UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

Resolução das Questões Discursivas dos ENADEs

Brian Mayer

Matemática - 8º Semestre

18 de fevereiro de 2016

Resumo

Neste documento serão resolvidas as questões discursivas das provas de matemática a niveis de licenciatura e bacharelado do ENADE (Exame NAcional de Desempenho dos Estudantes) aplicadas pelo SINAES (SIstema Nacional de Avaliação da Educação Superior) dos anos de 1998 até 2014, a última prova aplicada até o presente, para apresentação semanal ao Prof. Dr. Ariovaldo José de Almeida como requisito para obtenção de nota na disciplina de Seminários de Matemática II e também para o interesse geral no desenvolvimento e treinamento matemático empregado neste trabalho. Os textos das questões não foram modificados, apenas rescritos e reformatados devido ao *software* utilizado neste documento, i.e. $\LaTeX\,2_\varepsilon$. As soluções contidas neste trabalho serão apresentadas na lousa usando este documento apenas como um guia, e são resultados da mistura entre a criatividade do autor e de uma pesquisa de *internet*.

Sumário

Parte I

Considerações Iniciais

Capítulo 1

Introdução

Começando com o ENADE de 1998 que possui cinco (5) questões discursivas, aborda os temas de cálculo de áreas, soluções de equações diferenciais, demonstrações a respeito de convergência de sequências, integrais complexas e operações com anéis e corpos. No ENADE de 1999 temos cinco (5) questões, a primeira fazendo uma aplicação de equações diferenciais no crescimento de uma população, e pedindo uma solução analítica para a mesma, outra questão na área de cálculo pede o valor de uma integral complexa em um curva muito conhecida pela matemática, as demais perguntas são de álgebra e análise, onde os problemas de álgebra se concentraram no tópico de polinmios, na análise são abordados sequências, funções e campos vetoriais. O ENADE do ano 2000 possui quatro (4) questões centradas nos tópicos mais comumente estudados: integrais complexas, a equação de Laplace, convergência de séries e matrizes. Muito centralizado no quesito mecânico na solução dos problemas. O do ano 2001 trás cinco (5) questões, a maioria na área de álgebra, com tábuas de elementos de corpos, pergunta sobre algumas definições de espaços métricos e sobre funções, possui uma questão de aplicação de cálculo diferencial -na área de taxas de variação e volume- e uma questão sobre a exponencial complexa. No ENADE do ano de 2002 encontram-se seis (6) questões discursivas, abrangendo a maioria dos tópicos principais da Matemática, tais como, cálculo diferencial e integral, pedindo operações com derivadas, série de potências -com o teste da razão- e a solução de uma integral complexa, álgebra, aritmética, e geometria analítica e vetores. O ENADE do ano de 2003 possui também seis (6) questões, onde se deve escolher cinco (5) e resolvê-las, mas aqui estarão todas resolvidas, a primeira questão é de cálculo, onde se pede a resolução de uma integral dupla, as segunda, terceira e quarta questões, na área de álgebra, pedem construções de anéis, operações com matrizes e polinmios, a quinta questão novamente sobre cálculo, desta vez, aborda campos vetoriais e necessita de manipulações à respeito dos divergente, convergente e laplaciano, encerrando com conjecturas sobre sequências na sexta questão. No provão do ENADE 2005 a única questão aborda o tema de Cálculo, onde se deve verificar as condições de *Cauchy-Riemann* e realizar a solução de uma integral complexa. O ENADE 2008 apresenta apenas uma (1) questão sobre o tema de Análise Matemática, no que se diz respeito à diferenciação e propriedades de certas famílias de funções, tais como injetora e limitada. O ENADE 2011 contém três (3) questões: a primeira questão aborda o tema de Estatística, i.e. no cálculo de probabilidades, a segunda sequência, utilizando indução finita para demonstrar uma conjectura e a terceira questão abrange a área de Análise Matemática, onde primeiramente apresenta o *teorema do valor intermediário* e *a posteriori* o aplica nesse campo para resolver uma situação-problema na Corrida de São Silvestre de 2010. As três (3) questões do ENADE de 2014 abordam os temas de geometria analítica, matemática aplicada e equações Diofantinas, a primeira questão é sobre os efeitos visuais de uma transformação da computação gráfica, a segunda questão aborda o sistema de correção de palavras de editores de texto com álgebra, e a terceira pede para aplicar equações diofantinas a um problema do cotidiano.

Num panorama geral percebemos o alto nível de matemática, não só na parte discursiva, as questões necessitam de muita análise e conhecimento sobre os principais teoremas dos assuntos abordados, tais como o teorema de *Green*, $\int_{\partial R} Mdx + Ndy = \int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$ para o cálculo de áreas em algumas questões e o teorema de de *Cauchy* para a resolução das integrais complexas do tipo $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ -presentes em todos os provões-, o teorema de *Cayley-Hamilton* para os processos envolvendo diagonalização e autovalores e autovetores, entre outras competências. Em todos os anos as questões abrangeram a maior parte da ementa de um curso de bacharelado, cumprindo com o objetivo da prova.

Capítulo 2

Comentários Gerais

Parte II

Provas

Capítulo 3

ENADE 1998

3.1 Questões

3.1.1 Questão 1

Seja R uma região do plano que satisfaz as condições do Teorema de Green.

(a) Mostre que a área de R é dada por $\frac{1}{2}\int_{\partial R} xdy - ydx$

(b) Use o item (a) para calcular a área da elipse de equações $\{ x = a\cos(\theta)$ $y = b\sin(\theta)$ onde $a > 0$ e $b > 0$ são fixos, e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (valor: 20,0 pontos)

Dados/Informações adicionais: Teorema de Green: Seja R uma região do plano com interior não vazio e cuja fronteira ∂R é formada por um número finito de curvas fechadas, simples, disjuntas e de classe C^1 por partes. Sejam $L(x, y)$ e $M(x, y)$ funções de classe C^1 em R. Então $\int\int_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial R} Ldx + Mdy$

3.1.2 Questão 2

Resolva a equação diferencial $y''' - 4y'' + 4y' = e^x$, onde $y' = \frac{dy}{dx}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$; $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ (valor: 20,0 pontos)

3.1.3 Questão 3

Prove que se uma seqência de funções $f_n : D \to \mathbb{R}, D \subset R$ converge uniformemente para $f : D \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in D$, então f é contínua no ponto a.

Dados/Informações adicionais: Uma seqência de funções $f_n : D \to \mathbb{R}, D \subset R$ converge uniformemente para $f : D \to \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$. (valor: 20,0 pontos)

3.1.4 Questão 4

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ a curva $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$ nos seguintes casos:

(a) $z_0 = \dfrac{1}{2}(1 + i)$

(b) $z_0 = 2(1 + i)$. (valor: 20,0 pontos)

3.1.5 Questão 5

Sejam α um número algébrico de grau n e $\beta = b_0 + b_1\alpha + ... + b_{n-1}\alpha^{n-1}$ um elemento não nulo no corpo $\mathbb{Q}(\alpha)$, i.e., os coeficientes b_i são racionais, $0 \leq i \leq n - 1$, e, pelo menos, um deles é diferente de zero.

(a) Prove que $\dfrac{1}{\beta}$ é um polinmio em α.

(a) Racionalize a fração $\dfrac{1}{2 + \sqrt[3]{2}}$. (valor: 20,0 pontos)

3.2 Soluções

3.2.1 Questão 1

(a) A integral dada no enunciado nos fornece $L(x, y) = -y$ e $M(x, y) = x$. Calculando $\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y}$ obtemos: 2. Como foi dito que a função satisfaz as condições do Teorema de Green, então a integral $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial R} xdy - ydx = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\int_R 2dxdy = \int\int_R dxdy$, que corresponde à área da região R.

(b) Temos então $\frac{1}{2}\int_{\partial R} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial R} a\cos(\theta)dy - b\sin(\theta)dx$. Mas $dy = b\cos(\theta)d\theta$ e $dx = -a\sin(\theta)d\theta$, então a integral se torna:

$$\frac{1}{2}\int_{\partial R} a\cos(\theta)b\cos(\theta)d\theta - b\sin(\theta)(-a\sin(\theta))d\theta =$$
$$= \frac{ab}{2}\int_{\partial R}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)d\theta = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi$$

3.2.2 Questão 2

Fazendo a substituição: $u(x) = y'(x)$ a equação diferencial assume a forma $u'' - 4u' + 4u = e^x$. A solução da equação característica é: $\lambda = 2$, portanto a solução da equação homogênea associada é $u(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$.

Pela equação não homogênea, uma aparente solução é $u(x) = e^x$. De fato: $e^x - 4e^x + 4e^x = e^x$, portanto pelo princípio da sobreposição uma solução da equação diferencial é $u(x) = c_0e^x + c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. Mas $u = y'$, então

$$y(x) = \int u(x)dx = \int c_0e^x + c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}dx$$

Portanto a solução da eq. diferencial é $y(x) = C_0e^x + C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3$.

3.2.3 Questão 3

Como a sequência de funções converge para f, então dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Mas cada f_n é contínua no ponto a, ou seja, para $\delta > 0$, $|x - a| < \delta$ implica que $|f_n(x) - f_n(a)| < \epsilon$. Como $f_n(x)$ converge para $f(x)$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, portanto f é contínua em a.

3.2.4 Questão 4

A curva em questão é a circunferência de raio 1, então:

(a) Como $z_0 = \frac{1}{2}(1+i)$ está dentro da curva γ, pois $|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, podemos usar o teorema de Cauchy para as integrais complexas, assim:

$$\int_\gamma \frac{1}{z - \frac{1}{2}(1+i)}dz = 2i\pi$$

(b) Como $z_0 = 2(1+i)$ está fora da curva γ, pois $|z_0| = 2\sqrt{2} > 1$, o valor da integral é zero.

3.2.5 Questão 5

Capítulo 4

ENADE 1999

4.1 Questões

4.1.1 Questão 1

Um modelo clássico para o crescimento de uma população de determinada espécie está descrito a seguir. Indicando por $y = y(t)$ o número de indivíduos desta espécie, o modelo admite que a taxa de crescimento relativo da população seja proporcional à diferença $M - y(t)$, onde $M > 0$ é uma constante. Isto conduz à equação diferencial $\frac{y'}{y} = k(M - y)$, onde $k > 0$ é uma constante que depende da espécie. Com base no exposto:

(a) resolva a equação diferencial acima; (valor: 10,0 pontos)

(b) considere o modelo apresentado para o caso particular em que $M = 1000$, $k = 1$ e $y(0) = 250$ e explique qualitativamente como se dá o crescimento da população correspondente, indicando os valores de t para os quais $y(t)$ é crescente, e o valor limite de $y(t)$ quando $t \to \infty$. (valor: 10,0 pontos)

4.1.2 Questão 2

Seja $\mathbb{Z}_3 = \bar{0}, \bar{1}, -\bar{1}$ o corpo de inteiros módulo 3 e $\mathbb{Z}_3[x]$ o anel de polinmios em x com coeficientes em $\mathbb{Z}_3$.

(a) Mostre que $x^2 + x - 1$ é irredutível em $\mathbb{Z}_3[x]$. (valor: 10,0 pontos)

(b) Mostre que o anel quociente $\mathbb{Z}_3[x]/x^2 + x - 1$ é um corpo e que tem 9 elementos. (valor: 10,0 pontos)

4.1.3 Questão 3

Considere o subconjunto Γ do $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$.

(a) Para que valores de x existem v_x , vizinhança de x, e função diferenciável $y = y(x)$ definida em v_x, satisfazendo $2(x^2 + y(x)^2)^2 = 25(x^2 - y(x)^2)$? Justifique. (valor: 10,0 pontos)

(b) Obtenha a reta tangente a Γ no ponto $(3, 1)$. (valor: 10,0 pontos)

4.1.4 Questão 4

Prove que se uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então a imagem inversa $f^{-1}(V)$ de todo subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. (valor: 20,0 pontos)

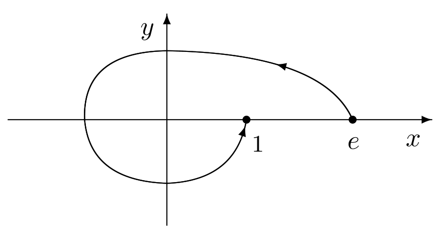
Definição: Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $d > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

4.1.5 Questão 5

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo conservativo, $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função potencial de $\vec{F}$ e $\gamma : [a, b] \to D$ uma curva regular de classe C^1.

(a) Mostre que o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre γ é dado por $\phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$. (valor: 10,0 pontos)

(b) Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right)$ sobre a curva esboçada abaixo. (valor: 10,0 pontos)



Definições: Um campo vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se conservativo (ou gradiente) se existe $\phi : D \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$ em todo ponto de D. Uma tal ϕ chama-se função potencial. O trabalho realizado por um campo de vetores sobre uma curva $\gamma : [a, b] \to D$ é dado por $\displaystyle\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt$.

4.2 Soluções

4.2.1 Questão 1

(a) Dividindo ambos lados por $(M-y)$ e integrando em relação a t temos: $\displaystyle\int \frac{dy}{y(M-y)} = \int kdt$. A integral da direita é simplesmente $kt+c$. Mas na da esquerda precisamos fazer decomposição em frações parciais. Então:

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{M-y} = \frac{(B-A)y + AM}{y(M-y)} \Longrightarrow \begin{cases} A & = \frac{1}{M}; \\ B-A & = 0 \end{cases}$$

Portanto nossa solução para a decomposição é: $A = \frac{1}{M} = B$. Então nossa integral é:

$$\frac{1}{M}\int \frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}dy = \frac{1}{M}\ln\left(\frac{y}{y-M}\right)$$

Assim nos reduzimos a: $\frac{1}{M}\ln\left(\frac{y}{y-M}\right) = kt + c \Longrightarrow \frac{y}{y-M} = e^{Mkt+Mc}$, ou seja: $y = (y-M)(e^c e^{kt})^M = y(e^c e^{kt})^M - M(e^c e^{kt})^M$, então: $y((e^c e^{kt})^M - 1) = M(e^c e^{kt})^M$, dividindo por $(e^c e^{kt})^M - 1$ e chamando $e^{cM} = C$ e $kM = K$, finalmente temos:

$$y = \frac{MCe^{Kt}}{Ce^{Kt} - 1}$$

multiplicando esta última equação por e^{-Kt} para cancelarmos duas exponenciais, a equação assume a forma:

$$y = \frac{MC}{C - e^{-Kt}}$$

(b) Sendo $M = 1000$ e $k = 1$, nossa constante é $K = 1000$, e a equação se torna

$$y = \frac{1000C}{C - e^{-1000t}}$$

o enunciado nos deu $y(0) = 250$, então $250 = \frac{1000C}{C-1} \Longrightarrow C = \frac{-5}{13}$. Então nossa equação se torna:

$$y(t) = \frac{1000}{13e^{-1000t}/5 + 1}$$

A função é sempre crescente para valores positivos de t, e quando $t \to \infty$, $y \to 1000 = M$.

4.2.2 Questão 2

(a) O polinmio x^2+x-1 é irredutível pois $\bar{1}^2+\bar{1}-1=\bar{1}\neq\bar{0}$, $\bar{0}^2+\bar{0}-1=\bar{2}\neq\bar{0}$ e $\bar{2}^2+\bar{2}-1=\bar{2}\neq\bar{0}$, logo não possui raízes, então é irredutível.

4.2.3 Questão 3

4.2.4 Questão 4

4.2.5 Questão 5

Capítulo 5

ENADE 2000

5.1 Questões

5.1.1 Questão 1

Seja γ um caminho no plano complexo, fechado, simples, suave (isto é, continuamente derivável) e que não passa por i nem por $-i$. Quais são os possíveis valores da integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$? (valor: 20,0 pontos)

5.1.2 Questão 2

Uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com derivadas contínuas até a 2ª ordem, é dita harmnica em $\mathbb{R}^2$ se satisfaz a Equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^2$$

Mostre que se u e u^2 são harmnicas em $\mathbb{R}^2$, então u é uma função constante. (valor: 20,0 pontos)

5.1.3 Questão 3

Seja $\{A_n\}, n \in \mathbb{N}$, uma seqência de números reais positivos e considere a série de funções de uma variável real t dada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(A_n)^t$. Suponha que tal série converge se $t = t_0 \in \mathbb{R}$. Prove que ela converge uniformemente no intervalo $[t_0, \infty[$. (valor: 20,0 pontos)

5.1.4 Questão 4

Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e n um inteiro positivo. Calcule A^n.

Sugestão: Use a Forma Cannica de Jordan ou o Teorema de Cayley-Hamilton. (valor: 20,0 pontos)

5.2 Soluções

5.2.1 Questão 1

5.2.2 Questão 2

Como u e u^2 são funções harmnicas, então:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) = 0$$

como $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 2u\frac{\partial u}{\partial x}$, derivando novamente: $\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e o mesmo acontece com a variável y, desse modo nossa equação de Laplace toma a forma:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

pois u é harmônica. Portanto $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. Resolvendo estas duas equações, temos: (i) $u(x,y) = c + \phi(y)$ e (ii) $u(x,y) = k + \psi(x)$, derivando a primeira em relação a y e a segunda em relação a x, obtemos: $\phi'(y) = 0$ e $\psi'(x) = 0$ respectivamente, o que indica que estas funções são constantes. Assim necessariamente $\phi(y) = k$ e $\psi(x) = c$ e temos a unica solução: $u(x,y) = c + k = C$

5.2.3 Questão 3

5.2.4 Questão 4

Capítulo 6

ENADE 2001

6.1 Questões

6.1.1 Questão 1

Sabendo-se que para todo número real θ tem-se que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, deduza as fórmulas

(a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)$ (valor: 10,0 pontos)

(b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ (valor: 10,0 pontos)

6.1.2 Questão 2

Uma piscina, vazia no instante $t = 0$, é abastecida por uma bomba dágua cuja vazão no instante t (horas) é $V(t)$ (metros cúbicos por hora).

(a) Determine o volume da piscina sabendo que, se $V(t) = 500$, a piscina fica cheia em 5 horas. (valor: 5,0 pontos)

(b) Determine em quanto tempo a piscina ficaria cheia se $V(t) = 50t$. (valor: 15,0 pontos)

6.1.3 Questão 3

Sejam A uma matriz real 2×2 com autovalores $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e $\mathbf{v}$ um vetor de $\mathbb{R}^2$.

(a) A é diagonalizável? Justifique sua resposta. (valor: 5,0 pontos)

(b) Considere a seqência $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}, ..., A^n\mathbf{v}, ...$ Prove que essa seqência é convergente. (valor: 15,0 pontos)

6.1.4 Questão 4

Sejam X e Y espaços métricos, $A \subset X$ e $f : X \to Y$ uma função.

(a) Qual é o significado de A é aberto? (valor: 5,0 pontos)

(b) Qual é o significado de A é fechado? (valor: 5,0 pontos)

(c) Qual é o significado de f é contínua em X? (valor: 5,0 pontos)

(d) Se $a \in Y$ e f é contínua em X, mostre que o conjunto solução da equação $f(x) = a$ é fechado. (valor: 5,0 pontos)

6.1.5 Questão 5

O corpo $\mathbb{Z}_2$ dos inteiros módulo 2 é formado por dois elementos, 0 e 1, com as operações usuais de adição e multiplicação definidas pelas tábuas abaixo.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Considere em $\mathbb{Z}_2[x]$ isto é, no anel dos polinmios na indeterminada x cujos coeficientes pertencem a $\mathbb{Z}_2$, o polinmio de grau 2, $q(x) = x^2 + x + 1$.

(a) Mostre que $q(x)$ não tem raízes em $\mathbb{Z}_2$. (valor: 5,0 pontos)

(b) $q(x)$ sendo irredutível, sabe-se, pelo Teorema de Kronecker, que existem um corpo E, que é uma extensão de $\mathbb{Z}_2$ (ou seja, tal que $\mathbb{Z}_2$ é um subcorpo de E) e um elemento $\alpha \in E$ tal que $\alpha \notin \mathbb{Z}_2$ e $q(\alpha) = 0$. Determine o número mínimo de elementos que E pode ter e construa as tábuas de adição e de multiplicação em E. (valor: 15,0 pontos)

6.2 Soluções

6.2.1 Questão 1

(a)

6.2.2 Questão 2

(a) $V = 500 \times 5 = 2500$ (metros cúbicos)

(b) $2500 = \displaystyle\int_0^{t_1} 50t dt \longrightarrow 2500 = \frac{50t_1^2}{2}$, ou seja: $t_1 = 10$ (horas).

6.2.3 Questão 3

(a) $q(0) = 1 \neq 0$ e $q(1) = 3 = 1 \neq 0$ portanto é irredutível.

(b) o Conjunto E que se diz é $\mathbb{Z}_2$ extendido com as raízes de $q(x)$, ou seja $\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

6.2.4 Questão 4

6.2.5 Questão 5

Capítulo 7

ENADE 2002

7.1 Questões

7.1.1 Questão 1

Sejam g e h funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $g(x) = h(x)$, $h(x) = g(x)$, $g(0) = 0$ e $h(0) = 1$.

(a) Calcule a derivada de $h^2(x) - g^2(x)$. (valor: 10,0 pontos)

(a) Mostre que $h^2(x) - g^2(x) = 1$, para todo x em $\mathbb{R}$. (valor: 10,0 pontos)

7.1.2 Questão 2

Em um espaço métrico M, com distância d, a bola aberta de raio $r > 0$ e centro $p \in M$ é o conjunto $B_r(p) = \{x \in M | d(x, p) < r\}$. Por definição, um conjunto $A \subset M$ é aberto se para qualquer ponto $p \in A$ existir $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subset A$.

(a) Mostre que a união de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. (valor: 5,0 pontos)

(b) Mostre que a interseção de uma família finita não vazia de conjuntos abertos é um conjunto aberto. (valor: 10,0 pontos)

(c) Em $\mathbb{R}$, com a métrica usual, o conjunto $\{0\}$ não é aberto. Dê exemplo de uma família infinita de conjuntos abertos de R cuja interseção seja $\{0\}$. (valor: 5,0 pontos)

7.1.3 Questão 3

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

(a) Defina autovalor de A. (valor: 5,0 pontos)

(b) Se λ é um autovalor de A, mostre que 2λ é um autovalor de $2A$. (valor: 5,0 pontos)

(c) Se λ é um autovalor de A, mostre que λ^2 é um autovalor de A^2. (valor: 10,0 pontos)

7.1.4 Questão 4

O complexo w é tal que a equação $z^2 - wz + (1-i) = 0$ admite $1+i$ como raiz.

(a) Determine w. (valor: 5,0 pontos)

(b) Determine a outra raiz da equação. (valor: 5,0 pontos)

(c) Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - wz + (1-i)}$, sendo γ a circunferência descrita parametricamente por $\gamma(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + i(\frac{1}{2}\sin(t) - 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (valor: 10,0 pontos)

7.1.5 Questão 5

A série de potências a seguir define, no seu intervalo de convergência, uma função g, $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n} + ...$

(a) Determine o raio de convergência r da série. Justifique. (valor: 5,0 pontos)

(b) Expresse $g'(x)$ como soma de uma série de potências, para $|x| < r$. (valor: 5,0 pontos)

(c) Expresse $g'(x)$, para $|x| < r$, em termos de funções elementares (polinomiais, trigonométricas, logarítmicas, exponenciais). (valor: 5,0 pontos)

(d) Expresse $g(x)$, para $|x| < r$, em termos de funções elementares. (valor: 5,0 pontos)

7.1.6 Questão 6

Uma fonte de luz localizada no ponto $L = (0, -1, 0)$ ilumina a superfície dada, parametricamente, por $P(u, v) = (u + v, u^2, v)$.

(a) Calcule o vetor normal à superfície, $\vec{N}(u, v)$, de forma que para $u = v = 0$ esse vetor seja $(0, -1, 0)$. (valor: 5,0 pontos)

(b) Trabalhando com os vetores $\vec{N}$ e $L - P$, dê uma condição sobre u e v a fim de que o ponto $P(u, v)$ seja iluminado pela luz em L. (valor: 15,0 pontos)

7.2 Soluções

7.2.1 Questão 1

(a) $(h^2(x) - g^2(x))' = 2hh' - 2gg' = 2hg - 2gh = 0$

(b) Como $(h^2(x) - g^2(x))' = 0$, temos que $h^2(x) - g^2(x) = k$. Mas $h(0) = 1$ e $g(0) = 0$ então: $1^2 - 0^2 = 1 \Longrightarrow k = 1$

7.2.2 Questão 2

7.2.3 Questão 3

7.2.4 Questão 4

(a) $(1 + i)^2 - w(1 + i) + (1 - i) = 0 \Longrightarrow w = 1$

(b) Como o enunciado disse que $1+i$ é raiz, então podemos rescrever a equação dada. Assim: $z^2 - z + (1 - i) = 0$, por inspeção percebemos que a outra raiz é $-i$, pois $(-i)^2 - (-i) + (1 - i) = -1 + i + (1 - i) = 0$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - wz + (1 - i)} = \int_\gamma \frac{dz}{(z - 1 + i)(z + i)}$, decompondo com frações parciais temos:

$$\frac{1}{(z - 1 + i)(z + i)} = \frac{a + bi}{(z - 1 + i)} + \frac{c + di}{(z + i)}$$

Onde obtemos: $\dfrac{(a + bi + c + di)z + (-b - c - d) + (c - b + a - d)i}{(z - 1 + i)(z + i)}$.

A qual gera o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + bi + c + di & = 0 \\ b + c + d & = -1 \\ c - b + a - d & = 0 \end{cases}$$

A primeira equação nos dá que $a = -c$ e $b = -d$, substituindo na segunda equação temos: $c = -1$, logo, $a = 1$. Portanto as constantes são: $a = 1$, $c = -1$, nosso sistema agora é apenas a equação $b + d = 0$ Portanto podemos fazer $b = d = 0$. Assim as frações são $\dfrac{1}{z-1+i} - \dfrac{1}{z+i}$, e a integral original torna-se $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-(1-i)} - \frac{1}{z+i}dz$. A circunferência γ pode ser rescrita como: $\gamma(t) = \frac{1}{2}[\cos(t) + i\sin(t)] - i$, desse modo percebemos que está centrada no ponto $(0, -i)$ e possui raio $1/2$. Como a primeira raiz está fora da curva, o valor da integral é zero. Então:

$$\int_\gamma \frac{1}{z-(1-i)} - \frac{1}{z+i}dz = -\int_\gamma \frac{1}{z+i}dz = -2i\pi$$

7.2.5 Questão 5

(a) Pelo teste da razão temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)} \frac{2n}{x^{2n}} \right|.$$

Assim $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}x^2\right|$ onde percebemos que $|x^2| < 1$, ou simplesmente $|x| < 1$. Então o raio de convergencia r da série é: $r < 1$.

(b) Derivando: $g'(x) = -x + x^3 - x^5 + ... + (-1)^n x^{2n-1} + ...$

(c) Considere a série de *Maclaurin* da função $y = \ln(x+1)$, i. e. :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

se utilizarmos x^2 no lugar de x, teríamos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) &= \frac{2x}{x^2+1} \\
\frac{d^2}{dx^2}\ln(x^2+1) &= \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

7.2.6 Questão 6

Capítulo 8

ENADE 2003

8.1 Questões

8.1.1 Questão 1

Seja $I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dydx$.

(a) Esboce graficamente a região de integração. (valor: 5,0 pontos)

(b) Inverta a ordem de integração. (valor: 10,0 pontos)

(c) Calcule o valor de I. (valor: 5,0 pontos)

8.1.2 Questão 2

Seja $\mathbb{Z}_{18}$ o anel dos inteiros módulo 18 e seja G o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_{18}$.

(a) Escreva todos os elementos do grupo G. (valor: 10,0 pontos)

(b) Mostre que G é cíclico, calculando explicitamente um gerador, ou seja, mostre que existe $g \in G$ tal que todos os elementos de G são potências de g. (valor: 10,0 pontos)

8.1.3 Questão 3

(a) Dada a matriz simétrica $A = \begin{matrix} 1 & 6 \\ 6 & 4 \end{matrix}$, escreva, em forma de polinmio $f(x,y)$, a forma quadrática definida por A, isto é, calcule os coeficientes numéricos de $f(x,y) = v^t A v$, onde $v = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ e v^t significa v transposto. (valor: 5,0 pontos)

(b) Encontre uma matriz invertível P tal que $P^t AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Para isto, basta tomar como P uma matriz que tenha por colunas um par de autovetores ortonormais de A. (valor: 10,0 pontos)

(c) Na forma quadrática $f(x,y) = v^t Av$, faça uma transformação de coordenadas $v = P\tilde{v}$, sendo $\tilde{v} = \begin{matrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{matrix}$, obtendo a forma quadrática diagonalizada, isto é, sem o termo em $\tilde{x}\tilde{y}$. (valor: 5,0 pontos)

8.1.4 Questão 4

Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, com $n \geq 1$, um polinmio de coeficientes reais. Suponha que $p'(x)$ divide $p(x)$.

(a) Prove que o quociente $q(x) = \dfrac{p(x)}{p'(x)}$ é da forma $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0), x_0 \in \mathbb{R}$. (valor: 5,0 pontos)

(b) Encontre todos os polinmios $p(x)$ que satisfazem essa condição, resolvendo a equação diferencial $q(x)p'(x) - p(x) = 0$. (valor: 15,0 pontos)

8.1.5 Questão 5

Dado um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e um campo de vetores $X = (X_1, X_2, X_3) : U \to \mathbb{R}^3$ diferenciável, o divergente de X é definido por

$$divX = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}$$

Para uma função de classe $C^2, f : U \to \mathbb{R}^3$ o laplaciano de f é definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(a) Se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $X : U \to \mathbb{R}^3$ é um campo de vetores diferenciável, mostre que

$$div(fX) = f\ div(X) + \nabla f \cdot X,$$

sendo ∇f o gradiente de f e $\nabla f \cdot X$ o produto interno entre ∇f e X. (valor: 5,0 pontos)

(b) Se $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, mostre que $div(f\nabla f) = f\Delta f + ||\nabla f||^2$, sendo $||\ ||$ a norma euclidiana. (valor: 5,0 pontos)

(c) Se $U = B = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| < 1\}$ e $f : \bar{B} \to \mathbb{R}$ é de classe C^3 tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$, $div(f\nabla f) = 5f$ e $||\nabla f||^2 = 2f$, calcule

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial N} dS,$$

onde $\bar{B}$ é o fecho de B, S é a fronteira de B, N é a norma unitária exterior a S, $\dfrac{\partial f}{\partial N}$ é a derivada direcional de f na direção de N e dS é o elemento de área de S. (valor: 10,0 pontos)

8.1.6 Questão 6

Considere a função real f definida, para $x \geq 0$, por $f(x) = \sqrt{2x}$.

(a) Prove que se $0 < x < 2$, então $x < f(x) < 2$. (valor: 5,0 pontos)

(b) Prove que é convergente a seqência definida recursivamente por

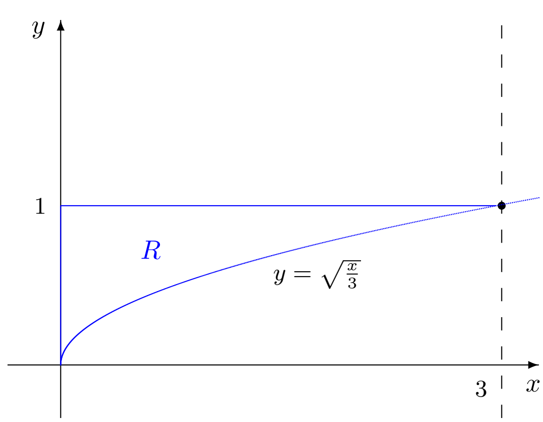
1. $a_1 = \sqrt{2}$
2. $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \geq 1$

(valor: 5,0 pontos)

(c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (valor: 10,0 pontos)

8.2 Soluções

8.2.1 Questão 1



(a)

(b) $I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dydx = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dxdy$

(c) $I = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dxdy = \int_0^1 3y^2 e^{y^3} dy = e - 1$

8.2.2 Questão 2

(a) $G = \{1, 5, 7, 11, 13\}$

8.2.3 Questão 3

8.2.4 Questão 4

(a) Temos que $p'(x) = nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + ... + a_1$. Como $p'(x)$ divide $p(x)$ então $q(x)$ deve ser de grau um. Portando $q(x) = k(x - x_0)$.

O teorema fundamental da divisão nos dá: $q(x)p'(x) = p(x)$, assim $k(x - x_0)[nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + ... + a_1] = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Multiplicando o primeiro termo da esquerda temos $knx^n = x^n$, portanto $k = \frac{1}{n}$. Logo $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0)$.

(b) Multiplicando a equação diferencial dada no enunciado por $\frac{1}{q(x)}$ obtemos:

$$p'(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

então $\frac{p'}{p} = \frac{n}{x - x_0} \implies \ln(p) = n\ln(x - x_0) + c$, portanto $p(x) = k(x - x_0)^n$.

8.2.5 Questão 5

8.2.6 Questão 6

Capítulo 9

ENADE 2005

9.1 Questões

9.1.1 Questão 1

A respeito de funções de variável complexa, resolva os itens que se seguem.

(a) Escreva a função complexa $f(z) = f(x+iy) = z^2 - 3z + 5$ na forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e verifique as equações de Cauchy-Riemann para essa função. (valor: 4,0 pontos)

(b) Sabendo que $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z+1)^2} = -\dfrac{1}{4(z-i)} - \dfrac{1}{4(z+i)} + \dfrac{1}{2(z+1)^2} + \dfrac{1}{2(z+1)}$, calcule a integral complexa: $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+1)^2} dz$. (valor: 6,0 pontos)

9.2 Soluções

9.2.1 Questão 1

(a) Fazendo $z = x + yi$ temos: $f(z) = (x+yi)^2 - 3(x+yi) + 5$, ou seja: $f(z) = (5 - 3x + x^2 - y^2) + (2xy - 3y)i$. Daqui temos que $u(x,y) = 5 - 3x + x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy - 3y$; As condições de Cauchy-Riemann são: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Portanto teremos: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3$, onde vemos $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, e $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $-\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$, portanto a função satisfaz as condições citadas.

(b) Usando a sugestão dada no enunciado vemos que as singularidades $-1, -i, i$ estão contidas na curva fechada $C : |z| = 2$, assim podemos usar o teorema de Cauchy, i. e. $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2i\pi}{n!}f^{(n)}(a)$. Multiplicando a função $g(z)$ por z^2 temos a função desejada na integração, assim $f(z) = z^2$ e:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+1)^2}dz$$

$$= 2i\pi\left(-\frac{(i)^2}{4} - \frac{(-i)^2}{4} + \frac{2(-1)}{2} + \frac{(-1)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{2} - 2i\pi + i\pi = 0$$

Capítulo 10

ENADE 2008

10.1 Questões

10.1.1 Questão 1

Considere uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer número real $k \neq 0$, a função $g_k(x)$ definida por $g_k(x) = x - kf(x)$ não é injetora.

Com base nessa propriedade, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

(a) Mostre que, se $g'_k(x_0) = 0$ para algum $k \neq 0$, então $f'(x_0) = \frac{1}{k}$ (valor: 3,0 pontos).

(b) Mostre que, para cada $k \in \mathbb{R}$ não-nulo, existem números α_k e β_k tais que $g_k(\alpha_k) = g_k(\beta_k)$. Além disso, justifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$ não-nulo, existe um número θ_k tal que $g'_k(\theta_k) = 0$. (valor: 3,0 pontos).

(c) Mostre que a função derivada de primeira ordem f' não é limitada. (valor: 4,0 pontos).

10.2 Soluções

10.2.1 Questão 1

(a) Derivando a função definida no item (a): $g'_k(x) = 1 - kf'(x)$. Fazendo $g'_k(x) = 0$ temos: $0 = 1 - kf'(x)$, ou seja: $f'(x_0) = \frac{1}{k}$, para um certo x_0

(b) Como o exercício nos diz que a função $g_k(x)$ não é injetora, essa definição implica que existem α e β, diferentes, tais que: $g_k(\alpha) = g_k(\beta)$, mas como a mudança do valor de k gera novas funções injetoras, é cmodo escrever $g_k(\alpha_k) = g_k(\beta_k)$ para mostrar tal fato; Usando o resultado do item (a), temos que se $g'_k(\theta_k) = 0$ então $f'(\theta_k) = \frac{1}{k}$, portanto para cada valor de $k \neq 0$ temos uma função $g'_k(\theta_k) = 0$

(c) A função f' não é limitada pois a função $1/x$, para $x \neq 0$ não é limitada.

Capítulo 11

ENADE 2011

11.1 Questões

11.1.1 Questão 1

Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8.

Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.

(a) Calcule a probabilidade de essas pessoas descerem em andares diferentes. (valor: 6,0 pontos).

(b) Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar. (valor: 4,0 pontos).

11.1.2 Questão 2

Considere a sequência numérica definida por

$$\begin{cases} a_1 = a; \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2 + a_n^2}, \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Use o princípio de indução finita e mostre que $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, seguindo os passos indicados nos itens a seguir:

(a) escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada; (valor: 1,0 ponto)

(b) mostre que $s = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$; (valor: 1,0 ponto)

(c) prove que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$; (valor: 3,0 pontos)

(d) mostre que $0 < s < \sqrt{2}$; (valor: 2,0 pontos)

(e) suponha que $a_n < \sqrt{2}$ e prove que $a_{n+1} < 2$; (valor: 1,0 ponto)

(f) conclua a prova por indução. (valor: 2,0 pontos)

11.1.3 Questão 3

O Teorema do Valor Intermediário é uma proposição muito importante da análise matemática, com inúmeras aplicações teóricas e práticas. Uma demonstração analítica desse teorema foi feita pelo matemático Bernard Bolzano [1781 1848]. Nesse contexto, faça o que se pede nos itens a seguir:

(a) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário para funções reais de uma variável real; (valor: 2,0 pontos)

(b) Resolva a seguinte situação-problema.

O vencedor da corrida de São Silvestre-2010 foi o brasileiro Mailson Gomes dos Santos, que fez o percurso de 15 km em 44 min e 7 seg. Prove que, em pelo menos dois momentos distintos da corrida, a velocidade instantânea de Mailson era de 5 metros por segundo. (valor: 4,0 pontos)

(c) Descreva uma situação real que pode ser modelada por meio de uma função contínua f, definida em um intervalo $[a, b]$, relacionando duas grandezas x e y, tal que existe $k \in (a, b)$ com $f(x) \neq f(k)$, para todo $x \in (a, b), x \neq k$. Justifique sua resposta. (valor: 4,0 pontos)

11.2 Soluções

11.2.1 Questão 1

(a) Considerando que as pessoas escolhem de forma aleatória o andar que desejam ir, cada uma das pessoas têm 8 possibilidades, totalizando, pelo *princípio multiplicativo* 8^5 situações diferentes, mas as que todas as pessoas saem em andares diferentes ocorrem do seguinte modo: a primeira tem 8 escolhas, a segunda apenas 7, pois não pode sair no mesmo andar da primeira, a terceira 6, a quarta 5 e a quinta 4, ou seja são 8.7.6.5.4 casos favoráveis. Portanto a probabilidade deles ocorrerem é

$$P_1 = \frac{8.7.6.5.4}{8^5} = \frac{7.6.5.4}{8^4} = \frac{7.5.3}{8^3} = \frac{105}{512}$$

(b) A probabilidade de mais de uma pessoa descerem num mesmo andar é a probabilidade complementar do item anterior, ou seja:

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{105}{512} = \frac{407}{512}$$

11.2.2 Questão 2

(a) Hipótese do *Princípio da Indução*: $a_1 = a$; $a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2}$, paran ≥ 1 e $0 < a < \sqrt{2}$ e a tese é: $a_n < \sqrt{2}, \forall n \geq 1$

(b) Se $s = \dfrac{4a}{2+a^2}$ e pela hipótese de indução $a > 0$, então $4a > 0$ e $2 + a^2 > 0$, portanto $s > 0$

(c) Como $s = \dfrac{4a}{2+a^2}$ temos que:

$$s^2 = \frac{16a^2}{(2+a^2)^2} = \frac{16a^2}{4+4a^2+a^4} = \frac{16a^2}{(a^2-2)^2+8a^2} < \frac{16a^2}{8a^2} = 2$$

portanto provamos que $s^2 < 2$.

(d) Temos que s é sempre positiva e $0 < s^2 < 2$, portanto se extrairmos a raiz quadrada obtemos: $0 < s < \sqrt{2}$

(e) Como temos $a_n < \sqrt{2}$ e $s = \dfrac{4a}{2+a^2} < \sqrt{2}, \forall a, a < \sqrt{2}$, logo: $a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} < \sqrt{2} < 2$

(f) Para $n = 1$ temos: $a_2 = s < \sqrt{2}$, é valida a hipótese. E como foi mostrado no item anterior: $a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} < \sqrt{2}$, assim concluímos a indução.

11.2.3 Questão 3

(a) Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, então o *Teorema do Valor Intermediário* diz que para todo $f(a) \leq k \leq f(b)$ existe um número $c \in (a, b)$ tal que: $f(k) = c$.

(b) Considerando que a velocidade do corredor brasileiro possa ser expressa por uma função contínua, $15(km) = 15000(m)$ e como ele percorreu este percurso em $44(min) = 2640(s)$ e $7(seg)$, ou seja $2647(seg)$, sua velocidade média foi $v_m = \dfrac{15000}{2647} \approx 5,6(m/s)$. Como os corredores iniciam a corrida parados, temos que $v_0 = 0$ e considerando que ele tenha parado no instante que terminou a corrida, temos $v_{2647} = 0$. Pelo teorema enunciado existe um único momento t em que $v_t = 5,6(m/s)$, mas como $5 < 5,6$ e $v_0 = v_{2647} = 0$, então existem pelo menos dois instantes a e b, por exemplo, em que a velocidade foi $5(m/s)$.

(c) Qualquer situação problema que pode ser modelada por uma função injetora.

Capítulo 12

ENADE 2014

12.1 Questões

12.1.1 Questão 1

Os principais efeitos visuais da computação gráfica vistos em uma tela são resultados de aplicações de transformações lineares. Translação, rotação, redimensionamento e alteração de cores são apenas alguns exemplos.

Considere que uma tela é cortada por dois eixos, x e y, ortogonais entre si, formando um sistema de coordenadas com origem no centro da tela. Suponha que, nessa tela plana, existe a imagem de uma elipse com eixo maior de tamanho 4, paralelo ao eixo x, e cujos focos têm coordenadas $(-1, 2)$ e $(1, 2)$. Considere T um operador linear definido em $\mathbb{R}^2$.

De acordo com as informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

(a) Mostre que o ponto $(0, 2 + \sqrt{3})$ pertence à elipse. (valor: 3,0 pontos)

(b) Suponha que, em cada ponto da tela, seja aplicado o operador linear $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Quais serão as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de T? (valor: 3,0 pontos)

(c) Calcule os autovalores do operador linear $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. (valor: 4,0 pontos)

12.1.2 Questão 2

O número de ouro é conhecido há mais de dois mil anos, sendo encontrado nas artes, nas pirâmides do Egito e na natureza. Para construir o número de ouro apenas com o auxílio de uma régua não graduada e de um compasso, utiliza-se o seguinte procedimento: dado um segmento AB qualquer, marca-se o seu ponto médio; constrói-se o segmento BC perpendicular a AB e com a metade do comprimento de AB; marca-se o ponto E sobre a hipotenusa do triângulo ABC, tal que $\overline{EC}$ e $\overline{BC}$ sejam iguais; e determina-se o ponto D no segmento AB tal que $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ sejam iguais. Com esse procedimento, o ponto D divide o segmento AB na razão áurea.

A partir da construção geométrica do número de ouro e considerando x como o comprimento do segmento AB, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

(a) Determine o comprimento do segmento AC em função de x. (valor: 4,0 pontos)

(b) Determine o comprimento do segmento AD em função de x. (valor: 4,0 pontos)

(c) Determine o número de ouro dado pelo quociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. (valor: 2,0 pontos)

12.1.3 Questão 3

A Torre de Hanói foi inventada por Edouard Lucas em 1883. Há uma história sobre a Torre, imaginada pelo próprio Lucas:

No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que contém três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus, então, chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, segundo certas regras. Os sacerdotes, então, obedeceram e comçaram o seu trabalho, dia e noite. Quando eles terminassem, a torre de Brahma iria ruir e o mundo acabaria.

Esse é um dos quebra-cabeças matemáticos mais populares, que consiste de n discos com um furo em seu centro e de tamanhos diferentes e de uma base com três pinos na posição vertical onde são colocados os discos. O jogo mais simples é constituido de três pinos mas e quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que o número de discos aumenta. Os discos formam uma torre onde todos são colocados em um dos pinos em ordem decrescente de tamanho. O objetivo do quebra-cabeça é transferir toda a torre de discos para um dos outros pinos, que estão inicialmente vazios, de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor, como mostra a figura acima.

Considerando uma torre de Hanói de 3 pinos, faça o que se pede nos itens a seguir.

(a) Ao planejar uma aula de matemática utilizando-se a Torre de Hanói, quais seriam os objetivos a serem alcançados de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais e o que se espera com o uso de jogos no processo de ensino-aprendizagem? (valor: 3,0 pontos)

(b) Cite três conceitos matemáticos de Educação Básica que podem ser explorados em sala de aula utilizando-se a Torre de Hanói? (valor: 3,0 pontos)

(c) Obtenha uma fórmula para o número mínimo de movimentos necessários para resolver a Torre de Hanói com discos. Justifique a sua resposta. (valor: 4,0 pontos)

12.1.4 Questão

Atualmente, a maioria dos editores de texto oferece o recurso de correção ortográfica. Esse recurso consiste em destacas, entre as palavras digitadas, aquelas com possíveis erros de grafia. Por exemplo, quando se digita a palavra "caza", o recurso de correção destaca essa palavra, pois a palavra "caza" não existe na língua portuguesa. Também é comum o recurso de correção ortográfica sugerir uma outra palavra para substituir a palavra incorreta.

A sugestão de quais palavras podem substituir a palavra incorreta é feita com uma medida da distância entre a palavra incorreta e as palavras que constam no dicionário do editor de texto. Existem diversas maneiras de medir a distância entre duas palavras. Uma delas é a denominada *Distância de Hamming*, na qual a medida da distância entre duas palavras x e y, em suas respectivas posições. Mais formalmente, se $x = x_1x_2x_3 \dots x_n$ e $y = y_1y_2y_3 \dots y_n$ são palavras em que x_i e y_i são letras do alfabeto, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então $d(x, y) = \#(\{i : x_i \neq y_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots n\})$, em que $\#(\{3\}) = 1$, já que elas diferem apenas na terceira letra.

A partir dessas informações, faça o que se pede nos itens a seguir.

(a) Mostre que a Distância de Hamming é uma métrica no conjunto das palavras com letras. (valor: 5,0 pontos)

(b) Mostre que o conjunto das palavras com letras, munido da Distância de Hamming, é um espaço métrico discreto. (valor: 5,0 pontos)

12.1.5 Questão 3

Uma equação diofantina linear nas incógnitas x e y é uma equação da forma $ax + by = c$, em que a, b e c são inteiros, e as únicas soluções (x_0, y_0) que interessam são aquelas em que $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

Nesse contexto, considere que os ingressos de um cinema custam R$ 9,00 para estudantes e R$ 15,00 para o público geral, e que, em certo dia, durante determinado período, a arrecadação nas bilheterias desse cinema foi R$ 246,00.

A partir das informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir.

(a) Obtenha ema equação diofantina linear que modele a situação acima, indicando o significado das incógnitas. (valor: 3,0 pontos)

(b) Quantas e quais são as soluções do problema descrito no item (a)? (valor: 7,0 pontos)

12.2 Soluções

12.2.1 Questão 1

(a)

(b)

Parte III