Отделение лингвистики, 2014-15 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Асимптотическое поведение функций и O-символика (конспект)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов

1 Скорость роста функций и o-малые на бесконечности

Пусть имеются два алгоритма решения некоторой задачи — например, обработки текста. Скорость работы алгоритма зависит от входных данных — будем считать, что в нашем случае она определяется длиной текста n. Допустим, один алгоритм совершает $100'000n$ операций, а другой — $100n^2$ операций. Какой алгоритм лучше?

Если мы возьмем маленькие n, конечно, $100'000n$ будет больше $100n^2$, и первый алгоритм будет работать дольше. Но если нам предстоит обрабатывать длинные тексты, где n может быть очень велико (больше 1000), второй алгоритм станет работать медленнее: $100n^2 > 100'000n$ при $n > 1000$.

Допустим, мы улучшим второй алгоритм, таким образом, чтобы он работал в 100 раз быстрее: тратил всего n^2 операций. (Или возьмём более мощный компьютер, который работает в 100 раз быстрее, и будем запускать наш алгоритм на нём.) Изменит ли это принципиально ситуацию? Нет, потому что если $n > 10000$, первый алгоритм вновь будет работать быстрее.

Нетрудно видеть, что аналогичный ответ мы получим, какими бы ни были коэффициенты при n и n^2. Дело в том, что при любых фиксированных $C_1,\ C_2 > 0$ для больших n функция C_1n^2 растёт *много быстрее*, чем C_2n. Как можно сформулировать это в более строгих терминах?

Пусть время работы первого алгоритма равно $f(n) = C_1n$, а время работы второго равно $g(n) = C_2n^2$. Можно рассмотреть пределы $f(n)$ и $g(n)$ при $n \to \infty$. Очевидно, что оба предела равны бесконечности (поскольку функции монотонно растут и выбирая достаточно большое n их можно сделать сколь угодно большими):

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} g(n) = +\infty$$

Однако скорость роста у функций разная. Если взять достаточно большое n, можно добиться того, чтобы $g(n)$ было больше, чем $f(n)$ во сколь угодно много раз. Иными словами, отношение $g(n)/f(n)$ можно сделать сколь угодно большим, и, более того, оно стремится к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1n^2}{C_2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1}{C_2}n = +\infty.$$

Когда математик говорит, что функция $g(n)$ растёт *много быстрее*, чем функция $f(n)$, он подразумевает именно это.

Можно рассмотреть обратное отношение $f(n)/g(n)$. По свойству пределов, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \qquad (1)$$

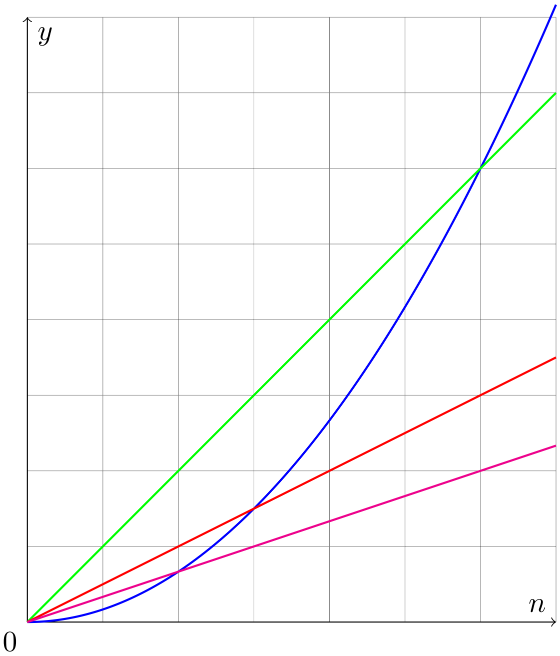

Рис. 1: Функция $y = n^2$ растёт быстрее при $n \to \infty$ чем любая функция вида $y = Cn$, каким бы ни было выбрано C

Иными словами, если $g(n)$ растёт много быстрее, чем $f(n)$, то $f(n)$ растёт много медленнее, чем $g(n)$.

Определение 1. Если для функция $f(n)$ и $g(n)$ выполняется равенство (1), говорят, что функция $f(n)$ есть o-малое от $g(n)$ при $n \to \infty$. Записывают:

$$f(n) = o(g(n)) \text{ при } n \to \infty.$$

Например, $100'000n = o(n^2)$ при $n \to \infty$, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100'000n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{100'000}{n} = 0.$$

2 O-большое на бесконечности

Допустим, у нас снова есть два алгоритма обработки текста, и время работы первого описывается функцией $g(n) = 5n$, а время работы второго — функцией $f(n) = 10n + 100$. Очевидно, первый алгоритм работает быстрее. Насколько существенно? Если я пользуюсь вторым алгоритмом, а конкурирующая лаборатория — первым, то я могу просто взять более быстрый компьютер — скажем, работающий в 5 раз быстрее — и получить время работы $f_1(n) = \frac{1}{5}(10n + 100) = 2n + 20$. Если нам приходится обрабатывать длинные тексты, и n велико (в данном случае достаточно, чтобы n было больше 6), то $2n + 20 \leq 5n$, и теперь я буду справляться с задачами быстрее, чем конкуренты. Можно записать это чуть иначе:

$$10n + 100 \leq 5 \times 5n \tag{2}$$

или

$$f(n) \leq 5g(n) \tag{3}$$

Это означает, что наши алгоритмы работают примерно одинаково быстро — если n достаточно велико, разницу в количестве операций алгоритма можно компенсировать использованием более быстрого компьютера. (Заметье, в предыдущем разделе никакая разница в скоростях компьютеров не могла компенсировать тот факт, что алгоритм, решающий задачу за $C_1 n^2$ операций, будет для больших n работать дольше, чем тот, который выполняет задачу за $C_2 n$ операций.)

Формально мы могли бы записать, что предел отношения f и g сейчас равен не бесконечности, а какой-то конечной величине:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n+100}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10+100/n}{5} = 2$$

Тот факт, что предел отношения равен конечной величине, означает, что функции растут «примерно одинаково быстро»: одна быстрее другой в конечное число раз. Этот предел, однако, может не существовать, и чаще пользуются следующим понятием.

Определение 2. Говорят, что функция $f(n)$ есть O-большое от функции $g(n)$ при $n \to \infty$, если найдётся такое $C > 0$ и найдётся такой номер $N > 0$, что для всех $n > N$,

$$|f(n)| \leq C|g(n)|$$

. Записывают: $f(n) = O(g(n))$.

Так, например, выше мы показали (см. (2) и (3)), что $10n + 100 = O(5n)$ при $n \to \infty$.

Замечание 1. *Со знаком «равенства» здесь надо быть аккуратным — это не «настоящее» равенство, это просто условное обозначение, используемое, чтобы сказать, что функция в левой части обладает некоторым свойством. Например, из того факта, что $f_1(n) = O(g(n))$ и $f_2(n) = O(g(n))$ совсем не следует, что $f_1(n) = f_2(n)$.*

Теорема 1. *Если предел отношения $f(n)/g(n)$ при $n \to \infty$ конечен, то $f(n) = O(g(n))$ при $n \to \infty$.*

Зачастую вычислить предел отношения проще, чем доказывать соответствующий факт по определению 2, однако этот предел может и не существовать. Например, $x \sin x = O(x)$ при $x \to \infty$, хотя предела отношения не существует.

3 o-малое и O-большое в конечных точках

Иногда нас интересует поведение функций не на бесконечности, а в окрестности какой-то точки. Например, рассмотрим функции $g(x) = x$, $f(x) = x^2$. При $x \to 0$, они обе стремятся к нулю. Однако, очевидно, что $f(x)$ стремится к нулю «много быстрее», чем $g(x)$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Определение 3. Если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$.

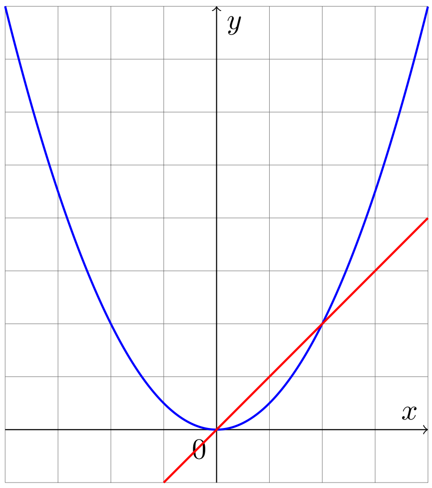

Рис. 2: Функция $y = x^2$ стремится к нулю много быстрее, чем $y = x$ при $x \to 0$

Понятие O-большого в конечной точке определяется по аналогии с определением 2

Определение 4. Говорят, что функция $f(x)$ есть O-большое от функции $g(x)$ при $x \to a$, если найдётся такое $C > 0$, что в некоторой окрестности точки a,

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

при $x \neq a$. Записывают: $f(n) = O(g(n))$.

Теорема 2. *Если предел отношения $|f(x)|/|g(x)|$ при $x \to a$ конечен, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.*

Например, $x + x^2 = O(x)$ при $x \to 0$, поскольку

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + x = 1.$$