

# **Point in Polygon**

## **Flächenberechnung Polygone**

Dokumentation zur zweiten Aufgabe im Modul  
„Computational Geometry“

Michael Röder, Markus Hüttner

# Inhaltsverzeichnis

1. Beschreibung des Problems.....	3
2. Flächenberechnung Bundesländer.....	3
2.1 Aufteilung des Problems.....	3
2.2 Lösungsansatz.....	3
2.2.1 Flächenberechnung.....	3
2.2.2 Unterscheidung Fläche $\Leftrightarrow$ Loch.....	4
3. Point in Polygon Test.....	4
3.1 Allgemeiner Lösungsansatz.....	4
3.2 Sonderfälle.....	4
3.2.1 Punkt P liegt auf Kante des Polygons.....	4
3.2.2 Punkt P liegt auf einem Knoten.....	4
3.2.3 Strecke S verläuft durch einen Knoten.....	4
4 Test und Ergebnis.....	5
4.1 Absicherung durch Unit Tests.....	5
4.2 Ergebnis der Berechnung.....	5

# 1. Beschreibung des Problems

In einer gegebenen SVG Datei sind alle Bundesländer von Deutschland enthalten. Diese können jeweils als Liste von Punkten ausgelesen werden. Des weiteren sind am Ende der Datei einige Städte als Punktkoordinaten gegeben.

Im Rahmen der Aufgabenstellung soll die Fläche jedes einzelnen Bundeslandes berechnet werden. Zusätzlich soll ermittelt werden in welchem Bundesland die einzelnen Städte liegen.

## 2. Flächenberechnung Bundesländer

Durch die Art des Problems und die Struktur der Eingabe Daten werden Polygone die sich selbst überlappen ausgeschlossen. Zudem wird davon ausgegangen dass sich Kanten von Löchern in Polygonen nicht mit Kanten der Außenseite eines Polygons überlappen.

### 2.1 Aufteilung des Problems

Ein Bundesland besteht möglicherweise aus mehreren einzelnen Flächen, beispielsweise Inseln, die addiert werden müssen. Jede einzelne Fläche ist ein eigenes geschlossenes Polygon. Hierdurch muss lediglich die Fläche der einzelnen Polygone aufsummiert werden.

Hierzu Gegenteilig kann ein Bundesland auch "Löcher" enthalten, beispielsweise Berlin in Brandenburg. Löcher werden ebenso als geschlossenes Polygon dargestellt. Zur Berechnung der korrekten Fläche muss daher lediglich die Fläche aller Löcher von der Gesamtfläche abgezogen werden.

Aus der SVG Datei ist nicht erkennbar ob es sich bei einem Polygon um eine Fläche oder ein Loch handelt. Um dies zu erkennen kann jedoch der später beschriebene Point in Polygon Test verwendet werden.

Mit Hilfe dieser Festlegungen beschränkt sich die eigentliche Flächenberechnung nur noch auf die Flächenberechnung eines geschlossenen Polygons.

### 2.2 Lösungsansatz

#### 2.2.1 Flächenberechnung

Zur Berechnung der Fläche wird die Gausche Trapezformel verwendet. Jede Kante eines Polygons spannt eine Fläche über der x-Achse auf, die mit der Gauschen Trapezformel allgemein berechnet werden kann. Zur Berechnung der Gesamtfläche müssen anschließend alle einzelnen Flächen addiert werden.

Durch den Umlaufsinn ergeben sich positive und negative Flächen, wodurch in der Summe nur noch die Fläche des Polygons übrig bleibt. Je nach Umlaufsinn des Polygons bzw. dessen Kanten entsteht zunächst eine Positive oder Negative Fläche. Eine Änderung des Umlaufsinn würde nur das Vorzeichen der Fläche ändern. Aufgrund dessen wird der Umlaufsinn nicht betrachtet sondern nur der Betrag der berechneten Fläche.

## 2.2.2 Unterscheidung Fläche $\Leftrightarrow$ Loch

Um zu bestimmen welche Polygone eine Fläche oder ein Loch darstellen wird ein Punkt aus dem jeweiligen Polygon mit dem Point in Polygon Test gegen alle anderen Polygone getestet. Wenn der Punkt in einem der anderen Polygone enthalten ist, wird das Polygon des betrachteten Punktes als Loch betrachtet, sonst als Fläche.

## 3. Point in Polygon Test

### 3.1 Allgemeiner Lösungsansatz

Als grundlegender Lösungsansatz wird die "Strahl-Methode" verwendet. Hierbei wird zunächst ein Punkt O ermittelt der gesichert außerhalb des Polygons liegt. Der Punkt P dessen Lage ermittelt werden soll und der gefundene Punkt O außerhalb bilden eine Strecke S.

Es wird nun geprüft mit wie vielen Kanten des Polygons die Strecke S schneidet. Wenn die Anzahl der Schnittpunkte ungerade ist liegt der Punkt P innerhalb des Polygons.

Die Ermittlung eines Schnittes wird mit Hilfe der in Aufgabe 1 beschriebenen Methoden (ccw) umgesetzt.

### 3.2 Sonderfälle

Aufgrund des gewählten Lösungssatzes sind einige Sonderfälle gezielt zu betrachten. Diese werden im folgenden Kapitel erläutert.

Der aktuell betrachtete Knoten des Polygons wird im folgenden Knoten K bezeichnet. Die aktuell betrachtete Kante, bestehend aus aktuellem Knoten K und vorherigem Knoten K-1, wird Kante E bezeichnet.

#### 3.2.1 Punkt P liegt auf Kante des Polygons

Durch die Verwendung des Hilfsmittels ccw wird festgestellt dass das  $ccw(K-1, K, P)$  null ergibt. Anschließend muss noch festgestellt werden, ob der Punkt P innerhalb der Koordinaten der aktuell betrachteten Kante des Polygons liegt. (siehe Aufgabe 1, Punkt auf Strecke testen) Wenn dies der Fall ist, kann direkt festgestellt werden, dass der Punkt P zum Polygon gehört.

#### 3.2.2 Punkt P liegt auf einem Knoten

Dieser Fall wird durch 2.3.1 mit abgedeckt.

#### 3.2.3 Strecke S verläuft durch einen Knoten

Die gewählte Strecke S kann genau durch einen Knoten verlaufen. Auch hier hilft wieder das  $ccw(O, P, K)$ . Wenn dies 0 ist dann liegt K auf dem gleichen Strahl wie die Strecke S. Anschließend muss wieder geprüft werden ob der Punkt K innerhalb der Strecke S liegt. Wenn dies der Fall ist, dann kann direkt ein Schnittpunkt bestimmt werden ansonsten kann mit dem allgemeinen Algorithmus weiter berechnet werden.

## 4 Test und Ergebnis

### 4.1 Absicherung durch Unit Tests

Um die Funktionsweise der Implementierung abzusichern und zu überprüfen wurde die Bibliothek Google Test verwendet.

Es wurden Tests sowohl für die Flächenberechnung als auch für den Point in Polygon Test geschrieben, die alle zu berücksichtigenden (Sonder)Fälle abdecken sollen.

Zusätzliche wurden die Ergebnisse der Berechnung manuell überprüft. Die manuelle Überprüfung der Städte ist trivial. Zur Überprüfung der Flächen wurden die Flächen der Bundesländer von [https://de.wikipedia.org/wiki/Land\\_\(Deutschland\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Land_(Deutschland)) [vom 14.5.2018] herangezogen. Vorbehaltlich eines Skalierungsfaktors stimmen die Flächen mit denen auf Wikipedia überein. Näheres hierzu ist im nächsten Kapitel 4.2. Ergebnis der Berechnung zu entnehmen.

### 4.2 Ergebnis der Berechnung

Die Berechnung für die Fläche und den Point in Polygon Test liefert folgende Ergebnisse:

Fläche von Thüringen: 13724.6  
Fläche von Schleswig-Holstein: 13456.4  
Fläche von Sachsen-Anhalt: 17450.5  
Fläche von Sachsen: 15667.9  
Fläche von Saarland: 2179.76  
Fläche von Rheinland-Pfalz: 16913.6  
Fläche von Nordrhein-Westfalen: 28966.4  
Fläche von Niedersachsen: 41167.4  
Fläche von Mecklenburg-Vorpommern: 19658.8  
Fläche von Hessen: 17977.5  
Fläche von Hamburg: 633.326  
Fläche von Bremen: 340.932  
Fläche von Brandenburg: 26808.5  
Fläche von Berlin: 766.234  
Fläche von Bayern: 60026.2  
Fläche von Baden\_\_x26\_\_Württemberg: 30522.3

Thüringen contains Erfurt  
Sachsen-Anhalt contains Magdeburg  
Sachsen contains Dresden  
Saarland contains Saarbrücken  
Rheinland-Pfalz contains Mainz  
Nordrhein-Westfalen contains Düsseldorf  
Mecklenburg-Vorpommern contains Schwerin  
Hessen contains Wiesbaden  
Hamburg contains Hamburg  
Bremen contains Bremen  
Berlin contains Berlin  
Bayern contains München  
Baden\_\_x26\_\_Württemberg contains Stuttgart

Um abschließend einen besseren Vergleich zu bekommen, wird der Skalierungsfaktor in der folgender Tabelle für jedes Bundesland aufgeführt.

Point in Polygon  
Flächenberechnung Polygone

	Fläche Berechnung	Fläche Wikipedia	Skalierungsfaktor
Thüringen	13724,6	16202	1,18051
Schleswig-Holstein	13456,4	15802	1,17431
Sachsen-Anhalt	17450,5	20452	1,17200
Sachsen	15667,9	18449	1,17750
Saarland	2179,76	2567	1,17765
Rheinland-Pfalz	16913,6	19854	1,17385
Nordrhein-Westfalen	28966,4	34113	1,17767
Niedersachsen	41167,4	47593	1,15608
Mecklenburg-Vorpommern	19658,8	23212	1,18074
Hessen	17977,5	21115	1,17452
Hamburg	633,326	755	1,19212
Bremen	340,932	420	1,23192
Brandenburg	26808,5	29654	1,10614
Berlin	766,234	892	1,16414
Bayern	60026,2	70550	1,17532
Baden__x26__Württemberg	30522,3	35751	1,17131

Dies ergibt einen Durchschnittlichen Faktor von 1,1741.

Aus den Skalierungsfaktoren ist eine Schwankung von 1,0614 für Brandenburg bis zu 1,23192 für Bremen zu erkennen.

Um diese Schwankung besser einschätzen zu können, wird in der folgenden Tabelle der Skalierungsfaktor im Verhältniss zum Durchschnitt, als auch im Verhältniss zum Faktor des Bundeslandes Bayern dargestellt. Bayern wird gewählt, da es das größte Bundesland ist und zudem keine Inseln oder Löcher enthält. Hierdurch kann vermutet werden, dass der zu erwartende Fehler durch die Darstellung der Außengrenze durch Strecken im Verhältniss zur Fläche relativ gering ist.

	Skalierungsfaktor	Abweichung in % von Durchschnitt	Abweichung in % von Bayern
Thüringen	1,18051	0,54 %	0,44 %
Schleswig-Holstein	1,17431	0,02 %	0,09 %
Sachsen-Anhalt	1,17200	0,18 %	0,28 %
Sachsen	1,17750	0,29 %	0,19 %
Saarland	1,17765	0,30 %	0,20 %
Rheinland-Pfalz	1,17385	0,02 %	0,13 %
Nordrhein-Westfalen	1,17767	0,30 %	0,20 %
Niedersachsen	1,15608	1,54 %	1,64 %
Mecklenburg-Vorpommern	1,18074	0,56 %	0,46 %
Hessen	1,17452	0,04 %	0,07 %
Hamburg	1,19212	1,53 %	1,43 %
Bremen	1,23192	4,92 %	4,82 %
Brandenburg	1,10614	5,79 %	5,89 %
Berlin	1,16414	0,85 %	0,95 %
Bayern	1,17532	0,10 %	0,00 %
Baden__x26__Württemberg	1,17131	0,24 %	0,34 %

Die Abweichungen in Bezug auf den Durchschnitt als auch auf Bayern sind sehr ähnlich. Die Abweichungen der kleinen Bundesländer, insbesondere der Stadtstaaten sind sichtbar größer. Durch die kleine Fläche führt bereits eine kleine Ungenauigkeit in der Beschreibung der Grenze im SVG zu einer großen Abweichung. Das einzige Bundesland das ungewöhnlich stark hervorsticht ist Brandenburg. Mit ca. 5,8% sollte dies allerdings noch im Rahmen der Genauigkeit liegen, da Brandenburg eher zu den mittelgroßen Bundesländern zählt, als auch ein Loch (Berlin) enthält.

Hierdurch können sich Fehler an der Außengrenze als auch an der Grenze zu Berlin aufaddieren, was ebenso zu einer größeren Abweichung führt.