Выравнивание знаменателей и метод спуска

Упорядочение

Докажите неравенства

$\boxed{1}$ $\dfrac{x+1}{y+1}+\dfrac{y+1}{z+1}+\dfrac{z+1}{x+1}\leqslant \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$, для положительных x, y, z.

ДЗ $\boxed{2}$ $x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geqslant 0$, для положительных x, y, z, r.

ДЗ $\boxed{3}$ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\leqslant \dfrac{1}{a^2b^2c^2d^2}$, где $a+b+c+d=3$ и $a, b, c, d>0$.

ДЗ $\boxed{4}$ $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}+\dfrac{1}{d^3}\leqslant \dfrac{1}{a^3b^3c^3d^3}$, где $a+b+c+d=3$ и $a, b, c, d>0$.

Выравнивание знаменателей

Докажите неравенства

$\boxed{5}$ $\dfrac{x^2}{1+x+xyz}+\dfrac{y^2}{1+y+xyz}+\dfrac{z^2}{1+z+xyz}\leqslant 1$, где $0\leqslant x, y, z\leqslant 1$.

$\boxed{6}$ $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$, где a, b, c – стороны треугольника.

ДЗ $\boxed{7}$ $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant \dfrac{1}{abc}$, где $a, b, c>0$.

ДЗ $\boxed{8}$ $\dfrac{1}{a_1+a_2}+\dfrac{1}{a_2+a_3}+\dfrac{1}{a_3+a_1}>1$, где $a_i>1$, $a_1+a_2+a_3=S$

$\dfrac{a_i^2}{a_i-1}>S$ для всех $i=1,2,3$.

ДЗ $\boxed{9}$ $\dfrac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\dfrac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\dfrac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1$, где $n>3$, и числа $x_i>0$, $x_1\cdot x_2\cdots x_n=1$.

ДЗ $\boxed{10}$ $\dfrac{xy}{x^5+xy+y^5}+\dfrac{yz}{y^5+yz+z^5}+\dfrac{zx}{z^5+zx+x^5}\leqslant 1$, где $x, y, z>0$ и $xyz=1$.

ДЗ $\boxed{11}$ $\dfrac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\dfrac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\dfrac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geqslant 0$, где $x, y, z>0$ и $xyz\geqslant 1$.

Метод спуска

Докажите неравенства

ДЗ $\boxed{12}$ $\dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, где $x_i > 0$.

ДЗ $\boxed{13}$ $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geqslant \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$, где $x_i > 0$.

ДЗ $\boxed{14}$ $(1+x_1)(1+x_1+x_2)\dots(1+x_1+x_2+\dots+x_n) \geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}} \cdot \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}$, где $x_i > 0$.

ДЗ $\boxed{15}$ $\dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \dots + \dfrac{1}{1+x_n} \geqslant \dfrac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$, где $x_i \geqslant 1$.