Обобщенное транснеравенство

На занятии

$\boxed{1}$ [*обобщенное транснеравенство*] Рассмотрим наборы вещественных чисел $x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant y_2 \cdots \leqslant y_n$ и выпуклую функцию f. Докажите, что если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — произвольная перестановка из y_i, то выполнены неравенства:

$$f(x_1+y_n)+f(x_2+y_{n-1})+\cdots+f(x_n+y_1) \leqslant f(x_1+u_1)+f(x_2+u_2)+\cdots+f(x_n+u_n) \leqslant$$

$$\leqslant f(x_1+y_1)+f(x_2+y_2)+\cdots+f(x_n+y_n).$$

$\boxed{2}$ Выбрав подходящую функцию, докажите, что

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_n+y_n) \leqslant (x_1+u_1)(x_2+u_2)\ldots(x_n+u_n) \leqslant (x_1+y_n)(x_2+y_{n-1})\ldots(x_n+y_1).$$

$\boxed{3}$ Выбрав подходящую функцию, докажите что

$$\frac{1}{x_1+y_n}+\frac{1}{x_2+y_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{x_n+y_1} \leqslant \frac{1}{x_1+u_1}+\frac{1}{x_2+u_2}+\cdots+\frac{1}{x_n+u_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x_1+y_1}+\frac{1}{x_2+y_2}+\cdots+\frac{1}{x_n+y_n}.$$

$\boxed{4}$ Докажите, что для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

$\boxed{5}$ Докажите, что для положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\sqrt{x+2^x}+\sqrt{y+2^y}+\sqrt{z+2^z} \leqslant \sqrt{y+2^x}+\sqrt{z+2^y}+\sqrt{x+2^z}.$$

$\boxed{6}$ Докажите, что для неотрицательных положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx} \leqslant 2(x+y+z).$$