Алгебраические преобразования

На занятии

Разложение на множители

$\boxed{1}$ Докажите, что $x^3 + y^3 \geqslant xy(x+y)$, где $x, y \geq 0$.

$\boxed{2}$ Докажите, что
$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leqslant \frac{2}{1+xy}$$
для любых $x, y \in [0; 1]$.

$\boxed{3}$ Пусть $0 < a < b$. Докажите, что
$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$$
для любого $x > 0$.

Выделение полного квадрата

$\boxed{4}$ Докажите неравенство
$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$$
для $x, y > 0$.

$\boxed{5}$ Докажите, что
$$a^2 + b^2 \geqslant ab$$
для любых a и b.

$\boxed{6}$ Докажите, что
$$x^2 + y^2 + 1 \geqslant x + y + xy$$
для любых x и y.

Метод разбиения

$\boxed{7}$ Докажите неравенство
$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca},$$
где $a, b, c > 0$.

$\boxed{8}$ Докажите неравенство

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc,$$

где $a, b, c > 0$.

Метод промежуточной оценки

$\boxed{9}$ Докажите неравенство

$$1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2$$

для любых положительных a, b, c, d.

Метод подстановки

$\boxed{10}$ Докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$$

для $a, b > 0$.

$\boxed{11}$ Докажите неравенство

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant x + y + z$$

для любых $x, y, z > 0$.

Замена переменной

$\boxed{12}$ (*Неравенство Несбитта*) Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

для $a, b, c > 0$.

$\boxed{13}$ Докажите неравенство

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 19 > 0,$$

если $x \geqslant 3$.

$\boxed{14}$ Докажите неравенство

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}$$

для любых x, y.

Метод упорядочивания переменных

$\boxed{15}$ Докажите, что

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\leqslant 1,$$

где $x, y \in [0;1]$.

Домашка

Докажите неравенства

$\boxed{16}$ $2(x^3+y^3)\geqslant(x+y)(x^2+y^2)$, где $x, y>0$.

$\boxed{17}$ $(a^2-b^2)(a^4-b^4)\leqslant(a^3-b^3)$, где $a, b\in\mathbb{R}$

$\boxed{18}$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$ для любых $a, b>0$.

$\boxed{19}$ $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^4+b^4}{2}$ для любых a, b.

$\boxed{20}$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$ для любых $a, b>0$.

$\boxed{21}$ $\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{2}$ для любых $a, b>0$.

$\boxed{22}$ $x^4+y^4+z^2+1\geqslant 2x(xy^2-x+z+1)$ для любых z, y, z.

$\boxed{23}$ $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ для любых x, y, z.

$\boxed{24}$ $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$ для любых x, y, z.

$\boxed{25}$ $a^2+ab+b^2\geqslant 3(a+b-1)$ для любых a, b.

$\boxed{26}$ $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)\geqslant 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$, где $x, y, z>0$.

$\boxed{27}$ $(x+y+z)^4\geqslant 8(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)$, где $x, y, z>0$.

$\boxed{28}$ $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\leqslant\frac{a+b+c}{2abc}$, где $a, b, c>0$.

$\boxed{29}$ $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\leqslant\frac{3}{1+x+y}$, где $x, y\in[0;1]$.

$\boxed{30}$ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}$ для каждого $n\in\mathbb{N}$.

31 $x_0, x_1, \ldots, x_n > 0, \quad n \geqslant 2$

$$\frac{x_1}{x_0+x_1} + \frac{x_2}{x_0+x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_0+x_n} > \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_0+x_1+\cdots+x_n},$$

32 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

33 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ для каждого натурального n.

34 $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$ для любых a, b, c.

35 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$ для любых $a, b, c > 0$.

36 $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a+b+c)$ для любых a, b, c.

37 $\sqrt{(x+y)(y+z)} + \sqrt{(x+z)(z+x)}\sqrt{(z+x)(x+y)} \leqslant 2(x+y+z)$, где $x, y, z \geq 0$.

38 $\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geqslant \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ для любых $x, y, z > 0$.

39 $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$ для любых $x, y, z > 0$.

40 $2x^3 + 3y^3 \geqslant 4xy^2$ для любых $x, y > 0$.

41 $(x^a + y^a + z^a)(x^d + y^d + z^d) \geqslant (x^b + y^b + z^b)(x^c + y^c + z^c)$ для любых $x, y, z \geqslant 0$, где $0 < a < b < c < d$ и $a + d = b + c$.