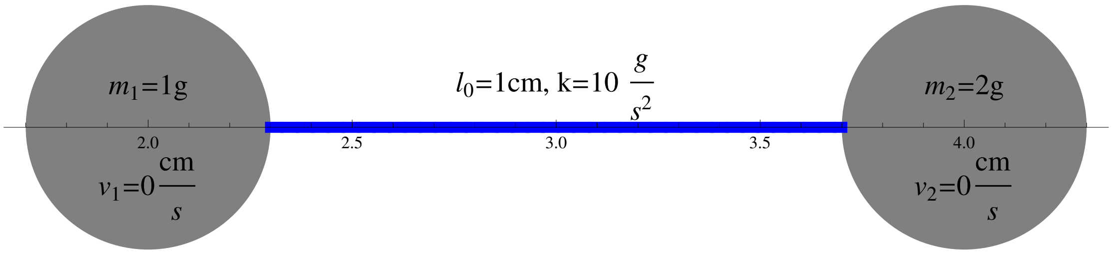
Physikbasierte Modellierung und Simulation

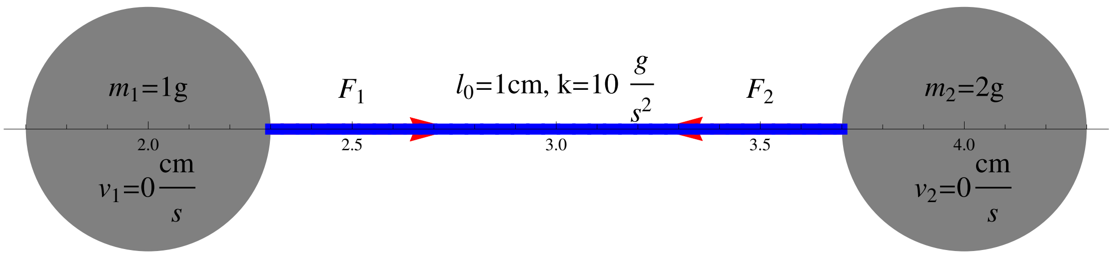
Aufgabe 9.1



Aufgabe 9.2

Hooke's Gesetz: $F = k\,(l_0 - l)$ mit Betrachtung der Richtung der Kraft:

$\Rightarrow F_1 = k(l_0 - |x_1 - x_2|) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} = 10\frac{g}{s^2}(1\text{cm} - |2\text{cm} - 4\text{cm}|) \cdot \frac{2\text{cm}-4\text{cm}}{|2\text{cm}-4\text{cm}|} = 10\frac{g}{s^2}(-1\text{cm}) \cdot (-1) = 10\text{cm}\frac{g}{s^2}$
$\Rightarrow F_2 = k(l_0 - |x_2 - x_1|) \cdot \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|} = 10\frac{g}{s^2}(1\text{cm} - |4\text{cm} - 2\text{cm}|) \cdot \frac{4\text{cm}-2\text{cm}}{|4\text{cm}-2\text{cm}|} = 10\frac{g}{s^2}(-1\text{cm}) \cdot 1 = -10\text{cm}\frac{g}{s^2}$



Aufgabe 9.3

$x_1(t+h) = x_1(t) + hx_1'(t) = x_1(t) + hv_1(t) = 2\text{cm} + 1s \cdot 0\frac{\text{cm}}{s} = 2\text{cm}$
$x_2(t+h) = x_2(t) + hx_2'(t) = x_2(t) + hv_2(t) = 4\text{cm} + 1s \cdot 0\frac{\text{cm}}{s} = 4\text{cm}$

$a_1(t) = \frac{F_1}{m_1} = \frac{10\text{cm}\cdot g}{s^2 \cdot 1g} = 10\frac{\text{cm}}{s^2}$
$a_2(t) = \frac{F_2}{m_2} = \frac{-10\text{cm}\cdot g}{s^2 \cdot 2g} = -5\frac{\text{cm}}{s^2}$

$v_1(t+h) = v_1(t) + hv_1'(t) = v_1(t) + ha_1(t) = 0\frac{\text{cm}}{s} + 1s \cdot 10\frac{\text{cm}}{s^2} = 10\frac{\text{cm}}{s}$
$v_2(t+h) = v_2(t) + hv_2'(t) = v_2(t) + ha_2(t) = 0\frac{\text{cm}}{s} + 1s \cdot -5\frac{\text{cm}}{s^2} = -5\frac{\text{cm}}{s}$

Nicht stabil, da sich im nächsten Schritt beide Kugeln durchdringen werden; kausal nicht erklärbar.

Aufgabe 9.4

a) Da hier auf jeden Fall: $x_2 > x_1$ gilt, können F_1 und F_2 wie folgt vereinfacht werden:
$F_1(x_1, x_2) = k(l_0 - (-(x_1 - x_2))) \cdot \frac{x_1 - x_2}{-(x_1 - x_2)} = -k(l_0 + x_1 - x_2)$
$F_2(x_1, x_2) = k(l_0 - (x_2 - x_1)) \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = k(l_0 + x_1 - x_2)$
Damit ist die Jakobi-Matrix: $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} m_1 a_1' \\ m_2 a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + hJ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + h^2 J \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \text{cm}\frac{g}{s^2} + 1s \cdot \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \frac{g}{s^2} \cdot$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s} + (1s)^2 \cdot \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \frac{g}{s^2} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \text{cm}\frac{g}{s^2} + \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} g \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s^2} = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s^2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{16} \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s^2}$$

c) $\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s} + 1s \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{16} \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s^2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{16} \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s}$
$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{cm} + 1s \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{16} \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{s} = \begin{pmatrix} \frac{21}{8} \\ \frac{59}{16} \end{pmatrix} \text{cm} = \begin{pmatrix} 2.625 \\ 3.6875 \end{pmatrix} \text{cm}$
Die Beschleunigung ist hier weniger extrem, was zu glaubwürdigeren Positionen und einer stabileren Simulation führt.