Неравенство Иенсена

Определение 0.1. Множество точек называется *выпуклым*, если все точки отрезка, образуемого двумя любыми точками данного множества, принадлежат множеству.

Определение 0.2. Суперграфик (надграфик) это множество G_+, такое что

$$G_+ = \{(x, y) \mid x \in D_f,\, y \geqslant f(x)\}$$

Определение 0.3. Субграфик (подграфик) это множество G_-, такое что

$$G_- = \{(x, y) \mid x \in D_f,\, y \leqslant f(x)\}$$

Определение 0.4.

Фукнция называется *выпуклой*, если ее суперграфик – выпуклое множество.

Функция называется *вогнутой*, если ее субграфик – выпуклое множество.

$\boxed{1}$ Пусть $a < b$ и $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Покажите, что если λ пробегает отрезок $[0, 1]$, то x пробегает отрезок $[a, b]$.

$\boxed{2}$ Докажите, что функция $y = f(x)$ является выпуклой на промежутке D тогда и только тогда, когда

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \le \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

для любых $x_1, x_2 \in D$ и неотрицательных λ и μ, удовлетворяющий условию $\lambda + \mu = 1$.

$\boxed{3}$ Докажите, что $y = x^2$ – выпуклая функция на $\mathbb{R}$, а фукнция $y = \sqrt{x}$ – вогнутая.

$\boxed{4}$ [*Критерий выпуклости*]. Докажите, что функция f выпуклая на отрезке тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0$ для всех x из отрезка. Наоборот, функция f вогнута на ортрезке тогда и только тогда, когда $f''(x) \leqslant 0$ для всех x из отрезка.

Определение 0.5. Пусть в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ расположены массы $m_i > 0$. Центром масс данной системы назвается точка (x_c, y_c), такая что

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

$\boxed{5}$ Одну из точек системы назовем красной, а остальные – синими. Покажите, что центр масс данной системы совпадает с центром масс двух точек: красной и центра масс всех синих (в котором помещена масса всех синих точек).

$\boxed{6}$ Докажите, что центр масс нескольких точек выпуклого множества также принадлежит этому множеству.

$\boxed{7}$ [Неравенство Иенсена]. Рассмотрим выпуклую функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке D, и числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство Иенсена:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n).$$

$\boxed{8}$ Используя неравенство Иенсена, докажите неравенство между средними:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

$\boxed{9}$ Докажите неравенство Коши:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

$\boxed{10}$ С помощью неравенства Иенсена докажите неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

$\boxed{11}$ Пусть $a_1, \dots, a_n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — положительные числа, причем $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Докажите, что

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n.$$

$\boxed{12}$ [Обобщенное неравенство Гёльдера] Рассмотрим несколько наборов положительных чисел по n элементов. $a_1, \dots, a_2$; $b_1, \dots, b_n$; $\dots$; $z_1, \dots, z_n$. Пусть $\lambda_a, \lambda_b, \dots, \lambda_z$ — положиетльные числа, соответствующие каждому набору. Причем их сумма равна 1. Докажиет неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^{\lambda_b} \dots (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^{\lambda_z} \geqslant$$

$$a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \dots z_1^{\lambda_z} + a_2^{\lambda_a} b_2^{\lambda_b} \dots z_2^{\lambda_z} + \dots + a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \dots z_n^{\lambda_z}.$$

$\boxed{13}$ Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ верно неравенство

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leqslant a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}$$

$\boxed{14}$ Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ и $x_1 + \dots + x_n = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n - 1}}.$$

$\boxed{15}$ Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{1 + x_2 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1 + \cdots + x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

$\boxed{16}$ Пусть $x, y, z > 0$ и $x + y + z = xyz$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leqslant \frac{3}{4}.$$

$\boxed{17}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geqslant \sqrt{a+b+c}.$$

$\boxed{18}$ Пусть a, b, c — положительные действительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

$\boxed{19}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c^2}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+2a^2}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+2b^2}} \geqslant \sqrt{ab+bc+ca}.$$