پاسخ تشریحی توسط: محمدمهدی نقی‌زاده

31. گزینه 4 درست است.

$$T=2\pi \quad \to \quad 2L=2\pi \quad \to \quad L=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\cos(nx)\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\right)dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{-1}{2(n+1)}\cos(x+nx)\Big|_{0}^{\pi}+\frac{-1}{2(1-n)}\cos(x-nx)\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0-0+\frac{-1\times\cos(\pi+n\pi)}{2(n+1)}-\frac{-1}{2(n+1)}+\frac{-1}{2(1-n)}\cos(\pi-n\pi)+\frac{1}{2(1-n)}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n+1}{2(n+1)}+\frac{(-1)^n+1}{2(1-n)}\right)\xrightarrow{\text{فرد } n} a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\sin(nx)\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\cos(x-nx)-\cos(x+nx)\right)dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin(x-nx)}{2(1-n)}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{\sin(x+nx)}{2(1+n)}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\left(1-\cos(-n\pi)\right)\right)=\frac{-1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\xrightarrow{\text{زوج } n} b_n=0$$

32. گزینه 2 درست است.

چون u در تابع همساز صدق می‌کند، بنابراین مقدار u در مرکز دایره با مقدار متوسط u روی مرز برابر است. درنتیجه:

$$u(0,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2\theta d\theta+\frac{1}{\pi}\int 0\times d\theta=\frac{1}{\pi}\theta^2\Big|_0^{\pi}+0=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi$$

33. گزینه صحیح وجود ندارد.

چون $|z|$ در بی‌نهایت نقطه غیرتحلیلی است، نمی‌توان از قضایای مانده استفاده کرد. هرچند می‌دانیم $z\bar{z}=|z|^2$ بنابراین:

$$\oint_{|z|=2} z^3\bar{z}e^{\frac{1}{z-1}}dz=\oint_{|z|=2} z^2\left(|z|^2\right)e^{\frac{1}{z-1}}dz=4\oint_{|z|=2} z^2e^{\frac{1}{z-1}}dz$$

$$=4\left(2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1}\left(z^2e^{\frac{1}{z-1}}\right)\right)=8\pi i\operatorname*{Res}_{z=1}\left(z^2e^{\frac{1}{z-1}}\right)$$

چون $z=1$ تکین اساسی است، بنابراین برای محاسبهٔ مانده از بسط لوران کمک می‌گیریم:

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^3+\ldots$$

$$z^2=z^2-2z+1+2z-2+1=(z-1)^2+2(z-1)+1$$

لذا ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران $z^2e^{\frac{1}{z-1}}$ برابر است با:

$$\text{ضریب } \frac{1}{z-1}=1+\frac{2}{2!}+\frac{1}{3!}=1+1+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}\quad\rightarrow\quad\operatorname*{Res}_{z=1}\left(z^2e^{\frac{1}{z-1}}\right)=\frac{13}{6}$$

$$\rightarrow\quad 8\pi i\operatorname*{Res}_{z=1}\left(z^2e^{\frac{1}{z-1}}\right)=\frac{52\pi i}{3}\quad\rightarrow\quad\oint_{|z|=2} z^3\bar{z}e^{\frac{1}{z-1}}dz=\frac{52\pi i}{3}$$

34. گزینه 3 درست است.

با توجه به حل دالامبر:

$$u(x,0)=\sin x\quad\rightarrow\quad f(x)=\sin x$$

$$u_t(x,0)=\cos x\quad\rightarrow\quad g(x)=\cos x$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(x)dx$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\sin(x+t)+\sin(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos x dx$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\sin(x+t)+\sin(x-t)\right)+\frac{1}{2}\left(\sin(x+t)-\sin(x-t)\right)$$

$$u(x,t)=\sin(x+t)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$