Классические неравенства

На занятии

Неравенство КБШ и лемма Титу

$\boxed{1}$ Докажите неравенство КБШ

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2.$$

$\boxed{2}$ Докажите неравенство [*лемма Титу*] $(y_i > 0)$

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

$\boxed{3}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ верно неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

$\boxed{4}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ верно неравенство

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geqslant 1.$$

$\boxed{5}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

$\boxed{6}$ Пусть $a, b, c > 0, \ \ abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

$\boxed{7}$ Пусть $a, b, c > 0, \ \ abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

$\boxed{8}$ $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Неравенство Гёльдера и обобщенная лемма Титу

$\boxed{9}$ [*Неравенство Гёльдера*] Докажите, что для трех наборов положительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, d_n)$ и $(c_1, c_2, \ldots c_n)$ справедливо неравенство

$$(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)\cdot(b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3)\cdot(c_1^3+c_2^3+\cdots+c_n^3) \geqslant (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n)^3.$$

$\boxed{10}$ [*Неравенство Гёльдера*] Докажите, что для k наборов положительных чисел $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ справедливо неравенство

$$\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k\right) \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^k.$$

$\boxed{11}$ [*Обобщенная лемма Титу*] Докажите, что для любых положительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ выполнено неравенство

$$\frac{x_1^3}{y_1} + \frac{x_2^3}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^3}{y_n} \geqslant \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3}{n(y_1+y_2+\cdots+y_n)}.$$

$\boxed{12}$ Докажите неравенство для любых положительных $a, b, c,\ a+b+c=1$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{16}{c} + \frac{81}{a+b+c} \geqslant 98.$$

$\boxed{13}$ Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{a^6}{b^2+c^2} + \frac{b^6}{c^2+a^2} + \frac{c^6}{a^2+b^2} \geqslant \frac{1}{2}abc(a+b+c).$$

$\boxed{14}$ Пусть x, y, z такие положительные числа, что $xy+yz+zx=1$. Докажите, что

$$\frac{x^3}{1+9y^2xz} + \frac{y^3}{1+9z^2xy} + \frac{z^3}{1+9x^2yz} \geqslant \frac{(x+y+z)^3}{18}.$$

$\boxed{15}$ Докажите, что для всех положительных действительных чисел a, b, c выполнено нераевнство

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$