctele  $B, D$  ( $B \in d_1, D \in d_2$ ), astfel încât patrulaterul  $ABCD$  să fie paralelogram. Discuții.
2. Se dă dreapta  $d$ , cercul  $\mathcal{C}$  și punctele  $A, C$ . Să se determine punctele  $B$  și  $D$  ( $B \in d, D \in \mathcal{C}$ ), astfel încât patrulaterul  $ABCD$  să fie paralelogram. Discuții.

**B<sub>1</sub>** 3. ***Lucrare practică. Fabricarea ambalajului***

Ambalajul comercial de formă tetraedrică pentru unele produse lactate este fabricat prin deformarea (transformarea) suprafeței laterale a unui cilindru din carton. Realizați practic următoarele transformări:

Se turtește partea inferioară a cilindrului și se înclieie după diametrul  $AB$ . Astfel se obține muchia  $A'B'$  a tetraedrului. În același mod se turtește partea superioară și se înclieie după diametrul  $CD$ , perpendicular pe diametrul  $AB$ . Astfel se obține muchia  $C'D'$  a tetraedrului și însuși tetraedrul  $A'B'C'D'$ .

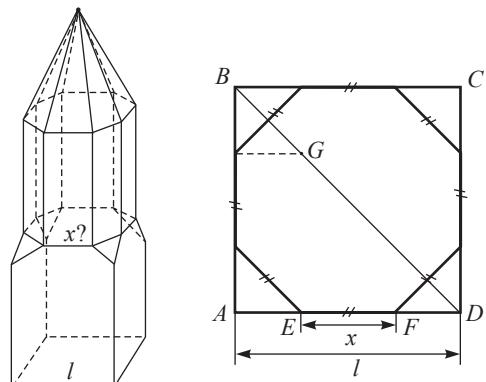
Fie  $AB = CD = 2R$ , înălțimea cilindrului este  $h$ .



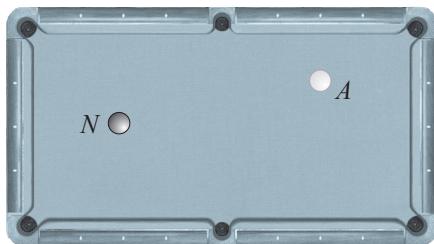
- a) Să se exprime înălțimea  $h$  a cilindrului în funcție de  $R$ , astfel încât tetraedrul  $A'B'C'D'$  să fie tetraedru regulat. (Atenție!  $A'B' = C'D' = \pi R$ )
- b) Considerând tetraedrul  $A'B'C'D'$  regulat, să se determine raza  $R$  a bazei cilindrului și muchia tetraedrului, astfel încât capacitatea lui să fie de 1 litru. Să se exprime răspunsul în centimetri cu aproximație la zecimi.

- C<sub>1</sub>** 4. În unele biserici românești, clopotnița este construită pe un fundament de formă unui pătrat și se termină printr-un acoperiș de formă unei piramide regulate octogonale (a se vedea figura alăturată). Știind că latura păratului este  $l$ :
- să se calculeze lungimea laturii  $x$  a octagonului regulat;
  - să se ofere o construcție geometrică a laturii octagonului.

5. Pe latura  $AB$  a triunghiului ascuțitunghic  $ABC$  este dat un punct fix  $P$ , iar pe laturile  $AC$  și  $BC$  – punctele mobile  $X$  și respectiv  $Y$ . Să se determine punctele  $X_1$  și  $Y_1$ , astfel încât perimetrul triunghiului  $PX_1Y_1$  să fie minim.



6. Pe o masă de biliard sunt două bile: una albă  $A$  și alta neagră  $N$ . Să se determine punctele de impact cu bordurile, astfel încât după impact bila albă să lovească bila neagră.



7. Să se afle vârful  $C$  al triunghiului  $ABC$ , dacă se dau vârfurile lui  $A$ ,  $B$  și dreapta suport  $d$  a bisectoarei unghiiului  $C$ .

8. Fie două drepte concurente  $d_1$  și  $d_2$  și un vector  $\vec{a}$ , care este paralel cu planul determinat de aceste drepte. Să se afle un punct  $M_1 \in d_1$  și un punct  $M_2 \in d_2$ , astfel încât  $\overline{M_1 M_2} = \vec{a}$ .

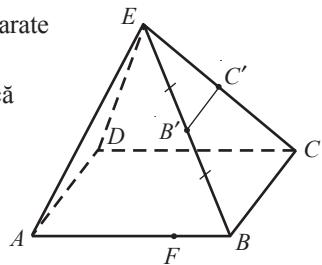
9. Fie dreptele concurente  $d_1$ ,  $d_2$  și două puncte distincte  $A$ ,  $B$  ce nu aparțin acestor drepte. Să se construiască paralelogramul  $ABB_1A_1$ , astfel încât  $A_i \in d_1$ ,  $B_i \in d_2$ .

10. Fie piramida  $EABCD$  baza căreia este paralelogramul  $ABCD$ .

a) Notând prin  $B'$  și  $C'$  mijloacele muchiilor  $EB$  și  $EC$ , să se arate că dreptele  $B'C'$  și  $BC$  sunt paralele.

b) Fie  $F$  un punct de pe muchia  $AB$ ,  $F \neq A$ . Să se arate că dreapta  $B'C'$  intersectează planul  $EDF$  într-un punct  $G$ . Să se construiască punctul  $G$ .

c) În planul  $EBC$  notăm prin  $B''$  simetricul punctului  $B'$  față de punctul  $C'$ . Să se arate că dreptele  $AB'$  și  $DB''$  sunt paralele.



11. **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale transformărilor geometrice în arte*.

### Test sumativ

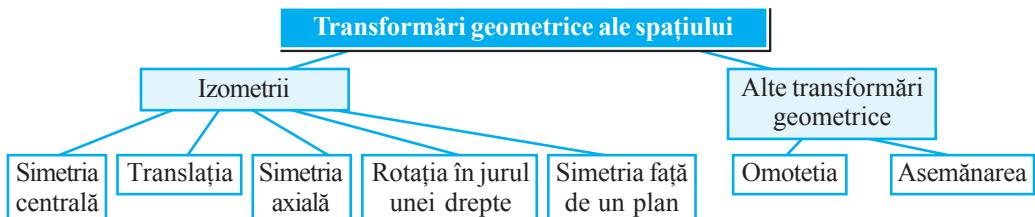
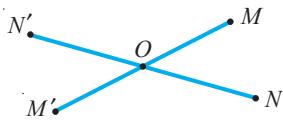
#### Profilul real

Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

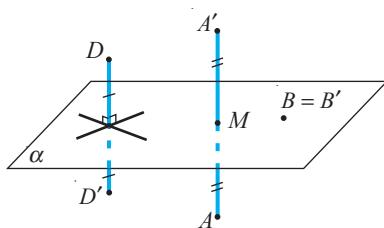
- Indicați planele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două plane secante. ③
- Indicați axele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două drepte paralele. ③
- Arătați că reuniunea a două drepte necoplanare este o figură care are trei axe de simetrie. ⑤
- Arătați că planul determinat de secțiunea diagonală a cubului este un plan de simetrie al acestuia. ④
- Determinați care dintre următoarele figuri sunt asemenea: ⑤
  - două cuburi;
  - două tetraedre regulate;
  - două sfere;
  - două cilindri;
  - două paralelipipede.
- În planul înzestrat cu sistemul cartezian rectangular de coordonate  $xOy$  sunt reprezentate punctele  $A(2, 1)$ ,  $B(-1, 4)$ ,  $C(-3, -1)$ ,  $D(0, -4)$ . Determinați coordonatele simetricelor acestor puncte față de: ⑤
  - originea  $O$ ;
  - punctul  $A$ ;
  - axele de coordonate;
  - dreapta  $AB$ .

#### Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	25–24	23–22	21–19	18–15	14–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0


**Simetria centrală:  $S_o$** 


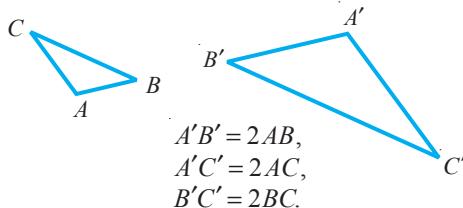
1.  $S_o(O) = O$ ;
2.  $\forall M \neq O, S_o(M) = M'$ , astfel încât  $O$  este mijlocul segmentului  $MM'$ .

**Simetria față de un plan:  $S_\alpha$** 


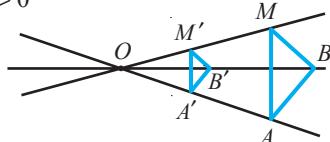
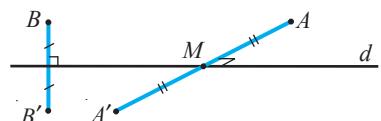
1.  $\forall B \in \alpha, S_\alpha(B) = B$ ;
2.  $\forall A \notin \alpha, S_\alpha(A) = A'$ , astfel încât  $AA' \perp \alpha$  și punctul  $\{M\} = AA' \cap \alpha$  este mijlocul segmentului  $AA'$ .

**Asemănarea de coeficient  $k$ ,  $k > 0$** 

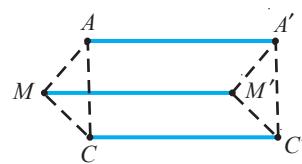
Pentru orice puncte  $A, B$  ale spațiului și imaginile lor  $A', B'$  are loc egalitatea  $A'B' = k \cdot AB$ .



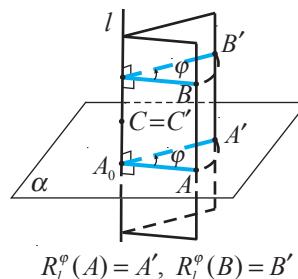
$$k > 0$$


**Simetria axială:  $S_d$** 


1.  $\forall M \in d, S_d(M) = M$ ;
2.  $\forall A \notin d, S_d(A) = A'$ , astfel încât  $AA' \perp d$ , și dacă  $AA' \cap d = \{M\}$ , atunci  $M$  este mijlocul lui  $[AA']$ .

**Translația determinată de perechea ordonată  $(A, A')$  de puncte distințe:  $t_{AA'}$** 


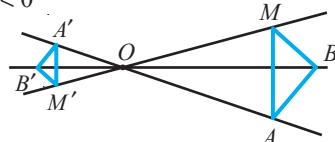
$\forall M \notin (AA'), t_{AA'}(M) = M'$ , astfel încât  $AA'M'M$  este paralelogram.  
 $t_{AA'}(C) = C'$

**Rotația în jurul dreptei  $l$  cu un unghi  $\varphi$ :  $R_l^\varphi$** 


$$R_l^\varphi(A) = A', R_l^\varphi(B) = B'$$

**Omotetia cu centrul  $O$  și coeficientul  $k$** 

$$k < 0$$



# Răspunsuri și indicații

## Modulul 1

**§ 1. Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 2. De exemplu,  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ .

3. a)  $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{9}{8}, \frac{11}{9}$ ; b) crescător. **B:** 5. De exemplu, a)  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = (-1)^{2n-1} \cdot n$ ; b)  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = n + 2$ . 6. a) Crescător, mărginit; b) crescător, mărginit; c) descrescător, mărginit. **C:** 7. a)  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = 2n - 1$ ; b)  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = \frac{1}{3^n}$ . 8. a) Da; b) da; c) nu.

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 3.  $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{9}{12}, \frac{9}{15}$ . 4. a)  $\frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3, \left(\frac{11}{10}\right)^4, \left(\frac{11}{10}\right)^5$ ; b) crescător, mărginit inferior. 6. a)  $\sup X = +\infty$ ,  $\inf X = \frac{1}{2}$ ; b)  $\inf X = -\infty$ ,  $\sup X = -\frac{1}{2}$ . **B<sub>1</sub>:** 7. a)  $x_n = 1 - 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ; b) strict crescător, mărginit superior. 8. a)  $x_n = 5n - 15$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , crescător, mărginit inferior; b)  $x_n = 4 \cdot 2^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , crescător, mărginit inferior. **C<sub>1</sub>:** 10. a)  $x_n = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ; b) strict crescător; c)  $1 \leq x_n < \frac{3}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . 11. a)  $\inf A = -\infty$ ,  $\sup A = +\infty$ ; b)  $\inf B = -\infty$ ,  $\sup B = \sqrt[3]{7}$ .

**§ 2. Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. a) 7, 9, 11, 13; b) -3, 2, 7, 12; c) 1, 3; 1, 6; 1, 9; 2, 2; d)  $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{4}{35}, \frac{1}{35}$ . 2. a)  $a_1 = 23$ ; b)  $a_1 = 597$ . 3. a)  $-10, -5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}$ ; b)  $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**B:** 5. 23 dm. 6. 1900 de locuri. 7. 1600 m. **C:** 8. 4 154,28 de lei. 9. 5 760 de lei. 10. 1024 de bacterii.

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. 484. 2. a)  $a_n = \frac{n-13}{3}$ ,  $S_{14} = -\frac{77}{3}$ ; b)  $a_n = \frac{5n+16}{35}$ ,  $S_{25} = \frac{405}{7}$ . 3. a)  $b_n = 9 \cdot 2^{n-1}$ ; b)  $b_n = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ . 4.  $S_9 = 70$ . **B<sub>1</sub>:** 7. a)  $b_1 = \frac{768}{125}$ ; q =  $-\frac{5}{4}$ ; b)  $b_1 = \frac{1}{2}$ ; q =  $-\frac{1}{2}$ . 8. Indicație. Numerele x, y, z rezultă din sistemul  $xz = y^2$ ,  $x+z = 2(y+a)$ ,  $x(z+b) = (y+a)^2$ . 9.  $\frac{47 \pm \sqrt{1993}}{4}$ . 10. a)  $b_1 = 0,3$ ; b)  $b_1 = -\frac{1}{21}$ . **C<sub>1</sub>:** 11.  $S = \{55\}$ . 12. Mai mică decât 2. 13. De exemplu,  $180 = 12 + 24 + 48 + 96$ ;  $180 = \frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2}$ .

**§ 3. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. De exemplu  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{1}{2^n}$  este convergent, iar  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = (-1)^{n-1}$  este divergent. **B<sub>1</sub>:** 5. a) 0; b) 0; c) 0; d)  $\frac{1}{3}$ ; e) 0; f) 0; g) 0; h) 2. **C<sub>1</sub>:** 6. a)  $e^{-4}$ ; b) -1; c)  $\frac{1}{2}$ ; d)  $e^{-2}$ .

## Exerciții și probleme recapitulative

**Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. a)  $\frac{1}{3}, 1, \frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{13}{7}$ ; b)  $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ ,

c)  $-6, \frac{15}{2}, -\frac{20}{3}, \frac{29}{4}, \frac{-34}{5}$ . 2. a)  $x_n = \frac{n}{n+1}$ ; b)  $x_n = 2n$ ; c)  $x_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}$ ; d)  $x_n = \frac{1}{3^n}$ .

3. De exemplu, a) 22, 24, 26, 28, 30; b) 1, -1, 1, -1, ...; c)  $x_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . 4. Nu este monoton.

**B:** 5. a)  $a_n = -4n + 2$ ; b)  $a_n = 2n - 1$ ; c)  $a_n = 5n - 15$ ; d)  $a_n = 7n - 4$ . 6. a) -24550; b) 4 850.

7. a)  $b_n = 2 \cdot 6^{n-1}$ ; b)  $b_n = -10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ; c)  $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ . 8. a)  $x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ , q = 3; b)  $x_n = 2n + 2$ , r = 2;

c)  $x_n = -4 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ , q =  $\frac{1}{3}$ ; d)  $x_n = 5n - 6$ , r = 5. 9. a)  $n = 10$ ,  $S_n = 140$ ; b)  $a_1 = 4$ ,  $n = 8$  sau

**a<sub>1</sub>** = -2, **n** = 11. **C:** 10. a)  $q = 2$ ,  $S_9 = 2\ 555$ ; b)  $b_1 = 3$ ,  $S_8 = 765$ . 11. 5 ore. 12. 313,6 m. 13.  $-1 \pm \sqrt{6}$ .

**Profilul real. B<sub>1</sub>:** 4. a) 0; b) 0; c) 0; d)  $\frac{1}{3}$ ; e) 0; f)  $+\infty$ . **C<sub>1</sub>:** 5. 24 de unități de lungime.

6. 243 l. 7. 1224. 8.  $S_n = n[x^2 + (3-n)ax + a^2]$ . 9. a)  $+\infty$ ; b)  $+\infty$ ; c)  $-\infty$ ; d)  $-\frac{2}{3}$ ; e)  $\frac{2}{3}$ ; f)  $\frac{1}{2}$ ; g)  $e^{-1}$ ; h)  $e$ ; i) 0.

### Test sumativ

**Profilurile umanist, arte, sport.** 1. a)  $\frac{1}{3}, 1, \frac{7}{5}$ ; b)  $0, \frac{2}{3}, 0$ . 2. Strict descrescător.

3.  $a_1 = 2$ ,  $r = 3$  sau  $a_1 = 14$ ,  $r = -3$ . 4.  $b_1 = 1$ ,  $q = -3$ . 5. La etajul 6.

**Profilul real.** 2.  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $r = \frac{1}{4}$ . 3.  $b_1 = \frac{30}{7}$ ,  $q = \frac{3}{4}$  sau  $b_1 = -\frac{30}{7}$ ,  $q = -\frac{3}{4}$ . 4. 9 inele.

## Modulul 2

**§1. Profilul real. A<sub>1</sub>:** 1. Indicație. Arătați că  $(2-r, 2+r) \cap E \neq \emptyset$ ,  $\forall r > 0$ . 2. Indicație.

Stabiliți că  $\exists \varepsilon > 0$  a.î.  $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \cap E \setminus \{x_1\} = \emptyset$ . 5. a) 2; b)  $\frac{3}{7}$ ; c)  $-\frac{1}{2}$ . **B<sub>1</sub>:** 6. a) -2, 2;

b) 2, 4; c)  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1$ . 7. a)  $x_n = 4 + \frac{1}{n}$ ; b)  $x'_n = -1 + \frac{2}{2n+1}$ ,  $x''_n = \frac{n}{n+1}$ . 9. Indicație. Studiați

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$  pentru sirurile  $(x'_n)_{n \geq 1}$ ,  $x'_n \rightarrow x_0$ , și  $(x''_n)_{n \geq 1}$ ,  $x''_n \rightarrow x_0$ , care se determină din

condiția ca funcția sinus sau funcția cosinus să ia, de exemplu, una dintre valorile 0, 1 sau -1, și aplicați observația 3. 10. a)  $l_s(2) = 5$ ,  $l_d(2) = 6$ ; b)  $l_s(-1) = l_d(-1) = 1$ ;  $l_s(1) = -\infty$ ,  $l_d(1) = +\infty$ . 11. a)  $l(0) = 1$ ,  $\exists l(1)$ ; b)  $l(0) = -2$ ,  $l(2) = -4$ . **C<sub>1</sub>:** 12. a)  $l_s(k\pi) = -1$ ,  $l_d(k\pi) = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow k\pi} f(x)$ ;

b)  $l_s(k) = k - 1$ ,  $l_d(k) = k \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow k} f(x)$ . 13. a)  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ; b)  $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; c)  $x_0 \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

14. a)  $a = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ ; a)  $a = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ; b)  $a = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ ; a)  $a = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 5$ . 15. a = 1.

**§2. Profilul real. A<sub>1</sub>:** 1. a) -1; b)  $+\infty$ ; c)  $+\infty$ ; d)  $-\infty$ ; e)  $+\infty$ ; f)  $-\infty$ . 2. a) 4; b)  $-\infty$ ; c)  $+\infty$ ; d)  $-\infty$ ;

e) 55; f) -3. 3. a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $e(e-1)^2$ ; c)  $\frac{1}{2}e$ . 4. a)  $-\infty$ ; b)  $-\infty$ ; c)  $-\infty$ . 5. a) 1; b) 2. **B<sub>1</sub>:** 6. a)  $-\frac{2}{5}$ ;

b) 0; c)  $+\infty$ . 7. a)  $-\infty$ ; b)  $+\infty$ ; c)  $+\infty$ . 8. a)  $+\infty$ ; b) 2; c)  $-\frac{1}{3}$ . 9. a)  $(-1)^n$ ; b)  $3 \cdot (-1)^{n+1}$ .

**C<sub>1</sub>:** 11. a)  $f(\pm 0) = 0$ ,  $f(1+0) = f(-1-0) = +\infty$ ,  $f(1-0) = f(-1+0) = -\infty$ ; b)  $f(1+0) = f(-1-0) = 0$ ,  $f(1-0) = f(-1+0) = +\infty$ ; c)  $f(-1-0) = 1$ ,  $f(-1+0) = 0$ . 12. Indicație. A se vedea indicația la exercițiul 7 din §1. a) A; b) F; c) A. 13.  $m = -1$ ,  $m = 2$ . 14.  $m \in [-1, 3]$ . 15. a) 1; b)  $-\infty$ ; c) 0; d)  $-\infty$ ; e)  $+\infty$ ; f)  $-\infty$ ; g)  $-\infty$ ; h)  $-\infty$ .

**§3. Profilul real. A<sub>1</sub>:** 1. a) 3; b) -3; c)  $\frac{3}{4}$ ; d)  $\frac{1}{2}$ ; e) -2; f)  $\frac{3}{4}$ . 2. a)  $\frac{4}{3}$ ; b)  $\frac{5}{4}$ ; c)  $\frac{3}{4}$ ; d) 2;

e) 3; f)  $-\frac{1}{2}$ ; g)  $\frac{1}{2}$ ; h) 3; i)  $\frac{1}{2}$ . **B<sub>1</sub>:** 3. a)  $\frac{3}{2}$ ; b)  $\frac{8}{3}$ ; c)  $e^{\frac{1}{2}}$ ; d)  $e^2$ ; e)  $e^3$ ; f)  $e^{-1}$ . 4. a) 2; b)  $\frac{9}{2}$ ; c)  $-\frac{2}{3}$ ;

d)  $-\frac{5}{6}$ ; e)  $-\frac{5}{2}$ ; f)  $-\frac{9}{4}$ . **C<sub>1</sub>:** 5. a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $-\frac{1}{3}$ ; c) -1; d)  $-\frac{1}{3}$ ; e)  $\frac{5}{6}$ ; f)  $-\frac{5}{12}$ . 6. a)  $+\infty$ ; b)  $+\infty$ ; c)  $-\infty$ ;

d)  $+\infty$ . 7. a)  $m = -1$ ,  $n = 4$ ; b)  $n = 2 + \pi$ ,  $m = -2$ .

**§ 4. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $\frac{12}{25}$ ; b)  $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ ; c)  $\frac{1}{3}$ ; d)  $-3$ ; e)  $1$ ; f)  $0$ ; g)  $2 - \log_2 3$ ; h)  $\frac{3}{5}$ ; i)  $\frac{1}{2}$ .  
 2. a)  $-\infty$ ; b)  $\frac{5}{4}$ ; c)  $\frac{1}{5}$ ; d)  $3$ ; e)  $-\frac{1}{2}$ ; f)  $\frac{1}{3}$ ; g)  $-1$ ; h)  $-3$ ; i)  $1$ . **B<sub>1</sub>:** 3. a)  $-\frac{7}{2}$ ; b)  $\frac{2}{3}$ ; c)  $\frac{3}{2} \ln 2$ ; d)  $0$ ; e)  $e^{-2}$ ; f)  $e^3$ ; g)  $\sqrt{6}$ ; h)  $e^5$ ; i)  $-\frac{1}{4}$ . 4. a)  $\sqrt[3]{e}$ ; b)  $e^{10} \cdot \sqrt{e}$ ; c)  $\sqrt[3]{e}$ ; d)  $\sqrt[4]{e^3}$ ; e)  $\sqrt[3]{e^2}$ ; f)  $C_{n+1}^2$ ; g)  $2^{n(n+1)}$ ; h)  $\frac{n(n-1)}{2}$ . **C<sub>1</sub>:** 5.  $a=1$ ,  $b=-1$ . 6.  $+\infty$ , dacă  $a+2b>0$ ;  $-\infty$ , dacă  $a+2b<0$ ;  $-\frac{3b}{4}$ , dacă  $a+2b=0$ . 7.  $a=2$ ,  $b=5$ ,  $f(-1\pm 0)=\pm\infty$ . 8.  $a=-3$ ,  $b=-1$ .

### Exerciții și probleme recapitulative

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $\frac{2}{5}$ ; b)  $-\frac{1}{2}$ ; c)  $\frac{7}{12}$ ; d)  $-3$ ; e)  $-14$ ; f)  $-\infty$ ; g)  $\frac{5}{28}$ ; h)  $-1$ ; i)  $\frac{1}{12}$ . 2. a)  $-\frac{3}{4}$ ; b)  $-\frac{3}{4}$ ; c)  $-\frac{1}{4}$ ; d)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; e)  $\frac{2}{3}$ . 3. a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $1$ ; c)  $\frac{4}{3}$ ; d)  $\frac{2}{3}$ ; e)  $\log_{72} \frac{8}{9}$ ; f)  $\frac{1}{3}$ . **B<sub>1</sub>:** 4. a)  $2$ ; b)  $\frac{2}{5}$ ; c)  $3$ ; d)  $4$ ; e)  $e^2$ ; f)  $e^{-1}$ ; g)  $e^{-\frac{3}{2}}$ ; h)  $\frac{3}{5}$ . 5. a)  $-\infty$ ; b)  $0$ ; c)  $\frac{1}{2}$ ; d)  $+\infty$ ; e)  $+\infty$ ; f)  $0$ . **C<sub>1</sub>:** 6. a)  $a \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ ; b)  $a \in \{\pm 1, \pm 4\}$ ; c)  $a=5$ ; d)  $a=0$ . 7. a)  $a=1$ ,  $b=-2$ ; b)  $a=-2$ ,  $b=3$ ; c)  $a=2$ ,  $b=4$ . 8. a)  $x=-1$ ,  $x=3$ ; b)  $600$  m; c)  $400$  m; d)  $5,7^\circ$ ; e)  $200$  m. 9. a)  $5200$  m; b)  $621$  km  $480$  m; c)  $10$  m.

### Test sumativ

**Profilul real.** 1. a)  $-1$ ; b)  $\frac{1}{2}$ . 2. a)  $l_s(0)=l_d(0)=2$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=2$ . 3. a)  $l_1=2$ ,  $l_3=-3$ ; b)  $l=\frac{3}{2}$ ; c)  $l_2=1\frac{1}{4}$ ; d)  $S=\{5, 8\}$ . 4. C.

### Modulul 3

**§1. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 2. a), b), c) Continuă ca funcție elementară. 3. a), b) Continuă; c) discontinuă în  $x_0=0$ ; d) discontinuă în  $x_0=0$ . 4. a) Continuă în punctele  $x_1=-1$ ,  $x_2=1$ ; b) continuă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x_0=0$  – punct de discontinuitate de speță a două. **B<sub>1</sub>:** 5. a) Indicație.

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0| \Rightarrow \forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta > 0 (\delta < \varepsilon)$ , astfel încât  $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|x-x_0| < \delta$ ; b), c) și d) similar cu a).

6. a)  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ |x-1|, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$  b)  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ . 7.  $a=0$ ,  $a=-\sqrt{2}$ ,  $a=\sqrt{2}$ .

8. a)  $x_0=1$ ;  $f(1+0)-f(1-0)=-e$ ; b)  $x_0=-1$ ,  $x_1=0$ ;  $f(-1+0)-f(-1-0)=2$ ,  $f(+0)-f(-0)=1$ .

**C<sub>1</sub>:** 9. a), b) Continuă pe  $[a, b]$ ; c) continuă pe intervalele  $[a, x_0]$  și  $(x_0, b]$ . 10. a) Continuă pe intervalele  $[-3, -2]$ ,  $[-2, -1]$ ,  $(-1, 2]$ ,  $(2, 4]$  și  $(4, 5]$ ; b)  $f(-1) \cdot f(0)=2 \cdot 1=2$ ,  $f(2) \cdot f(4)=1 \cdot 3=3$ ,  $f(0) \cdot f(5)=1 \cdot 2=2$ . 11. a) Continuă; b) discontinuă în punctele  $x_1=-1$ ,  $x_2=1$ .

12. a)  $a+be=2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ; b)  $a=-1$ . 13. a)  $a=3$ ; b)  $S=\{e\}$ .

**§2. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 2. Indicație.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{\pm}(x)=f_{\pm}(x_0)$ ,  $\forall x_0 \in I$ . 4. a) Indicație. Fie  $\alpha=-1$ ,  $\beta=0$ . Atunci  $f(-1)=-1$ ,  $f(0)=1$  și funcția  $f$  nu ia pe  $(-1, 0)$  valori din intervalul  $(0, 1)$ ; b) avem  $f(0,5)=-0,5$  și  $f(1)=0$ , iar funcția  $f$  nu ia pe  $(0,5; 1)$  valori din intervalul  $(-0,5; 0)$ .

c) funcția  $f$  ia numai valori întregi. **5.** Teorema despre anularea funcției nu poate fi aplicată.

**B<sub>1</sub>:** **8.** a)  $S = (e^{-4}, 3)$ ; b)  $S = (-\infty, -4)$ ; c)  $S = \left( \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, 1 \right) \cup (10^{10}, +\infty)$ . **9.** a)  $f(x) > 0$  pe  $(-\infty, 0) \cup (a, b) \cup (c, +\infty)$  și  $f(x) < 0$  pe  $(0, a) \cup (b, c)$ ; b)  $f(x) > 0$  pe  $(1, +\infty)$  și  $f(x) < 0$  pe  $(-\infty, -4) \cup (-4, 1)$ . **10.** a)  $f(x) < 0$  pe  $(-\infty, \ln 4)$  și  $f(x) > 0$  pe  $(\ln 4, +\infty)$ ; b)  $f(x) > 0$  pe  $(0, e^2)$  și  $f(x) < 0$  pe  $(e^2, +\infty)$ ; c)  $f(x) < 0$  pe  $(-\infty, \log_2 5)$  și  $f(x) > 0$  pe  $(\log_2 5, +\infty)$ ; d)  $f(x) > 0$  pe  $(-\infty, \log_2 2)$  și  $f(x) < 0$  pe  $(-\log_2 2, 0)$ .

**C<sub>1</sub>:** **11.** Indicație. Fie  $(a, b)$  interval finit.

$\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } a < x < b \\ \alpha, & \text{dacă } x = a \\ \beta, & \text{dacă } x = b, \end{cases}$  este o funcție continuă pe  $[a, b]$ , deci și mărginită:

$m \leq (\tilde{f}(x)) \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . Dacă  $(a, b) = (a, +\infty)$  ( $a \neq -\infty$ ), atunci  $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > a$ , astfel încât  $\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$ ,  $\forall x \geq \Delta$ . Pe intervalul  $(a, \Delta)$  funcția  $f$  este mărginită:  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $\forall x \in (a, \Delta) \Rightarrow \min(\beta - \varepsilon, m) \leq f(x) \leq \max(\beta + \varepsilon, M)$ ,  $\forall x \in (a, +\infty)$ . Similar pentru intervalele  $(-\infty, b)$  și  $(-\infty, +\infty)$ .

**12.**  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x-a)(b-x)}$ .

$$1, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

**14.** De exemplu: a)  $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -4x+3, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 0, & \text{dacă } x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right); \end{cases}$

b)  $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ ,  $f(x) = x$ ; c)  $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1]$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -2x+2, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$

**§3. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** **1.** a) Nu are asymptote; b)  $y = x$ ; c)  $x = 0$ ,  $y = 3$ . **2.** De exemplu,  $f: \mathbb{R} \setminus \{k\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **B<sub>1</sub>:** **4.**  $a = 3$ ,  $b = -5$ ,  $c = 2$ . **5.**  $a = -6$ ,  $b = 4$ .

**C<sub>1</sub>:** **6.** a)  $y = 0$  la  $+\infty$  și  $-\infty$ ,  $x = \pm 1$ ; b)  $y = x$  la  $+\infty$  și  $y = -x$  la  $-\infty$ ; c)  $y = 1$  la  $+\infty$  și  $-\infty$ ,  $x = 0$ . **7.** a)  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; b)  $x = \pm 2$ ; c)  $y = 0$  la  $+\infty$ ,  $x = 0$ ; d)  $y = x$  la  $+\infty$  și  $-\infty$ .

### Exerciții și probleme recapitulative

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** **2.** a)  $x = 1$  – punct de discontinuitate de speță întâi; b)  $x = 1$  – punct de discontinuitate de speță a doua; c)  $x = -1$  – punct de discontinuitate de speță întâi; d)  $x = 0$  – punct de discontinuitate de speță a doua. **B<sub>1</sub>:** **3.**  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ . **4.** a), b), d) Mărginit; c) nemărginită. **6.**  $a = -1$ .

**C<sub>1</sub>:** **9.** a)  $S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ ; b)  $S = (1, 4)$ ; c)  $S = \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, +\infty)$ . **11.**  $a = \frac{1}{4}$ .

### Test sumativ

**Profilul real.** **1.** F, teorema lui Weierstrass. **2.** 1) a)  $b = 1$  și  $\forall a, c, d \in \mathbb{R}$ ; b)  $c + d = 1$  și  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ; c)  $b = 1$ ,  $c + d = 1$  și  $\forall a \in \mathbb{R}$ . 2) Cazul a)  $c + d = 1$ ; cazul b)  $1 - b$ . **4.** a)  $S = (-2, 2) \setminus \{0\}$ ; b)  $S = (0, 1) \cup (2, +\infty)$ . **5.**  $y = 0$ ,  $x = -1$ .

## Modulul 4

**§1. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $\Delta x = 1,5$ ,  $\Delta f = 3,75$ ; c)  $\Delta x = -0,5 - \sqrt{3}$ ,  $\Delta f = 2,75$ ; d)  $\Delta x = -4,7$ ,  $\Delta f = 17,39$ . 2. c)  $f'(x) = 6x^2$ ; d)  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . 3. a)  $f'(-1) = f'(0) = f'(0,5) = f'(10) = 0,5$ . 4. a)  $y = -x + 4$ , unghi obtuz;  $y = \sqrt{3}x + (3 - \sqrt{3})$ , unghi ascuțit; b)  $y = x + 2$ , unghi ascuțit;  $y = -\sqrt{3}x + (3 + \sqrt{3})$ , unghi obtuz; c)  $y = 0$ , unghi nul;  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9 - \sqrt{3}}{3}$ , unghi ascuțit.

**B<sub>1</sub>:** 5. b)  $f$  nu este derivabilă în punctele  $x_0 = -2$  și  $x_1 = 2$ . 7. a)  $f$  nu este derivabilă în  $x_0 = 0$ ; b)  $f$  este derivabilă în  $x_0 = 0$ . **C<sub>1</sub>:** 8. a)  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 1$ ; b)  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ . 9.  $n = 0$ ,  $m = \frac{2}{e}$ . *Indicație.* Pentru a determina parametrii  $m$  și  $n$ , puneți condițiile de continuitate și de derivabilitate ale funcției în punctul  $x_0 = e$ . 10.  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ .

**§2. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $f$  este derivabilă în  $x_0$  și  $x_1$ ; b)  $f$  este derivabilă în  $x_1$  și nu este derivabilă în  $x_0$ ; c)  $f$  este derivabilă în  $x_1$  și nu este derivabilă în  $x_0$  și  $x_2$ . 3. a)  $y = 3x - 2$ ; b)  $y = -1$ ; c)  $y = 4x + 6$ . 4. a)  $0^\circ$ ; b)  $60^\circ$ . **B<sub>1</sub>:** 6. a)  $f$  nu este derivabilă în  $x_0 = -3$  și  $x_1 = 3$ ; b)  $f$  nu este derivabilă în  $x_0 = 10$ . 7. a) 1)  $y = x + 0,75$ ; 2)  $y = 6x - 3$ ; 3)  $y = -8x - 24$ ; b) 1)  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}$ ; 2)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$ ; 3)  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{3}-6}{12}$ . 8. a) 1) Funcțiile  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sunt continue pe  $\mathbb{R}$ ; 2)  $f$  este derivabilă pe multimea  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $g$  este derivabilă pe multimea  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $h$  este derivabilă pe multimea  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ . 9. (2, -1). 10. (2, 4). 11.  $\arctg 3$ . 12. (1, -1);  $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{13}{243}\right)$ . 13.  $y = 10x - 12$ ,  $y = 12 - 2x$ . **C<sub>1</sub>:** 14.  $b = 4$ ,  $c = 1$ . 15. b)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ .

**§3. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $f'(x) = 8x^7$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}$ ; b)  $f'(x) = -7x^{-8}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$ ; c)  $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$ ; d)  $f'(x) = 3^x \ln 3$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}$ ; e)  $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}$ ; f)  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ ; g)  $f'(x) = -\frac{1}{x \ln 3}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ ; h)  $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ . 2. a)  $\frac{1}{7 \ln 7}$ ; b)  $\frac{10}{\ln 10}$ ; c) 120; d)  $\frac{1}{14}$ ; e)  $32 \ln 2$ ; f) 0. 3. a)  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ; b)  $y = x \ln 2 + 1$ ; c)  $y = x \log_8 \sqrt{e} + \log_8 \frac{2}{e}$ ; d)  $y = 5x + 4$ . 4. a)  $f'(0) = 1$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ; b)  $f'(0) = 0$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ . **B<sub>1</sub>:** 5. a)  $f'(x) = 1,5\sqrt{x}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}_+$ ; b)  $f'(x) = 3,4x^2$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}$ . 6. a)  $f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ ; b)  $f'_d(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$ ;  $f'_s(x) = \frac{1}{-2\sqrt{-x}}$ ,  $x < 0$ ;  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ ; c)  $f'(x) = \frac{1}{x^2 \ln 0,4}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ ; d)  $f'_d(x) = 2^x \ln 2$ ,  $x > 0$ ;  $f'_s(x) = 2^{-x} \ln 2$ ,  $x < 0$ ;  $D_{f'} = \mathbb{R}$ . 7. a)  $f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ,  $f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ; b)  $f'_d(0) = 2$ ,  $f'_s(0) = -2$ ; c)  $f'_s(0) = 3$ ,  $f'_d(0) = -2$ . 8. a)  $y = -42x - 63$ ; b)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$ ; c)  $y = \frac{3x}{27 \ln 27} + \frac{\ln 9 - 1}{\ln 3}$ ; d)  $y = 2,5x \ln 2,5 + 2,5(1 - \ln 2,5)$ . **C<sub>1</sub>:** 9.  $m = 1$ ,  $n = 0$ . 10. a)  $m = n$ ; b)  $m = n = 1$ . 11.  $a \in [-2, 0] \cup [\sqrt{2}, 2]$ .

**§4. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a) 1)  $f'(x) = 30x^5$ ; 2)  $f''(x) = 150x^4$ ; 3)  $f'''(x) = 600x^3$ ; b) 1)  $f'(x) = \pi e^x$ ; 2)  $f''(x) = \pi e^x$ ; 3)  $f'''(x) = \pi e^x$ ; c) 1)  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 9}$ ; 2)  $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 9}$ ,

3)  $f'''(x) = \frac{2}{x^3 \ln 9}$ ; d) 1)  $f'(x) = 3x^2 - 10x$ ; 2)  $f''(x) = 6x - 10$ ; 3)  $f'''(x) = 6$ .

2. a)  $D_f = \mathbb{R}_+$ ,  $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}_*$ ; b)  $D_f = \mathbb{R}_*$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 5x^4$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ ;

c)  $f'(x) = e^x(1+x)$ ,  $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ ; d)  $D_f = \mathbb{R}_*$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}_*$ ;

e)  $D_f = \mathbb{R}_*$ ,  $f'(x) = -\frac{\log_3 x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x \ln 3}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}_*$ ; f)  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$ ,  $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;

g)  $D_f = \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+2)^2}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}$ ; h)  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ ,  $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}_* \setminus \{1\}$ ; i)  $f'(x) = \frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}$ ,

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; j)  $f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$ ,  $D_f = (-\infty; 0] \cup [0, 5; +\infty)$ ,  $D_{f'} = (-\infty; 0) \cup (0, 5; +\infty)$ ;

k)  $D_f = \mathbb{R}_*$ ,  $f'(x) = -\frac{4}{x \ln 2}$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ . 3. a)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ; b)  $\log_5 0,5 + \frac{2}{\ln 5}$ . 4. a)  $v(t) = -t^2 + 6t + 7$ ;

b) 15 m/s; c) 7 s. 5. a)  $t_1 = 1$  s,  $t_2 = 2$  s; b)  $v_1(t) = 12t + 4$ ,  $a_1(t) = 12$ ;  $v_2(t) = 3t^2 + 6t + 6$ ,  $a_2(t) = 6t + 6$ ; c)  $v_1(1) = 16$  m/s,  $v_1(2) = 26$  m/s,  $a_1(1) = a_1(2) = 12$  m/s<sup>2</sup>;  $v_2(1) = 15$  m/s,  $v_2(2) = 30$  m/s,  $a_2(1) = 12$  m/s<sup>2</sup>,  $a_2(2) = 18$  m/s<sup>2</sup>; d)  $v_1(t) = v_2(t)$  în momentele  $t_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$  s și  $t_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$  s,  $a_1(t) = a_2(t)$  în momentul  $t = 1$  s.

B1: 6. a)  $f'(x) = 25x^{24} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$ ;

b)  $f'(x) = \cos x + \frac{1}{x \ln 0,3} - \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$ ; c)  $f'(x) = \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}x} + \frac{10}{x^3}$ ; d)  $f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{32x^5}} + 7e^x + \frac{3}{x^{10}}$ ;

e)  $f'(x) = -\sqrt{5} \sin x - 7 \cos x - \frac{4}{x}$ ; f)  $f'(x) = 5 \left( \frac{\sin x}{4\sqrt[4]{x^3}} + \sqrt{x} \cos x \right)$ ; g)  $f'(x) = 8x^2(3 \ln x + 1)$ ;

h)  $f'(x) = 3x^{-6}(\log_3 x - 0,2 \log_3 e)$ ; i)  $f'(x) = \frac{10x-15}{x^2-3x}$ ; j)  $f'(x) = \frac{6\sqrt{2} \log_5^2 \operatorname{tg} x}{\sin 2x \ln 5}$ ;

k)  $f'(x) = 3 \cdot 6^{3x} \cdot \ln 6 \cdot \sin^2 4x + 4 \cdot 6^{3x} \cdot \sin 8x$ ; l)  $f'(x) = \frac{-6x^2 \cdot \ln x \cdot \sin(3x^2-1) - 2 \cdot \cos(3x^2-1)}{x \ln^3 x}$ .

7. a)  $y = \sqrt{3}x + \left( \frac{1}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \right)$ ; b)  $y = 0$ ; c)  $y = \sqrt{3} \cdot x + 1 - \sqrt{3}$ . 8.  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ . 9. De exemplu,

a)  $f(x) = 2x - \sin x + 2008$ ; b)  $f(x) = -e^{2x} - 100$ . 10. a)  $S = \{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} | n \in \mathbb{Z}\}$ ;

b)  $S = \{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$ . 11. a)  $S = (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$ ; b)  $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( -\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, \frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \right)$ .

Indicație. Rezolvați inecuația  $\sin(6x - \pi) < \frac{1}{2}$ . 12. a)  $f''(x) = 12x - 10$ ; b)  $f''(x) = -18 \sin 3x$ ;

c)  $f''(x) = 20e^{-2x}$ ; d)  $f''(x) = -\frac{3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$ ; e)  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ; f)  $f''(x) = -\frac{x}{27\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^3}}$

g)  $f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$ ; i)  $f''(x) = (\sqrt{x})^{x-1} \cdot \left[ \left( \ln \sqrt{x} + \frac{x-1}{2x} \right)^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right]$ . Indicație. Aplicați de

două ori formula  $(\ln x)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ . 13.  $-\frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{5}{x^2+1} + 3 \operatorname{arctg} x$ . 14. a) 24; b)  $\frac{3}{8} \sin \frac{x}{2}$ ;

c)  $-27\sqrt{2}e^{-3x}$ ; d)  $-\frac{6}{(x-2)^4}$ ; f)  $\frac{2}{x^3}$ . 16. 70m N. 17. a) 28 m/s; b) 10 m/s<sup>2</sup>; c) 24 010 kg<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>.

18. a)  $\approx 10,2$  s; b)  $\approx 510,204$  s; c)  $\approx 10,2$  s; d)  $\approx 100$  m/s. C1: 21.  $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{6} \right\}$ . 23.  $m = 1$ ,  $n = -1$ .

**§5. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $df(x) = (3x^2 + 2)dx$ ; b)  $df(x) = \frac{dx}{(1-x)^2}$ ; c)  $df(x) = \cos(x+1)dx$ ;

e)  $df(x) = -2\sin 2x dx$ . 2. a)  $df(x) = (\log_2 x + \log_2 e)dx = \log_2(ex)dx$ ; b)  $df(x) = 2xe^{4x}(1+2x)dx$ ;

c)  $df(x) = \left[ \operatorname{ctg}(x+5) - \frac{x}{\sin^2(x+5)} - \frac{1}{x} \right] dx$ ; d)  $df(x) = \frac{9}{x}dx$ . 3. a)  $-\frac{2}{3}dx$ ; b)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}dx$ ; c)  $\frac{1}{\ln 4}dx$ .

**B<sub>1</sub>:** 4. a)  $df(x) = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + 20x^3 + \frac{7}{x^8} \right) dx$ ; b)  $df(x) = \left( -2 \cdot e^{-x} \cdot \ln 3 - \frac{2x}{x^2-1} \right) dx$ ;

c)  $df(x) = \left( \frac{2\sin x}{\cos^3 x} - \frac{2x-1}{5\sqrt[5]{(x^2-x)^4}} \right) dx$ . 5. a)  $2\frac{1}{8}dx$ ; b) nu există; c)  $\frac{1}{3}dx$ ; d)  $28e^4dx$ .

6. a)  $\frac{2\ln(x-1)}{x-1}dx$ ; b)  $\frac{2x}{x^2-5}dx$ . 7. a)  $4x^3 \sin 2x^4 dx$ ; b)  $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$ ; c)  $\frac{10\operatorname{ctg}\frac{2}{x}\ln 5}{\left(x\sin\frac{2}{x}\right)^2}dx$

**C<sub>1</sub>:** 8. a)  $(x^{\sin x}(\cos x) \cdot \ln x + x^{\sin x-1} \cdot \sin x)dx$ ; b)  $(x^{\ln x-1} \cdot \ln \sqrt[x]{x^2})dx$ ;

c)  $((x-1)^{3x} \cdot 3\ln(x-1) + 3x(x-1)^{3x-1})dx$ . 9. a) 1) Funcția  $f$  nu este derivabilă în  $x=1$ ;

2)  $df(x) = -e^{-|x-1|} \frac{x-1}{|x-1|}dx$ ,  $x \neq 1$ ; b) 2)  $df(x) = \begin{cases} -(x+2)e^x dx, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ (x+2)e^x dx, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ -xe^{-x} dx, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$

**§6. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $x_0$ ; b)  $x_0, x_2$ ; c)  $x_2$ ; d)  $x_2$ ; e), f) în niciunul dintre punctele indicate.

2. a) 1)  $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ ; sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat; b) 1)  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ; sunt verificate condi-

țiile teoremei lui Fermat. 3. a) Da; b) nu. **B<sub>1</sub>:** 6. b)  $c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 7. a)  $c = 1$ ; b) funcția  $f$  nu

este derivabilă în  $x_0 = 2$ ; c)  $c = 0$ ; d)  $c = \frac{\pi}{2}$ . 8. a)  $a = 7$ ,  $b = -3$ ,  $d = -1$ ; b)  $c = -\frac{3}{14}$ . 9. Indicație.

Aplicați corolarul teoremei lui Rolle. 10. Indicație. Studiați funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot 2^x - 2 \cdot x^{10} + 2$ .

12. a)  $c = -0,5$ ; b)  $c = \frac{3\sqrt{3}}{e}$ ; c) teorema lui Lagrange nu poate fi aplicată funcției  $f$ , deoarece ea nu

este derivabilă pe  $(0, 3)$ ; d)  $c = \ln \frac{e^5 - 1}{5e}$ . 14.  $f'(x) = 7$ . Indicație. Aplicați corolarul 3 al teoremei

lui Lagrange. 16.  $f$  este derivabilă în  $x_0 = 1$  și  $f'(1) = 2$ . 17. a)  $-2$ ; b)  $\infty$ ; c)  $-\frac{1}{3}$ ; d)  $1$ ; e)  $0$ ; f)  $0$ ;

g)  $1$ ; h)  $0$ . 18. a)  $1$ ; b)  $1$ ; c)  $e^3$ . 19. a)  $0$ ; b)  $0$ ; c)  $0$ .

### Exerciții și probleme recapitulative

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. B. 2. D. 3. a) A; b)  $y = 2x - 1$ ; c)  $S = \mathbb{R}^*$ ; e)  $O(0, 0)$ . 4. a)  $S = \left\{ 0, 1 \frac{1}{3} \right\}$ ;

b)  $S = \{e^{-1}\}$ ; c)  $S = \{0\}$ . 5.  $S = [0, +\infty)$ . 6. a) 4 s; b) 6 s. **B<sub>1</sub>:** 7. a)  $(\cos x)\sin(\sin x)dx$ ;

b)  $(-\sin x)\cos(\cos x)dx$ ; c)  $\frac{1}{x \ln x}dx$ . 8. a)  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; b)  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

c)  $S = \{0\}$ . 9. a) 1)  $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$ ; 2)  $f'_s(3) = 0$ ,  $f'_d(3) = 3$ ; 3)  $f'_s(0) = 2$ ,  $f'_d(0) = 0$ .

11. Indicație. Aplicați corolarele teoremei lui Rolle. 12. Funcția  $f$  este continuă pe  $[1, +\infty)$ , dar nu

este derivabilă în punctul  $x_0 = 2$ . 14.  $c = \frac{1}{2}$ . 15. a) Funcția  $f$  verifică condițiile teoremei lui Rolle

și  $c = 2$ ; b) funcția  $f$  verifică condițiile teoremei lui Rolle și  $c = \frac{\pi}{2}$ ; c) funcția  $f$  verifică condițiile

teoremei lui Rolle și  $c = \frac{12 \pm \sqrt{3}}{3}$ . **16.**  $\frac{2}{3}$ . **Ci:** **18.**  $S = \{0, 1\}$ . **19.** a)  $m = -1$ ; b) în momentul  $t = 0$ ,  $v(0) = -1$ ,  $a(0) = -3$ ; în momentul  $t = \frac{\pi}{4}$ ,  $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{-\frac{\pi}{4}}$ ,  $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4e^{\frac{\pi}{4}}$ . **20.**  $a \in \left\{1, \frac{9}{7}\right\}$ .

### Test sumativ

**Profilul real.** **1.** a) A; b)  $S = \left\{(k+1)\frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; c)  $y = 6x - (6\pi + 1)$ ; d)  $\frac{18}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$ .  
**2.**  $e^{-\frac{1}{2}}$ . **3.** a)  $a = \ln 2$ ,  $b = 0$ ,  $d = 1$ ; b)  $c = 0$ . **4.** 1,5 s.

## Modulul 5

**§ 1. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** **1.** a)  $f(-2) = f(2) = -4$  – minime,  $f(0) = 12$  – maxim; b)  $f(1) = 4$  – minim; c)  $f(-5) = 0$  – maxim,  $f(1) = -324$  – minim; d)  $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$  – maxim,  $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$  – minim; e)  $f(1) = 0$  – minim,  $f(-1) = 4$  – maxim; f)  $f$  este strict crescătoare.  
**2.** a)  $m = -7$ ,  $M = 9$ ; b)  $m = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ,  $M = 120$ .

**B<sub>1</sub>:** **3.** a)  $(-\infty, 1] \nearrow$ ,  $[1, 3] \searrow$ ,  $[3, +\infty) \nearrow$ ; b)  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right] \searrow$ ,  $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right) \nearrow$ ; c)  $(-\infty, 3) \searrow$ ,  $(3, +\infty) \searrow$ ; d)  $(0, +\infty) \searrow$ ; e)  $(-\infty, -3] \searrow$ ,  $[-3, -\sqrt{3}) \nearrow$ ,  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \nearrow$ ,  $(\sqrt{3}, 3] \nearrow$ ,  $[3, +\infty) \searrow$ ; f)  $(-\infty, -1] \nearrow$ ,  $[1, +\infty) \nearrow$ . **4.** a)  $a \in [1, +\infty)$ ; b)  $a \in [-1, +\infty)$ ; c)  $a \geq 1$ . **5.**  $a \in [-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ .

**8.** a)  $m = \min[f(-1), f(0), f(2)] = f(2) = -13$ ;  $M = \max[f(-1), f(0), f(2)] = f(0) = 3$ ; b)  $m = \min(f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)) = f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $M = \max(f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$ ; c)  $m = 2 - 2\ln 2$ ,  $M = +\infty$ . **9.** a)  $f(5) = -\frac{27}{4}$  – maxim; b)  $f(2k\pi) = 1$ ,  $f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ ,  $f(2k\pi + \frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – maxime și  $f(2k\pi + \pi) = -1$ ,  $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – minime, c)  $f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$  – maxim,  $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$  – minim; d)  $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{e^2}{3}$ ; e)  $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 4e^{-2}$  – maxime;  $f(0) = 0$  – minim; f)  $f(1) = 0$  – minim;  $f(e^2) = 4e^{-2}$  – maxim; g)  $f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9^{3\sqrt{6}}}{8}$  – maxim;  $f(1) = 0$  – minim; h)  $f(0) = 0$  – maxim; i)  $f(-1) = e^{-1}$  – maxim;  $f(2) = 4\sqrt{e}$  – minim.

**C<sub>1</sub>:** **10.** a)  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$ ; b)  $(-\infty, 0) \searrow$ ,  $(0, 1) \nearrow$ ,  $(1, +\infty) \searrow$ ; c) din b) rezultă că  $f(3) > f(5) \Rightarrow \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{16} \Rightarrow \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{16} > \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{4}$ . **12.**  $m = -\pi$ ,  $M = \pi$ .

**§ 2. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** **1.** a) Strict concavă pe  $(-\infty, -3)$  și strict convexă pe  $(-3, +\infty)$ ; b) strict convexă pe  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$  și strict concavă pe  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ ; c) strict concavă pe intervalele  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , și strict convexă pe intervalele  $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; d) strict concavă pe  $(-\infty, 0)$  și strict convexă pe  $(0, +\infty)$ ; e) strict convexă pe  $(-\infty, 0)$  și strict concavă pe  $(0, +\infty)$ ; f) strict concavă pe  $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$  și strict convexă pe  $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ ; g) strict convexă pe intervalele  $\left(e^{2k\pi - \frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , și strict concavă pe intervalele  $\left(e^{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}\right)$ ,

$k \in \mathbb{Z}$ . **2. Indicație.** Determinați mai întâi punctele în care  $f'' = 0$  și punctele în care  $f''$  nu există sau este infinită, apoi discutați semnul lui  $f''$  în vecinătatea punctelor găsite.

**§ 3. Profilul real. B<sub>1</sub>:** 3. c)  $A_{\max} = \frac{a^2}{2}$ .

**§ 4. Profilul real. A<sub>1</sub>:** 1. a)  $v(0) = s'(0) = 12$  m/s. b) Peste 2 secunde. Distanța este de 16 m.

2.  $v(t) = 3at^2 + b$ ;  $a(t) = v'(t) = 6at$ . **3. Indicație.**  $v(t) = 3t^2 - 12t$ ;  $a(t) = 6t - 12$ ,  $a(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ ,  $v_{\min} = v(2) = -12$ . **B<sub>1</sub>:** 4.  $R = r$ ,  $P_{\max} = P(r) = \frac{E^2}{4r}$ . **C<sub>1</sub>:** 6. 4225 de lei. **7. Indicație.** Beneficiul brut  $B(x) = p(x) \cdot x - C(x)$ .  $x = 11$  unități,  $B_{\max} = 479$  u.m. **8. AM = 64 km.**

### Exerciții și probleme recapitulative

- A<sub>1</sub>:** 1. a)  $(-\infty, -4] \nearrow, [-4, 0] \searrow, [0, +\infty) \nearrow$ ; b)  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \nearrow, \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \searrow, \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) \nearrow$ .  
 2. a)  $(-\infty, -1] \searrow, [-1, +\infty) \nearrow$ ; b)  $(-\infty, 0] \nearrow, [0, 1] \searrow, [1, +\infty) \nearrow$ ; c)  $(-\infty, -2] \searrow, \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \nearrow, \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \nearrow$ ; d)  $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right] \nearrow, \left[\frac{4}{5}, 2\right] \searrow, [2, +\infty) \nearrow$ ; e)  $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \searrow, \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \nearrow, \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \searrow$ ; f)  $(-\infty, 1] \searrow, [1, +\infty) \nearrow$ . **3. a)**  $(-\infty, -1] \searrow, [-1, +\infty) \nearrow$ ; b)  $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \searrow, \left[-\frac{3}{2}, 0\right] \nearrow, \left[0, \frac{3}{2}\right] \searrow, \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \nearrow$ ; c)  $(-\infty, -2] \nearrow, [-2, 2] \searrow, [2, +\infty) \nearrow$ ; d)  $(-\infty, +\infty) \nearrow$ ; e)  $(-\infty, -1] \nearrow, [-1, 1] \searrow, [1, +\infty) \nearrow$ ; f)  $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right] \nearrow, \left[-\frac{2}{5}, 0\right] \searrow, [0, +\infty) \nearrow$ . **4. a)**  $m = -3$ ,  $M = 2$ ; b)  $m = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}$ ,  $M = 8$ .  
**6. a)**  $a = 2$ ; b)  $a = -\frac{3}{2}$ . **7.  $B_{\max} = B(39) = 4\ 443$  lei.** **B<sub>1</sub>:** 9. a)  $(-\infty, -1] \searrow, [-1, +\infty) \nearrow$ ; b)  $(-\infty, -1] \searrow, [-1, 1] \nearrow, [1, +\infty) \searrow$ ; c)  $(0, e^{-\frac{1}{2}}] \searrow, [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty) \nearrow$ . **10.**  $m \in (-\infty, -1]$ . **11.** a) Strict concavă pe  $(-\infty, -1)$  și strict convexă pe  $(-1, +\infty)$ ; b) strict concavă pe  $(0, \pi)$  și strict convexă pe  $(\pi, 2\pi)$ ; c) strict concavă pe intervalele  $(-\infty, -\sqrt{3})$  și  $(0, \sqrt{3})$  și strict convexă pe intervalele  $(-\sqrt{3}, 0)$  și  $(\sqrt{3}, +\infty)$ ; d) strict convexă pe intervalele  $(-\infty, 0)$  și  $(0, +\infty)$ . **12. a)**  $x = 0$ ; b)  $x = 0$ ; c), d) nu are puncte de inflexiune; e)  $x = e$ ; f)  $x = 0$ ,  $x = 4$ . **16. a)**  $m \in [0, 1]$ ; b)  $m \in \emptyset$ ; c)  $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ; d)  $m = 1$ . **17.**  $x = 26$ ,  $B_{\max} = B(26) = 336$  lei.  
**18.**  $a \in (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$ . **19.** Lățimea  $\frac{40}{3}$  m, lungimea 30 m.

### Test sumativ

**Profilul real.** 1. A. 3.  $m = -\infty$ ,  $M = 2 \ln 2$ . 5.  $V_{\max} = 1000$  u.m. și se realizează pentru impozitul de 50 u.m. pentru o unitate de produs.

### Modulul 6

- § 1. Profilurile umanist, arte, sport. A:** 1. a)  $3 + 2i$ ; b)  $2 - 2i$ ; c)  $\sqrt{3} + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{3})i$ ; d)  $14 + 2i$ ; e)  $\sqrt{6} + \sqrt{3} + (\sqrt{2} - 3)i$ ; f)  $\frac{1}{13}(8 - i)$ ; g)  $\frac{1}{10}(3 - i)$ ; h)  $25 - 22i$ ; i)  $-2 + 2i$ . **2. 1)** a)  $i$ ; b)  $-1$ ; c)  $1$ ; d)  $-i$ ; e)  $1$ ; 2)  $k = 2n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **B:** 3. a)  $x = -33$ ,  $y = 20$ ; b)  $x = -\frac{1}{7}$ ,  $y = \frac{2}{7}$ ; c)  $x = -11$ ,  $y = -8$ ; d)  $x = \frac{1}{3}(3 - 4\sqrt{3})$ ,  $y = 8 - \sqrt{3}$ . **4. 1)** d), f) g), i); **2)** a)  $S = \left\{ \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{4} \right\}$ .

- b)  $S = \left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$ ; c)  $S = \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2} \right\}$ ; d)  $S = \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \right\}$ ; e)  $S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{19}}{2} \right\}$ ; f)  $S = \left\{ -7, \frac{1}{3} \right\}$ ;  
g)  $S = \left\{ \frac{-5}{2}, 1 \right\}$ ; h)  $S = \{-1 \pm i\}$ ; i)  $S = \{-2 \pm \sqrt{5}\}$ . 5. a) 22i; b) 36. **C:** 6. a)  $S = \{2-i\}$ ;  
b)  $S = \left\{ \frac{-1}{29}(1+12i) \right\}$ ; c)  $S = \left\{ \frac{1}{3}(9-13i) \right\}$ ; d\*)  $S = \{2+i\}$ . 7. a)  $S = \left\{ 1-i, -\frac{1}{3} \right\}$ ;  
b)  $S = \left\{ \frac{1}{2}((2+i)z_2 - i, z_2), z_2 \in \mathbb{C} \right\}$ . 8. a)  $\{-1 \pm i\}$ ; b) nu există; c) nu există.

- Profilul real. A<sub>1</sub>:** 1. a)  $-1+2i$ ; b)  $6-2i$ ; c)  $\sqrt{3}+\sqrt{2}-(1+\sqrt{3})i$ ; d)  $-10-10i$ ;  
e)  $6-\sqrt{3}-(3+\sqrt{2})i$ ; f)  $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$ ; g)  $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$ ; h)  $21-20i$ ; i)  $2+2i$ . 2. 1) a)  $-i$ ; b)  $1$ ; c)  $1$ ; d)  $-i$ ;  
e)  $-1$ ; 2)  $k=2n, n \in \mathbb{Z}$ . 3. a)  $x=\frac{37}{11}, y=\frac{20}{11}$ ; b)  $x=-\frac{1}{7}, y=-\frac{2}{7}$ ; c)  $x=-\frac{7}{5}, y=-\frac{8}{5}$ ;  
d)  $x=-\frac{3+4\sqrt{3}}{3}, y=8+\sqrt{3}$ . 4. a)  $S = \left\{ \frac{3-i\sqrt{15}}{4}, \frac{3+i\sqrt{15}}{4} \right\}$ ; b)  $S = \left\{ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$ ;  
c)  $S = \left\{ \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{15}}{2} \right\}$ ; d)  $S = \left\{ \frac{-1-i\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+i\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}} \right\}$ ; e)  $S = \left\{ \frac{1-3i}{2}, \frac{1+3i}{2} \right\}$ ;  
f)  $S = \left\{ \frac{-2-i\sqrt{31}}{5}, \frac{-2+i\sqrt{31}}{5} \right\}$ ; g)  $S = \left\{ \frac{5-i\sqrt{127}}{4}, \frac{5+i\sqrt{127}}{4} \right\}$ ; h)  $S = \{1-i, 1+i\}$ ; i)  $S = \{-2-i, -2+i\}$ .  
5. a) 4; b)  $-52i$ . 6. a)  $S = \{1+2i\}$ ; b)  $S = \left\{ \frac{1}{5}(3-4i) \right\}$ ; c)  $S = \left\{ -\frac{5}{3}+5i \right\}$ ; d\*)  $S = \left\{ \frac{1}{2}(4-3i) \right\}$ .  
**B<sub>1</sub>:** 7. a)  $S = \left\{ 1-i, -\frac{1}{3} \right\}$ ; b)  $S = \left\{ \frac{1}{2}((2+i)z_2 - i, z_2), z_2 \in \mathbb{C} \right\}$ . 8. a)  $\{1 \pm i\}$ ; b) nu există; c)  $\{3i\}$ .  
9. a) 0; b)  $\frac{1}{130}(19-3077i)$ . 10. a)  $z^4+4$ ; b)  $z^4-1$ ; c)  $a^2-ab+b^2$ . **C<sub>1</sub>:** 13.  $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} + i \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ .  
14. a) Da; b) nu; c)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ .

- § 2. Profilul real. A<sub>1</sub>:** 1. b) Numerele reale; numerele pur imaginare și zero; c)  $|z|$ .  
2. a)  $\{\pm(1-i)\}$ ; b)  $\{\pm(2-3i)\}$ ; c)  $\{\pm(7+i)\}$ ; d)  $\{\pm(\sqrt{3}-i)\}$ ; e)  $\{\pm(\sqrt{3}-i\sqrt{2})\}$ ; f)  $\{\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{3})\}$ .  
**B<sub>1</sub>:** 3. 1) a)  $S = \{-1+i, -3-i\}$ ; b)  $S = \{1+2i, -6i\}$ ; c)  $S = \{i, -3+i\}$ ; d)  $S = \left\{ -3+i, \frac{3-i}{2} \right\}$ ;  
e)  $S = \{-1+i, 1-i\}$ ; f)  $S = \{-7-i, 7+i\}$ . 2) Da. 4.  $\{\pm(\beta-\alpha i)\}$ . 5. a)  $5(\cos\pi+i\sin\pi)$ ;  
b)  $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ ; c)  $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ ; d)  $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ;  
e)  $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ ; f)  $4\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$ ; g)  $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$ ;  
h)  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ ; i)  $2^{-50}(\cos\pi+i\sin\pi)$ . **C<sub>1</sub>:** 6. a) 1; b)  $-64(1+i)$ ; c)  $512(1-i\sqrt{3})$ .  
7. a)  $\left\{ -i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2} \right\}$ ; b)  $\left\{ -3, \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \right\}$ ; c)  $\left\{ \pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i], \pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i] \right\}$ ;  
d)  $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i) \right\}$ . 8. a) i; b)  $2-i, -2-i$ .

**§3. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $S = \left\{ \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{1}{48}(23\pi + 24k\pi) + i \sin \frac{1}{48}(23\pi + 24k\pi) \right) \mid k = \overline{0, 3} \right\}$ ;

b)  $S = \left\{ \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{1}{36}(-\pi + 24k\pi) + i \sin \frac{1}{36}(-\pi + 24k\pi) \right) \mid k = \overline{0, 2} \right\}$ ; c)  $S = \{\pm 1, \pm \sqrt{6}\}$ ; d)  $S = \{\pm 1, \pm i\sqrt{2}\}$ ;

e)  $S = \{\pm \sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}\}$ . **2.**  $S = \{0, -1, 1\}$ . **B<sub>1</sub>:** 3.  $S = \left\{ \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1} \mid \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}, k = \overline{0, 3} \right\}$ .

4. a)  $S = \left\{ -i, i, \frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \right\}$ ; b)  $S = \left\{ 2 \pm \sqrt{3}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ ; c)  $S = \left\{ -1, \frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2} \right\}$ .

**C<sub>1</sub>:** 6. a)  $-5i$ ; b)  $5$ ; c) nu aparține.

### Exerciții și probleme recapitulative

**Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. a)  $1+2i$ ; b)  $2-2i$ ; c)  $-10-10i$ ; d)  $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$ ; e)  $-i$ ; f)  $1$ ;

g)  $-i$ . 3. a)  $S = \{\pm 2i\}$ ; b)  $S = \{\pm 4+3i\}$ ; c)  $S = \left\{ \frac{1}{2}(-1 \pm i) \right\}$ . **B:** 4. 1. 5. a)  $-4(\sqrt{3}+i)$ ; b)  $-\frac{1}{4}$ .

**C:** 6. a)  $2+i$ ; b)  $\frac{127}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; c)  $-i$ ; d)  $\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$ . 7.  $z = \frac{\sqrt{3}}{3}-i$ .

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a)  $1-2i$ ; b)  $2+2i$ ; c)  $-10+10i$ ; d)  $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$ ; e)  $i$ ; f)  $1$ ; g)  $i$ . 3. a)  $S = \{\pm 3i\}$ ;

b)  $S = \{\pm 4+2i\}$ ; c)  $S = \left\{ \frac{1}{2}(1 \pm i) \right\}$ . 4. 1. 5. a)  $-4(\sqrt{3}-i)$ ; b)  $-\frac{1}{4}$ . 6. a)  $2+i$ ; b)  $\frac{127}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

c)  $-i$ ; d)  $\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$ . **B<sub>1</sub>:** 7.  $z = \frac{\sqrt{3}}{3}+i$ . 8. -64. 9. a)  $S = \left\{ \frac{-3+\sqrt{21}}{2}i, \frac{3-\sqrt{21}}{2}i \right\}$ ; b)  $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}+i \right\}$ ;

c)  $S = \{1+i\}$ ; d)  $S = \{0, \pm i\}$ ; e)  $S = \{1-i; 0,8-0,4i\}$ . 10. a)  $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ;

b)  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ . 11. a)  $\left\{ \sqrt[3]{4}(\cos\varphi_t + i\sin\varphi_t) \mid \varphi_t \in \left\{ \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \right\} \right\}$ ;

b)  $\left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{4}}(\cos\varphi_t + i\sin\varphi_t) \mid \varphi_t \in \left\{ \frac{7\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{31\pi}{18} \right\} \right\}$ . 12. a)  $-2^6$ ; b)  $-2^7$ ; c)  $2^9$ .

**C<sub>1</sub>:** 13. -1. *Indicație.* Înmulțiți egalitatea cu  $z-1$ ; se obține  $z^4 = z$ . 14.  $n=4k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

15. b) Punctele  $M_1$  și  $M_3$ . 16. a)  $S = \{-1 \pm i\sqrt{2}\}$ ; b)  $\sqrt{3}$ ; c) imaginea soluției  $-1+i\sqrt{2}$  aparține cercului, iar a soluției  $-1-i\sqrt{2}$  – nu.

### Test sumativ

**Profilurile umanist, arte, sport.** 1.  $x=1$ ,  $y=\frac{1}{5}$ . 2. a)  $\frac{5}{3}-\frac{17}{5}i$ ; b)  $\frac{11}{50}-\frac{23}{50}i$ . 3.  $S = \left\{ \frac{2}{17}(4-i) \right\}$ .

4. b)  $S = \left\{ \frac{1 \pm 3i\sqrt{10}}{7} \right\}$ . 5. a)  $2i$ ; b) C.

**Profilul real.** 1. a)  $-\frac{11}{3}-\frac{8+\sqrt{3}}{2}i$ ; b)  $-\frac{23}{53}+\frac{1}{53}i$ . 2. a) Nu are; b)  $S = \left\{ \frac{-\sqrt{7} \pm 7i}{4} \right\}$ .

3.  $z_1 = -i$ ,  $z_2 = -1-i$ . 4.  $2^4 + 2^4 \cdot i$ . 5. a) Pentru  $z \in \mathbb{R}$  numărul  $2z^3$  este real;

b)  $S = \left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left( \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right), -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}i \right\}$ . 6. b) Nu.

**Modulul 7****§1. Profilurile umanist, arte, sport. A:**

1. a)  $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & -1-i \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ i & 2+2i \end{pmatrix}$ ;

d)  $\begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2+i & -1+i \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 9 & 3i \end{pmatrix}$ ; f)  $\begin{pmatrix} 2 & 2i & 4 \\ 4 & 0 & -2i \\ -2 & 14 & 6 \end{pmatrix}$ ; g)  $\begin{pmatrix} 6i & -2 & 10i \\ 0 & 4i & -2 \\ 2i & -2-2i & -6i \end{pmatrix}$ ; h)  $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ ;

i)  $\begin{pmatrix} 5i & -1+i \\ 4 & 5i \end{pmatrix}$ ; j)  $\begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & i \end{pmatrix}$ . 2. Nu există astfel de numere.

3. a)  $AB = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 12 & 51 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 17 & 43 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$ ; b)  $AB = \begin{pmatrix} 6 & -42 & -48 \\ -18 & 14 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $BA$  nu există, c)  $AB = \begin{pmatrix} -3 & 27 & 0 \\ 12 & 4 & 6 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ,

$BA = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 0 \\ 18 & 4 & 3 \\ 33 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ ; d)  $AB = \begin{pmatrix} a+x & 1+x & a+1+x \\ b+y & 1+y & b+1+y \\ c+z & 1+z & c+1+z \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} a+c & 2 & x+z \\ b+c & 2 & y+z \\ a+b+c & 3 & x+y+z \end{pmatrix}$ ; e)  $AB$  nu există,  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & 24 \\ -1 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ ; f)  $AB = BA = A$ .

4. a), b)  $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} 46 & 32 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$ ; d)  $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$ ;

e)  $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$ ; f)  $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ; g)  $\begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}$ .

**B:** 5. a)  $\begin{pmatrix} -9 & -62 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ ; b), e) nu există;

c)  $\begin{pmatrix} -46 & 9 & 27 \\ 39 & -69 & 27 \\ 96 & 144 & -63 \end{pmatrix}$ ; f)  $\begin{pmatrix} a^2 + bd + cg - 1 & ad + ed + fg & ag + hd + ig \\ ab + bc + ch & bd + e^2 + fh - 1 & bg + ch + ih \\ ac + bf + ci & dc + ef + fi & cg + fh + i^2 - 1 \end{pmatrix}$  6. a)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

c)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 18 & 0 \\ 12 & 2 & 6 \\ 22 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ . 7. a)  $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 16 & 16 & 8 \\ 16 & 16 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ .

**C:** 8.  $T_1 = 1,1 \cdot T = \begin{pmatrix} 2,2 & 3,3 & 4,4 & 2,2 & 3,3 \\ 4,4 & 2,2 & 3,3 & 6,6 & 3,3 \\ 3,3 & 1,1 & 2,2 & 3,3 & 5,5 \end{pmatrix}$ . 9.  $M = M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 & 11 & 11 \\ 19 & 11 & 9 & 5 & 12 \\ 12 & 13 & 9 & 17 & 8 \end{pmatrix}$ .

10. a) În a doua clasă. 11. Nu.

**Profilul real. A:** 1. a)  $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -3 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} 3+i & i \\ 1+i & 2+2i \end{pmatrix}$ ; d)  $\begin{pmatrix} 3 & -2+i \\ 2i & -1+i \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -3 & 6 & 3i \end{pmatrix}$ ;

f)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2i & 0 & 14 \\ 4 & -2i & 6 \end{pmatrix}$ ; g)  $\begin{pmatrix} 6i & 0 & 2i \\ -2 & 4i & -1-2i \\ 10i & -2 & -6i \end{pmatrix}$ ; h)  $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ ; i)  $\begin{pmatrix} 5i & 4 \\ -1+i & 5i \end{pmatrix}$ ; j)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix}$ .

2.  $x=2$ ,  $y=1$ ,  $z=-1$ ,  $u=0$ . 3. a)  $AB = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 43 & 30 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 5 & 51 \end{pmatrix}$ ; b)  $AB$  nu există,

$$BA = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -42 & 14 \\ -48 & 8 \end{pmatrix}; \text{c) } AB = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 33 \\ 18 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 11 \\ 27 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \text{d) } AB = \begin{pmatrix} a+c & b+c & a+b+c \\ 2 & 2 & 3 \\ x+z & y+z & x+y+z \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 1+x & 1+y & 1+z \\ a+1+x & b+1+y & c+1+z \end{pmatrix}; \text{e) } AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}, BA \text{ nu există}; \text{f) } AB = BA = A. \text{ 4.a), b)} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 46 & -10 \\ 32 & -8 \end{pmatrix}; \text{d) } \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}; \text{e) } \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}; \text{f) } \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}; \text{g) } \begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}. \text{ B1: 5.1) a)} \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -62 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{b), e) nu există; c) } \begin{pmatrix} -46 & 39 & 96 \\ 9 & -69 & 144 \\ 27 & 27 & -63 \end{pmatrix}; \text{f) } \begin{pmatrix} a^2 + bd + cg - 1 & ab + bc + ch & ac + bf + ci \\ ad + ed + fg & bd + e^2 + fh - 1 & dc + ef + fi \\ ag + hd + ig & bg + eh + ih & cg + fh + i^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \text{ Nu. 6. a) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}; \text{b) nu există; c) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 12 & 22 \\ 18 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}; \text{d) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-a & -b & 2-c \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-x & 2-y & 2-z \end{pmatrix};$$

$$\text{e) nu există; f) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-a & -b & -c \\ -d & 2-e & -f \\ -g & -h & 2-i \end{pmatrix}. \text{ 7. } T_1 = 1,1 \cdot T = \begin{pmatrix} 2,2 & 3,3 & 4,4 & 2,2 & 3,3 \\ 4,4 & 2,2 & 3,3 & 6,6 & 3,3 \\ 3,3 & 1,1 & 2,2 & 3,3 & 5,5 \end{pmatrix}$$

$$8. M = M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 & 11 & 11 \\ 19 & 11 & 9 & 5 & 12 \\ 12 & 13 & 9 & 17 & 8 \end{pmatrix}. \text{ 9. a) } \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{b) } \begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} \end{pmatrix}, c_i - \text{numere}$$

$$\text{Fibonacci: } c_{-1} = 0, c_0 = 1, c_k = c_{k-1} + c_{k-2}; \text{c) } \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}; \text{d) } \begin{pmatrix} -33 & 19 & 32 \\ 4 & 47 & -1 \\ -5 & -50 & -29 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 6 & 21 & -10 & 17 \\ -1 & 54 & -51 & 30 \\ -4 & -39 & 20 & 7 \\ 26 & 19 & -2 & 71 \end{pmatrix}. \text{ 10. a) } \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \text{b) } \begin{pmatrix} 16 & 16 & 8 \\ 16 & 16 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}. \text{ C1: 12. } S = \begin{pmatrix} 15,1 & 11,7 \\ 10,3 & 8,1 \\ 15,4 & 11,8 \end{pmatrix} F_1, F_2, F_3.$$

$$13. \text{a) În a doua clasă. 14. b) De exemplu, } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**§2. Profilurile umanist, arte, sport. A:** 1. 1) a) -10; b) 24; c) -a; d) -17i; e) 9-10i; f) -374;

$$\text{g) } -11; \text{h) } -22; \text{i) } 4; \text{j) } -18. \text{ 2. 1) a)-i) -poate fi aplicată. 2) a) } S = \left\{ \left( \frac{11}{7}, \frac{-2}{7} \right) \right\}; \text{b) } S = \left\{ \left( \frac{13}{23}, \frac{-2}{23} \right) \right\};$$

$$\text{c) } S = \left\{ \left( \frac{19}{14}, \frac{3}{14} \right) \right\}; \text{d) } S = \left\{ \left( \frac{21}{8}, \frac{-27}{8} \right) \right\}; \text{e) } S = \left\{ \left( \frac{mp-nq}{m^2+n^2}, \frac{mq+np}{m^2+n^2} \right) \right\}; \text{f) } S = \{(1, 0, 1)\};$$

$$\text{g) } S = \{(1, 3, 2)\}; \text{h) } S = \{(2, 1, 3)\}; \text{i) } S = \left\{ \left( \frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3} \right) \right\}; \text{j) nu poate fi aplicată regula lui Cramer.}$$

**B:** 3. a)  $S = \{(1-i, -i)\};$  b)  $S = \{(2-i, 2+i)\};$  c)  $S = \{(3+11i, -3+9i, 1+7i)\}.$

$$4. S = \left\{ \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{8} \right\}. \text{ C: 5. a) } f(x) = x^2 - 3x + 8; \text{b) nu există; c) } x_0 = \frac{3}{2}, f(x_0) = \frac{23}{4}.$$

6. a) *Indicație.* Adunați la liniile doi și trei linia întâi înmulțită cu  $-1$ .  $(a-b)(c-a)(c-b)$ ; b)  $(x-a)^2(2a+x)$ ; c)  $-2(x^3+y^3)$ . 7. a)  $S = \{1, 2\}$ ; b)  $S = \{0, 3a\}$ .

**Profilul real.** A<sub>1</sub>: 1. 1) a) -10; b) 24; c) -a; d) -17i; e) 9-10i; f) -374; g) -11; h) -22; i) 4; j) -18.

2. 1) a)-i) poate fi aplicată. 2) a)  $S = \left\{ \left( \frac{11}{7}, \frac{-2}{7} \right) \right\}$ ; b)  $S = \left\{ \left( \frac{13}{23}, \frac{-2}{23} \right) \right\}$ ; c)  $S = \left\{ \left( \frac{19}{14}, \frac{3}{14} \right) \right\}$ ; d)  $S = \left\{ \left( \frac{21}{8}, \frac{-27}{8} \right) \right\}$ ; e)  $S = \left\{ \left( \frac{ac-bd}{a^2+b^2}, \frac{ad+bc}{a^2+b^2} \right) \right\}$ ; f)  $S = \{(1, 0, 1)\}$ ; g)  $S = \{(1, 3, 2)\}$ ; h)  $S = \{(2, 1, 3)\}$ ; i)  $S = \left\{ \left( \frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3} \right) \right\}$ ; j) nu poate fi aplicată regula lui Cramer. 3. a) -20; b) 0; c) 0; d) -15; e) 36.

4. 1) a)-g) inversabile; 2) a)  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ; b)  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ; c)  $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ ; d)  $- \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ ; e)  $\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ ; f)  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; g)  $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$  B<sub>1</sub>: 5.  $S = \left\{ \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{8} \right\}$ .

6. a)  $f(x) = x^2 - 3x + 8$ ; b) nu există; c)  $x_0 = \frac{3}{2}$ ,  $f(x_0) = \frac{23}{4}$ . 8. a)  $S = \{(1+i, i)\}$ ; b)  $S = \{(2+i, 2-i)\}$ ; c)  $S = \{(3-11i, -3-9i, 1-7i)\}$ . 9. a) 4 u.p.; b) coliniare; c)  $\frac{27}{2}$  u.p.; d) 13 u.p. 10.  $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ . 11. a)  $S = \{1, 2\}$ ; b)  $S = \{0, 3a\}$ . C<sub>1</sub>: 12. a) Se va schimba în opus; b) nu se va schimba. 13. Se va schimba în număr complex conjugat. 14. Determinantul se va înmulții cu  $\alpha^3$ .

15. *Indicație.* Dezvoltați determinantul după coloana a treia. 16. a) *Indicație.* Adunați la liniile doi și trei linia întâi înmulțită cu  $-1$ .  $(a-b)(c-a)(c-b)$ ; b)  $(x-a)^2(2a+x)$ ; c)  $ab(a^2+b^2-cb) + c(c^3-b^2c-a^3)$ . 17. a) *Indicație.* Adunați la linia întâi linia a treia și scoateți factorul comun.  $(a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)$ ; b)  $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$ .

**§3. Profilurile umanist, arte, sport.** A: 1. a), b), d) nu este soluție; c) este soluție.

2. a)  $S = \{(1, 1)\}$ ; b)  $S = \{(1, -1)\}$ ; c)  $S = \{(1, 2)\}$ ; d)  $S = \{(1, 0)\}$ ; e)  $S = \{(1, 0, 1)\}$ ; f)  $S = \{(1, -3, 3)\}$ ; g)  $S = \{(1, 1, -2)\}$ ; h)  $S = \{(1, 2, -2)\}$ . B: 3,4,5 u.m.; 4 u.m.. 4. a) se adună membru cu membru ecuațiile 1 și 3; b) se adună membru cu membru ecuațiile 2 și 3.

- C: 5. a)  $\begin{cases} 2x + y + z = 28,3 \\ x + 2y + z = 24,6 \\ x + y + 2z = 24,3 \end{cases}$ , Prețurile: 9 u.m.; 5,3 u.m.; 5 u.m. de la  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  respectiv; b) prețurile

se determină neunivoc. 6. a) *Indicație.* Înlocuiți ecuația a treia cu  $2x - z = 2$ ; b) *Indicație.* Înlocuiți ecuația a treia, de exemplu, cu suma membru cu membru a primelor două ecuații.

**Profilul real.** A<sub>1</sub>: 1. a), b), d) nu este soluție; c) este soluție. 2. a)  $S = \{(1, 1)\}$ ; b)  $S = \{(1, -1)\}$ ;

- c)  $S = \{(1, 2)\}$ ; d)  $S = \{(1, 0)\}$ ; e)  $S = \{(1, 0, 1)\}$ ; f)  $S = \{(1, -3, 3)\}$ ; g)  $S = \{(1, 1, -2)\}$ ; h)  $S = \{(1, 2, -2)\}$ . 3. a)  $S = \left\{ \left( \frac{-2+4i}{15}, \frac{1-2i}{3}, \frac{-4+3i}{15} \right) \right\}$ ; b)  $S = \{(1, 2, -2)\}$ ; c)  $S = \{(-1, -1, 0, 1)\}$ .

4. a)  $S = \{(-3\alpha, \alpha, -\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ; b)  $S = \{(\alpha, 3\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ; c)  $S = \{(0, 0, 0)\}$ ,  $\lambda \neq 0$ ; d)  $S = \{(-\alpha, -2\alpha, \alpha)\}$ ,  $\lambda = 0$ ; d)  $S = \{(0, 0, 0)\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**B1:** 5. a) 4,5 u.m.; 4 u.m. **6.** a), d), e), f) compatibil; b), c) incompatibil.

7. a)  $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(11-\alpha) & \frac{2}{5}(-1+\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$ ; soluție particulară:  $(3, -2, -4)$ ; d)  $S = \{(1, 2, -2)\}$ ; e)  $S = \{(1, 2, 1)\}$ ; f)  $S = \{(\lambda, 1, 0)\}, \lambda \neq 0$ ;  $S = \{(-\alpha, 1-2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}, \lambda = 0$ .

8.  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . **C1:** 9. a)  $\begin{cases} 2x+y+z=28,3, \\ x+2y+z=24,6, \\ x+y+2z=24,3. \end{cases}$ , Prețurile: 9 u.m.; 5,3 u.m.; 5 u.m. de la  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  respectiv; b) sistemul respectiv va fi compatibil nedeterminat, deci prețurile se determină neunivoc. **10. Indicație.** a) Înlocuiți ecuația a treia cu  $3x+2z=3$ ; b) înlocuiți ecuația a treia cu suma membru cu membru a primelor două ecuații. **11.**  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

### Exerciții și probleme recapitulative

**Profilurile umanist, arte, sport. A:** 1. a)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -i & 3 & 1+2i \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 2i & 0 & -i \\ 1 & 3i & -2+i \end{pmatrix}$  **2.** 1) a)  $2 \times 2$ ;

b)  $3 \times 3$ ; c)  $2 \times 2$ ; d)  $1 \times 3$ ; e)  $3 \times 3$ ; f) nu există. 2) a)  $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} i & 2 \\ -2i & -6 \end{pmatrix}$ ; d)  $\begin{pmatrix} 11 & -7 & 29 \\ 9 & -9 & 32 \\ 13 & -5 & 26 \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; f) nu există. **3.** a)  $x=-1, y=2$ ; b)  $x=5, y=11$  sau  $x=-1, y=5$ . **4.** a)  $-i$ ; b)  $0$ ; c)  $-70$ ; d)  $-88$ ; e)  $0$ ; f)  $-21i$ ; g)  $0$ ; h)  $0$ . **5.** a)  $S = \{(2, 1)\}$ ; b)  $S = \{(i, 1)\}$ ; c)  $S = \{(1, 1, 1)\}$ ; d)  $S = \{(3, 2, 1)\}$ ; e)  $S = \emptyset$ ; f)  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$ ; g)  $S = \{(4, 5, 0)\}$ ; h)  $S = \{(2, 3, -1)\}$ .

**B:** 6.  $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  7.  $1 \times 2$ . **8.** 5 gândaci și 3 păianjeni. **C:** 9.  $\alpha \neq \pm 2$ . **10.** În vasul I – 1,5 l, în vasul II – 9 l.

**11.** Persoana I – 2000 u.m., persoana II – 3 000 u.m., persoana III – 5 000 u.m.

**Profilul real. A1:** 1. a)  $\begin{pmatrix} 5 & i & -3 \\ -2i & 8 & 2+7i \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 3i & 1 & -i \\ 2 & 4i & -1+2i \end{pmatrix}$  **2.** 1) a)  $2 \times 2$ ; b)  $3 \times 3$ ; c)  $2 \times 2$ ;

d)  $3 \times 1$ ; e)  $3 \times 3$ . 2) a)  $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ ; d)  $\begin{pmatrix} -5 \\ 52 \\ -33 \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 11 & 9 & 13 \\ -7 & -9 & -5 \\ 29 & 32 & 26 \end{pmatrix}$

**3.** a)  $x=1, y=-3$ ; b)  $x=1, y=2, u=0, v=3$ . **4.** a)  $-i$ ; b)  $0$ ; c)  $-70$ ; d)  $-88$ ; e)  $0$ ; f)  $-21i$ ; g)  $0$ ; h)  $0$ . **5.** 1) e), g) incompatibil. 2) a)  $S = \{(2, 1)\}$ ; b)  $S = \{(i, 1)\}$ ; c)  $S = \{(1, 1, 1)\}$ ; d)  $S = \{(3, 2, 1)\}$ ; e)  $S = \emptyset$ ; f)  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$ ; g)  $S = \emptyset$ ; h)  $S = \{(2, 3, -1)\}$ . **6.** a) 1; b) 36; c)  $-15$ .

**7.** a)  $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$ ; b), e), g), h) nu există  $A^{-1}$ ; c)  $\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 14 & -14 & 14 \\ -34 & 14 & -4 \end{pmatrix}$ ; d)  $\frac{1}{88} \begin{pmatrix} -6 & 20 & -15 \\ 30 & -12 & 31 \\ -20 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

f)  $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 17 & -8 & 5 \\ -16 & 10 & -1 \\ 6i & -9i & 3i \end{pmatrix}$ . **8.** a)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ; b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{13}{36} & \frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

c)  $A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -8 \\ 7 & 2 & -15 & 17 \\ 2 & -8 & 0 & 7 \\ -8 & 2 & 15 & -13 \end{pmatrix}$  9. a)  $S = \left\{ \left( \frac{5}{3} - \frac{4}{3}t, \frac{19}{6} + \frac{1}{6}t, \frac{11}{6} + \frac{11}{6}t, t \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\}$

b)  $S = \{(5-3t, -5+2t, 1-t, t) \mid t \in \mathbb{C}\};$  c)  $S = \{(-5+2\lambda+4t, -1+\lambda+t, \lambda, t) \mid \lambda, t \in \mathbb{C}\};$

d)  $S = \left\{ \left( \frac{1}{6} + 5t, \frac{1}{6} - \frac{7}{6}t, \frac{1}{6} + 5t, 6t \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\}$  10. În vasul I – 7,5 l, în vasul II – 45 l. **B<sub>1</sub>:** 11.  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

12. 1×2. 13. a)  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{16}{3} \right\}$ ; b)  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . 14. a)  $S = \left\{ \frac{1}{2}(1 \pm i) \right\}$ ; b)  $S = \{-2, 0, 1 \pm i\}$ .

15. a)  $S = \{(-5\alpha, \alpha, t, -3\alpha+t) \mid \alpha, t \in \mathbb{C}\};$  b) pentru  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ ,  $S = \{(0, 0, 0)\};$  pentru  $\lambda = -2$ ,  $S = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{C}\};$  pentru  $\lambda = 1$ ,  $S = \{(\alpha, t, -\alpha-t) \mid \alpha, t \in \mathbb{C}\};$  c) pentru  $\lambda \neq 1$ ,  $S = \{(0, 0, 0)\};$  pentru  $\lambda = 1$ ,  $S = \{(2t, -3t, 5t, 4t) \mid t \in \mathbb{C}\}.$  16. Biciclistul I – 15 km/h, biciclistul II – 9 km/h.

**C<sub>1</sub>:** 17. 2. 18.  $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  19. b) Cea mai mică valoare: -4, cea mai mare: 4. 20.  $\mathcal{V} = 6$  (un. cub.).

21.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  22. Pentru  $\alpha \neq \pm 2$  sistemul este compatibil determinat; pentru  $\alpha = 2$  sistemul are o infinitate de soluții; pentru  $\alpha = -2$  sistemul este incompatibil. 23. Persoana I – 2000 u.m., persoana II – 3000 u.m., persoana III – 5000 u.m. 24.  $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  25.  $\alpha \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$

### Test sumativ

**Profilurile umanist, arte, sport.** 1. 1) a), b) se poate calcula; 2) a)  $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$

2. a) Determinantul sistemului este nul; b)  $S = \{(1, -1, 0)\}$ . 3.  $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 24 \\ 30 & -6 & -90 \\ -38 & 8 & 122 \end{pmatrix}$

4.  $T_1 = 0,95T = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 1,9 & 2,85 & 5,7 & 2,85 \\ 0,95 & 1,9 & 2,85 & 4,75 \\ 2,85 & 3,8 & 1,9 & 2,85 \end{pmatrix}^A_B^C$

**Profilul real.** 1. 1) a), b) se poate calcula; 2) a)  $\begin{pmatrix} -1 & 3i & 5+6i \\ 4i & 2 & 4+2i \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 4+7i & 4+5i \\ 12-9i & -8+5i \\ 6-9i & -7+i \end{pmatrix}$

2. a) C; b)  $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{6}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ ; c)  $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 22 & 15 & -21 \\ 16 & 14 & -18 \\ -4 & -6 & 6 \end{pmatrix}$  3. a) Compatibil nedeterminat;

b)  $S = \left\{ \left( 1 - \frac{1}{19}\alpha, \frac{3}{38}\alpha, 1 - \frac{12}{19}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ , soluție particulară (1, 0, 1, 0). 4.  $C_1 = 1200$  u.m.;

$C_2 = 550$  u.m.;  $C_3 = 400$  u.m.

## Modulul 8

**§1. Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. Nu. 2. F. 3. a) Nu; b) nu; c) da. **B:** 4. a)  $PQ$ ; b)  $PC$ ; c)  $QC$ . 5. 3 plane. 6. a) 6; b) 4. 7. a), b) Niciun punct, un punct, o mulțime infinită de puncte; c) niciun punct, un punct, două puncte, o mulțime infinită de puncte. 8. Da, dacă punctele sunt necoliniare. **C:** 9.  $\frac{a^2}{16}\sqrt{3}$  u.p. 10. 6 plane. 11. a) 10; b) 10.

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 2. *Indicație.* Dreptele  $d_1$  și  $d_2$ , fiind concurente, definesc un plan  $\alpha$ . Deoarece dreapta  $d_3$  este concurrentă cu  $d_1$  și cu  $d_2$ , rezultă că  $d_3$  are două puncte diferite ce aparțin planului  $\alpha$ . **3. Indicație.** Dreptele  $AD$  și  $CB$  nu sunt coplanare. **B<sub>1</sub>:** 4. *Indicație.* Dacă trei puncte ar fi coliniare, atunci cele patru puncte ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. **5. Indicație.**  $A \in \alpha$  și  $A \notin \beta$ ,  $B \in \beta$  și  $B \notin \alpha \Rightarrow$  dreapta căutată este  $AB$ . **6. Indicație.** Punctul  $D \notin (ABC)$ .

**C<sub>1</sub>:** 8. *Indicație.* Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci toate punctele comune aparțin intersecției planelor  $\alpha$  și  $\beta$ . **9. Indicație.**  $a \cap AB = C \subset \beta \Rightarrow \beta$  separă punctele  $A$  și  $B$ .

**§2. Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. Nu. 2. Da. **B:** 3. a)  $\parallel c$ . **C:** 5. Necoplanare.

**Profilul real.** **B<sub>1</sub>:** 3.  $d \nparallel d_2$ . 4. Dreptele  $d$  și  $AB$  sunt necoplanare. **C<sub>1</sub>:** 5. a)  $\parallel c$ . 6. Mulțimea punctelor spațiului fără punctele planului  $(A, d)$ .

**§3. Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1.  $d \parallel MN$ . **B:** 2.  $EL \parallel FM$ . **C:** 3. a) 10 cm; b) 6 cm; c) 16 cm; d)  $\frac{bc}{a+c}$ .

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. *Indicație.*  $\Delta A_1BB_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow A_1B_1 \parallel AC$  și  $\Delta D_1DC_1 \sim \Delta ADC \Rightarrow D_1C_1 \parallel AC$ .

**B<sub>1</sub>:** 2.  $MN \parallel (ABC)$ . **C<sub>1</sub>:** 3. *Indicație.* Aplicați teorema lui Menelaus.  $\frac{1}{abc}$ . **4. Indicație.**  $\{M_1\} = DM \cap AB$ ,  $\{N_1\} = DN \cap BC$ , atunci  $\Delta DMN \sim \Delta DM_1N_1$ .

**§4. Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. *Indicație.*  $MN \parallel AB$ ,  $NP \parallel BC$ . **B:** 2. *Indicații.*

a)  $LM \parallel AB$  și  $MN \parallel BC$ ; b)  $\{I_1\} = PM \cap AB$ ; c)  $\{I_2\} = PN \cap AC$ ; d)  $(ABC) \cap (PMN) = I_1I_2$ .

**C:** 3.  $\mathcal{P}_{A_2B_2C_2} = 13,75$  cm,  $\mathcal{P}_{A_3B_3C_3} = 22,5$  cm,  $\mathcal{P}_{A_4B_4C_4} = 31,25$  cm.

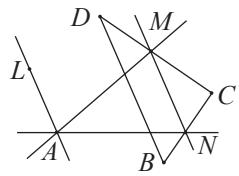
**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. 38 cm. **B<sub>1</sub>:** 2. *Indicație.*  $(MNP) \parallel (ABC) \Rightarrow (MNP) \cap (AED)$  este o dreaptă  $d \parallel AD$  și  $Q \in d$ . **C<sub>1</sub>:** 3. 8 cm. 4.  $\mathcal{P}_1 = \frac{6\lambda+1}{7\lambda+1}\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_2 = \frac{4\lambda+1}{7\lambda+1}\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_3 = \frac{\mathcal{P}}{7\lambda+1}$ . **5. Indicații.** a)  $\Delta MEN \sim \Delta AEB$  și  $\Delta NEP \sim \Delta BEC$ ; b)  $\{I\} = NR \cap BD$ .

### Probleme recapitulative

**Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. a) 17,15 dm; b) 19,5 cm; c) 54 cm. 2.  $MM_1 = 12$  cm,  $NN_1 = 8$  cm. **B:** 3. 12 cm. **C:** 4. *Indicație.* Dacă  $M_1$  este mijlocul segmentului  $AB$ , atunci  $\Delta MDL \sim \Delta M_1DC \Rightarrow ML \parallel M_1C$ .

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 3. a)  $\frac{a}{\lambda}(\lambda-1)$ ; b)  $\mu a$ ; c)  $\frac{l}{k}$ ; d)  $\frac{c}{a}(a-b)$ . 4. 32 cm. 6.  $\frac{m+n}{2n}a$ . 7.  $0,25a^2 \cdot \sqrt{11}$  u.p. **B<sub>1</sub>:** 8. *Indicație.* Fie  $I$  punctul de intersecție a oricărora două drepte. Dacă am presupune că a treia dreaptă intersectează una dintre cele două într-un punct diferit de  $I$ , atunci această dreaptă ar intersecta și a două, dar în acest caz dreptele ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. **9.** Dreptele  $AB$  și  $DC$ , unde  $\{D\} = a \cap AB$ . **10. Indicație.** Aplicați teorema 8'. **11.** Punctul există dacă  $AB \nparallel DC$ , adică dacă  $AD : DE \neq BC : CE$ . **12. Indicație.** Aplicați proprietatea liniei

mijlocii și proprietățile paralelogramului. **13. Indicație.** Considerați un punct  $M \in c$  ( $M \notin \gamma$ ,  $AM \parallel \gamma$ ,  $BM \parallel \gamma$ ). Construiați  $(ABM) \cap \alpha$ , care este dreapta  $A_1B_1$ , unde  $\{A_1\} = a \cap AM$ ,  $\{B_1\} = b \cap BM$  și punctul de intersecție este  $AB \cap A_1B_1$ . **C<sub>1</sub>:** **15.** 2 m. **16.**  $AM$ ,  $MN \parallel DB$ ,  $AN$  și  $AL \parallel DB$ ; a se vedea figura.



**17. Indicație.** Intersecția a două plane ce trec prin două drepte paralele este o dreaptă paralelă cu cele două drepte. **18. Indicație.** Fie  $BE = EC$ , atunci  $[MF]$  este mediană a  $\triangle ADF$ . Din condiție,  $AG : GE = 2 : 1$ , deci  $[AE]$  este mediană a  $\triangle ADF$ . **19. Indicație.** Dacă  $\{I\} = AC \cap EF$ , atunci  $IH \cap AB$  este unul dintre punctele de intersecție, iar  $FH \cap DB$  este cel de-al doilea punct. **20.** 7.

### Test sumativ

**Profilurile umanist, arte, sport.** **1.** 8 cm. **2. a)**  $A_1B_1$ ,  $A_1D_1$ ,  $D_1C_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $A_1C_1$ ,  $D_1B_1$ ; **b)**  $(ADB)$ ,  $(DCC_1)$ ,  $(ABA_1)$ ,  $(D_1A_1B_1)$ . **3.**  $a(0,5 + \sqrt{3})$ . **4.** 8 cm.

**Profilul real.** **1.**  $a \parallel b$ . **2. a)**  $EF \parallel (ABC)$ , **b)**  $GH \parallel (ABC)$ . **4.**  $\frac{4}{9}\mathcal{A}$ .

## Modulul 9

**§1. Profilurile umanist, arte, sport. A:** **1. Indicație.**  $CD \perp CB$ ,  $CD \perp CF \Rightarrow CD \perp (CBF)$ . **2.**  $DA \perp CB$ ,  $CB \parallel MN \Rightarrow MN \perp AD$ . **B:** **3.** 2,4 cm. **4.**  $MB = MD = 5$  cm,  $MC = \sqrt{41}$  cm. **5.**  $AB = b$ . **C:** **6.**  $DE = 4\sqrt{2}$  cm,  $CE = 2\sqrt{17}$  cm,  $BE = 2\sqrt{13}$  cm,  $d = \frac{4}{13}\sqrt{286}$  cm.

**Profilul real. A<sub>1</sub>:** **1.**  $AB = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ . **2.**  $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4\sin^2 \alpha}}$ . **B<sub>1</sub>:** **4. Indicație.**  $\triangle AEC$  isoscel  $\Rightarrow EO \perp AC$ ; analog  $\triangle BED$  isoscel  $\Rightarrow EO \perp BD$ . **C<sub>1</sub>:** **5.**  $\sqrt{a^2 + c^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha}$ ,  $\sqrt{b^2 + c^2}$ . **6. Indicație.** Dacă  $d = \alpha \cap \beta$ , atunci din  $d_1 \perp \alpha \Rightarrow d_1 \perp d$ , iar din  $d_2 \perp \beta \Rightarrow d_2 \perp d \Rightarrow d \perp (d_1 d_2)$ .

**§2. Profilurile umanist, arte, sport. A:** **1. a)** 3 cm; **b)** 0,6. **2.** 24 cm.

**B:** **3.** 3,8 m. **4. Indicație.** a)  $\triangle ABD$  isoscel,  $[VO]$  – mediană;  $\triangle BVE$  isoscel,  $[VO]$  – mediană  $\Rightarrow VO \perp (ABC)$ ; b)  $\triangle AOV \equiv \triangle BOV \equiv \triangle COV \equiv \triangle DOV \equiv \triangle EOV \equiv \triangle FOV$ . **C:** **5. a)** 3 cm; **b)**  $3\sqrt{2}$  cm. **6.**  $AB = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$ .

**Profilul real. A<sub>1</sub>:** **1.**  $\sqrt{2}$  cm. **B<sub>1</sub>:** **2. a)**  $\alpha \approx 0,15^\circ$ ; **b)**  $45^\circ$ . **3.**  $1,65 + 50 \cdot \operatorname{tg} 37,8^\circ = 40,43$  (m). **4.**  $\approx 32^\circ$ . **5.**  $2\sqrt{14}$  cm. **C<sub>1</sub>:** **6.**  $c \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ .

**§3. Profilurile umanist, arte, sport. A:** **1.**  $\sqrt{6}$  cm. **B:** **2. a)**  $\frac{9}{4}$  cm; **b)**  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  cm. **C:** **3.** 15 cm. **4.** 5 cm.

**Profilul real. A<sub>1</sub>:** **1.**  $\frac{\sqrt{1221}}{39}$ . **B<sub>1</sub>:** **2. Indicație.** a) Dacă  $O = pr_{(ABC)}E$ , iar  $[EM]$ ,  $[EN]$ ,  $[EP]$ ,  $[EQ]$  sunt înălțimile triunghiurilor  $AEB$ ,  $BEC$ ,  $CED$  și respectiv  $DEA$ , atunci  $OM = ON = OP = OQ$ , deci punctul  $O$  este egal depărtat de laturile rombului; b)  $\triangle MOE \equiv \triangle NOE \equiv \triangle POE \equiv \triangle QOE \Rightarrow \angle EMO \equiv \angle ENO \equiv \angle EPO \equiv \angle EQO$ . **3.** Dacă  $O = pr_{(ABC)}E$  și  $[EM]$ ,  $[EN]$ ,  $[EP]$ ,  $[EQ]$  sunt înălțimile triunghiurilor  $AEB$ ,  $BEC$ ,  $CED$  și respectiv  $DEA$ , atunci  $\triangle MOE \equiv \triangle NOE \equiv \triangle POE \equiv \triangle QOE$ , deci  $MO = NO = PO = QO$ . **C<sub>1</sub>:** **5.**  $30^\circ$ . **6.**  $\sqrt{3}$ .

### Probleme recapitulative

**Profilurile umanist, arte, sport.** **A:** 1. a) 13 cm; b) 30 cm; c)  $\sqrt{p^2 + n^2 - m^2}$ ; d)  $\sqrt{2p^2 + n^2 - s^2}$ .

2.  $\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}$ . 3.  $d_1 = 2\sqrt{6}$  cm,  $d_2 = 4\sqrt{2}$  cm. **B:** 4. a)  $30^\circ$ ; b)  $\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$ . 5. 2 cm. **C:** 6. 15 m.

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 3. Indicație. Dreapta din planul  $\alpha$  este perpendiculară pe  $pr_\alpha a$ . 4. 32 cm.

**B<sub>1</sub>:** 5.  $\sqrt{b^2 - a^2}$ . 6.  $\sqrt{2b^2 - a^2}$ . **C<sub>1</sub>:** 8.  $\frac{ab}{a+b}$ . 9. 0,5 m.

### Test sumativ

**Profilurile umanist, arte, sport.** 1. 3,5 cm. 2.  $\sqrt{6}$  cm. 3.  $5\sqrt{2}$  cm,  $\sqrt{29}$  cm. 4. 4 cm.

**Profilul real.** 1.  $\frac{1}{2}|a-b|$ . 3.  $\sqrt{70}$  cm,  $2\sqrt{16,06}$  cm. 4.  $45^\circ$ . 5.  $AA' \perp a$ ,  $A' \in a$ ;  $A'D \perp d$ ,  $D \in d$ ;  $AD \perp \alpha$ .

## Modulul 10

**§1. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 2. Nu este. **B<sub>1</sub>:** 3. Este o transformare geometrică, dar nu este o izometrie.

4. Nu întotdeauna (de exemplu, proiectarea paralelă). 8. a)  $B'K'$ , unde  $A'K' = K'C'$ ; b)  $B'L'$ , unde  $\angle A'B'L' \equiv \angle L'B'C'$  etc. 9. Dacă  $C \in [AB]$  și  $f(C) = C'$ , atunci  $AC = AC'$ ,  $CB = C'B$  și  $AC + CB = AC' + C'B$ , deci  $C \equiv C'$ . Analog pentru  $C \notin [AB]$ . 10. a) A se vedea problema 9; b) nu. **C<sub>1</sub>:** 11. a) Da, dacă  $f(A) = A$ , atunci  $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(A)) = I(A) = A$ . b) da, deoarece  $(f \circ f)(A) = f(A) = A$ . 12. Da, deoarece  $(f \circ f)(A) = f(f(A)) = f(B) = A$ .

**§2. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 2. Sunt simetrice. 3. O infinitate și mulțimea lor reprezintă o dreaptă paralelă cu dreptele date. 4. Nu. 5. Nu. **B<sub>1</sub>:** 6. Sunt coliniare. 8. Da (centrul, orice dreaptă, orice plan care trece prin centrul simetriei centrale). 9. Identică. 10. Nu. **C<sub>1</sub>:** 14. a) Un segment paralel cu cel dat; b) o dreaptă paralelă cu cea dată; c) un plan paralel cu cel dat.

**§3. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 1. a) Triunghiul isoscel, dreptunghiul; b) triunghiul cu laturi de lungimi diferite, paralelogramul. **B<sub>1</sub>:** 2. Dreptele care trec prin centrele a două fețe opuse; dreptele care trec prin mijloacele a două muchii paralele ce nu aparțin aceleiași fețe. 4. Orice mediatoare a segmentului  $AB$ . Reuniunea este planul mediator al segmentului  $AB$ . 5. a) Dreapta suport și orice mediatoare a segmentului; b) dreapta suport a semidreptei; c) însăși dreapta și orice dreaptă perpendiculară pe ea; d) orice dreaptă din plan și orice dreaptă perpendiculară pe plan; e) dreapta care este perpendiculară pe planul paralelogramului și care trece prin punctul de intersecție a diagonalelor lui. 6. a) Imaginea dreptei paralele cu axa este o dreaptă paralelă cu cea dată; imaginea dreptei care intersectează axa este o dreaptă care trece prin punctul de intersecție a dreptei date cu axa și axa este dreapta suport a bisectoarelor unghiurilor opuse la vârf formate de dreaptă și imaginea ei; imaginea dreptei neconcurrente cu axa este o dreaptă neconcurrentă cu cea dată. 7. a) Orice dreaptă perpendiculară pe axa de simetrie și însăși axa; b) axa de simetrie. **C<sub>1</sub>:** 8. a)  $\alpha \equiv \alpha'$  și  $d \in \alpha'$ ; b)  $\alpha \equiv \alpha'$  și  $d \perp \alpha'$ ; c)  $d \cap \alpha' \neq \emptyset$ .

**§4. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** 2. Orice dreaptă din plan și orice dreaptă perpendiculară pe plan.

**B<sub>1</sub>:** 3. a) Orice plan care conține segmentul și planul mediator al segmentului; b) orice plan care conține dreapta și orice plan perpendicular pe dreapta dată; c) însuși planul și orice plan perpendicular pe planul dat; d) planul care conține dreptele date și două plane perpendiculare pe planul

definit de dreptele date și care conțin bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date; e) planul determinat de dreptele date, planul perpendicular pe planul determinat de dreptele date, egal depărtat de la dreptele date și orice plan perpendicular pe dreptele date; f) planul egal depărtat de la planele date și orice plan perpendicular pe planele date.

**4.** Sunt coplanare. **6.** 5 m. **C<sub>1</sub>:** **8.**  $\alpha \parallel \beta$ , dacă  $\alpha \parallel \gamma$ ;  $\alpha \nparallel \beta$ , dacă  $\alpha \nparallel \gamma$ .

**9.** Punctul  $M$  este punctul de intersecție a dreptei  $AB'$  cu planul  $\alpha$ , unde  $B'$  este simetricul punctului  $B$  față de planul  $\alpha$ .

**10.** Punctul  $M$  este punctul de intersecție a dreptei  $AB'$  cu planul  $\alpha$ , unde  $B'$  este simetricul punctului  $B$  față de planul  $\alpha$ .

**11.** Un cerc situat în planul care trece prin punctul  $A$  perpendicular pe dreapta  $d$ , al cărui centru este punctul de intersecție a dreptei  $d$  cu acest plan, iar raza – distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $d$ .

**§5. Profilul real.** **B<sub>1</sub>:** **5.** Puncte invariante nu există. Orice dreaptă și orice plan paralele cu dreapta determinată de un punct și imaginea lui la această translație. **6.**  $t_{BA}$ .

**§6. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** **2.** Nu este. **3.** Nu. **4.** Un singur punct – centrul omotetiei. Orice dreaptă care trece prin centrul de omotetie. **B<sub>1</sub>:** **5.** 9 cutii. **6.** a) Laturile triunghiului  $A'B'C'$  sunt paralele cu laturile triunghiului  $ABC$ ; b) a se vedea 6 a). **7.**  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ . **C<sub>1</sub>:** **9.** a) Un cerc; b) un disc; c) un paralelogram; d) un pătrat; e) un cub; f) o sferă.

**§7. Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** **1.** a) O infinitate de axe; b) o axă; c) o axă sau niciuna; d) nicio axă. **C<sub>1</sub>:** **7. Indicație.** Considerați rotația în jurul axei  $l$  care aplică punctul  $B$  pe punctul  $B'$ , astfel încât: 1)  $B' \in (IA)$ ; 2)  $A$  și  $B'$  sunt situate de părți diferite ale dreptei  $l$ . Atunci  $\{M\} = AB' \cap l$  satisfac condiția problemei.

### Probleme recapitulative

**Profilul real.** **A<sub>1</sub>:** **1. Indicație.** Dacă  $O$  este mijlocul  $[AC]$ , atunci  $S_O(d_1) \cap d_2$  este un vârf al paralelogramului căutat. **2. Indicație.** Dacă  $O$  este mijlocul  $[AC]$ , atunci  $S_O(d) \cap \mathcal{C}$  este un vârf al paralelogramului. **B<sub>1</sub>:** **3.** a)  $h = \frac{\pi^2 R \sqrt{2}}{12}$ ; b)  $R = 6,5$  cm;  $A'B' = 20,4$  cm. **C<sub>1</sub>:** **4.** a)  $x = l(\sqrt{2} - 1)$ ; b)  $BD = l\sqrt{2}$ ,  $GD = l = AD \Rightarrow BG = x = l(\sqrt{2} - 1)$  (a se vedea figura.) **5.** Dacă  $P_1 = S_{AC}(P)$  și  $P_2 = S_{BC}(P)$ , atunci  $\{X_1\} = AC \cap P_1P_2$  și  $\{Y_1\} = BC \cap P_1P_2$ . **6.** Punctul de impact este intersecția bordurii cu segmentul ce unește unul dintre aceste puncte cu simetricul celuilalt punct față de această bordură. **7.** Vârful  $C$  este intersecția dreptei  $d$  și dreptei  $BA_1$ , unde  $A_1 = S_d(A)$ . **8.** Fie  $\bar{a} \nparallel d_1$ ,  $\bar{a} \nparallel d_2$ . Dacă  $d_3 = t_{\bar{a}}(d_1)$ , atunci  $\{M_2\} = d_3 \cap d_2$ , iar  $M_1 = t_{-\bar{a}}(M_2)$ . **9.** Fie  $B_2 \in d_2$  și  $BB_2 \parallel d_1$ ,  $A_2 \in d_1$  și  $AA_2 \parallel d_2$ ,  $\bar{a} = \overrightarrow{AA_2}$ ,  $\bar{b} = \overrightarrow{BB_2}$ , atunci  $t_{\bar{a}+\bar{b}}(A) = A_1$ ,  $t_{\bar{a}+\bar{b}}(B) = B_1$ .

### Test sumativ

**Profilul real.** **1.** Planele bisectoare ale figurii date și orice plan perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor. **2.** Dreapta situată în planele determinate de dreptele date, echidistantă față de acestea. Orice dreaptă din planul determinat de aceste drepte, perpendiculară pe acestea, și orice dreaptă perpendiculară pe planul determinat de aceste drepte, care intersectează prima axă de simetrie. **3.** Fie  $a$  și  $b$  dreptele necoplanare date. Considerăm dreapta  $AB$  perpendiculară comună pe dreptele  $a$  și  $b$  (aceasta există și este unică), unde  $A \in a$ ,  $B \in b$ . Fie punctul  $C$  mijlocul segmentului  $AB$ . Considerăm dreptele  $a_1$ ,  $b_1$  care trec prin punctul  $C$ , paralele cu  $a$  și respectiv  $b$ . Atunci axele de simetrie ale figurii date sunt dreapta  $AB$  și suporturile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele  $a_1$  și  $b_1$ . **5.** a) Da; b) da; c) da; d) în caz general, nu; e) în caz general, nu.

# Cuprins

<b>Cuvânt-înainte .....</b>	3
<b>Modulul 1. Siruri de numere reale .....</b>	<b>5</b>
§ 1. Siruri numerice.	
Recapitulare și completări .....	5
§ 2. Progresii aritmetice. Progresii geometrice .....	13
§ 3. Limita unui sir.	
Siruri convergente, siruri divergente .....	22
Exerciții și probleme recapitulative .....	30
Test sumativ .....	32
<b>Modulul 2. Limite de funcții .....</b>	<b>34</b>
§ 1. Limita unei funcții într-un punct .....	34
§ 2. Operații cu limite de funcții.	
Limitele unor funcții elementare .....	44
§ 3. Calculul limitelor de funcții .....	54
§ 4. Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții .....	60
Exerciții și probleme recapitulative .....	64
Test sumativ .....	66
<b>Modulul 3. Funcții continue .....</b>	<b>68</b>
§ 1. Funcții continue într-un punct.	
Funcții continue pe o mulțime .....	68
§ 2. Proprietăți ale funcțiilor continue .....	77
§ 3. Asimptotele funcțiilor .....	84
Exerciții și probleme recapitulative .....	89
Test sumativ .....	90
<b>Modulul 4. Funcții derivabile .....</b>	<b>92</b>
§ 1. Noțiunea de derivată .....	93
§ 2. Interpretarea geometrică a derivatei .....	100
§ 3. Derivatele unor funcții elementare .....	103
§ 4. Operații cu funcții derivabile .....	108
§ 5. Diferențiala unei funcții .....	117
§ 6. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile .....	120
Exerciții și probleme recapitulative .....	130
Test sumativ .....	132
<b>Modulul 5. Aplicații ale derivatelor .....</b>	<b>134</b>
§ 1. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor .....	134
§ 2. Rolul derivatei a două în studiul funcțiilor .....	143
§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor .....	148
§ 4. Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie și economie. Probleme de maxim și minim .....	154
Exerciții și probleme recapitulative .....	160
Test sumativ .....	162
<b>Modulul 6. Numere complexe.....</b>	<b>164</b>
§ 1. Operații cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică .....	164
§ 2. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Forma trigonometrică a unui număr complex .....	170
§ 3. Aplicații ale numerelor complexe .....	178
Exerciții și probleme recapitulative .....	181
Test sumativ .....	183
<b>Modulul 7. Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare .....</b>	<b>185</b>
§ 1. Matrice .....	185
§ 2. Determinanți .....	196
§ 3. Sisteme de ecuații liniare .....	213
Exerciții și probleme recapitulative .....	224
Test sumativ .....	228
<b>Modulul 8. Paralelismul dreptelor și planelor .....</b>	<b>231</b>
§ 1. Axiomele geometriei în spațiu .....	231
§ 2. Pozițiile relative a două drepte în spațiu .....	234
§ 3. Drepte și plane .....	237
§ 4. Plane paralele .....	240
Probleme recapitulative .....	244
Test sumativ .....	247
<b>Modulul 9. Perpendicularitatea în spațiu .....</b>	<b>249</b>
§ 1. Drepte și plane perpendiculare .....	249
§ 2. Proiecții ortogonale. Unghi format de o dreaptă și un plan .....	253
§ 3. Unghi format de două plane (unghi diedru) .....	258
Probleme recapitulative .....	263
Test sumativ .....	265
<b>Modulul 10. Transformări geometrice ...</b>	<b>267</b>
§ 1. Noțiunea de transformare geometrică.	
Transformări izometrice .....	267
§ 2. Simetria centrală .....	270
§ 3. Simetria axială .....	272
§ 4. Simetria față de un plan .....	274
§ 5. Translația .....	275
§ 6. Transformarea de asemănare. Omotetia .....	277
§ 7. Rotația în jurul unei drepte (rotația axială) .....	279
Probleme recapitulative .....	281
Test sumativ .....	282
Răspunsuri și indicații .....	284



# MATEMATICĂ

MANUAL  
PENTRU  
CLASA  
**XI**



ISBN 978-9975-54-514-3



9 789975 545143

[www.edituraprut.md](http://www.edituraprut.md)