

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

Brian Lee Mayer

INVESTIGANDO NÚMEROS PRIMOS
COM ALGORITMOS DE VISIBILIDADE

Projeto de qualificação de doutorado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Presbiteriana Mackenzie como requisito para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica e Computação

Orientador: Dr. Luiz Henrique Alves Monteiro

São Paulo
2022



RESUMO

Seja d -primo um número natural com exatamente d divisores. De acordo com essa definição, os números primos usuais correspondem ao caso particular $d = 2$. Parte deste trabalho consiste em investigar numericamente as sequências numéricas que correspondem às lacunas entre d -primos consecutivos, com $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$. A partir dessas sequências, grafos são construídos usando algoritmos de visibilidade natural e de visibilidade horizontal e, então, as topologias desses grafos são analisadas. Nessas análises, calcula-se também a entropia informacional das sequências de lacunas e a densidade dos d -primos. As simulações computacionais mostraram que os grafos gerados a partir das lacunas entre d -primos consecutivos têm, em geral, uma distribuição de graus que é livre de escala. Essas simulações também mostraram que a densidade de d -primos para d par é muito maior do que para d ímpar e que a entropia informacional é maior para d ímpar do que para d par, para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$. Neste trabalho, analisam-se ainda os grafos de visibilidade natural e de visibilidade horizontal gerados por sequências formadas a partir da quantidade de divisores dos números naturais e por sequências obtidas a partir das casas decimais de números irracionais.

Palavras-chave: *algoritmo de visibilidade, d -primo, entropia informacional, rede complexa, sequência numérica.*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	DEFINIÇÕES E MÉTODOS	5
2.1	Definições	5
2.1.1	Sequência	5
2.1.2	Número primo	5
2.1.3	Teorema Fundamental da Aritmética	6
2.1.4	Número d -primo	6
2.1.5	Função quantidade de divisores	7
2.1.6	Entropia informacional	8
2.1.7	Lei de potência	8
2.2	Métodos	9
2.2.1	Visibilidade natural	9
2.2.2	Visibilidade horizontal	10
2.3	Relação entre d -primos e d primo	12
3	ESTUDOS	13
3.1	Lacunas entre d -primos sucessivos	13
3.2	Densidade de d -primos	15
3.3	Quantidade de divisores dos naturais	15
3.4	Casas decimais de números irracionais	16
4	RESULTADOS	18
4.1	Lacunas entre d -primos sucessivos	18
4.2	Densidade dos d -primos	22
4.3	Quantidade de divisores dos naturais	24
4.3.1	Sequência de divisores	24

4.3.2	Sequência das órbitas	26
4.4	Casas decimais de números irracionais	28
5	DISCUSSÃO E PRÓXIMOS PASSOS	31
5.1	Lacunas entre d -primos	31
5.2	Densidade de d -primos	32
5.3	Quantidade de divisores dos naturais	33
5.4	Casas decimais de números irracionais	33
5.5	Observações finais	33
5.6	Trabalhos futuros	34
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	37

Lista de Figuras

2.1	A sequência $x(n)$ em função de n , com $x(1) = 5$, $x(2) = 16$, $x(3) = 24$ e $x(4) = 72$	9
2.2	Grafo de VN gerado a partir da sequência mostrada na Figura 2.1.	10
2.3	A sequência $x(n)$ em função de n , com $x(1) = 5$, $x(2) = 16$, $x(3) = 24$ e $x(4) = 72$	11
2.4	Grafo de VH gerado a partir da sequência mostrada na Figura 2.3.	11
4.1	A distribuição de graus encontrada nos grafos de VN (pontos) e a função ajustada $Ak^{-\gamma}$ (linha sólida) para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$	19
4.2	A distribuição de graus encontrada nos grafos de visibilidade horizontal (pontos) e a função ajustada $Ak^{-\gamma}$ (linha sólida). A linha pontilhada representando $P_{rand}(k) = (1/3)(2/3)^{k-2}$ foi incluída apenas por comparação.	20
4.3	Densidades de d -primos para $d = 2, 3, \dots, 11$. No eixo horizontal estão os inteiros e no vertical o valor de $\Pi_d(n)/n$: a quantidade de d -primos em relação à n	23
4.4	Grafo gerado usando a sequência dos divisores. As ligações são estabelecidas entre um número e sua quantidade de divisores; por exemplo: $4 \rightarrow 3$, $5 \rightarrow 2$ e $10 \rightarrow 4$	24
4.5	Grafos gerados usando os dois algoritmos de visibilidade. Esquerda: visibilidade natural; direita: visibilidade horizontal.	25
4.6	Caminho mínimo médio $\langle l \rangle$ em função da quantidade de nós n , calculado até 5000 nós para a sequência dos divisores.	26
4.7	Grafo gerado usando a sequência das órbitas. Por exemplo, há a conexão $10 \rightarrow 3$, pois 10 tem 4 divisores, 4 tem 3 divisores e 3 tem 2 divisores. Como a contagem de divisores foi feita 3 vezes, cria-se a ligação entre 10 e 3.	27
4.8	Grafos gerados usando os algoritmos de visibilidade. Esquerda: visibilidade natural; direita: visibilidade horizontal.	27
4.9	Caminho mínimo médio $\langle l \rangle$ em função da quantidade de nós n , calculado até 5000 nós para a sequência das órbitas.	28
4.10	Histogramas das frequências dos dígitos. De cima para baixo: $\sqrt{2}$, ϕ , e , π . Da esquerda para a direita: dígitos únicos, pares e triplas. No eixo horizontal n é o número, par ou tripla da sequência e o eixo vertical a frequência encontrada, representada por $f(x)$	30

Lista de Tabelas

2.1	Sequências de d -primos, denotadas por $p_d(n)$	7
3.1	Sequências das diferenças de primeira ordem de d -primos consecutivos, dados por $x_p(n) = p_d(n+1) - p_d(n)$ com $n \in \mathbb{N}^*$, para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$	14
3.2	As primeiras casas decimais de quatro números irracionais.	16
3.3	Os primeiros pares de casas decimais de quatro números irracionais.	16
3.4	As primeiras triplas de casas decimais de quatro números irracionais.	17
4.1	Entropia informacional normalizada h de $x_d(n)$ para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$	18
4.2	Valores de A e γ correspondentes ao ajuste da distribuição de graus $P(k) = Ak^{-\gamma}$ e o grau médio $\langle k \rangle$ em função de d para os grafos de VN.	21
4.3	Valores de A e γ correspondentes ao ajuste da distribuição de graus $P(k) = Ak^{-\gamma}$ e o grau médio $\langle k \rangle$ em função de d para os grafos de VH.	21
4.4	Valores de A e γ para os grafos de VH e VN.	24
4.5	Propriedades dos grafos gerados a partir de números irracionais.	29

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Um número primo é um número natural maior do que 1 que possui apenas dois divisores: o número 1 e ele próprio. Desde a Antiguidade, os números primos têm fascinado os matemáticos e entusiastas da Matemática (DIAMOND, 1982; HARDY, 2008) e atraído a atenção de grandes mentes, como Eratóstenes, Erdős, Euclides, Euler, Fermat, Gauss e Riemann (DIAMOND, 1982; HARDY, 2008). A primeira referência a um algoritmo para descobrir os números primos dentro de uma sequência numérica foi o crivo de Eratóstenes (HOICHE, 1866), proposto por volta de 250 aC. Esse crivo funciona da seguinte maneira. Suponha que se deseja encontrar todos os primos menores ou iguais a n . Para isso:

1. crie uma lista de inteiros consecutivos de 2 até n ;
2. inicialmente, tome $p = 2$, o primeiro número primo;
3. elimine todos os múltiplos de p até o fim da lista;
4. considere o próximo número que não foi eliminado (no caso, $p = 3$) e repita o passo anterior;
5. repita o passo 3, considerando o próximo número da lista (no caso, $p = 5$);
6. repita o passo 3 até que não haja número eliminado. Quando isso ocorrer, pare. Ao final da execução desse algoritmo, os números que não foram eliminados são primos.

Os números primos são conhecidos por serem fundamentais em estudos em muitas áreas, como a Teoria dos Números (DIAMOND, 1982; HARDY, 2008). Na Matemática

Aplicada, os números primos são usados em criptografia (MAURER, 1995). Um exemplo clássico é o sistema de criptografia conhecido como RSA (em homenagem a Rivest, Shamir e Adleman), que se baseia na dificuldade prática de se fatorar números com muitos dígitos (da ordem de centenas ou milhares de bits). Na Biologia, algumas espécies de cigarras possuem ciclo de vida cuja duração é um número primo de anos, como 13 ou 17 anos, provavelmente como estratégia de sobrevivência (YOSHIMURA et al., 2009). Na Física, os primos caracterizam o espectro de energia de sistemas quânticos caóticos (BERRY; KEATING, 1999).

Se um número natural não é primo, então ele é composto. O Teorema Fundamental da Aritmética, que remete aos trabalhos de Euclides, feitos por volta de 300 aC, estabelece que qualquer número natural possui uma única decomposição em fatores primos. Por exemplo, $4044 = 2^2 \times 3^1 \times 337^1$. Talvez os números primos tenham ganhado esse nome porque são números primários, ou seja, os números a partir dos quais se escrevem os demais. Acredita-se que o conceito de número primo se deve a Euclides, por volta de 300 aC (GARBI, 2009). Em meados do século XIX, Kulik determinou, a mão, os primos até 100.000.000 (EVES, 1983). As tabelas anteriores listavam os primos até 100.000.

Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, paralelamente a Legendre, por volta de 1800 (DICKSON, 2005), conjecturou a respeito da função contagem de números primos, denotada por $\Pi(n)$, que expressa a quantidade de primos menores ou iguais a n . Para Gauss, $\Pi(n)$ se aproxima de:

$$\frac{n}{\ln(n)}$$

para $n \rightarrow \infty$. Ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi(n)}{n/\ln(n)} = 1$$

Por exemplo, para $n = 10$, $\Pi(10) = 4$ (pois há quatro primos menores do que 10) e $10/\ln(10) \simeq 4,34$; logo, $\Pi(10)/[10/\ln(10)] \simeq 0,92$; para $n = 10^{10}$, $\Pi(10^{10}) = 455052511$ e $10^{10}/\ln(10^{10}) \simeq 4,34 \times 10^8$; logo $\Pi(10^{10})/[10^{10}/\ln(10^{10})] \simeq 1,05$. Para Legendre, no lugar de $\ln(n)$, escreve-se $\ln(n) - 1,08$. Desde esses trabalhos de Gauss e Legendre, a fórmula para $\Pi(n)$ continuou sendo investigada, por exemplo, por Chebyshev (FORD et al., 2016). Hadamard provou, por volta de 1900, que a fórmula proposta por Gauss é a correta (IRELAND; ROSEN, 1998). Erdős, nos anos 50 do século passado, apresentou uma prova mais simples desse resultado (BURTON, 2016).

Em 1737, Euler encontrou uma identidade que relaciona os números primos com a função $\zeta(s)$, hoje conhecida como função zeta de Euler-Riemman, dada por:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

em que s é um número real. Euler mostrou que $\zeta(s)$ também se escreve como:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - (1/2^s))} \frac{1}{(1 - (1/3^s))} \frac{1}{(1 - (1/5^s))} \frac{1}{(1 - (1/7^s))} \dots$$

Essa identidade é chamada de formula do produto para a função zeta. Tomando $s = 1$, Euler provou que há infinitos números primos (BURTON, 2016).

Em 1859, Riemman publicou um artigo que considera s em $\zeta(s)$ como sendo um número complexo (BURTON, 2016). Esse artigo também contém a famosa Hipótese de Riemann, um dos problemas abertos da Matemática Pura mais importantes de todos os tempos. Essa hipótese relaciona as raízes complexas da função $\zeta(s)$ com a possibilidade de se calcular $\Pi(n)$ a partir de $\zeta(s)$.

Um dos sonhos dos matemáticos é encontrar uma fórmula que preveja corretamente a sequência de todos os números primos. Inspirado por esse objetivo, Euler propôs uma função polinomial $P(n)$ capaz de gerar muitos números primos. Essa função é dada por:

$$P(n) = n^2 - n + 41$$

Essa fórmula gera primos para $n = 1, \dots, 40$, falha para $n = 41$ e 42 , mas continua gerando alguns primos para $n > 42$.

Existem muitos outros polinômios geradores de primos; no entanto, nenhum deles gera apenas números primos. Há, por exemplo, os primos de Mersenne que são obtidos de (BURTON, 2016):

$$M(n) = 2^n - 1$$

Por exemplo, $M(2) = 3$, $M(3) = 7$ e $M(5) = 31$ são primos, mas $M(4) = 15$ não é. Os maiores números primos conhecidos são primos de Mersenne. Até o momento, o maior primo foi encontrado em 2018 e é dado por $M(82589933)$ (LAROCHE, 2018).

Por volta de 1650, Fermat conjecturou, numa carta para Mersenne, que $2^{2^n} + 1$ daria sempre números primos, mas essa fórmula falha para $n = 5$, como mostrado por Euler (BURTON, 2016).

A lacuna entre números primos, ou seja, o intervalo entre primos consecutivos, é outro assunto que tem recebido atenção ao longo dos anos (ERDÖS, 1935; BAKER; HARMAN; PINTZ, 2001). Nesses estudos, busca-se caracterizar as propriedades estatísticas da distribuição das lacunas entre primos sucessivos, da distribuição das lacunas entre as lacunas, ou seja, das lacunas de segunda ordem, e das lacunas de ordens superiores (SZPIRO, 2004; SZPIRO, 2007). Num outro estudo (FORD et al., 2016), deduziu-se uma fórmula para a lacuna máxima entre dois primos.

As distribuições dos números primos também têm sido estudadas usando grafos. Por exemplo, considere que os nós de um grafo são números primos. De acordo com a conjectura de Goldbach, qualquer número par pode ser escrito como a soma de dois primos. Assuma que dois nós (dois primos) estão ligados se a soma deles representa um número par (CHANDRA; DASGUPTA, 2005). Nesse trabalho, analisou-se o grafo assim gerado, considerando que diversos números pares podem ser representados pela soma de diferentes primos (por exemplo $22=3+19=5+17$). Em outro estudo com grafos, os números naturais são os nós e uma ligação é adicionada entre dois nós se eles possuem um divisor comum que é primo (CORSO, 2004).



Nesta tese, analisam-se sequências de d -primos por meio de grafos. Aqui, define-se um d -primo como um número natural que tem exatamente d -divisores. Usando essa definição, é evidente que os números primos são o caso particular $d = 2$. A intenção deste estudo baseado em d -primos é explorar como as sequências de lacunas variam com d , com $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$. Para isso, convertem-se essas sequências em grafos por meio de algoritmos de visibilidade (LACASA et al., 2008; LUQUE et al., 2009). Para os grafos assim gerados, determinam-se a distribuição de grau e o grau médio. Ainda, a variabilidade dessas sequências é avaliada calculando a entropia informacional (SHANNON; WEAVER, 1949). A densidade de d -primos, dada por $\Pi_d(n)/n$, também é computada. Outros experimentos numéricos envolvendo números irracionais e os divisores dos números naturais são também realizados.

Este texto está assim organizado. No capítulo 2, apresentam-se definições básicas e os algoritmos utilizados nesta tese. No capítulo 3, descrevem-se os estudos numéricos realizados. No capítulo 4, mostram-se os resultados obtidos nesses estudos. No capítulo 5, listam-se as conclusões preliminares e os próximos passos para finalizar esta tese.

Capítulo 2

DEFINIÇÕES E MÉTODOS

Neste capítulo, são apresentados os conceitos, as fórmulas e os algoritmos necessários para os estudos numéricos realizados neste trabalho. Alguns desses conceitos já foram mencionados no capítulo anterior.

2.1 Definições

2.1.1 Sequência

Ao longo deste trabalho, o termo sequência aparece diversas vezes, sendo uma definição necessária para um melhor entendimento desse conceito.

Definição: Uma sequência de números reais é uma função $x(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. (LIMA, 1976), que atribui um número real x a cada posição de uma lista, sendo essa posição identificada por um número natural n . Assim, $x(n)$ corresponde ao n -ésimo valor de x da sequência $\{x(1), x(2), x(3), \dots\}$. Note que esse conjunto possui ordem definida.

2.1.2 Número primo

A definição de número primo é apresentada em diversos livros de matemática básica.

Definição: Um número primo é um número natural maior do que 1 e que possui nenhum outro divisor além de 1 e de si mesmo (KNUTH, 1997).

2.1.3 Teorema Fundamental da Aritmética

O Teorema Fundamental da Aritmética fornece o alicerce central para a construção dos números naturais e para a fatoração prima.

Definição: Todo natural $n > 1$ ou é primo ou é um produto de números primos. Assim, n possui uma representação única, desconsiderando a ordem dos fatores, e pode ser escrito como $n = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \dots$ sendo p_1, p_2, p_3, \dots seus fatores primos e a, b, c, \dots as respectivas multiplicidades desses fatores (BURTON, 2016).

A noção apresentada a seguir está intimamente relacionada com o teorema exposto acima. Apesar de simples e natural, a ideia de d -primo não foi encontrada na literatura.

2.1.4 Número d -primo

Assim como um número primo possui exatamente 2 divisores, pode-se estabelecer que um número chamado de 3-primo possui exatamente 3 divisores. Por exemplo, 4 é 3-primo, pois seus divisores são 1, 2 e 4. Generalizando, um d -primo possui exatamente d divisores.

Definição: Um d -primo é um número natural que possui exatamente d divisores.

Note que, pela definição acima, os 2-primos correspondem aos números primos usuais. A sequência de 2-primos começa com 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots , pois esses números possuem apenas dois divisores. Note também que não há controvérsia ao afirmar que 1 é 1-primo, segundo a definição de d -primo. Portanto, nossa definição de d -primo nada mais é do que uma generalização baseada na quantidade de divisores de um número natural.

Aqui, usa-se a notação $p_d(n)$ para designar o n -ésimo d -primo, com $n \in \mathbb{N}^*$. Dessa forma, $p_3(4)$ é o quarto 3-primo, que é o número 49. A Tabela 2.1 apresenta os primeiros d -primos para $d = \{2, 3, \dots, 11\}$.

Tabela 2.1: Sequências de d -primos, denotadas por $p_d(n)$.

d	$p_d(n)$
2	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...
3	4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, ...
4	6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, 33, 34, 35, ...
5	16, 81, 625, 2401, 14641, 28561, 83521, ...
6	12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50, 52, 63, 68, 75, ...
7	64, 729, 15625, 117649, 1771561, 4826809, ...
8	24, 30, 40, 42, 54, 56, 66, 70, 78, 88, 102, ...
9	36, 100, 196, 225, 256, 441, 484, 676, 1089, ...
10	48, 80, 112, 162, 176, 208, 272, 304, 368, ...
11	1024, 59049, 9765625, 282475249, ...

Contagem de d -primos

Assim como o conceito de d -primo é uma extensão do conceito de primo, a função contagem de d -primos $\Pi_d(n)$ é uma extensão da função contagem de primos $\Pi(n)$.

Definição: A função contagem de d -primos, representada por $\Pi_d(n)$, com $n \in \mathbb{N}$, é definida como o número de d -primos menores ou iguais a n .

Portanto, $\Pi_2(n)$ equivale à usual função contagem de primos. Por exemplo, $\Pi_2(10) = 4$, pois só há quatro 2-primos menores ou iguais a 10 (os números 2, 3, 5 e 7). Já $\Pi_3(10) = 2$, pois apenas 4 e 9 são 3-primos menores ou iguais a 10.



2.1.5 Função quantidade de divisores

Definição: A função quantidade de divisores $D(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é tal que $D(n) = d$, sendo d o número de divisores do número natural n .

Por exemplo, $D(2) = 2$ e $D(4) = 3$.

2.1.6 Entropia informacional



A variabilidade de uma sequência $x(n)$ pode ser avaliada calculando a entropia H proposta por Shannon. Quanto maior a variabilidade dos valores de $x(n)$, maior H .

Definição: A entropia informacional H é definida como $H = -\sum_{i=1}^q \rho_i \ln \rho_i$, sendo ρ_i a frequência relativa com que aparece o i -ésimo valor de x na sequência $x(n)$, sendo q o número de valores de x que são distintos. O máximo de H vale $H_{max} = \ln q$, que é obtido no caso em que $p_i = 1/q$ para $i = 1, \dots, q$; ou seja, a entropia máxima corresponde ao caso em que todos os valores de x aparecem nessa sequência com mesma frequência relativa (SHANNON; WEAVER, 1949).

Essa entropia tem sido utilizada em diversos trabalhos envolvendo, por exemplo, a dinâmica de sistemas biológicos e sociais (PIQUEIRA; SERBONCINI; MONTEIRO, 2006; NETTO; MEIRELLES; RIBEIRO, 2017). Ela ainda pode empregada como uma medida de complexidade.

Definição: A complexidade C_{SDL} (SHINER; DAVISON; LANDSBERG, 1999) de uma sequência é calculada por $C_{SDL} = h(1 - h)$, sendo $h = H/H_{max}$.

Portanto, C_{SDL} é máxima para $h = 1/2$. Ou seja, a complexidade máxima ocorre entre a entropia mínima $H = 0$ e a entropia máxima H_{max} .

2.1.7 Lei de potência

Definição: Uma lei de potência é uma função $f(x)$ que se relaciona com sua variável x por meio da fórmula $f(x) = Ax^{-\gamma}$, com A e γ constantes (NEWMAN, 2005).

Uma lei de potência é livre de escala, pois trocando x por Bx , sendo B uma constante, a relação entre $f(x)$ e x não muda. De fato, $f(Bx) = A(Bx)^{-\gamma} = A'x^{-\gamma}$, com $A' = AB^{-\gamma}$. Portanto, a mudança de escala em x altera apenas a constante multiplicativa (de A para A'), sem alterar a dependência com x (que, no caso, é do tipo $x^{-\gamma}$).

Num gráfico log-log, uma lei de potência corresponde a uma equação de reta, pois $\log f(x) = \log A - \gamma \log x$. Assim, $\log f(x)$ varia linearmente com $\log x$, de modo que o

coeficiente angular dessa reta vale $-\gamma$

Nesta tese, usa-se uma lei de potência para ajustar a distribuição de graus dos grafos obtidos por meio dos algoritmos de visibilidade descritos a seguir.

2.2 Métodos

Aqui são apresentados dois algoritmos que convertem séries temporais em grafos não direcionados (LACASA et al., 2008; LUQUE et al., 2009). Esses algoritmos têm sido usados, por exemplo, em análises de ações de bolsa de valores (CHEN et al., 2019) e de eletroencefalogramas (WANG et al., 2017). Eles são chamados de algoritmo de visibilidade natural e algoritmo de visibilidade horizontal.

2.2.1 Visibilidade natural

Seja a sequência (ou a série temporal) $\{x(1), x(2), x(3), \dots\}$. Assuma que $a < i < b$. No grafo de visibilidade natural (VN) (LACASA et al., 2008), obtido a partir da sequência $x(n)$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, os nós $x(a)$ e $x(b)$ estão conectados se todos os pontos intermediários $(i, x(i))$ estão abaixo da reta que liga os pontos $(a, x(a))$ e $(b, x(b))$.

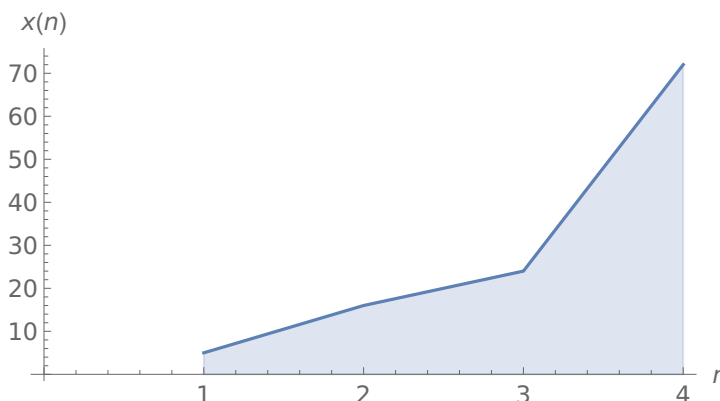


Figura 2.1: A sequência $x(n)$ em função de n , com $x(1) = 5$, $x(2) = 16$, $x(3) = 24$ e $x(4) = 72$.

Por exemplo, suponha que os quatro primeiros pontos de uma sequência $x(n)$ sejam $x(1) = 5$, $x(2) = 16$, $x(3) = 24$ e $x(4) = 72$, como ilustra a Figura 2.1. No grafo de VN correspondente a essa sequência, existe uma conexão entre os nós 16 e 72, pois o único

ponto intermediário $x(3) = 24$ está abaixo da reta que liga $x(2) = 16$ e $x(4) = 72$. Já os pontos $x(1) = 5$ e $x(3) = 24$ não estão conectados, pois $x(2) = 16$ está acima da reta que passa por esses dois pontos.

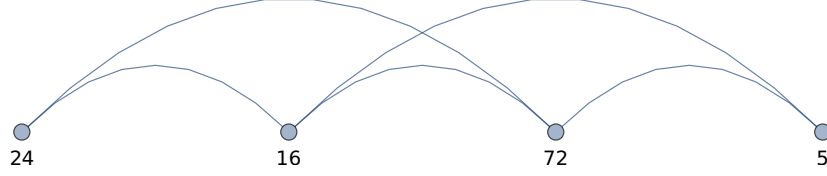


Figura 2.2: Grafo de VN gerado a partir da sequência mostrada na Figura 2.1.

Método: Sejam a , b e i índices de uma sequência $x(n)$, com $a < i < b$. No grafo de visibilidade natural (VN), $x(a)$ e $x(b)$ estão conectados se todos os pontos intermediários $(i, x(i))$ satisfazem a desigualdade (LACASA et al., 2008):

$$x(i) < x(a) + (x(b) - x(a)) \left(\frac{i - a}{b - a} \right) \quad (2.1)$$

Em outras palavras, os nós $x(a)$ e $x(b)$ estão ligados se existe uma reta passando por (a, x_a) e (b, x_b) no gráfico $x(n) \times n$, tal que nenhum ponto intermediário está acima dessa reta ou coincide com ela. No exemplo dado da Figura 2.1, como $x(3) = 24 < x(2) + (x(4) - x(2))(3 - 2)/(4 - 2) = 16 + (72 - 16)/2 = 44$, então os nós 16 e 72 estão conectados. Por outro lado, como $x(2) = 16 > x(1) + (x(3) - x(1))(2 - 1)/(3 - 1) = 5 + (24 - 5)/2 = 14.5$, então os nós 5 e 24 não estão conectados. Nesse caso, o ponto $(2, 16)$ é alto o suficiente para impedir que os pontos $(1, 5)$ e $(3, 24)$ se “vejam”.

A Figura 2.2 mostra o grafo gerado usando a Equação (2.1) para a sequência correspondente à Figura 2.1.

2.2.2 Visibilidade horizontal

No grafo de visibilidade horizontal (VH) (LUQUE et al., 2009), os nós $x(a)$ e $x(b)$ estão conectados se todos os pontos intermediários $(i, x(i))$ no gráfico $x(n) \times n$ estão abaixo da linha horizontal que une $(a, x(a))$ e $(b, x(b))$.

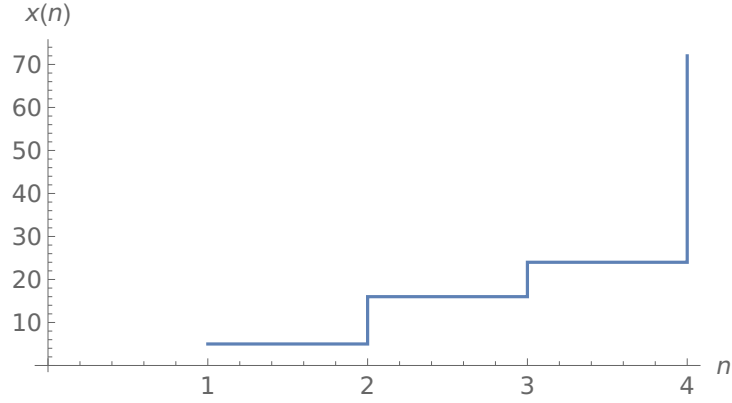


Figura 2.3: A sequência $x(n)$ em função de n , com $x(1) = 5$, $x(2) = 16$, $x(3) = 24$ e $x(4) = 72$.

Tomando a mesma sequência usada para exemplificar VH, os nós $x = 16$ e $x = 72$ não estão conectados, pois $x(2) = 16 < x(3) = 24$; isto é, $(2, 16)$ e $(4, 72)$ não veem se olharem apenas na direção horizontal, pois o ponto intermediário $(3, 24)$ é suficientemente alto para bloquear a visibilidade horizontal. Esse exemplo ilustra a diferença entre as duas visibilidades, pois pontos que estão conectados no grafo de VN podem não estar conectados no grafo de VH. Na verdade, o grafo de VH é um subgrafo do grafo de VN (LUQUE et al., 2009).

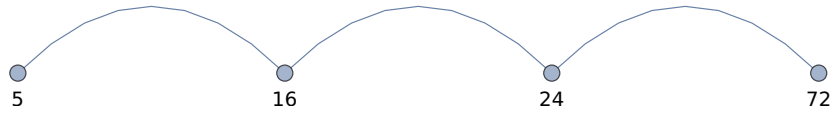


Figura 2.4: Grafo de VH gerado a partir da sequência mostrada na Figura 2.3.

Método: Sejam a , b e i índices de uma sequência $x(n)$, com $a < i < b$. No grafo de visibilidade horizontal (VH), obtido a partir da sequência $x(n)$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, os nós $x(a)$ e $x(b)$ estão conectados se todos os pontos intermediários $(i, x(i))$ satisfazem a desigualdade (LUQUE et al., 2009):

$$\{x_a, x_b\} > x_i \quad (2.2)$$

Assim, dois nós estão conectados se nenhum ponto intermediário está acima deles.

A Figura 2.4 mostra o grafo gerado usando a Equação (2.2) para a sequência correspondente à Figura 2.3.

2.3 Relação entre d -primos e d primo

Como já mencionado, qualquer número natural pode ser fatorado como o produto de fatores primos. No caso particular de um número primo, seus fatores são 1 e o próprio número. Seja p_2 um primo (ou um 2-primo). Portanto:

$$p_2 = p_2 \times 1$$



Elevando à potencia a , tem-se que:

$$p_2^a = (p_2 \times 1)^a = p_2^a \times 1$$

Logo, p_2^a tem $a + 1$ divisores. Usando nossa notação, isso implica:

$$p_d(n) = p_2(n)^{d-1} \tag{2.3}$$

com d sendo um 2-primo. Esse resultado pode ser encontrado em (HARDY, 2008).

Neste trabalho, a equação (2.3) foi utilizada para a geração de números com quantidade prima de divisores. Como é conhecida a sequência de 2-primos (2,3,5,7,11,...), esse resultado facilita gerar a sequência de d -primos, em que d é 2-primo. Por exemplo, a sequência de 3-primos pode ser calculada usando 2-primos assim:



$$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, \dots$$

A sequência de 5-primos pode ser calculada de forma análoga:

$$2^4, 3^4, 5^4, 7^4, 11^4, 13^4, \dots$$



E assim por diante. Entretanto, nenhuma relação foi encontrada entre $p_2(n)$ e $p_j(n)$ com $j = \{4, 6, 8, 9, 10\}$; isto é, nenhuma relação foi encontrada entre números primos e d -primos quando d não é um número primo.

No próximo capítulo, apresentam-se as análises numéricas realizadas com base nos métodos apresentados neste capítulo.

Capítulo 3

ESTUDOS

Este capítulo apresenta os quatro estudos até agora realizados. O primeiro estudo trata dos intervalos entre d -primos consecutivos; o segundo estudo investiga como a densidade de d -primos varia com d ; o terceiro estudo lida com a quantidade de divisores dos números naturais; e o quarto estudo envolve números irracionais.

Foi utilizado o *software Mathematica 12* para a execução dos cálculos.



3.1 Lacunas entre d -primos sucessivos

Neste estudo, analisam-se as lacunas entre d -primos consecutivos. Para isso, inicialmente calcula-se a diferença de sucessivos d -primos para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$. Com isso, para cada valor de d , obtém-se uma nova sequência, que pode ser considerada como uma série temporal discreta.

Para determinar a variabilidade de cada uma dessas sequências foi calculada a entropia informacional (SHANNON; WEAVER, 1949). Seu valor normalizado, denotado por h , é dado por:

$$h = \frac{H}{H_{max}} \quad (3.1)$$

Em seguida, essas sequências são transformadas em grafos não direcionados por meio da aplicação dos algoritmos de visibilidade mencionados (LACASA et al., 2008; LUQUE et al., 2009). Então, a distribuição de graus $P(k)$ e o grau médio $\langle k \rangle$ desses grafos são

determinados. Lembre que o grau k de um nó é o número de arestas conectadas a esse nó (GROS, 2008; MONTEIRO, 2014) e que a distribuição de graus expressa como a porcentagem $P(k)$ de nós com grau k varia com k (GROS, 2008; MONTEIRO, 2014). Usualmente, $P(k)$ é interpretado como a probabilidade de se encontrar um nó com grau k . Para os grafos obtidos, assume-se que $P(k)$ obedece a uma lei de potência, ou seja, $P(k) = Ak^{-\gamma}$, com A e γ constantes. Assim, assume-se que a distribuição de graus dos grafos é livre de escala.

Aqui, define-se:

$$x_d(n) = p_d(n+1) - p_d(n) \quad (3.2)$$

como a lacuna entre dois d -primos consecutivos. Por exemplo, $x_5(1) = 65$, pois $p_5(2) = 81$ e $p_5(1) = 16$. A Tabela 3.1 mostra os primeiros valores de $x_d(n)$ para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$. Cada nó dos grafos de VN e VH representa um valor distinto de x_d .

Tabela 3.1: Sequências das diferenças de primeira ordem de d -primos consecutivos, dados por $x_p(n) = p_d(n+1) - p_d(n)$ com $n \in \mathbb{N}^*$, para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$.

d	$x_p(n)$
2	1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, ...
3	5, 16, 24, 72, 48, 120, 72, 168, 312, 120, 408, ...
4	2, 2, 4, 1, 6, 1, 4, 1, 6, 1, 1, 3, 1, 7, 5, 4, 2, 1, 4, ...
5	65, 544, 1776, 12240, 13920, 54960, 46800, ...
6	6, 2, 8, 4, 12, 1, 5, 2, 11, 5, 7, 1, 16, 6, 1, 17, 1, ...
7	665, 14896, 102024, 1653912, 3055248, ...
8	6, 10, 2, 12, 2, 10, 4, 8, 10, 14, 2, 1, 5, 4, 14, 2, ...
9	64, 96, 29, 31, 185, 43, 192, 413, 67, 69, 219, ...
10	32, 32, 50, 14, 32, 64, 32, 64, 37, 59, 32, 16, ...
11	58025, 9706576, 272709624, 25654949352, ...

Os experimentos numéricos foram feitos tomando-se $n = 1, 2, \dots, 10000$, isto é, os primeiros 10000 d -primos para cada valor de d . Com esses números, 9999 diferenças $x_d(n)$ foram calculadas. Os valores correspondentes de $n = 1, 2, 9998, 9999$ foram descartados,



a fim de desprezar o transiente inicial ($n = 1, 2$) e efeitos do truncamento da sequência ($n = 9998, 9999$).

3.2 Densidade de d -primos

Munidos da função contagem de d -primos $\Pi_d(n)$, calculou-se a densidade de d -primos, isto é, $\Pi_d(n)/n$, para $d = 2, 3, \dots, 11$. A intenção é determinar como a abundância de d -primos varia conforme se caminha no espaço dos números naturais, com $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Quantidade de divisores dos naturais

Considere a *sequência dos divisores* $(n, D(n))$; isto é, a sequência da quantidade de divisores $D(n) = d$ do número natural n . Essa sequência começa e termina assim:

$$\{(2, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 2), (6, 4) \dots, (10000, 25)\}$$

Considere também outra sequência denominada de *sequência das órbitas dos divisores*. Para ilustrar a construção dessa sequência, tome, por exemplo, o número 60. Note que:

- 60 tem 12 divisores, primeira iteração;
- 12 tem 6 divisores, segunda iteração;
- 6 tem 4 divisores, terceira iteração;
- 4 tem 3 divisores, quarta iteração;
- finalmente, 3 tem 2 divisores, quinta iteração. A iteração final é aquela em que se atinge o número 2.

Nesse caso, a função quantidade de divisores D foi aplicada cinco vezes. De fato, $D(60) = 12$, $D(12) = 6$, $D(6) = 4$, $D(4) = 3$, $D(3) = 2$. Aqui, diz-se que a órbita do número 60 tem tamanho 5. Isso corresponde ao par $(60, 5)$. Aplicando esse procedimento para os números naturais entre 1 e 10000, gera-se a sequência:

$$\{(2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 1), \dots, (10000, 3)\}$$

Grafos de VN e VH são construídos a partir de dessas duas sequências. Para esses grafos, calculam-se a distribuição de graus $P(k)$ e o grau médio $\langle k \rangle$. Tomando $P(k) = Ak^{-\gamma}$, os coeficientes A e γ de cada grafo são determinados pelo método dos mínimos quadrados (LJUNG, 1998).

3.4 Casas decimais de números irracionais



Nesse estudo, usam-se as primeiras 10000 casas decimais dos seguintes números irracionais: $\sqrt{2}$, e , $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ e π , a fim de comparar com os resultados obtidos com d -primos. Note que dois deles (e e π) são transcendentais. A título de ilustração, a Tabela 3.2 exibe as primeiras casas decimais desses números.

Tabela 3.2: As primeiras casas decimais de quatro números irracionais.

número	primeiros dígitos
$\sqrt{2}$	4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 3, 0, 9, 5, 0, 4, 8, ...
e	7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, 9, 0, 4, 5, 2, 3, 5, 3, ...
ϕ	6, 1, 8, 0, 3, 3, 9, 8, 8, 7, 4, 9, 8, 9, 5, ...
π	1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, ...

Tabela 3.3: Os primeiros pares de casas decimais de quatro números irracionais.

número	primeiros pares de dígitos
$\sqrt{2}_2$	41, 42, 13, 56, 23, 73, 9, 50, 48, 80, 16, 88, 72, 42, ...
e_2	71, 82, 81, 82, 84, 59, 4, 52, 35, 36, 2, 87, 47, 13, ...
ϕ_2	61, 80, 33, 98, 87, 49, 89, 48, 48, 20, 45, 86, 83, 43, 65, ...
π_2	14, 15, 92, 65, 35, 89, 79, 32, 38, 46, 26, 43, 38, ...

Também foram consideradas as sequências de pares e triplas de dígitos, que são construídos agrupando-se os dígitos 2 a 2 ou 3 a 3. Por exemplo, para $\sqrt{2}$, o par 4 e 1 gera o número 41. As Tabelas 3.3 e 3.4 ilustram esses conjuntos de dados. O sub-índice ao lado do número irracional indica quantos dígitos foram considerados em cada agrupamento. Por exemplo, e_3 significa que os dígitos de e foram agrupados 3 a 3.

Tabela 3.4: As primeiras triplas de casas decimais de quatro números irracionais.

número	primeiras triplas de dígitos
$\sqrt{2}_3$	414, 213, 562, 373, 95, 48, 801, 688, 724, 209, ...
e_3	718, 281, 828, 459, 45, 235, 360, 287, 471, ...
ϕ_3	618, 33, 988, 749, 894, 848, 204, 586, 834, 365, ...
π_3	141, 592, 653, 589, 7932, 384, 626, 433, 832, 795, 28, ...

A análise consiste em gerar histogramas, a fim de determinar a distribuição dos dígitos. Em seguida, para cada uma das sequências mostradas nas Tabelas 3.2 a 3.4, são gerados os grafos de VN e de VH, que são analisados seguindo o mesmo procedimento dos estudos acima descritos.

Os resultados desses estudos são mostrados no próximo capítulo.

Capítulo 4

RESULTADOS

Neste capítulo, relatam-se os resultados dos estudos descritos no capítulo anterior. Lembre que em todos os grafos as arestas não são direcionadas.

4.1 Lacunas entre d -primos sucessivos

A Tabela 4.1 mostra os valores da entropia normalizada h calculada a partir da Equação (3.1). Obtém-se $h = 1$ para $d = 5, 7$ e 11 , pois, para esses valores de d , não há valores repetidos de x_d nas sequências correspondentes. Para $d = 3$ e $d = 9$, $h \simeq 1$. Para d par, $h \approx 0.7$. Então, para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$, d ímpar favorece a ocorrência de valores equiprováveis de x_d mais do que d par.

Tabela 4.1: Entropia informacional normalizada h de $x_d(n)$ para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$.

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h	0.713	0.997	0.653	1.000	0.797	1.000	0.696	0.999	0.700	1.000



A partir das sequências de lacunas $x_d(n)$ para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$, grafos não direcionados de VN e VH foram construídos usando as equações (2.1) e (2.2).

As Figuras (4.1) e (4.2) exibem os gráficos log-log de $P(k)$ para os grafos de VN e VH, respectivamente, com $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$. Observe que, nesses gráficos, a maioria das curvas $P(k)$ decai como uma lei de potências; ou seja, $P(k) \approx Ak^{-\gamma}$. Exceções são os gráficos de VN para $d = 7$ e $d = 11$.

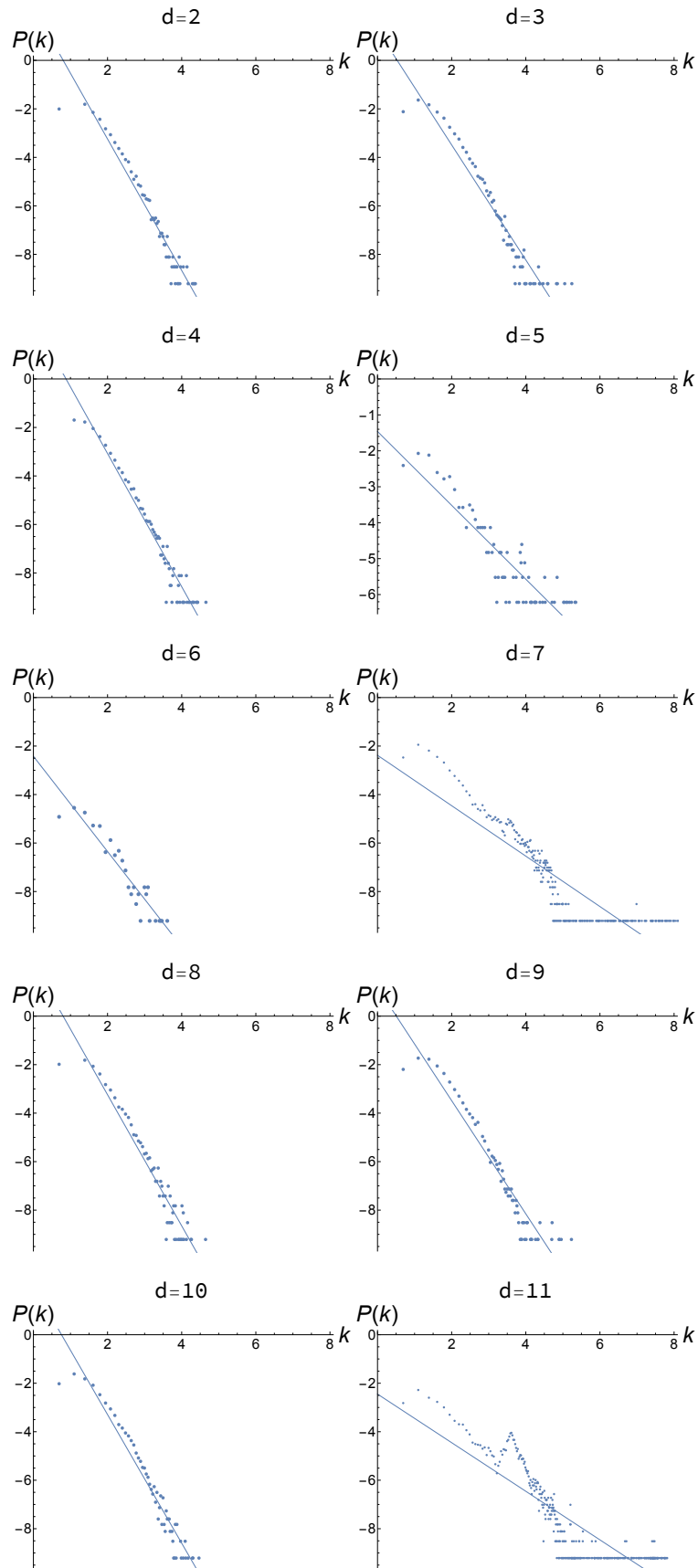


Figura 4.1: A distribuição de graus encontrada nos grafos de VN (pontos) e a função ajustada $Ak^{-\gamma}$ (linha solida) para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$.



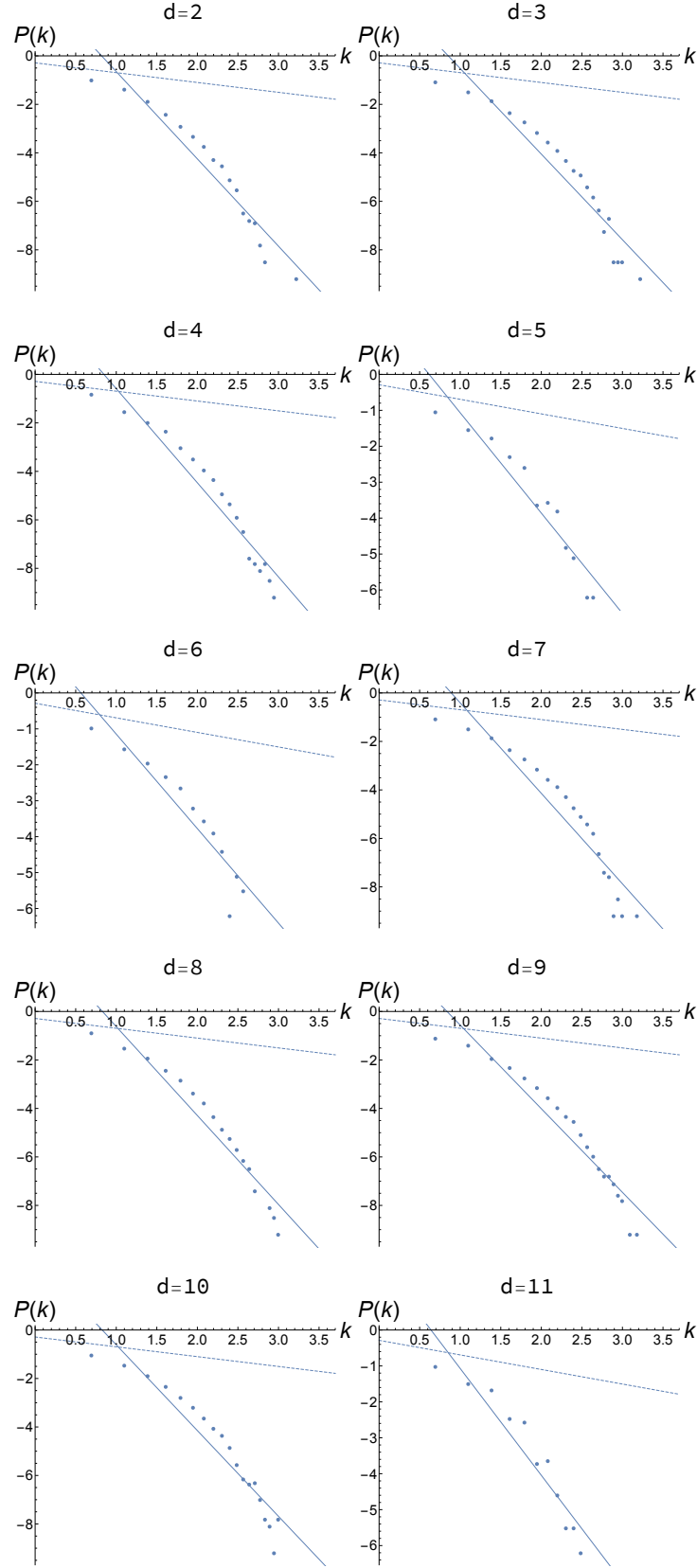


Figura 4.2: A distribuição de graus encontrada nos grafos de visibilidade horizontal (pontos) e a função ajustada $Ak^{-\gamma}$ (linha sólida). A linha pontilhada representando $P_{rand}(k) = (1/3)(2/3)^{k-2}$ foi incluída apenas por comparação.

Tabela 4.2: Valores de A e γ correspondentes ao ajuste da distribuição de graus $P(k) = Ak^{-\gamma}$ e o grau médio $\langle k \rangle$ em função de d para os grafos de VN.

visibilidade	d	A	γ	$\langle k \rangle$
natural	2	0.4 ± 0.1	1.1 ± 0.2	6.17
natural	3	0.4 ± 0.1	1.1 ± 0.2	6.52
natural	4	1.2 ± 0.2	1.6 ± 0.1	6.40
natural	5	1.03 ± 0.07	1.53 ± 0.05	14.3
natural	6	0.5 ± 0.1	1.1 ± 0.2	6.33
natural	7	0.29 ± 0.03	1.02 ± 0.06	27.7
natural	8	0.4 ± 0.1	1.1 ± 0.2	6.28
natural	9	0.12 ± 0.05	0.6 ± 0.2	6.66
natural	10	0.4 ± 0.1	1.1 ± 0.2	6.23
natural	11	0.19 ± 0.02	0.91 ± 0.04	45.2

Tabela 4.3: Valores de A e γ correspondentes ao ajuste da distribuição de graus $P(k) = Ak^{-\gamma}$ e o grau médio $\langle k \rangle$ em função de d para os grafos de VH.

visibilidade	d	A	γ	$\langle k \rangle$
horizontal	2	1.2 ± 0.3	1.7 ± 0.3	3.67
horizontal	3	1.1 ± 0.2	1.6 ± 0.2	3.98
horizontal	4	1.7 ± 0.2	1.9 ± 0.2	3.47
horizontal	5	1.1 ± 0.2	1.6 ± 0.2	3.97
horizontal	6	1.1 ± 0.2	1.6 ± 0.2	3.89
horizontal	7	1.1 ± 0.2	1.6 ± 0.2	3.96
horizontal	8	1.5 ± 0.2	1.8 ± 0.2	3.59
horizontal	9	1.0 ± 0.2	1.6 ± 0.2	3.99
horizontal	10	1.1 ± 0.2	1.6 ± 0.2	3.84
horizontal	11	1.1 ± 0.2	1.6 ± 0.2	3.95


A Tabela 4.2 apresenta os valores de A , γ e $\langle k \rangle$ para os 10 grafos construídos utilizando o algoritmo de visibilidade natural. A função $Ak^{-\gamma}$ foi ajustada nos gráficos de $P(k)$ usando o método dos mínimos quadrados (LJUNG, 1998).

A Tabela 4.3 apresenta os valores de A , γ e $\langle k \rangle$ para os 10 grafos de visibilidade horizontal.


Essas simulações numéricas mostram que os valores de $\langle k \rangle$ para os grafos de VH são menores do que os valores correspondentes nos grafos de VN. Esse resultado é esperado, pois grafos de VH são subgrafos dos respectivos grafos de VN. Como grafos de VH têm menos arestas, então o grau médio é menor, em comparação com os grafos de VN.



Nos grafos de VN, $\langle k \rangle \approx 6$, com a exceção de $d = \{5, 7, 11\}$, os quais apresentam valores maiores.

Nos grafos de VH, $\langle k \rangle > 3.90$ para d ímpar e $\langle k \rangle < 3.90$ para d par. Note também que os valores de A e γ , determinados usando a técnica dos mínimos quadrados, apresentam menor variabilidade nos grafos de VH do que nos de VN. Adicionalmente, nos grafos de VN, $\gamma \simeq 1.1$ e para os grafos de VN, $\gamma \simeq 1.7$.

Esses resultados resultaram numa publicação (MAYER; MONTEIRO, 2020) 

4.2 Densidade dos d -primos

Nesse estudo, a densidade de d -primos $\Pi_d(n)/n$ foi calculada para os diferentes valores de d . Para $d = 2$, esse assunto foi motivo de pesquisa de muitos matemáticos, como discutido na Introdução. 

A Figura 4.3 mostra como $\Pi_d(n)/n$ varia de $n \in \mathbb{N}$, sendo $\Pi_d(n)$ a quantidade de d -primos menores ou iguais a n . Essa figura revela que há dois grupos de resultados: o grupo com d par e grupo com d ímpar. Para os casos com d par, as curvas podem apresentar concavidade para cima ou para baixo. Para d ímpar, as curvas tendem rapidamente para valores próximos de zero. 


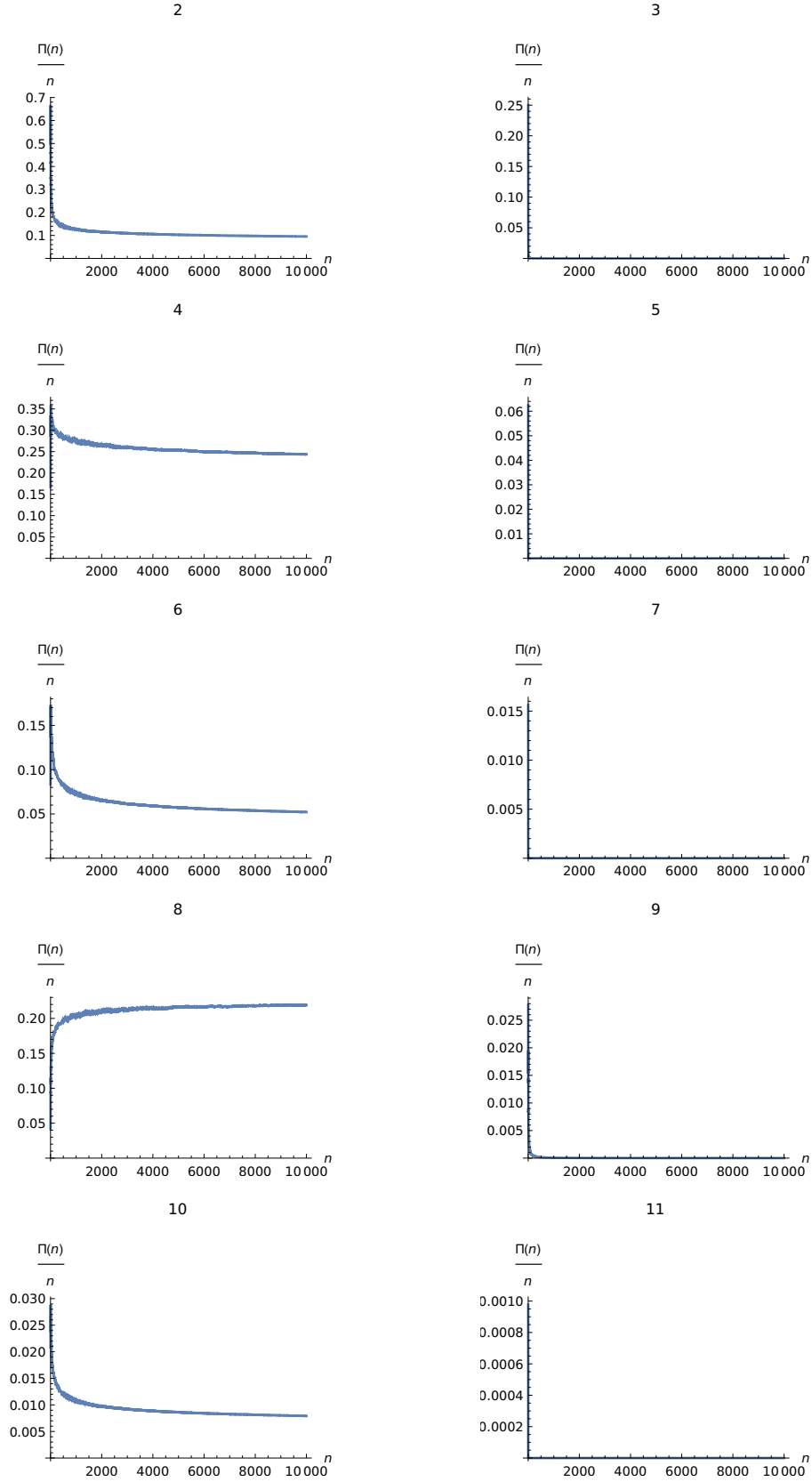


Figura 4.3: Densidades de d -primos para $d = 2, 3, \dots, 11$. No eixo horizontal estão os inteiros e no vertical o valor de $\Pi_d(n)/n$: a quantidade de d -primos em relação à n .

4.3 Quantidade de divisores dos naturais

Nesta seção, relatam-se os resultados referentes aos grafos gerados usando a sequência de divisores e a sequência das órbitas dos divisores, definidas na Seção 3.3.

A Tabela 4.4 reúne os dados da função $Ak^{-\gamma}$ que ajusta a distribuição de graus $P(k)$ dos grafos de VH e VN.

Tabela 4.4: Valores de A e γ para os grafos de VH e VN.

série	visibilidade	$\langle k \rangle$	γ	A
divisores	natural	5.6	1.2 ± 0.2	0.56 ± 0.13
divisores	horizontal	3.6	0.64 ± 0.66	0.19 ± 0.17
órbitas	natural	4.9	0.56 ± 0.41	0.15 ± 0.10
órbitas	horizontal	3.0	0.3 ± 1.6	0.20 ± 0.39

Nota-se que o valor de γ para a sequência das órbitas é aproximadamente metade do valor de γ para a sequência de divisores.

4.3.1 Sequência de divisores

A Figura 4.4 mostra o grafo gerado a partir de um número x e sua quantidade de divisores $D(x)$, isto é, o grafo com conexões $x \rightarrow D(x)$.

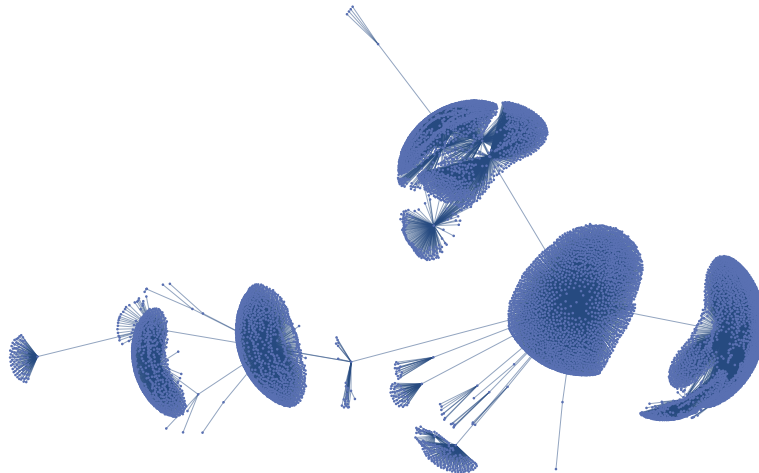


Figura 4.4: Grafo gerado usando a sequência dos divisores. As ligações são estabelecidas entre um número e sua quantidade de divisores; por exemplo: $4 \rightarrow 3$, $5 \rightarrow 2$ e $10 \rightarrow 4$.

Essa mesma sequência foi usada para gerar os grafos de VN e VH. A Figura 4.5 mostra os grafos gerados utilizando os dois algoritmos de visibilidade para uma sequência com apenas os 100 primeiros números (números maiores dificultam a visualização). Como esperado, no grafo de VH existem menos conexões do que no de VN. Entretanto, nas análises foram considerados mais números.

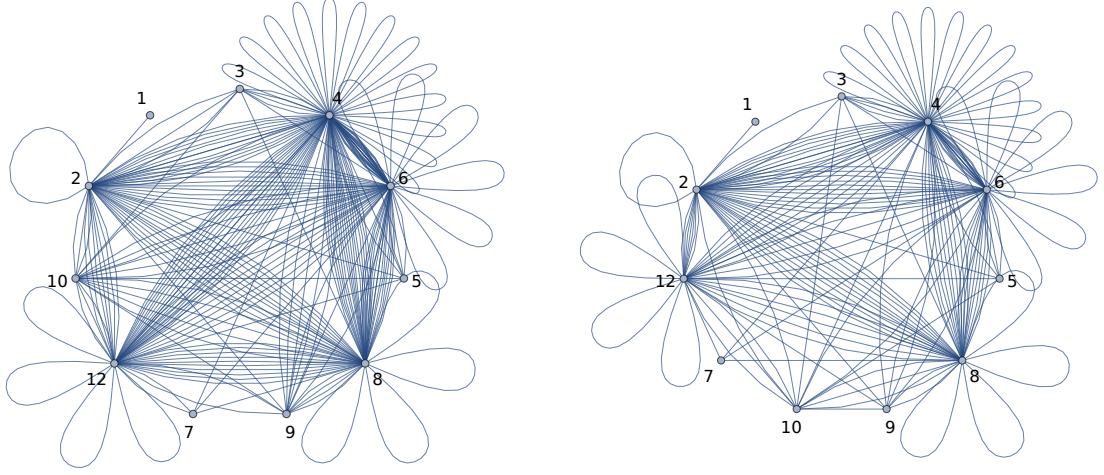


Figura 4.5: Grafos gerados usando os dois algoritmos de visibilidade. Esquerda: visibilidade natural; direita: visibilidade horizontal.

Os grafos gerados por essas sequências refletem um grafo mais fortemente conectado se comparado ao grafo da sequência das órbitas. E o que também é observado no grau médio.

A Figura 4.6 mostra a variação do caminho mínimo médio $\langle l \rangle$ em função da quantidade de nós n . Aparentemente, essa curva converge para $\langle l \rangle \simeq 4$.

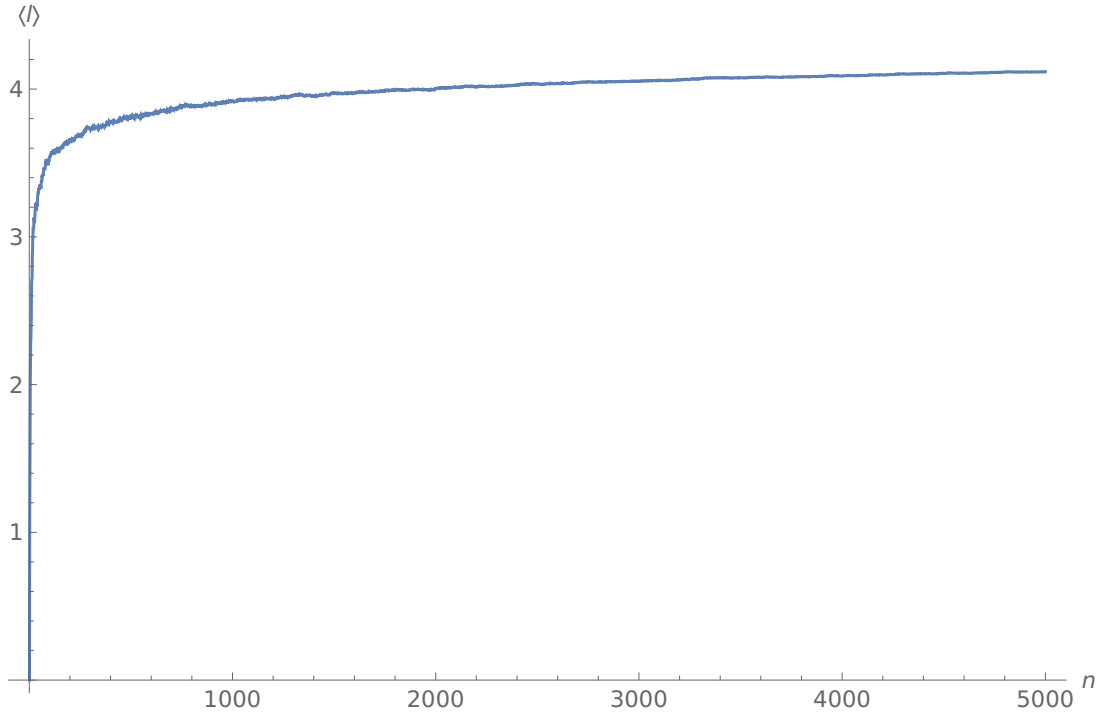


Figura 4.6: Caminho mínimo médio $\langle l \rangle$ em função da quantidade de nós n , calculado até 5000 nós para a sequência dos divisores.

Entretanto, uma análise mais atenta da Figura 4.6 revela que $\langle l \rangle$ não para de crescer, pois suas casas decimais não convergem. O cálculo de $\langle l \rangle$ pode ser útil no estudo das lacunas entre os d -primos, pois esse valor pode ser usado como heurística para a determinação de limites superior e inferior dessas lacunas.

4.3.2 Sequência das órbitas

A Figura 4.7 mostra o grafo obtido considerando a sequência das órbitas.

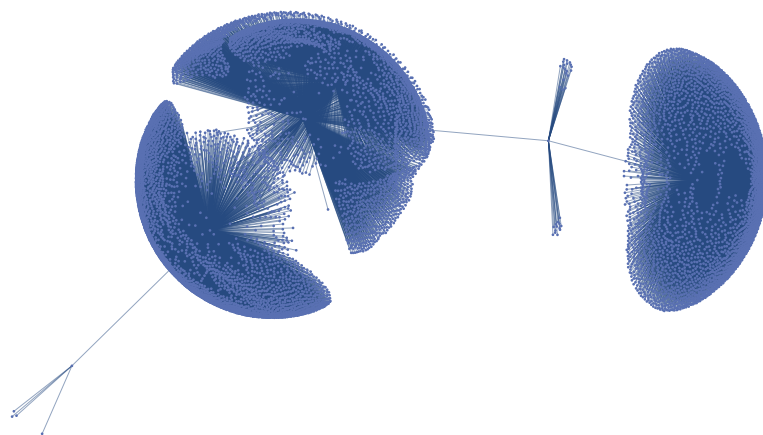


Figura 4.7: Grafo gerado usando a sequência das órbitas. Por exemplo, há a conexão $10 \rightarrow 3$, pois 10 tem 4 divisores, 4 tem 3 divisores e 3 tem 2 divisores. Como a contagem de divisores foi feita 3 vezes, cria-se a ligação entre 10 e 3.

O grafo apresenta estrutura similar ao encontrado na sequência de divisores, possui centros com muitas ligações e ligações com outros centros, o que confere a estrutura de árvore a ambos.

Porém os centros são mais evidentes neste estudo, por sua menor quantidade.

A Figura 4.8 mostra os grafos de VN e VH com apenas 100 números.

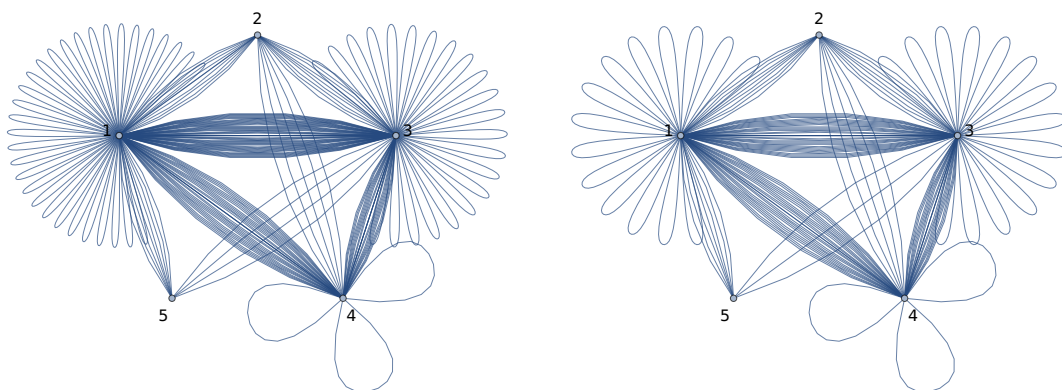


Figura 4.8: Grafos gerados usando os algoritmos de visibilidade. Esquerda: visibilidade natural; direita: visibilidade horizontal.

Os grafos mostram maior número de conexões em poucos nós, isto é, menor variedade. Apesar de similares, é possível perceber uma diferença na quantidade das conexões $1 \rightarrow 1$

e $3 \rightarrow 3$. A Figura 4.9 mostra a variação do caminho mínimo médio em relação ao número de nós.

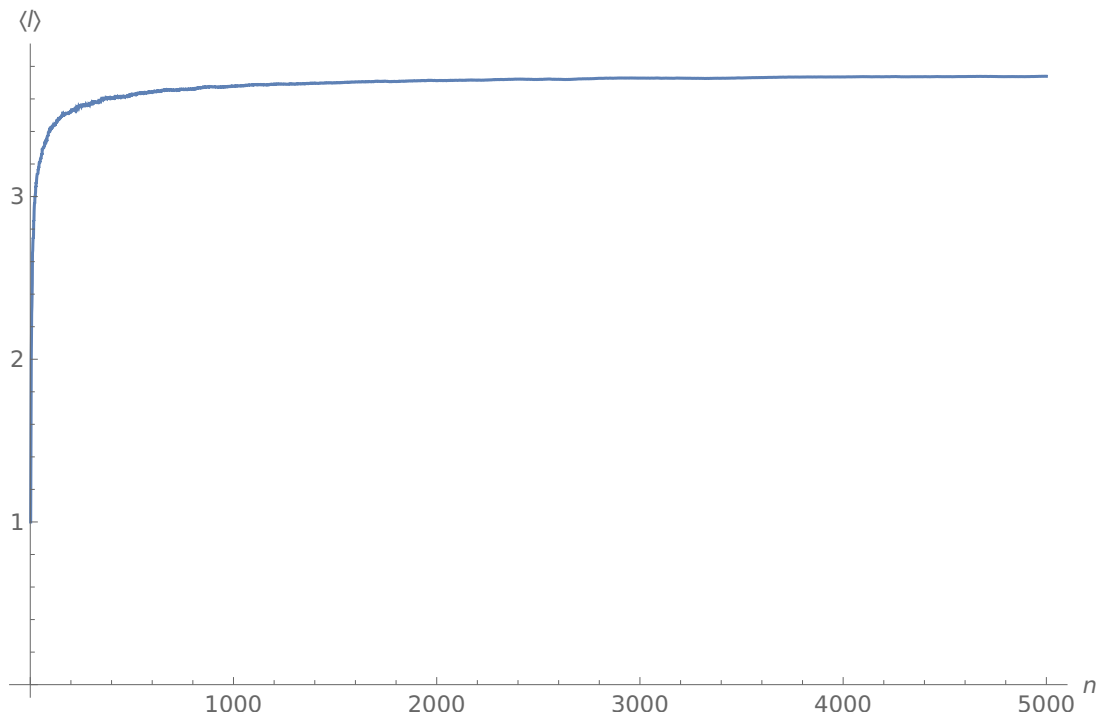


Figura 4.9: Caminho mínimo médio $\langle l \rangle$ em função da quantidade de nós n , calculado até 5000 nós para a sequência das órbitas.

Nessa sequência o caminho mínimo médio se estabiliza num valor de forma mais rápida, atingindo o valor 3.73921 para 5000 números.

4.4 Casas decimais de números irracionais



Para cada número irracional considerado, foram geradas sequências que foram transformadas em grafos utilizando-se os algoritmos de visibilidade.

A Tabela 4.5 mostra os valores numéricos das propriedades dos grafos de VN e VH, além da entropia normalizada h e da complexidade SDL.

Tabela 4.5: Propriedades dos grafos gerados a partir de números irracionais.

			Visibilidade Natural			Visibilidade Horizontal		
	C_{SDL}	h	$\langle k \rangle$	A	γ	$\langle k \rangle$	A	γ
$\sqrt{2}$	0.194	0.948	5.19	0.70 ± 0.13	1.34 ± 0.16	3.63	1.33 ± 0.26	1.73 ± 0.20
$\sqrt{2}_2$	0.135	0.964	5.40	0.65 ± 0.12	1.30 ± 0.15	3.95	1.21 ± 0.17	1.69 ± 0.14
$\sqrt{2}_3$	0.097	0.975	5.39	0.66 ± 0.12	1.31 ± 0.15	3.99	1.21 ± 0.16	1.69 ± 0.13
ϕ	0.192	0.949	5.21	0.69 ± 0.13	1.33 ± 0.17	3.63	1.32 ± 0.26	1.73 ± 0.21
ϕ_2	0.136	0.964	5.37	0.66 ± 0.12	1.31 ± 0.15	3.95	1.22 ± 0.17	1.69 ± 0.15
ϕ_3	0.096	0.975	5.37	0.66 ± 0.13	1.31 ± 0.16	3.99	1.20 ± 0.17	1.68 ± 0.14
e	0.195	0.948	5.21	0.69 ± 0.13	1.33 ± 0.16	3.64	1.33 ± 0.24	1.73 ± 0.19
e_2	0.149	0.961	5.35	0.65 ± 0.13	1.30 ± 0.16	3.94	1.22 ± 0.17	1.69 ± 0.14
e_3	0.096	0.975	5.35	0.67 ± 0.12	1.32 ± 0.15	3.99	1.22 ± 0.15	1.69 ± 0.13
π	0.192	0.949	5.19	0.70 ± 0.13	1.34 ± 0.16	3.64	1.33 ± 0.25	1.73 ± 0.19
π_2	0.145	0.962	5.38	0.65 ± 0.12	1.30 ± 0.16	3.95	1.21 ± 0.17	1.68 ± 0.14
π_3	0.100	0.974	5.37	0.66 ± 0.14	1.31 ± 0.15	3.99	1.20 ± 0.17	1.68 ± 0.15

Para todas as sequências analisadas, os valores de h , $\langle k \rangle$, A e γ são muito próximos.

Sabe-se que distribuições uniformes podem estar relacionadas à aleatoriedade (AVI-GAD, 2013). A Figura 4.10 mostra histogramas da frequência relativa de cada número, par ou tripla em cada sequência analisada.

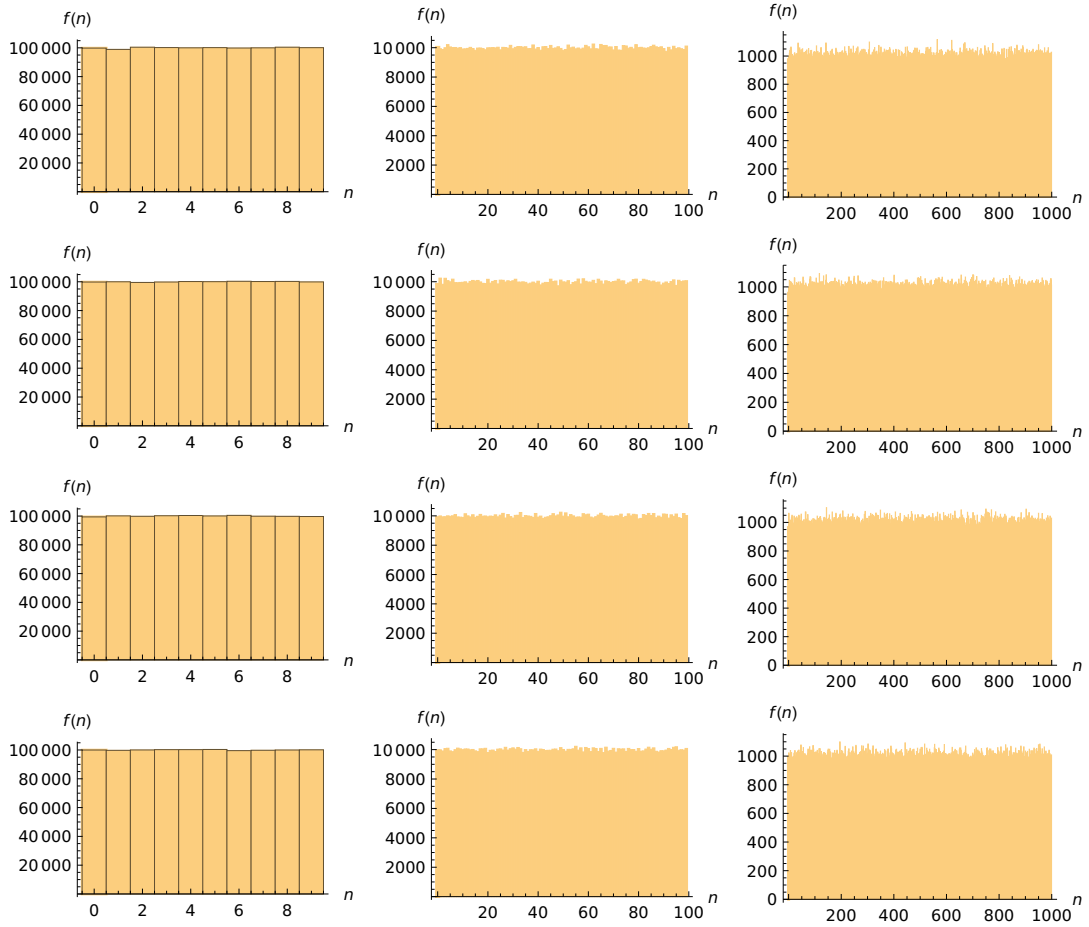


Figura 4.10: Histogramas das frequências dos dígitos. De cima para baixo: $\sqrt{2}$, ϕ , e , π . Da esquerda para a direita: dígitos únicos, pares e triplas. No eixo horizontal n é o número, par ou tripla da sequência e o eixo vertical a frequência encontrada, representada por $f(x)$.

As distribuições são uniformes para todos os casos, o que é uma característica de números uniformemente aleatórios.

No próximo capítulo, apresentam-se comentários e conclusões a partir dos resultados mostrados neste capítulo.

Capítulo 5

DISCUSSÃO E PRÓXIMOS PASSOS



5.1 Lacunas entre d -primos

Como mostra a Tabela 4.1, $h \simeq 1$ para $d = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, pois repetições nas sequências de x_d são raras, ou seja, essas sequências são aperiódicas. Adicionalmente $h \approx 0.7$ para $d = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, então a variabilidade do tamanho das lacunas para d par é menor do que para d ímpar. Então uma possível conjectura é: a entropia normalizada h distingue d par ($h \approx 0.7$) de d ímpar ($h \simeq 1$) (MAYER; MONTEIRO, 2020).



As Figuras 4.1 e 4.2 e as Tabelas 4.2 e 4.3 mostram que a maior parte das distribuições de graus $P(k)$ dos grafos de VN e VH construídos a partir das lacunas entre d -primos sucessivos para $d \in \{2, 3, \dots, 11\}$ segue, aproximadamente, uma lei de potências dada por $P(k) = Ak^{-\gamma}$. As flutuações observadas próximas às linhas retas mostradas nessas figuras podem ser causadas pelo tamanho finito das sequências x_d usadas nos estudos numéricos (BROIDO; CLAUSET, 2019). Distribuições que seguem uma lei de potência na conectividade $P(k)$ estão associadas com redes complexas conhecidas como livres de escala (BROIDO; CLAUSET, 2019; KELLER, 2005; NEWMAN, 2005). A invariância de escala na distribuição de graus $P(k)$ implica autossimilaridade, isto é, $P(k)$ de redes renormalizadas, obtidas por um processo de empacotamento (SONG; HAVLIN; MAKSE, 2005), também seguem uma lei de potência.

Nota-se que o valor de γ nos gráficos de VN e VH não é um bom parâmetro para mostrar a influência do valor de d nas redes geradas pelas sequencias de lacunas; entretanto $\langle k \rangle$ pode mostrar essa influência. De fato, nos gráficos de VN, para d primo, $\langle k \rangle$ aumenta com d ; para d não primo, $\langle k \rangle \approx 6$; nos gráficos de VH, $\langle k \rangle > 3.90$ para d impar e $\langle k \rangle < 3.90$ para d par. Portanto, outra conjectura possível é: $\langle k \rangle$ distingue d primos dos d não primos para a VN; e $\langle k \rangle$ distingue d impar de d par nos gráficos de VH (MAYER; MONTEIRO, 2020)..

É sabido que para grafos de VH obtidos de sequencias periódicas de período T (sem números repetidos dentro de um período), o grau médio é dado por $\langle k \rangle = 4[1 - (1/(2T))]$ (NUNEZ et al., 2012). Como consequência, para sequências aperiódicas, $\langle k \rangle = 4$ (pois $T \rightarrow \infty$). Na Tabela 4.3, esse é o valor aproximado de $\langle k \rangle$ encontrado para d -primos com d impar, o que está de acordo com o valor de h apresentado na tabela 4.1. Também é conhecido que para uma sequência não correlacionada aleatória, o grafo de VH tem $P_{rand}(k) = (1/3)(2/3)^{k-2}$ (NUNEZ et al., 2012). Portanto, desvios dessa distribuição de graus revelam que a sequência estudada não foi gerada por um processo aleatório não correlacionado. A curva correspondente a $P_{rand}(k)$ é mostrada como uma linha pontilhada na Figura 4.2. Note que $P(k)$ para d -primos tem menor inclinação do que $P_{rand}(k)$. Essa menor inclinação e $\langle k \rangle = 4$ podem ser indicações de uma sequência caótica (NUNEZ et al., 2012).

5.2 Densidade de d -primos

Nota-se na Figura 4.3 que existe uma distinção de comportamento na densidade dos d -primos: para d par, a densidade tende a um número fixo pequeno, entre 0.005 e 0.3; para d impar, esses valores caem rapidamente e se aproximam de zero.

Dentre os pares, apenas para $d = 8$ a densidade tem concavidade voltada para baixo; para as demais curvas com d par, a densidade tem concavidade voltada para cima. Esse é o comportamento dos números primos usuais, ou seja, do caso em que $d = 2$. **Esse resultado para $d = 2$ já era conhecido.** Pode-se conjecturar que a dependência da densidade $\Pi_d(n)/n$ com n para outros valores pares de d é similar ao caso $d = 2$.

5.3 Quantidade de divisores dos naturais

A sequência de divisores e a sequência das órbitas dos divisores levaram a grafos de VN e VH em que $P(k) = Ak^{-\gamma}$; ou seja, $P(k)$ segue uma lei de potência. Portanto, esses grafos são livres de escala. Além disso, o coeficiente γ para a sequência das órbitas é aproximadamente metade daquele relacionado à sequência dos divisores.

5.4 Casas decimais de números irracionais

Os histogramas aproximadamente constantes mostrados na Figura 4.10 sugerem uma aleatoriedade uniforme dos dígitos que compõem as casas decimais dos números considerados.



Como observado na Tabelas 4.5, os valores de $\langle k \rangle$, A e γ são muito próximos para todos os grafos construídos. Pode-se conjecturar que os dois algoritmos de visibilidade não diferenciam números transcendentais dos irracionais. Entretanto, a complexidade SDL cai conforme se aumenta a quantidade de dígitos que formam as sequências. Para os quatro números considerados, o valor de C_{SDL} para sequências com único dígito é maior que para sequências com pares de dígitos que é maior para sequências com triplas de dígitos.

5.5 Observações finais

Nota-se sobre os estudos de visibilidade de n -primos e da sequência de divisores que possuem valores próximo para casos específicos, por exemplo o valor de γ aproximadamente 1.2, que se repete algumas vezes também é o valor de γ para a visibilidade natural da sequência dos divisores.

Além disso as sequências de d -primos, na visibilidade natural, possuem valores ligeiramente diferentes das sequências de dígitos de números irracionais; porém na visibilidade horizontal possui valores próximos, 1.7.

5.6 Trabalhos futuros

O prazo final para a entrega desta tese é meados de 2023.

Os estudos sobre divisores dos naturais e sobre números irracionais ainda carecem de melhor análise, é necessário estudar mais números e utilizar sequências maiores. Talvez se possa analisar as sequências geradas quando se escreve um número irracional y como uma fração contínua, ou seja, quando se escreve tal número da seguinte forma:

$$y = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

A sequência $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ caracteriza y . Por exemplo, para o número ϕ , tem-se $a_j = 1$ para todo j .

O uso de algoritmos de visibilidade em sequências de dígitos derivadas de números racionais ainda não foi investigado. Pode ser interessante comparar os resultados de números irracionais com os resultados de números racionais.

Nos estudos sobre as densidades de d -primos, a convergência pode ser determinada e relacionada com os valores encontrados para os números primos. Outra investigação possível é verificar a relação das densidades com as diferenças entre os d -primos.

Um ponto de estudo usando os algoritmos de visibilidade nos estudos de lacunas entre d -primos é procurar os valores de máximo e mínimo de intervalos utilizando as propriedades desses grafos, por exemplo, o caminho mínimo médio e o coeficiente de agregação.



Referências Bibliográficas

- AVIGAD, J. Uniform distribution and algorithmic randomness. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 78, p. 334–344, 2013.
- BAKER, R. C.; HARMAN, G.; PINTZ, J. The difference between consecutive primes. II. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 83, p. 532–562, 2001.
- BERRY, M. V.; KEATING, J. P. The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics. *SIAM Review*, v. 41, p. 236–266, 1999.
- BROIDO, A. D.; CLAUSET, A. Scale-free networks are rare. *Nature Communications*, v. 10, n. ID 1017, 2019.
- BURTON, D. M. *Teoria Elementar dos Números*. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- CHANDRA, A. K.; DASGUPTA, S. A small world network of prime numbers. *Physica A*, v. 357, p. 436–446, 2005.
- CHEN, D. R. et al. Predicting financial extremes based on weighted visual graph of major stock indices. *Complexity*, v. 2019, n. ID 5320686, 2019.
- CORSO, G. Families and clustering in a natural numbers network. *Physical Review E*, v. 69, n. ID 036106, 2004.
- DIAMOND, H. G. Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 7, p. 553–590, 1982.
- DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers, Vol. I: Divisibility and Primality*. New York: Dover Publications, 2005.
- ERDÖS, P. On the difference of consecutive primes. *The Quarterly Journal of Mathematics*, v. 6, p. 124–128, 1935.

- EVES, J. K. H. *An Introduction to the History of Mathematics*. Philadelphia: Saunders College, 1983.
- FORD, K. et al. Large gaps between consecutive prime numbers. *Annals of Mathematics*, v. 183, n. 935-974, 2016.
- GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- GROS, C. *Complex and Adaptive Dynamical Systems: A Primer*. New York: Springer, 2008.
- HARDY, E. M. W. G. H. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- HOCHE, R. *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis arithmeticae libri II*. Leipzig: B.G. Teubner, 1866.
- IRELAND, K.; ROSEN, M. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1998.
- KELLER, E. F. Revisiting “scale-free” networks. *BioEssays*, v. 27, p. 1060–1068, 2005.
- KNUTH, D. E. *The Art of Computer Programming*. Boston: Addison-Wesley, 1997.
- LACASA, L. et al. From time series to complex networks: the visibility graph. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, v. 105, p. 4972–4975, 2008.
- LAROCHE, P. *Mersenne Prime Discovery - $2^{82589933} - 1$ is Prime!* 2018. Disponível em: <<https://www.mersenne.org/primes/?press=M82589933>>.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1998.
- LUQUE, B. et al. Horizontal visibility graphs: exact results for random time series. *Physical Review E*, v. 80, n. ID 046103, 2009.
- MAURER, U. M. Fast generation of prime numbers and secure public-key cryptographic parameters. *Journal of Cryptology*, v. 8, p. 123–155, 1995.

- MAYER, B.; MONTEIRO, L. H. A. A numerical study on the regularity of d-primes via informational entropy and visibility algorithms. *Complexity*, v. 2020, n. ID 1480890, 2020.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos Complexos*. São Paulo: Livraria da Física, 2014.
- NETTO, V. M.; MEIRELLES, J.; RIBEIRO, F. L. Social interaction and the city: the effect of space on the reduction of entropy. *Complexity*, v. 2017, n. ID 6182503, 2017.
- NEWMAN, M. E. J. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary Physics*, v. 46, p. 323–351, 2005.
- NUNEZ, A. et al. Detecting series periodicity with horizontal visibility graphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 22, n. ID 1250160, 2012.
- PIQUEIRA, J. R. C.; SERBONCINI, F. A.; MONTEIRO, L. H. A. Biological models: measuring variability with classical and quantum information. *Journal of Theoretical Biology*, v. 242, p. 309–313, 2006.
- SHANNON, C.; WEAVER, W. *The Mathematical Theory of Communication*. Chicago: University of Illinois Press, 1949.
- SHINER, J. S.; DAVISON, M.; LANDSBERG, P. T. Simple measure for complexity. *Physical Review E*, v. 59, p. 1459–1464, 1999.
- SONG, C. M.; HAVLIN, S.; MAKSE, H. A. Self-similarity of complex networks. *Nature*, v. 433, p. 392–395, 2005.
- SZPIRO, G. G. The gaps between the gaps: some patterns in the prime number sequence. *Physica A*, v. 341, p. 607–617, 2004.
- SZPIRO, G. G. Peaks and gaps: spectral analysis of the intervals between prime numbers. *Physica A*, v. 384, p. 291–296, 2007.
- WANG, L. et al. EEG analysis of seizure patterns using visibility graphs for detection of generalized seizures. *Journal of Neuroscience Methods*, v. 290, p. 85–94, 2017.
- YOSHIMURA, J. et al. Selection for prime-number intervals in a numerical model of periodical cicada evolution. *Evolution*, v. 63, p. 288–294, 2009.