

Неравенства КБШ и Гёльдера

На занятии

Неравенство КБШ и лемма Титу

- [1] Докажите неравенство КБШ

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2.$$

- [2] Докажите неравенство [лемма Титу] ($y_i > 0$)

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

- [3] Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ верно неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}.$$

- [4] Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ верно неравенство

$$\frac{a}{a + 2b} + \frac{b}{b + 2c} + \frac{c}{c + 2a} \geq 1.$$

- [5] Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a}{a + 2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b + 2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c + 2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

- [6] Пусть $a, b, c > 0$, $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geq \frac{3}{2}.$$

- [7] Пусть $a, b, c > 0$, $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{b + c} + \frac{b^3}{c + a} + \frac{c^3}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

- [8] $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Неравенство Гёльдера и обобщенная лемма Титу

- [9] [Неравенство Гёльдера] Докажите, что для трех наборов положительных чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) , (b_1, b_2, \dots, b_n) и (c_1, c_2, \dots, c_n) справедливо неравенство

$$(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) \cdot (b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3) \cdot (c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \dots + a_n b_n c_n)^3.$$

- [10] [Неравенство Гёльдера] Докажите, что для k наборов положительных чисел $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ справедливо неравенство

$$\prod_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^k \right) \geq \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^k a_{ij} \right)^k.$$

- [11] [Обобщенная лемма Титу] Докажите, что для любых положительных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) выполнено неравенство

$$\frac{x_1^3}{y_1} + \frac{x_2^3}{y_2} + \dots + \frac{x_n^3}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3}{n(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}.$$

- [12] Докажите неравенство для любых положительных a, b, c , $a + b + c = 1$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{16}{c} + \frac{81}{a+b+c} \geq 98.$$

- [13] Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{a^6}{b^2 + c^2} + \frac{b^6}{c^2 + a^2} + \frac{c^6}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{2} abc(a + b + c).$$

- [14] Пусть x, y, z такие положительные числа, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что

$$\frac{x^3}{1 + 9y^2xz} + \frac{y^3}{1 + 9z^2xy} + \frac{z^3}{1 + 9x^2yz} \geq \frac{(x + y + z)^3}{18}.$$

- [15] Докажите, что для всех положительных действительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$