

Resolução das Questões Discursivas dos ENADEs

BRIAN MAYER

26 de fevereiro de 2018

Resumo

Neste documento serão resolvidas as questões discursivas das provas de matemática a níveis de licenciatura e bacharelado do ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes) aplicadas pelo SINAES (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior) dos anos de 1998 até 2014, a última prova aplicada até o presente para o interesse geral no desenvolvimento e treinamento matemático empregado neste trabalho. Os textos das questões não foram modificados, apenas rescritos e reformatados devido ao *software* utilizado neste documento, i.e. $\text{\LaTeX} 2_{\varepsilon}$. As soluções contidas neste documento são resultados da mistura entre a criatividade do autor e de uma pesquisa de *internet*.

Sumário

I	Considerações Iniciais	5
1	Introdução	6
2	Comentários Gerais	8
II	Provas	9
3	ENADE 1998	10
3.1	Questões	10
3.1.1	Questão 1	10
3.1.2	Questão 2	10
3.1.3	Questão 3	11
3.1.4	Questão 4	11
3.1.5	Questão 5	11
3.2	Soluções	11
3.2.1	Questão 1	11
3.2.2	Questão 2	12
3.2.3	Questão 3	12
3.2.4	Questão 4	12
4	ENADE 1999	13
4.1	Questões	13
4.1.1	Questão 1	13
4.1.2	Questão 2	13
4.1.3	Questão 3	14

4.1.4	Questão 4	14
4.1.5	Questão 5	14
4.2	Soluções	15
4.2.1	Questão 1	15
4.2.2	Questão 2	15
5	ENADE 2000	16
5.1	Questões	16
5.1.1	Questão 1	16
5.1.2	Questão 2	16
5.1.3	Questão 3	16
5.1.4	Questão 4	17
5.2	Soluções	17
5.2.1	Questão 2	17
6	ENADE 2001	18
6.1	Questões	18
6.1.1	Questão 1	18
6.1.2	Questão 2	18
6.1.3	Questão 3	18
6.1.4	Questão 4	19
6.1.5	Questão 5	19
6.2	Soluções	19
6.2.1	Questão 2	19
6.2.2	Questão 3	19
7	ENADE 2002	20
7.1	Questões	20
7.1.1	Questão 1	20
7.1.2	Questão 2	20
7.1.3	Questão 3	21
7.1.4	Questão 4	21
7.1.5	Questão 5	21
7.1.6	Questão 6	22
7.2	Soluções	22
7.2.1	Questão 1	22
7.2.2	Questão 5	23

8	ENADE 2003	24
8.1	Questões	24
8.1.1	Questão 1	24
8.1.2	Questão 2	24
8.1.3	Questão 3	25
8.1.4	Questão 4	25
8.1.5	Questão 5	25
8.1.6	Questão 6	26
8.2	Soluções	26
8.2.1	Questão 1	26
8.2.2	Questão 2	27
8.2.3	Questão 4	27
9	ENADE 2005	28
9.1	Questões	28
9.1.1	Questão 1	28
9.2	Soluções	28
9.2.1	Questão 1	28
10	ENADE 2008	30
10.1	Questões	30
10.1.1	Questão 1	30
10.2	Soluções	30
10.2.1	Questão 1	30
11	ENADE 2011	32
11.1	Questões	32
11.1.1	Questão 1	32
11.1.2	Questão 2	32
11.1.3	Questão 3	33
11.2	Soluções	33
11.2.1	Questão 1	33
11.2.2	Questão 2	34
11.2.3	Questão 3	34

12 ENADE 2014	36
12.1 Questões	36
12.1.1 Questão 1	36
12.1.2 Questão 2	36
12.1.3 Questão 3	37
12.1.4 Questão 4	38
12.1.5 Questão 5	39
12.2 Soluções	39

Parte I

Considerações Iniciais

Capítulo 1

Introdução

Começando com o ENADE de 1998 que possui cinco (5) questões discursivas, aborda os temas de cálculo de áreas, soluções de equações diferenciais, demonstrações a respeito de convergência de sequências, integrais complexas e operações com anéis e corpos. No ENADE de 1999 temos cinco (5) questões, a primeira fazendo uma aplicação de equações diferenciais no crescimento de uma população, e pedindo uma solução analítica para a mesma, outra questão na área de cálculo pede o valor de uma integral complexa em um curva muito conhecida pela matemática, as demais perguntas são de álgebra e análise, onde os problemas de álgebra se concentraram no tópico de polinômios, na análise são abordados sequências, funções e campos vetoriais. O ENADE do ano 2000 possui quatro (4) questões centradas nos tópicos mais comumente estudados: integrais complexas, a equação de Laplace, convergência de séries e matrizes. Muito centralizado no quesito mecânico na solução dos problemas. O do ano 2001 trás cinco (5) questões, a maioria na área de álgebra, com tábuas de elementos de corpos, pergunta sobre algumas definições de espaços métricos e sobre funções, possui uma questão de aplicação de cálculo diferencial -na área de taxas de variação e volume- e uma questão sobre a exponencial complexa. No ENADE do ano de 2002 encontram-se seis (6) questões discursivas, abrangendo a maioria dos tópicos principais da Matemática, tais como, cálculo diferencial e integral, pedindo operações com derivadas, série de potências -com o teste da razão- e a solução de uma integral complexa, álgebra, aritmética, e geometria analítica e vetores. O ENADE do ano de 2003 possui também seis (6) questões, onde se deve escolher cinco (5) e resolvê-las, mas aqui estarão todas resolvidas, a primeira questão é de cálculo, onde se pede a resolução de uma integral dupla, as segunda, terceira e quarta questões, na área de álgebra, pedem construções de anéis, operações com matrizes e polinômios, a quinta questão novamente sobre cálculo, desta vez, aborda campos vetoriais e necessita de manipulações à respeito dos divergente, convergente e laplaciano, encerrando com conjecturas sobre sequências na sexta questão. No provão do ENADE 2005 a única questão aborda o tema de Cálculo, onde se deve verificar as condições

de *Cauchy-Riemann* e realizar a solução de uma integral complexa. O ENADE 2008 apresenta apenas uma (1) questão sobre o tema de Análise Matemática, no que se diz respeito à diferenciação e propriedades de certas famílias de funções, tais como injetora e limitada. O ENADE 2011 contém três (3) questões: a primeira questão aborda o tema de Estatística, i.e. no cálculo de probabilidades, a segunda sequência, utilizando indução finita para demonstrar uma conjectura e a terceira questão abrange a área de Análise Matemática, onde primeiramente apresenta o *teorema do valor intermediário* e *a posteriori* o aplica nesse campo para resolver uma situação-problema na Corrida de São Silvestre de 2010. As três (3) questões do ENADE de 2014 abordam os temas de geometria analítica, matemática aplicada e equações Diofantinas, a primeira questão é sobre os efeitos visuais de uma transformação da computação gráfica, a segunda questão aborda o sistema de correção de palavras de editores de texto com álgebra, e a terceira pede para aplicar equações diofantinas a um problema do cotidiano.

Num panorama geral percebemos o alto nível de matemática, não só na parte discursiva, as questões necessitam de muita análise e conhecimento sobre os principais teoremas dos assuntos abordados, tais como o teorema de *Green*, $\int_{\partial R} Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$ para o cálculo de áreas em algumas questões e o teorema de *Cauchy* para a resolução das integrais complexas do tipo $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ -presentes em todos os provões-, o teorema de *Cayley-Hamilton* para os processos envolvendo diagonalização e autovalores e autovetores, entre outras competências. Em todos os anos as questões abrangeram a maior parte da ementa de um curso de bacharelado, cumprindo com o objetivo da prova.

Capítulo 2

Comentários Gerais

Parte II

Provas

Capítulo 3

ENADE 1998

3.1 Questões

3.1.1 Questão 1

Seja R uma região do plano que satisfaz as condições do Teorema de Green.

- (a) Mostre que a área de R é dada por $\frac{1}{2} \int_{\partial R} xdy - ydx$
- (b) Use o item (a) para calcular a área da elipse de equações $\{ x = a \cos(\theta)$
 $y = b \sin(\theta)$ onde $a > 0$ e $b > 0$ são fixos, e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (valor: 20,0 pontos)

Dados/Informações adicionais: Teorema de Green: Seja R uma região do plano com interior não vazio e cuja fronteira ∂R é formada por um número finito de curvas fechadas, simples, disjuntas e de classe C^1 por partes. Sejam

$L(x, y)$ e $M(x, y)$ funções de classe C^1 em R . Então $\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy =$
 $\int_{\partial R} Ldx + Mdy$

3.1.2 Questão 2

Resolva a equação diferencial $y''' - 4y'' + 4y' = e^x$, onde $y' = \frac{dy}{dx}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$;
 $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ (valor: 20,0 pontos)

3.1.3 Questão 3

Prove que se uma seqüência de funções $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in D$, então f é contínua no ponto a .

Dados/Informações adicionais: Uma seqüência de funções $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$. (valor: 20,0 pontos)

3.1.4 Questão 4

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ a curva $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$ nos seguintes casos:

(a) $z_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$

(b) $z_0 = 2(1 + i)$. (valor: 20,0 pontos)

3.1.5 Questão 5

Sejam α um número algébrico de grau n e $\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$ um elemento não nulo no corpo $\mathbb{Q}(\alpha)$, i.e., os coeficientes b_i são racionais, $0 \leq i \leq n-1$, e, pelo menos, um deles é diferente de zero.

(a) Prove que $\frac{1}{\beta}$ é um polinômio em α .

(a) Racionalize a fração $\frac{1}{2 + \sqrt[3]{2}}$. (valor: 20,0 pontos)

3.2 Soluções

3.2.1 Questão 1

- (a) A integral dada no enunciado nos fornece $L(x, y) = -y$ e $M(x, y) = x$. Calculando $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$ obtemos: 2. Como foi dito que a função satisfaz as condições do Teorema de Green, então a integral $\frac{1}{2} \int_{\partial R} xdy - ydx = \frac{1}{2} \iint_R 2dxdy = \iint_R dxdy$, que corresponde à área da região R .

- (b) Temos então $\frac{1}{2} \int_{\partial R} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial R} a \cos(\theta) dy - b \sin(\theta) dx$. Mas $dy = b \cos(\theta) d\theta$ e $dx = -a \sin(\theta) d\theta$, então a integral se torna:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\partial R} a \cos(\theta) b \cos(\theta) d\theta - b \sin(\theta) (-a \sin(\theta)) d\theta = \\ & = \frac{ab}{2} \int_{\partial R} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi \end{aligned}$$

3.2.2 Questão 2

Fazendo a substituição: $u(x) = y'(x)$ a equação diferencial assume a forma $u'' - 4u' + 4u = e^x$. A solução da equação característica é: $\lambda = 2$, portanto a solução da equação homogênea associada é $u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

Pela equação não homogênea, uma aparente solução é $u(x) = e^x$. De fato: $e^x - 4e^x + 4e^x = e^x$, portanto pelo princípio da sobreposição uma solução da equação diferencial é $u(x) = c_0 e^x + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. Mas $u = y'$, então

$$y(x) = \int u(x) dx = \int c_0 e^x + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} dx$$

Portanto a solução da eq. diferencial é $y(x) = C_0 e^x + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3$.

3.2.3 Questão 3

Como a sequência de funções converge para f , então dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_o$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Mas cada f_n é contínua no ponto a , ou seja, para $\delta > 0$, $|x - a| < \delta$ implica que $|f_n(x) - f_n(a)| < \epsilon$. Como $f_n(x)$ converge para $f(x)$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, portanto f é contínua em a .

3.2.4 Questão 4

A curva em questão é a circunferência de raio 1, então:

- (a) Como $z_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$ está dentro da curva γ , pois $|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, podemos usar o teorema de Cauchy para as integrais complexas, assim:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - \frac{1}{2}(1 + i)} dz = 2i\pi$$

- (b) Como $z_0 = 2(1 + i)$ está fora da curva γ , pois $|z_0| = 2\sqrt{2} > 1$, o valor da integral é zero.

Capítulo 4

ENADE 1999

4.1 Questões

4.1.1 Questão 1

Um modelo clássico para o crescimento de uma população de determinada espécie está descrito a seguir. Indicando por $y = y(t)$ o número de indivíduos desta espécie, o modelo admite que a taxa de crescimento relativo da população seja proporcional à diferença $M - y(t)$, onde $M > 0$ é uma constante. Isto conduz à equação diferencial $\frac{y'}{y} = k(M - y)$, onde $k > 0$ é uma constante que depende da espécie. Com base no exposto:

- (a) resolva a equação diferencial acima; (valor: 10,0 pontos)
- (b) considere o modelo apresentado para o caso particular em que $M = 1000$, $k = 1$ e $y(0) = 250$ e explique qualitativamente como se dá o crescimento da população correspondente, indicando os valores de t para os quais $y(t)$ é crescente, e o valor limite de $y(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. (valor: 10,0 pontos)

4.1.2 Questão 2

Seja $\mathbb{Z}_3 = \bar{0}, \bar{1}, -\bar{1}$ o corpo de inteiros módulo 3 e $\mathbb{Z}_3[x]$ o anel de polinômios em x com coeficientes em \mathbb{Z}_3 .

- (a) Mostre que $x^2 + x - 1$ é irredutível em $\mathbb{Z}_3[x]$. (valor: 10,0 pontos)
- (b) Mostre que o anel quociente $\mathbb{Z}_3[x]/x^2 + x - 1$ é um corpo e que tem 9 elementos. (valor: 10,0 pontos)

4.1.3 Questão 3

Considere o subconjunto Γ do \mathbb{R}^2 dado pela equação $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$.

- (a) Para que valores de x existem v_x , vizinhança de x , e função diferenciável $y = y(x)$ definida em v_x , satisfazendo $2(x^2 + y(x)^2)^2 = 25(x^2 - y(x)^2)$? Justifique. (valor: 10,0 pontos)
- (b) Obtenha a reta tangente a Γ no ponto $(3, 1)$. (valor: 10,0 pontos)

4.1.4 Questão 4

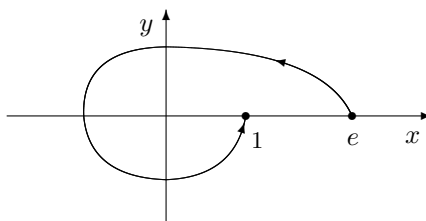
Prove que se uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então a imagem inversa $f^{-1}(V)$ de todo subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . (valor: 20,0 pontos)

Definição: Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

4.1.5 Questão 5

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo conservativo, $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial de \vec{F} e $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ uma curva regular de classe C^1 .

- (a) Mostre que o trabalho realizado por \vec{F} sobre γ é dado por $\phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$. (valor: 10,0 pontos)
- (b) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ sobre a curva esboçada abaixo. (valor: 10,0 pontos)



Definições: Um campo vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se conservativo (ou gradiente) se existe $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , tal que $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$ em todo ponto de D . Uma tal ϕ chama-se função potencial. O trabalho realizado por um campo de vetores sobre uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ é dado por $\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$.

4.2 Soluções

4.2.1 Questão 1

- (a) Dividindo ambos lados por $(M - y)$ e integrando em relação a t temos:
- $$\int \frac{dy}{y(M - y)} = \int k dt. \text{ A integral da direita é simplesmente } kt + c. \text{ Mas}$$
- na da esquerda precisamos fazer decomposição em frações parciais. Então:

$$\frac{1}{y(M - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{M - y} = \frac{(B - A)y + AM}{y(M - y)} \Rightarrow \begin{cases} A & = \frac{1}{M}; \\ B - A & = 0 \end{cases}$$

Portanto nossa solução para a decomposição é: $A = \frac{1}{M} = B$. Então nossa integral é:

$$\frac{1}{M} \int \frac{1}{y} + \frac{1}{M - y} dy = \frac{1}{M} \ln \left(\frac{y}{y - M} \right)$$

Assim nos reduzimos a: $\frac{1}{M} \ln \left(\frac{y}{y - M} \right) = kt + c \Rightarrow \frac{y}{y - M} = e^{Mkt + Mc}$, ou seja: $y = (y - M)(e^c e^{kt})^M = y(e^c e^{kt})^M - M(e^c e^{kt})^M$, então: $y((e^c e^{kt})^M - 1) = M(e^c e^{kt})^M$, dividindo por $(e^c e^{kt})^M - 1$ e chamando $e^{cM} = C$ e $kM = K$, finalmente temos:

$$y = \frac{MCe^{Kt}}{Ce^{Kt} - 1}$$

multiplicando esta última equação por e^{-Kt} para cancelarmos duas exponenciais, a equação assume a forma:

$$y = \frac{MC}{C - e^{-Kt}}$$

- (b) Sendo $M = 1000$ e $k = 1$, nossa constante é $K = 1000$, e a equação se torna

$$y = \frac{1000C}{C - e^{-1000t}}$$

o enunciado nos deu $y(0) = 250$, então $250 = \frac{1000C}{C - 1} \Rightarrow C = \frac{5}{13}$. Então nossa equação se torna:

$$y(t) = \frac{1000}{13e^{-1000t}/5 + 1}$$

A função é sempre crescente para valores positivos de t , e quando $t \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 1000 = M$.

4.2.2 Questão 2

- (a) O polinômio $x^2 + x - 1$ é irredutível pois $\bar{1}^2 + \bar{1} - 1 = \bar{1} \neq \bar{0}$, $\bar{0}^2 + \bar{0} - 1 = \bar{2} \neq \bar{0}$ e $\bar{2}^2 + \bar{2} - 1 = \bar{2} \neq \bar{0}$, logo não possui raízes, então é irredutível.

Capítulo 5

ENADE 2000

5.1 Questões

5.1.1 Questão 1

Seja γ um caminho no plano complexo, fechado, simples, suave (isto é, continuamente derivável) e que não passa por i nem por $-i$. Quais são os possíveis valores da integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$? (valor: 20,0 pontos)

5.1.2 Questão 2

Uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas contínuas até a 2ª ordem, é dita harmônica em \mathbb{R}^2 se satisfaz a Equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

Mostre que se u e u^2 são harmônicas em \mathbb{R}^2 , então u é uma função constante. (valor: 20,0 pontos)

5.1.3 Questão 3

Seja $\{A_n\}, n \in \mathbb{N}$, uma seqüência de números reais positivos e considere a série de funções de uma variável real t dada por $\sum_{n=0}^{\infty} (A_n)^t$. Suponha que tal série converge se $t = t_0 \in \mathbb{R}$. Prove que ela converge uniformemente no intervalo $[t_0, \infty[$. (valor: 20,0 pontos)

5.1.4 Questão 4

Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e n um inteiro positivo. Calcule A^n .

Sugestão: Use a Forma Cannica de Jordan ou o Teorema de Cayley-Hamilton.
(valor: 20,0 pontos)

5.2 Soluções

5.2.1 Questão 2

Como u e u^2 são funções harmônicas, então:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) = 0$$

como $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial x}$, derivando novamente: $\frac{\partial}{\partial x}(2u \frac{\partial u}{\partial x}) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e o mesmo acontece com a variável y , desse modo nossa equação de Laplace toma a forma:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

pois u é harmônica. Portanto $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Resolvendo estas duas equações, temos: (i) $u(x, y) = c + \phi(y)$ e (ii) $u(x, y) = k + \psi(x)$, derivando a primeira em relação a y e a segunda em relação a x , obtemos: $\phi'(y) = 0$ e $\psi'(x) = 0$ respectivamente, o que indica que estas funções são constantes. Assim necessariamente $\phi(y) = k$ e $\psi(x) = c$ e temos a única solução: $u(x, y) = c + k = C$

Capítulo 6

ENADE 2001

6.1 Questões

6.1.1 Questão 1

Sabendo-se que para todo número real θ tem-se que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, deduza as fórmulas

- (a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ (valor: 10,0 pontos)
- (b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ (valor: 10,0 pontos)

6.1.2 Questão 2

Uma piscina, vazia no instante $t = 0$, é abastecida por uma bomba d'água cuja vazão no instante t (horas) é $V(t)$ (metros cúbicos por hora).

- (a) Determine o volume da piscina sabendo que, se $V(t) = 500$, a piscina fica cheia em 5 horas. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Determine em quanto tempo a piscina ficaria cheia se $V(t) = 50t$. (valor: 15,0 pontos)

6.1.3 Questão 3

Sejam A uma matriz real 2×2 com autovalores $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e \mathbf{v} um vetor de \mathbb{R}^2 .

- (a) A é diagonalizável? Justifique sua resposta. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Considere a seqüência $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}, \dots, A^n\mathbf{v}, \dots$. Prove que essa seqüência é convergente. (valor: 15,0 pontos)

6.1.4 Questão 4

Sejam X e Y espaços métricos, $A \subset X$ e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

- (a) Qual é o significado de A é aberto? (valor: 5,0 pontos)
- (b) Qual é o significado de A é fechado? (valor: 5,0 pontos)
- (c) Qual é o significado de f é contínua em X ? (valor: 5,0 pontos)
- (d) Se $a \in Y$ e f é contínua em X , mostre que o conjunto solução da equação $f(x) = a$ é fechado. (valor: 5,0 pontos)

6.1.5 Questão 5

O corpo \mathbb{Z}_2 dos inteiros módulo 2 é formado por dois elementos, 0 e 1, com as operações usuais de adição e multiplicação definidas pelas tábuas abaixo.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

\times	0	1
0	0	0
1	0	1

Considere em $\mathbb{Z}_2[x]$ isto é, no anel dos polinômios na indeterminada x cujos coeficientes pertencem a \mathbb{Z}_2 , o polinômio de grau 2, $q(x) = x^2 + x + 1$.

- (a) Mostre que $q(x)$ não tem raízes em \mathbb{Z}_2 . (valor: 5,0 pontos)
- (b) $q(x)$ sendo irredutível, sabe-se, pelo Teorema de Kronecker, que existem um corpo E , que é uma extensão de \mathbb{Z}_2 (ou seja, tal que \mathbb{Z}_2 é um subcorpo de E) e um elemento $\alpha \in E$ tal que $\alpha \notin \mathbb{Z}_2$ e $q(\alpha) = 0$. Determine o número mínimo de elementos que E pode ter e construa as tábuas de adição e de multiplicação em E . (valor: 15,0 pontos)

6.2 Soluções

6.2.1 Questão 2

- (a) $V = 500 \times 5 = 2500$ (metros cúbicos)
- (b) $2500 = \int_0^{t_1} 50t dt \rightarrow 2500 = \frac{50t_1^2}{2}$, ou seja: $t_1 = 10$ (horas).

6.2.2 Questão 3

- (a) $q(0) = 1 \neq 0$ e $q(1) = 3 = 1 \neq 0$ portanto é irredutível.
- (b) o Conjunto E que se diz é \mathbb{Z}_2 extendido com as raízes de $q(x)$, ou seja
$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Capítulo 7

ENADE 2002

7.1 Questões

7.1.1 Questão 1

Sejam g e h funções deriváveis de \mathbb{R} em \mathbb{R} tais que $g(x) = h(x)$, $h(x) = g(x)$, $g(0) = 0$ e $h(0) = 1$.

- (a) Calcule a derivada de $h^2(x) - g^2(x)$. (valor: 10,0 pontos)
- (a) Mostre que $h^2(x) - g^2(x) = 1$, para todo x em \mathbb{R} . (valor: 10,0 pontos)

7.1.2 Questão 2

Em um espaço métrico M , com distância d , a bola aberta de raio $r > 0$ e centro $p \in M$ é o conjunto $B_r(p) = \{x \in M \mid d(x, p) < r\}$. Por definição, um conjunto $A \subset M$ é aberto se para qualquer ponto $p \in A$ existir $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subset A$.

- (a) Mostre que a união de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Mostre que a interseção de uma família finita não vazia de conjuntos abertos é um conjunto aberto. (valor: 10,0 pontos)
- (c) Em \mathbb{R} , com a métrica usual, o conjunto $\{0\}$ não é aberto. Dê exemplo de uma família infinita de conjuntos abertos de \mathbb{R} cuja interseção seja $\{0\}$. (valor: 5,0 pontos)

7.1.3 Questão 3

Seja A uma matriz quadrada de ordem n .

- (a) Defina autovalor de A . (valor: 5,0 pontos)
- (b) Se λ é um autovalor de A , mostre que 2λ é um autovalor de $2A$. (valor: 5,0 pontos)
- (c) Se λ é um autovalor de A , mostre que λ^2 é um autovalor de A^2 . (valor: 10,0 pontos)

7.1.4 Questão 4

O complexo w é tal que a equação $z^2 - wz + (1 - i) = 0$ admite $1 + i$ como raiz.

- (a) Determine w . (valor: 5,0 pontos)
- (b) Determine a outra raiz da equação. (valor: 5,0 pontos)
- (c) Calcule a integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - wz + (1 - i)}$, sendo γ a circunferência descrita parametricamente por $\gamma(t) = \frac{1}{2} \cos(t) + i(\frac{1}{2} \sin(t) - 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (valor: 10,0 pontos)

7.1.5 Questão 5

A série de potências a seguir define, no seu intervalo de convergência, uma função g , $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} + \dots$

- (a) Determine o raio de convergência r da série. Justifique. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Expresse $g'(x)$ como soma de uma série de potências, para $|x| < r$. (valor: 5,0 pontos)
- (c) Expresse $g'(x)$, para $|x| < r$, em termos de funções elementares (polinomiais, trigonométricas, logarítmicas, exponenciais). (valor: 5,0 pontos)
- (d) Expresse $g(x)$, para $|x| < r$, em termos de funções elementares. (valor: 5,0 pontos)

7.1.6 Questão 6

Uma fonte de luz localizada no ponto $L = (0, -1, 0)$ ilumina a superfície dada, parametricamente, por $P(u, v) = (u + v, u^2, v)$.

- (a) Calcule o vetor normal à superfície, $\vec{N}(u, v)$, de forma que para $u = v = 0$ esse vetor seja $(0, -1, 0)$. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Trabalhando com os vetores \vec{N} e $L - P$, dê uma condição sobre u e v a fim de que o ponto $P(u, v)$ seja iluminado pela luz em L . (valor: 15,0 pontos)

7.2 Soluções

7.2.1 Questão 1

- (a) $(h^2(x) - g^2(x))' = 2hh' - 2gg' = 2hg - 2gh = 0$
- (b) Como $(h^2(x) - g^2(x))' = 0$, temos que $h^2(x) - g^2(x) = k$. Mas $h(0) = 1$ e $g(0) = 0$ então: $1^2 - 0^2 = 1 \implies k = 1$

- (a) $(1 + i)^2 - w(1 + i) + (1 - i) = 0 \implies w = 1$
- (b) Como o enunciado disse que $1 + i$ é raiz, então podemos rescrever a equação dada. Assim: $z^2 - z + (1 - i) = 0$, por inspeção percebemos que a outra raiz é $-i$, pois $(-i)^2 - (-i) + (1 - i) = -1 + i + (1 - i) = 0$.

- (c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - wz + (1 - i)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - 1 + i)(z + i)}$, decompondo com frações parciais temos:

$$\frac{1}{(z - 1 + i)(z + i)} = \frac{a + bi}{(z - 1 + i)} + \frac{c + di}{(z + i)}$$

Onde obtemos: $\frac{(a + bi + c + di)z + (-b - c - d) + (c - b + a - d)i}{(z - 1 + i)(z + i)}$.

A qual gera o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + bi + c + di &= 0 \\ b + c + d &= -1 \\ c - b + a - d &= 0 \end{cases}$$

A primeira equação nos dá que $a = -c$ e $b = -d$, substituindo na segunda equação temos: $c = -1$, logo, $a = 1$. Portanto as constantes são: $a = 1$, $c = -1$, nosso sistema agora é apenas a equação $b + d = 0$ Portanto podemos fazer $b = d = 0$. Assim as frações são $\frac{1}{z - 1 + i} - \frac{1}{z + i}$, e a

integral original torna-se $\int_{\gamma} \frac{1}{z - (1-i)} - \frac{1}{z+i} dz$. A circunferência γ pode ser rescrita como: $\gamma(t) = \frac{1}{2}[\cos(t) + i \sin(t)] - i$, desse modo percebemos que está centrada no ponto $(0, -i)$ e possui raio $1/2$. Como a primeira raiz está fora da curva, o valor da integral é zero. Então:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - (1-i)} - \frac{1}{z+i} dz = - \int_{\gamma} \frac{1}{z+i} dz = -2i\pi$$

7.2.2 Questão 5

(a) Pelo teste da razão temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)} \frac{2n}{x^{2n}} \right|.$$

Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x^2 \right|$ onde percebemos que $|x^2| < 1$, ou simplesmente $|x| < 1$. Então o raio de convergência r da série é: $r < 1$.

(b) Derivando: $g'(x) = -x + x^3 - x^5 + \dots + (-1)^n x^{2n-1} + \dots$

(c) Considere a série de *Maclaurin* da função $y = \ln(x+1)$, i. e. :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

se utilizarmos x^2 no lugar de x , teríamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(x^2+1) &= \frac{2x}{x^2+1} \\ \frac{d^2}{dx^2} \ln(x^2+1) &= \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Capítulo 8

ENADE 2003

8.1 Questões

8.1.1 Questão 1

Seja $I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx$.

- (a) Esboce graficamente a região de integração. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Inverta a ordem de integração. (valor: 10,0 pontos)
- (c) Calcule o valor de I . (valor: 5,0 pontos)

8.1.2 Questão 2

Seja \mathbb{Z}_{18} o anel dos inteiros módulo 18 e seja G o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis de \mathbb{Z}_{18} .

- (a) Escreva todos os elementos do grupo G . (valor: 10,0 pontos)
- (b) Mostre que G é cíclico, calculando explicitamente um gerador, ou seja, mostre que existe $g \in G$ tal que todos os elementos de G são potências de g . (valor: 10,0 pontos)

8.1.3 Questão 3

- (a) Dada a matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, escreva, em forma de polinômio $f(x, y)$, a forma quadrática definida por A , isto é, calcule os coeficientes numéricos de $f(x, y) = v^t A v$, onde $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e v^t significa v transposto. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Encontre uma matriz invertível P tal que $P^t A P = D$, onde D é uma matriz diagonal. Para isto, basta tomar como P uma matriz que tenha por colunas um par de autovetores ortonormais de A . (valor: 10,0 pontos)
- (c) Na forma quadrática $f(x, y) = v^t A v$, faça uma transformação de coordenadas $v = P\tilde{v}$, sendo $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, obtendo a forma quadrática diagonalizada, isto é, sem o termo em $\tilde{x}\tilde{y}$. (valor: 5,0 pontos)

8.1.4 Questão 4

Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, com $n \geq 1$, um polinômio de coeficientes reais. Suponha que $p'(x)$ divide $p(x)$.

- (a) Prove que o quociente $q(x) = \frac{p(x)}{p'(x)}$ é da forma $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Encontre todos os polinômios $p(x)$ que satisfazem essa condição, resolvendo a equação diferencial $q(x)p'(x) - p(x) = 0$. (valor: 15,0 pontos)

8.1.5 Questão 5

Dado um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e um campo de vetores $X = (X_1, X_2, X_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável, o divergente de X é definido por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}$$

Para uma função de classe C^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ o laplaciano de f é definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- (a) Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo de vetores diferenciável, mostre que

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \nabla f \cdot X,$$

sendo ∇f o gradiente de f e $\nabla f \cdot X$ o produto interno entre ∇f e X . (valor: 5,0 pontos)

- (b) Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , mostre que $\operatorname{div}(f\nabla f) = f\Delta f + \|\nabla f\|^2$, sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana. (valor: 5,0 pontos)
- (c) Se $U = B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$ e $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^3 tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$, $\operatorname{div}(f\nabla f) = 5f$ e $\|\nabla f\|^2 = 2f$, calcule

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial N} dS,$$

onde \bar{B} é o fecho de B , S é a fronteira de B , N é a norma unitária exterior a S , $\frac{\partial f}{\partial N}$ é a derivada direcional de f na direção de N e dS é o elemento de área de S . (valor: 10,0 pontos)

8.1.6 Questão 6

Considere a função real f definida, para $x \geq 0$, por $f(x) = \sqrt{2x}$.

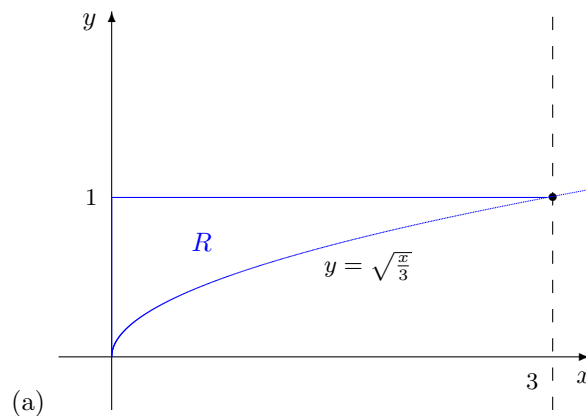
- (a) Prove que se $0 < x < 2$, então $x < f(x) < 2$. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Prove que é convergente a seqüência definida recursivamente por
1. $a_1 = \sqrt{2}$
 2. $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \geq 1$

(valor: 5,0 pontos)

- (c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (valor: 10,0 pontos)

8.2 Soluções

8.2.1 Questão 1



$$(b) \quad I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dx dy$$

$$(c) \quad I = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^1 3y^2 e^{y^3} dy = e - 1$$

8.2.2 Questão 2

$$(a) \quad G = \{1, 5, 7, 11, 13\}$$

8.2.3 Questão 4

(a) Temos que $p'(x) = nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1$. Como $p'(x)$ divide $p(x)$ então $q(x)$ deve ser de grau um. Portando $q(x) = k(x - x_0)$.

O teorema fundamental da divisão nos dá: $q(x)p'(x) = p(x)$, assim $k(x - x_0)[nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1] = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Multiplicando o primeiro termo da esquerda temos $kx^n = x^n$, portanto $k = \frac{1}{n}$. Logo $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0)$.

(b) Multiplicando a equação diferencial dada no enunciado por $\frac{1}{q(x)}$ obtemos:

$$p'(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

então $\frac{p'}{p} = \frac{n}{x-x_0} \implies \ln(p) = n \ln(x - x_0) + c$, portanto $p(x) = k(x - x_0)^n$.

Capítulo 9

ENADE 2005

9.1 Questões

9.1.1 Questão 1

A respeito de funções de variável complexa, resolva os itens que se seguem.

- (a) Escreva a função complexa $f(z) = f(x + iy) = z^2 - 3z + 5$ na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e verifique as equações de Cauchy-Riemann para essa função. (valor: 4,0 pontos)
- (b) Sabendo que $g(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} = -\frac{1}{4(z - i)} - \frac{1}{4(z + i)} + \frac{1}{2(z + 1)^2} + \frac{1}{2(z + 1)}$, calcule a integral complexa: $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} dz$. (valor: 6,0 pontos)

9.2 Soluções

9.2.1 Questão 1

- (a) Fazendo $z = x + yi$ temos: $f(z) = (x + yi)^2 - 3(x + yi) + 5$, ou seja: $f(z) = (5 - 3x + x^2 - y^2) + (2xy - 3y)i$. Daqui temos que $u(x, y) = 5 - 3x + x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy - 3y$; As condições de Cauchy-Riemann são: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Portanto teremos: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3$, onde vemos $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, e $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $-\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, portanto a função satisfaz as condições citadas.

- (b) Usando a sugestão dada no enunciado vemos que as singularidades $-1, -i, i$ estão contidas na curva fechada $C : |z| = 2$, assim podemos usar o teorema de Cauchy, i. e. $\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} f^{(n)}(a)$. Multiplicando a função $g(z)$ por z^2 temos a função desejada na integração, assim $f(z) = z^2$ e:

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+1)^2} dz \\ &= 2i\pi \left(-\frac{(i)^2}{4} - \frac{(-i)^2}{4} + \frac{2(-1)}{2} + \frac{(-1)^2}{2} \right) \\ &= \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{2} - 2i\pi + i\pi = 0 \end{aligned}$$

Capítulo 10

ENADE 2008

10.1 Questões

10.1.1 Questão 1

Considere uma função derivável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer número real $k \neq 0$, a função $g_k(x)$ definida por $g_k(x) = x - kf(x)$ não é injetora.

Com base nessa propriedade, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

- (a) Mostre que, se $g'_k(x_0) = 0$ para algum $k \neq 0$, então $f'(x_0) = \frac{1}{k}$ (valor: 3,0 pontos).
- (b) Mostre que, para cada $k \in \mathbb{R}$ não-nulo, existem números α_k e β_k tais que $g_k(\alpha_k) = g_k(\beta_k)$. Além disso, justifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$ não-nulo, existe um número θ_k tal que $g'_k(\theta_k) = 0$. (valor: 3,0 pontos).
- (c) Mostre que a função derivada de primeira ordem f' não é limitada. (valor: 4,0 pontos).

10.2 Soluções

10.2.1 Questão 1

- (a) Derivando a função definida no item (a): $g'_k(x) = 1 - kf'(x)$. Fazendo $g'_k(x) = 0$ temos: $0 = 1 - kf'(x)$, ou seja: $f'(x_0) = \frac{1}{k}$, para um certo x_0

- (b) Como o exercício nos diz que a função $g_k(x)$ não é injetora, essa definição implica que existem α e β , diferentes, tais que: $g_k(\alpha) = g_k(\beta)$, mas como a mudança do valor de k gera novas funções injetoras, é cmodo escrever $g_k(\alpha_k) = g_k(\beta_k)$ para mostrar tal fato; Usando o resultado do item (a), temos que se $g'_k(\theta_k) = 0$ então $f'(\theta_k) = \frac{1}{k}$, portanto para cada valor de $k \neq 0$ temos uma função $g'_k(\theta_k) = 0$
- (c) A função f' não é limitada pois a função $1/x$, para $x \neq 0$ não é limitada.

Capítulo 11

ENADE 2011

11.1 Questões

11.1.1 Questão 1

Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8.

Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.

- (a) Calcule a probabilidade de essas pessoas descerem em andares diferentes. (valor: 6,0 pontos).
- (b) Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar. (valor: 4,0 pontos).

11.1.2 Questão 2

Considere a sequência numérica definida por

$$\begin{cases} a_1 = a; \\ a_{n+1} = \frac{4a_n}{2 + a_n^2}, \end{cases} \text{ para } n \geq 1.$$

Use o princípio de indução finita e mostre que $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, seguindo os passos indicados nos itens a seguir:

- (a) escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada; (valor: 1,0 ponto)
- (b) mostre que $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$; (valor: 1,0 ponto)
- (c) prove que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$; (valor: 3,0 pontos)
- (d) mostre que $0 < s < \sqrt{2}$; (valor: 2,0 pontos)
- (e) suponha que $a_n < \sqrt{2}$ e prove que $a_{n+1} < 2$; (valor: 1,0 ponto)
- (f) conclua a prova por indução. (valor: 2,0 pontos)

11.1.3 Questão 3

O Teorema do Valor Intermediário é uma proposição muito importante da análise matemática, com inúmeras aplicações teóricas e práticas. Uma demonstração analítica desse teorema foi feita pelo matemático Bernard Bolzano [1781-1848]. Nesse contexto, faça o que se pede nos itens a seguir:

- (a) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário para funções reais de uma variável real; (valor: 2,0 pontos)
- (b) Resolva a seguinte situação-problema.
O vencedor da corrida de São Silvestre-2010 foi o brasileiro Mailson Gomes dos Santos, que fez o percurso de 15 km em 44 min e 7 seg. Prove que, em pelo menos dois momentos distintos da corrida, a velocidade instantânea de Mailson era de 5 metros por segundo. (valor: 4,0 pontos)
- (c) Descreva uma situação real que pode ser modelada por meio de uma função contínua f , definida em um intervalo $[a, b]$, relacionando duas grandezas x e y , tal que existe $k \in (a, b)$ com $f(x) \neq f(k)$, para todo $x \in (a, b)$, $x \neq k$. Justifique sua resposta. (valor: 4,0 pontos)

11.2 Soluções

11.2.1 Questão 1

- (a) Considerando que as pessoas escolhem de forma aleatória o andar que desejam ir, cada uma das pessoas têm 8 possibilidades, totalizando, pelo *princípio multiplicativo* 8^5 situações diferentes, mas as que todas as pessoas saem em andares diferentes ocorrem do seguinte modo: a primeira tem 8 escolhas, a segunda apenas 7, pois não pode sair no mesmo andar da primeira, a terceira 6, a quarta 5 e a quinta 4, ou seja são 8.7.6.5.4 casos favoráveis. Portanto a probabilidade deles ocorrerem é

$$P_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^4} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8^3} = \frac{105}{512}$$

- (b) A probabilidade de mais de uma pessoa descenderem num mesmo andar é a probabilidade complementar do item anterior, ou seja:

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{105}{512} = \frac{407}{512}$$

11.2.2 Questão 2

- (a) Hipótese do *Princípio da Indução*: $a_1 = a$; $a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2}$, para $n \geq 1$ e $0 < a < \sqrt{2}$ e a tese é: $a_n < \sqrt{2}, \forall n \geq 1$
- (b) Se $s = \frac{4a}{2+a^2}$ e pela hipótese de indução $a > 0$, então $4a > 0$ e $2+a^2 > 0$, portanto $s > 0$
- (c) Como $s = \frac{4a}{2+a^2}$ temos que:

$$s^2 = \frac{16a^2}{(2+a^2)^2} = \frac{16a^2}{4+4a^2+a^4} = \frac{16a^2}{(a^2-2)^2+8a^2} < \frac{16a^2}{8a^2} = 2$$

portanto provamos que $s^2 < 2$.

- (d) Temos que s é sempre positiva e $0 < s^2 < 2$, portanto se extrairmos a raiz quadrada obtemos: $0 < s < \sqrt{2}$
- (e) Como temos $a_n < \sqrt{2}$ e $s = \frac{4a}{2+a^2} < \sqrt{2}, \forall a, a < \sqrt{2}$, logo: $a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2} < \sqrt{2} < 2$
- (f) Para $n = 1$ temos: $a_2 = s < \sqrt{2}$, é válida a hipótese. E como foi mostrado no item anterior: $a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2} < \sqrt{2}$, assim concluímos a indução.

11.2.3 Questão 3

- (a) Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, então o *Teorema do Valor Intermediário* diz que para todo $f(a) \leq k \leq f(b)$ existe um número $c \in (a, b)$ tal que: $f(c) = k$.
- (b) Considerando que a velocidade do corredor brasileiro possa ser expressa por uma função contínua, $15(km) = 15000(m)$ e como ele percorreu este percurso em $44(min) = 2640(s)$ e $7(seg)$, ou seja $2647(seg)$, sua velocidade média foi $v_m = \frac{15000}{2647} \approx 5,6(m/s)$. Como os corredores iniciam a corrida parados, temos que $v_0 = 0$ e considerando que ele tenha parado no instante que terminou a corrida, temos $v_{2647} = 0$. Pelo teorema enunciado existe

um único momento t em que $v_t = 5,6(m/s)$, mas como $5 < 5,6$ e $v_0 = v_{2647} = 0$, então existem pelo menos dois instantes a e b , por exemplo, em que a velocidade foi $5(m/s)$.

- (c) Qualquer situação problema que pode ser modelada por uma função injetora.

Capítulo 12

ENADE 2014

12.1 Questões

12.1.1 Questão 1

Os principais efeitos visuais da computação gráfica vistos em uma tela são resultados de aplicações de transformações lineares. Translação, rotação, redimensionamento e alteração de cores são apenas alguns exemplos.

Considere que uma tela é cortada por dois eixos, x e y , ortogonais entre si, formando um sistema de coordenadas com origem no centro da tela. Suponha que, nessa tela plana, existe a imagem de uma elipse com eixo maior de tamanho 4, paralelo ao eixo x , e cujos focos têm coordenadas $(-1, 2)$ e $(1, 2)$. Considere T um operador linear definido em \mathbb{R}^2 .

De acordo com as informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

- (a) Mostre que o ponto $(0, 2 + \sqrt{3})$ pertence à elipse. (valor: 3,0 pontos)
- (b) Suponha que, em cada ponto da tela, seja aplicado o operador linear $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Quais serão as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de T ? (valor: 3,0 pontos)
- (c) Calcule os autovalores do operador linear $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. (valor: 4,0 pontos)

12.1.2 Questão 2

O número de ouro é conhecido há mais de dois mil anos, sendo encontrado nas artes, nas pirâmides do Egito e na natureza. Para construir o número de ouro

apenas com o auxílio de uma régua não graduada e de um compasso, utiliza-se o seguinte procedimento: dado um segmento AB qualquer, marca-se o seu ponto médio; constrói-se o segmento BC perpendicular a AB e com a metade do comprimento de AB ; marca-se o ponto E sobre a hipotenusa do triângulo ABC , tal que \overline{EC} e \overline{BC} sejam iguais; e determina-se o ponto D no segmento AB tal que \overline{AD} e \overline{AE} sejam iguais. Com esse procedimento, o ponto D divide o segmento AB na razão áurea.

A partir da construção geométrica do número de ouro e considerando x como o comprimento do segmento AB , faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

- (a) Determine o comprimento do segmento AC em função de x . (valor: 4,0 pontos)
- (b) Determine o comprimento do segmento AD em função de x . (valor: 4,0 pontos)
- (c) Determine o número de ouro dado pelo quociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. (valor: 2,0 pontos)

12.1.3 Questão 3

A Torre de Hanói foi inventada por Edouard Lucas em 1883. Há uma história sobre a Torre, imaginada pelo próprio Lucas:

No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que contém três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus, então, chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, segundo certas regras. Os sacerdotes, então, obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Quando eles terminassem, a torre de Brahma iria ruir e o mundo acabaria.



Esse é um dos quebra-cabeças matemáticos mais populares, que consiste de n discos com um furo em seu centro e de tamanhos diferentes e de uma base com três pinos na posição vertical onde são colocados os discos. O jogo mais simples é constituído de três pinos mas a quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que o número de discos aumenta. Os discos formam

uma torre onde todos são colocados em um dos pinos em ordem decrescente de tamanho. O objetivo do quebra-cabeça é transferir toda a torre de discos para um dos outros pinos, que estão inicialmente vazios, de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor, como mostra a figura acima.

Considerando uma torre de Hanói de 3 pinos, faça o que se pede nos itens a seguir.

- (a) Ao planejar uma aula de matemática utilizando-se a Torre de Hanói, quais seriam os objetivos a serem alcançados de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais e o que se espera com o uso de jogos no processo de ensino-aprendizagem? (valor: 3,0 pontos)
- (b) Cite três conceitos matemáticos de Educação Básica que podem ser explorados em sala de aula utilizando-se a Torre de Hanói? (valor: 3,0 pontos)
- (c) Obtenha uma fórmula para o número mínimo de movimentos necessários para resolver a Torre de Hanói com discos. Justifique a sua resposta. (valor: 4,0 pontos)

12.1.4 Questão 4

Atualmente, a maioria dos editores de texto oferece o recurso de correção ortográfica. Esse recurso consiste em destacar, entre as palavras digitadas, aquelas com possíveis erros de grafia. Por exemplo, quando se digita a palavra “caza”, o recurso de correção destaca essa palavra, pois a palavra “caza” não existe na língua portuguesa. Também é comum o recurso de correção ortográfica sugerir uma outra palavra para substituir a palavra incorreta.

A sugestão de quais palavras podem substituir a palavra incorreta é feita com uma medida da distância entre a palavra incorreta e as palavras que constam no dicionário do editor de texto. Existem diversas maneiras de medir a distância entre duas palavras. Uma delas é a denominada *Distância de Hamming*, na qual a medida da distância entre duas palavras x e y , em suas respectivas posições. Mais formalmente, se $x = x_1x_2x_3 \dots x_n$ e $y = y_1y_2y_3 \dots y_n$ são palavras em que x_i e y_i são letras do alfabeto, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então $d(x, y) = \#(\{i : x_i \neq y_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, n\})$, em que $\#(\{3\}) = 1$, já que elas diferem apenas na terceira letra.

A partir dessas informações, faça o que se pede nos itens a seguir.

- (a) Mostre que a Distância de Hamming é uma métrica no conjunto das palavras com letras. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Mostre que o conjunto das palavras com letras, munido da Distância de Hamming, é um espaço métrico discreto. (valor: 5,0 pontos)

12.1.5 Questão 5

Uma equação diofantina linear nas incógnitas x e y é uma equação da forma $ax + by = c$, em que a , b e c são inteiros, e as únicas soluções (x_0, y_0) que interessam são aquelas em que $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

Nesse contexto, considere que os ingressos de um cinema custam R\$ 9,00 para estudantes e R\$ 15,00 para o público geral, e que, em certo dia, durante determinado período, a arrecadação nas bilheterias desse cinema foi R\$ 246,00.

A partir das informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir.

- (a) Obtenha uma equação diofantina linear que modele a situação acima, indicando o significado das incógnitas. (valor: 3,0 pontos)
- (b) Quantas e quais são as soluções do problema descrito no item (a)? (valor: 7,0 pontos)

12.2 Soluções