

# Степенные средние

## На занятии

**Определение 0.1.** Степенным средним степени  $r$  положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется

$$M_r = \left( \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Определим  $M_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ .

- [1] Пусть  $x_1, \dots, x_n > 0$  и  $\alpha > 1$ . Докажите, что

$$\left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^\alpha \leq \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n}.$$

- [2] Докажите, что  $M_r \leq M_s$  при  $0 < r < s$  и  $r < s < 0$ .

- [3] Докажите, что  $\lim_{r \rightarrow 0} M_r = M_0$ .

- [4] Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + 1}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

**Определение 0.2.** Пусть  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  и  $\lambda_i > 0$ . Взвешенным средним степенным называется

$$M_r^\lambda = (\lambda_1 a_1^r + \lambda_2 a_2^r + \dots + \lambda_n a_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

Определим  $M_0^\lambda = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}$ .

- ДЗ [5] Пусть  $x_1, \dots, x_n > 0$  и  $\alpha > 0$ . Докажите, что  $M_1^\lambda < M_\alpha^\lambda$ .

- ДЗ [6] Докажите, что  $M_r^\lambda \leq M_s^\lambda$  при  $0 < r < s$  и  $r < s < 0$ .

- ДЗ [7] Докажите, что  $\lim_{r \rightarrow 0} M_r^\lambda = M_0^\lambda$ .

ДЗ [8] Докажите, что функция  $M_r^\lambda$  выпукла на  $(-\infty, 0)$  и вогнута на  $(0, +\infty)$ .

ДЗ [9] Докажите, что для любых положительных чисел  $a, b$  выполнено неравенство

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{2}{3} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

ДЗ [10] Пусть  $a, b, c$  — положительные действительные числа. Докажите, что

$$3(a + b + c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}.$$