Неравенство Чебышёва

На занятии

$\boxed{1}$ Докажите равенство для $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\ \ y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$

$$n(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n)=\sum_{i<j}(x_j-x_i)(y_j-y_i).$$

$\boxed{2}$ Докажите неравенство [Чебышёва] для $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\ \ y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$

$$n(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n) \geqslant (x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n).$$

$\boxed{3}$ Докажите неравенство [Чебышёва] для $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\ \ y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$

$$n(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n) \leqslant (x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n).$$

$\boxed{4}$ Пусть $a, b, c-$ положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{a^2-bc}{b+c}+\frac{b^2-ca}{a+c}+\frac{c^2-ab}{a+b} \geqslant 0.$$

$\boxed{5}$ Пусть $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ и $0 < x \leqslant y \leqslant z$. Докажите, что

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geqslant \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}.$$

$\boxed{6}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqslant a+b+c.$$

$\boxed{7}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 1$ выполнено неравенство

$$a^ab^bc^c \geqslant (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

$\boxed{8}$ Пусть $\alpha > 2$. Докажите, что для любых $x, y, z > 0$, удовлетворяющих условию $xyz \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

$\boxed{9}$ *Средним степенным степени* $k \in \mathbb{N}$ чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ называется число

$$A_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n}}.$$

Докажите, что среднее арифметическое положительных чисел не превосходит их среднего степенного любой степени $k > 2$.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n}}.$$

$\boxed{10}$ Пусть $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

$\boxed{11}$ Пусть $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$. Докажите, что

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}.$$