Konvexes Polygon -
größter ein-beschreibbarer Kreis

Dokumentation zur fünften Aufgabe im Modul „Computational Geometry“

Michael Röder, Markus Hüttner

Inhaltsverzeichnis

1. Beschreibung der Aufgabe

In der fünften Aufgabe des Praktikums soll zu einem gegebenen konvexem Polygon der größte ein beschreibbare Kreis ermittelt werden. Das Problem soll mit Hilfe von Linear Programming gelöst werden. Als Hilfsmittel zum Berechnen wird MATLAB verwendet.

2. Lösungsansatz

Die grundlegende Idee beim Linear Programming besteht darin, eine Lineare Zielfunktion unter zu Hilfenahme von Randbedingungen zu optimieren. Dies kann beispielsweise ein Maximum oder ein Minimum sein. In unserem konkreten Problem ist das entscheidende Kriterium der Radius des Kreises. Der Radius soll hierbei maximal werden. Hieraus ergibt sich folgende Zielfunktion:

$$0 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + r$$

„m_1" stellt hierbei die x-Koordinate, „m_2" die y-Koordinate des Mittelpunktes des Kreises dar. „r" ist der Radius. Die Werte für die Mittelpunktkoordinaten werden mit in die Gleichung aufgenommen, da der Mittelpunkt für die Abstandberechnung zu den einzelnen Kanten des Polygons benötigt wird. Für unser Optimierungsproblem ist die Koordinate des Mittelpunktes aber nicht relevant, lediglich der Radius. Daher wird „m_1" und „m_2" mit dem Faktor 0 versehen.

Der zweite entscheidende Teil ist die Gleichung die für die Randbedingung verwendet wird. Die Grundidee hierbei ist die Länge des Lotes von jeder Polygonkante zum Mittelpunkt des Kreises zu verwenden. Da der Kreis innerhalb des Polygons liegt, muss der Radius des Kreises grundsätzlich kleiner oder gleich der Länge von jedem Lot sein. Zur Berechnung des Abstandes wird die Hessesche Normalform verwendet. Als Basis wird hierzu eine bereits hergeleitete Formel aus Kapitel 2 „Grundlagen" herangezogen:

$$p_2 \cdot m_1 - q_2 \cdot m_1 + q_1 \cdot m_2 - q1 \cdot m_2 - p_2 \cdot q_1 + q_1 \cdot q_2 > 0$$

„p" und „q" sind hierbei die beiden Punkte durch die eine jeweilige Kante des Polygons beschrieben ist. „p_1" entsprechend dessen x-Koordinate und „p_2" dessen y-Koordinate.

Diese Formel auf unser Problem angepasst ergibt folgende Formel:

$$\frac{-(p_2 - q_2)}{\overline{pq}} \cdot m_1 - \frac{(q1 - p1)}{\overline{pq}} \cdot m_2 + r \leq \frac{(-p_2 \cdot q1 + p1 \cdot q2)}{\overline{pq}}$$

Aufgrund der Normierung die in der Normalform enthalten ist, müssen die einzelnen Faktoren noch durch die Länge der Kante geteilt werden. Die Formel ist bereits nach den einzelnen Parametern, die in der Berechnung gesucht werden, umgestellt und kann so für MATLAB verwendet werden.

3. Berechnung mit MATLAB

MATLAB bringt bereits eine Funktionalität zur Berechnung von Linear Programming Problemen mit, „linprog". Diese Funktion benötigt mindestens drei Parameter. Als erstes die Lineare Zielfunktion. Als zweiter Parameter werden die Faktoren der einzelnen Parameter benötigt. Der dritte Parameter stellt die rechte Seite unserer Formel dar.

MATLAB arbeitet mit Matrix Repräsentationen, dass heißt die Zielfunktion wird folgendermaßen dargestellt:

$$f = [0\,0\,1]$$

Analog hierzu wird der zweite und dritte Parameter befüllt, wobei die Anzahl der Zeilen der beiden Matrizen der Anzahl der Kanten des Polygons entspricht.

„linprog“ optimiert grundlegend allerdings auf ein Minimum. Da wir aber ein Maximum benötigen, muss die Zielfunktion und die Randbedingung mit -1 multipliziert werden. Daraus ergibt sich Beispielsweise für die Zielfunktion in MATLAB folgendes:

$$f = [0\,0\,-1]$$

4. Ergebnis

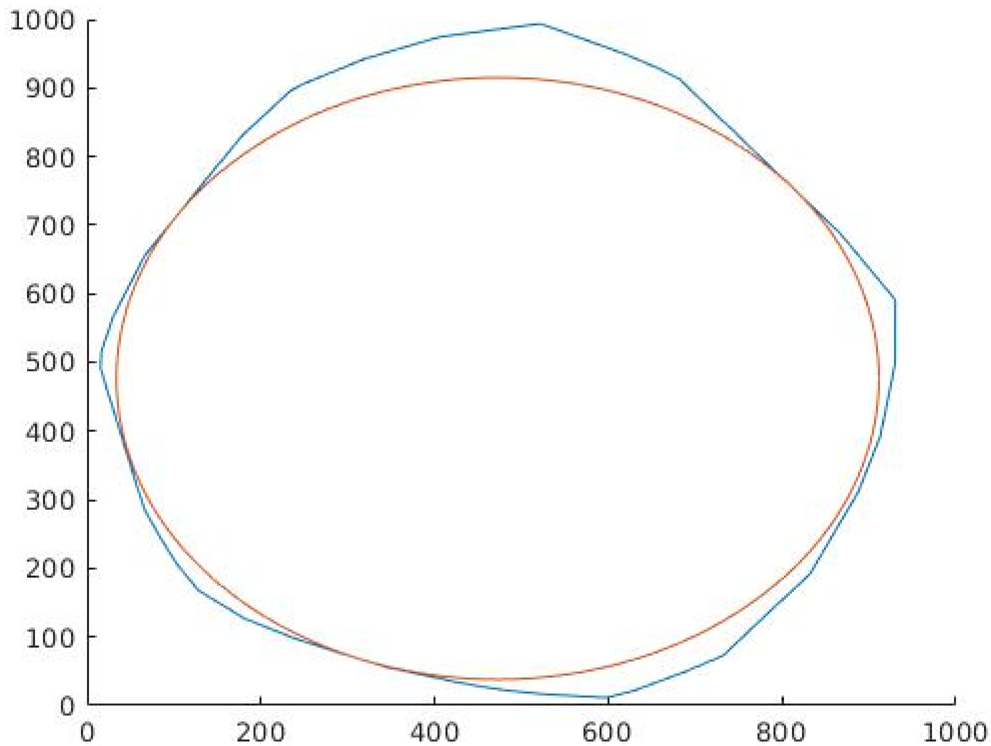
Für das gegebene Polygon (File: „polygon.txt“) ergeben sich folgende Werte aus der Berechnung:

m_1: 472,570536

m_2: 476,664219

Radius: 438,592170

Zur Darstellung des Ergebnis ist mit MATLAB noch das Polygon und der Berechnete Kreis geplottet worden:



Zur Überprüfung des Ergebnisses wurden zusätzlich noch einige triviale konvexe Polygone wie Quadrate verwendet. Diese wurden so gewählt das der Kreis trivial bestimmbar war.