Классические неравенства

Домашка

Докажите неравенства

$\boxed{1}$ $(x^3+y^3+z^3)(x+y+z) \geqslant (x^2+y^2+z^2)^2$ для любых $x, y, z > 0$.

$\boxed{2}$ [*Неравенство Несбитта*] $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$ для $a, b, c > 0$.

$\boxed{3}$ $1+ab \leqslant \sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}$ для любых a, b.

$\boxed{4}$ $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ для любых $a, b, c, d > 0$.

$\boxed{5}$ $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2$ для любых a, b, c.

$\boxed{6}$ $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leqslant 1$ для любых x, y, z.

$\boxed{7}$ $(a_1b_1+\dots+a_nb_n)\left(\dfrac{a_1}{b_1}+\dots+\dfrac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1+\dots+a_n)^2$ где $a_i, b_i > 0$.

$\boxed{8}$ $(\sqrt{a_1b_1}+\dots+\sqrt{a_nb_n})^2 \leqslant (a_1c_1+\dots+a_nc_n)\left(\dfrac{b_1}{c_1}+\dots+\dfrac{b_n}{c_n}\right)$ для любых $a_i, b_i < c_i > 0$.

$\boxed{9}$ $x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1 \leqslant x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$ для любых действительных x_i.

$\boxed{10}$ [*Неравенство треугольника*] $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\dots+(a_n-b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2}$ для любых a_i, b_i.

$\boxed{11}$ $\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2} \leqslant \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ для любых $x, y, z > 0$.

$\boxed{12}$ $\dfrac{a}{b+2c+d}+\dfrac{b}{c+2d+a}+\dfrac{c}{d+2a+b}+\dfrac{d}{a+2b+c} \geqslant 1$, где $a, b, c, d > 0$.

$\boxed{13}$ $\dfrac{a^2}{b(a+c)}+\dfrac{b^2}{c(b+d)}+\dfrac{c^2}{d(c+a)}+\dfrac{d^2}{a(d+b)} \geqslant 2$, если $a, b, c, d > 0$.

$\boxed{14}$ $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \dfrac{a+b+c}{3}$
для любых положительных a, b, c.

$\boxed{15}$ $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\geqslant\dfrac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}$ для любых $a,b,c>0$.

$\boxed{16}$ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\geqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ если $x,y,z>0$ и $x+y+z=3$.

$\boxed{17}$ $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{abc}$ для $a,b,c>1$

$\boxed{18}$ $\sqrt{a+b+c}\geqslant\dfrac{a}{\sqrt{2a+b}}+\dfrac{b}{\sqrt{2b+c}}+\dfrac{c}{\sqrt{2c+a}}$ для любых $a,b,c>0$.

$\boxed{19}$ $\dfrac{ac}{ax^2+2bx+c}+\dfrac{ba}{bx^2+2cx+a}+\dfrac{cb}{cx^2+2ax+b}\leqslant\dfrac{a+b+c}{(x+1)^2}$, где

все переменные неотрицательны и никакие две из них не равны нулю.

$\boxed{20}$ $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}\geqslant\dfrac{a+b+c}{a+b+c-\sqrt[3]{abc}}$ для любых $a,b,c>0$.