Неравенство Иенсена

Определение 0.1. Множество точек называется *выпуклым*, если все точки отрезка, образуемого двумя любыми точками данного множества, принадлежат множеству.

Определение 0.2. Суперграфик (надграфик) это множество G_+, такое что

$$G_+ = \{(x, y) \mid x \in D_f,\, y \geqslant f(x)\}$$

Определение 0.3. Субграфик (подграфик) это множество G_-, такое что

$$G_- = \{(x, y) \mid x \in D_f,\, y \leqslant f(x)\}$$

Определение 0.4.

Фукнция называется *выпуклой*, если ее суперграфик – выпуклое множество.

Функция называется *вогнутой*, если ее субграфик – выпуклое множество.

$\boxed{1}$ Пусть $a < b$ и $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Покажите, что если λ пробегает отрезок $[0, 1]$, то x пробегает отрезок $[a, b]$.

$\boxed{2}$ Докажите, что функция $y = f(x)$ является выпуклой на промежутке D тогда и только тогда, когда

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

для любых $x_1, x_2 \in D$ и неотрицательных λ и μ, удовлетворяющий условию $\lambda + \mu = 1$.

$\boxed{3}$ Докажите, что $y = x^2$ – выпуклая функция на $\mathbb{R}$, а фукнция $y = \sqrt{x}$ – вогнутая.

$\boxed{4}$ [*Критерий выпуклости*]. Докажите, что функция f выпуклая на отрезке тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0$ для всех x из отрезка. Наоборот, функция f вогнута на ортрезке тогда и только тогда, когда $f''(x) \leqslant 0$ для всех x из отрезка.

Определение 0.5. Пусть в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ расположены массы $m_i > 0$. Центром масс данной системы назвается точка (x_c, y_c), такая что

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \quad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

$\boxed{5}$ Одну из точек системы назовем красной, а остальные – синими. Покажите, что центр масс данной системы совпадает с центром масс двух точек: красной и центра масс всех синих (в котором помещена масса всех синих точек).

$\boxed{6}$ Докажите, что центр масс нескольких точек выпуклого множества также принадлежит этому множеству.

$\boxed{7}$ [Неравенство Иенсена]. Рассмотрим выпуклую функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке D, и числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство Иенсена:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

$\boxed{8}$ Используя неравенство Иенсена, докажите неравенство между средними:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

$\boxed{9}$ Докажите неравенство Коши:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

$\boxed{10}$ С помощью неравенства иенсена докажите неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$