תרגיל בית 3 – מבוא ללמידה חישובית

מגיש: נתן בלוך

Theory Questions.

שאלה 1. Max of Convex Functions.

נתונות m פונקציות קמורות, $f_1(x), \dots, f_m(x)$, כאשר $f_i\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. נגדיר פונק' חדשה – $g(x) = max_i\, f_i(x)$.

סעיף א. נדרש להוכיח כי $g(x)$ קמורה. g מוגדרת מעל $\mathbb{R}^d$ שהינה קמורה. נדרש להוכיח כי לכל $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$ ולכל $\lambda \in [0,1]$, מתקיים–

$$g(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \le \lambda g(w_1) + (1-\lambda) g(w_2)$$

ראשית, נתון כי $f_1(x), \dots, f_m(x)$ הינן קמורות, ולכן לכל $i \in \{1, \dots m\}$ מתקיים אי-השיוויון לכל $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$ ולכל $\lambda \in [0,1]$ –

$$f_i(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \le \lambda f_i(w_1) + (1-\lambda) f_i(w_2)$$

ולפיכך ניתן לקבל את אי-השיוויון הבא –

$$(\mathbf{1}) \quad max_i\, f_i(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \le max_i\, \lambda f_i(w_1) + (1-\lambda) f_i(w_2)$$

נוכיח כעת כי $g(x)$ קמורה. יהי $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$ ויהי $\lambda \in [0,1]$. מתקיים –

$$g(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \underbrace{=}_{\substack{def \\ of\ g}} max_i\, f_i(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \underbrace{\le}_{\substack{by \\ (\mathbf{1})}} max_i\, \lambda f_i(w_1) + (1-\lambda) f_i(w_2) \le$$

$$\underbrace{\le}_{(2)} max_i\, \lambda f_i(w_1) + max_i\, (1-\lambda) f_i(w_2) = \lambda \cdot \underbrace{max_i\, f_i(w_1)}_{=g(w_1)} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{max_i\, f_i(w_2)}_{=g(w_2)} = \lambda g(w_1) + (1-\lambda) g(w_2)$$

נכונות מעבר (2) נובע מתכונות של פונק' המקסימום(max). הראנו בעצם **שלכל** $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$ **ולכל** $\lambda \in [0,1]$ מתקיים –

$$g(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \le \lambda g(w_1) + (1-\lambda) g(w_2)$$

כנדרש, על מנת להוכיח קמירות של $g(x)$. ■

סעיף ב. נדרש להוכיח כי $\nabla f_i(x)$, עבור $f_i(x) = max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$, הינו סאב-גרדיינט($sub\ gradient$) של g בנקודה x.
נניח כי f_i דיפרנציאבילית לכל $i \in \{1, \dots m\}$. ראינו בהרצאה את טענה 5.3.3 לפיה, עבור פונק' דיפרנציאבלית וקמורה f בנקודה כלשהי w, מתקיים $\partial f(w) = \{\nabla f(w)\}$, ובמילים אחרות, ה-$sub\ gradient$ היחיד שלה בנקודה w הינו הגרדיאנט בנקודה.
יהי $x \in \mathbb{R}^d$. נסמן $f_i(x) = max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$. נדרש להוכיח כי $z = \nabla f_i(x)$ הינו $sub\ gradient$ של g בנקודה x,
ולכן נרצה להוכיח שלכל $u \in \mathbb{R}^d$ מתקיים –

$$g(u) \ge g(x) + < u - x, \nabla f_i(x) >$$

ובאופן שקול, **נרצה להוכיח** שלכל $u \in \mathbb{R}^d$ מתקיים –

$$g(u) - g(x) \ \ge \ < u - x, \nabla f_i(x) >$$

ואכן, כיוון ש-$f_i(x)$ קמורה ודיפרצ'יאבילית בכל נקודה(ובפרט בנקודה $x \in \mathbb{R}^d$), נקבל לפי משפט 5.3.3 מההרצאה,
שלכל $u \in \mathbb{R}^d$ מתקיים –

$$f_i(u) \ge f_i(x) + < u - x, \nabla f_i(x) >$$

ובאופן שקול, לכל $u \in \mathbb{R}^d$ מתקיים –

$$(\mathbf{1}) \quad f_i(u) - f_i(x) \ \ge \ < u - x, \nabla f_i(x) >$$

כמו כן, נזכור כי – $f_i(x) = max_j\, f_j(x)$, וכן לכל $u \in \mathbb{R}^d$ מתקיים – $g(u) = max_j\, f_j(u) \ge f_i(u)$.
מכאן לכל $u \in \mathbb{R}^d$ מתקיים –

$$g(u) - g(x) = \underbrace{max_j\, f_j(u)}_{\ge f_i(u)} - \underbrace{max_j\, f_j(x)}_{=f_i(x)} \ge f_i(u) - f_i(x) \underbrace{\ge}_{\substack{by \\ (\mathbf{1})}} \ < u - x, \nabla f_i(x) >$$

ולכן, לפי ההגדרה מתקיים ש- $z = \nabla f_i(x)$ הינו $sub\ gradient$ של g בנקודה x, כאשר $f_i(x) = max_j\, f_j(x)$, וזה כאמור לכל $x \in \mathbb{R}^d$.
כנדרש. ■

שאלה 2. ℓ^2 penalty.

נתונה הבעיה הבאה –

$$\min_{w,b,\xi} \ \frac{1}{2}w^T w + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m} {\xi_i}^2$$

$$s.t. \quad y_i(w^T x_i + b) \geq 1 - \xi_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

סעיף א. נוכיח כי אילוצים מהצורה $\xi_i \geq 0$ לא ישנו את הבעיה. ובמילים אחרות, נוכיח כי כל פיתרון אופטימלי לבעיה בהכרח יקיים $\xi_i \geq 0$ לכל i.
פיתרון. יהי w^*, b^*, ξ^* פיתרון אופטימלי כלשהו לבעיה. כלומר מתקיים –

$$y_i((w^*)^T x_i + b^*) \geq 1 - {\xi^*}_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

וכן לכל w, b, ξ, מתקיים –

$$\frac{1}{2}(w^*)^T(w^*) + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m}({\xi^*}_i)^2 \leq \frac{1}{2}w^T w + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m} {\xi_i}^2$$

שכן הנחנו כי w^*, b^*, ξ^* פיתרון אופטימלי. נוכיח כי מתקיים – ${\xi^*}_i \geq 0$ לכל i. נניח **<u>בשלילה</u>** כי קיים i עבורו ${\xi^*}_k < 0$. עבור k זה מתקיים –

$$(\mathbf{1}) \qquad y_k((w^*)^T x_k + b^*) \geq 1 - {\xi^*}_k \underbrace{\geq}_{-{\xi^*}_k > 0} 1$$

נגדיר את הפיתרון הבא – $w' = w^*, b' = b^*$ וכן נגדיר ξ' באופן הבא –

$${\xi'}_j = \begin{cases} {\xi^*}_j & if\ j \neq k \\ 0 & if\ j = k \end{cases}$$

נראה כי הפיתרון w', b', ξ' מקיים את האילוצים של הבעיה, ואכן לכל $j \neq k$, האילוץ מתקיים שכן ${\xi^*}_j = {\xi'}_j$, $w' = w^*, b' = b^*$ ולכן –

$$y_j\big((w')^T x_j + b'\big) = y_j\big((w^*)^T x_j + b^*\big) \geq 1 - {\xi^*}_j = 1 - {\xi'}_j$$

ועבור $j = k$, מתקיים –

$$y_k((w')^T x_k + b') = y_k((w^*)^T x_k + b^*) \underbrace{\geq}_{\substack{by \\ (1)}} 1 = 1 - \underbrace{{\xi'}_k}_{=0}$$

ואכן מתקיימים כל האילוצים הנדרשים. כעת, מתקיים – ${\xi^*}_k < 0 = {\xi'}_k$ ולכן – $({\xi^*}_k)^2 > 0 = ({\xi'}_k)^2$. לכן נבחין מכך שההבדל היחיד בין הפתרונות הינו ${\xi^*}_k$, שמתקיים מכך ש – $w' = w^*, b' = b^*$ וכן –

$$\underbrace{\frac{1}{2}(w^*)^T(w^*) + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m}({\xi^*}_i)^2}_{\substack{result\ for \\ w^*,b^*,\xi^*}} = \frac{1}{2}(w^*)^T(w^*) + \frac{C}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m}({\xi^*}_i)^2 + \frac{C}{2}({\xi^*}_k)^2 > \frac{1}{2}(w')^T(w') + \frac{C}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m}({\xi'}_i)^2 + \frac{C}{2}({\xi'}_k)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(w')^T(w') + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m}({\xi'}_i)^2}_{\substack{result\ for \\ w',b',\xi'}}$$

וזו <u>סתירה</u> כאמור, שכן קיבלנו כי הפיתרון עבור w^*, b^*, ξ^* אינו פיתרון אופטימלי. על כן, נסיק את הנדרש – מתקיים – ${\xi^*}_i \geq 0$ לכל i, ולכן אילוצים מהצורה $\xi_i \geq 0$ לא ישנו את הבעיה.

סעיף ב. הלגרנג'יאן של הבעיה.
פיתרון. נבחין כי ניתן לכתוב את האילוצים באופן הבא –

$$1 - \xi_i - y_i(w^T x_i + b) \leq 0 \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

ולכן הלגרנג'יאן במקרה זה הינו –

$$\boxed{\mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) = \frac{1}{2}w^T w + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m} {\xi_i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\big(1 - \xi_i - y_i(w^T x_i + b)\big)}$$

סעיף ג. נביא את הלגרנג'יאן למינימום ביחס ל-w, b, ξ , ע"י גזירה ביחס למשתנים הללו והשוואת הנגזרות החלקיות ל-אפס.
פיתרון. מתקיים –

$$\frac{\partial \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)}{\partial w_k} = w_k - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i x_i^{(k)}$$

כאשר $x_j^{(k)}$ מייצג את האינדקס ה-k של הוקטור x_i. ע"י השיוויון $\frac{\partial \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)}{\partial w_k} = 0$, נקבל – $\boxed{w_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i x_i^{(k)}}$, ונסמן שיוויון זה ב-(*).
כמו כן, מתקיים –

$$\frac{\partial \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)}{\partial b} = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$$

ע"י השיוויון $\frac{\partial \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)}{\partial b} = 0$, נקבל – $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0$, ונסמן שיוויון זה ב-(**).
כמו כן, מתקיים –

$$\frac{\partial \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)}{\partial \xi_k} = C\xi_k - \alpha_k$$

ע"י השיוויון $\frac{\partial \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)}{\partial \xi_k} = 0$, נקבל – $C\xi_k = \alpha_k$, לכל k, ונסמן שיוויונות אלה ב-(***).
נבחין כי מתקיים –

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\, x_i = \alpha_1 y_1 x_1 + \cdots + \alpha_m y_m x_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1 x_1^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1 x_1^{(n)} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \alpha_m y_m x_m^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_m y_m x_m^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i x_i^{(1)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i x_i^{(n)} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{(*)} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = w$$

נסתכל כעת על הביטוי $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\big(1 - \xi_i - y_i(w^T x_i + b)\big)$ המופיע כגורם בלגרנג'יאן ונציב בו את האילוצים שקיבלנו כך ש – $\nabla \partial \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) = 0$, ביחס למשתנים w, b, ξ. נקבל –

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\big(1 - \xi_i - y_i(w^T x_i + b)\big) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i (w^T x_i + b) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i w^T x_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i b =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i - w^T \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i x_i}_{=w} - b \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i}_{\substack{=0 \\ by(**)}} \underbrace{=}_{\substack{by\,(***) \\ and(**)}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \alpha_i - \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\, x_i}_{=w}\right)^T \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\, x_i}_{=w}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j$$

נציב בלגרנג'יאן את האילוצים –

$$\mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) = \frac{1}{2} w^T w + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m} {\xi_i}^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\big(1 - \xi_i - y_i(w^T x_i + b)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{{\alpha_i}^2}{C^2} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j} + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\alpha_i} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{m} {\boldsymbol{\alpha_i}}^2}$$

סעיף ד. התוכנית הדואלית.

ראינו בהרצאה כי התוכנית הפרימאלית, שקולה לבעיית ה-min-max הבאה –

$$\min_{w,b,\xi} \max_{\alpha} \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)$$

וכן ראינו כי מתקיים האי-שיוויון –

$$\min_{w,b,\xi} \max_{\alpha} \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) \ \geq \max_{\alpha} \ \min_{w,b,\xi} \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)$$

ואם נגדיר – $g(a) = \min_{w,b,\xi} \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)$, ופונק' המטרה של התוכנית הדואלית תהיה מקסימיזציה של החסם התחתון לפונק' המטרה המקורית, ולכן –

$$\max_{\alpha} g(a) \ = \max_{\alpha} \ \min_{w,b,\xi} \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)$$

וכיוון שהפונק' $\mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha)$ הינה קמורה(כסכום של פונק' קמורות כל אחת), נקבל כי המינימום שלה מתקבל בנקודה בה הגרדיאנט שלה לפי w,b,ξ מקיים $\nabla\mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) = 0$. ראינו כי במקרה זה, המינימום מקיים –

$$\mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j \ + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{m}{\alpha_i}^2$$

ולכן פונק' המטרה של התוכנית הדואלית הינה –

$$\max_{\alpha} g(a) \ = \ \max_{\alpha} \ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j \ + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{m}{\alpha_i}^2$$

נבחין כי אספנו בדרך אילוץ נוסף לפיו –

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i \ = \ 0$$

אילוץ זה נובע מכך שבלגרנג'יאן קיבלנו –

$$\mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) = \frac{1}{2}w^T w + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m}{\xi_i}^2 \ + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\big(1-\xi_i - y_i(w^T x_i + b)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}w^T w + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{m}{\xi_i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \ - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i \ - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i w^T x_i - \boldsymbol{b}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\alpha_i y_i}$$

ונבחין כי אם $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i \ \neq \ 0$, אזי נקבל תמיד כי – $\min_{w,b,\xi} \mathcal{L}(w,b,\xi,\alpha) = -\infty$.

כמו כן, כיוון ש-α_i הינם כופלים של אילוצי אי-שיוויון, נקבל את אילוצי אי-שליליות לגביהם – $\alpha_i \geq 0$.

בסה"כ, התוכנית הדואלית הינה –

$$\boxed{\begin{array}{c} \max_{\alpha} \ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i y_i x_i \alpha_j y_j x_j \ + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \ - \ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{m}{\alpha_i}^2 \\ \boldsymbol{s.t.} \ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i = 0 \\ \alpha_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{1,..,m\} \end{array}}$$

שאלה 3. The Multi-Class Hinge-Loss.

נגדיר את פונק' ההפסד($multi\ class\ hinge\ loss\ function$) באופן הבא –

$$\ell(w_1, \dots w_L, x, y) = \max_{\hat{y}\in[L]} w_{\hat{y}} \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(\hat{y}, y)$$

סעיף א. נדרש להוכיח כי ℓ פונקצייה קמורה של המשתנים $w_1, \dots, w_L$. **ידוע כי פונק' המקסימום של פונק' קמורות כל אחת הינה גם כן פונק' קמורה,** ולכן מספיק להראות שלכל $\hat{y} \in [L]$ הפונק' $w_{\hat{y}} \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(\hat{y}, y)$ הינה פונק' קמורה של המשתנים $w_1, \dots, w_L$.
כמו כן, **ידוע כי סכום של פונק' קמורות הינה פונק' קמורה** ולכן מספיק להראות כי כל גורם בפונק' $w_{\hat{y}} \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(\hat{y}, y)$ הינו פונק' קמורה של המשתנים $w_1, \dots, w_L$. ואכן, יהיו $x, y, \hat{y}$ קבועים כלשהם ונוכיח קמירות. הגורם $\Delta_{zo}(\hat{y}, y)$ הינה פונק' קבועה של המשתנים $w_1, \dots, w_L$ ולכן זו פונק' קמורה. הגורמים של $w_{\hat{y}} \cdot x$ ו- $-w_y \cdot x$ הינם פונק' ליניאריות של המשתנים $w_1, \dots, w_L$, ולכן מדובר בפונק' קמורות גם כן.
ובסה"כ, כל הגורמים מהווים פונק' קמורות ביחס למשתנים $w_1, \dots, w_L$, ולכל לכל $\hat{y} \in [L]$ הפונק' $w_{\hat{y}} \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(\hat{y}, y)$ הינה פונק' קמורה של המשתנים $w_1, \dots, w_L$. **מכאן, נסיק כי הפונק' $\boldsymbol{\ell(w_1, \dots w_L, x, y)}$ הינה קמורה כמקסימום של פונק' קמורות כל אחת, כנדרש.**

סעיף ב. נדרש להוכיח שמתקיים $\ell(w_1, \dots w_L, x, y) \geq \Delta_{zo}(f(x; w_1, \dots w_L), y)$ לכל w, x, y.
יהי w, x, y כלשהם. נסמן כך – $f(x; w_1, \dots w_L) = \underset{y\in[L]}{\operatorname{argmax}}\, w_y \cdot x =: \boldsymbol{i}$. מתקיים לכן – $i \in [L]$, וכן $w_i \cdot x \geq w_y \cdot x$ לכל $y \in [L]$.
כיוון שלפי ההגדרה $i \in [L]$, לפי הגדרת מקסימום מתקיים –

$$\max_{\hat{y}\in[L]} w_{\hat{y}} \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(\hat{y}, y) \geq w_i \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(i, y) \qquad (\mathbf{1})$$

שכן הגורם $w_i \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(i, y)$ הינו גורם בפונק' ה-$\max_{\hat{y}\in[L]}$ הנ"ל. לכן,

$$\ell(w_1, \dots w_L, x, y) = \max_{\hat{y}\in[L]} w_{\hat{y}} \cdot x - w_y \cdot x + \Delta_{zo}(\hat{y}, y) \underbrace{\geq}_{(1)} \underbrace{w_i \cdot x - w_y \cdot x}_{\substack{\geq 0\ as \\ \forall y\in[L]. \\ w_i\cdot x\geq w_y\cdot x}} + \Delta_{zo}(i, y) \geq \Delta_{zo}(i, y) = \Delta_{zo}(f(x; w_1, \dots w_L), y)$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך שסימנו – $i := \underset{y\in[L]}{\operatorname{argmax}}\, w_y \cdot x = f(x; w_1, \dots w_L)$.
ובסה"כ הראנו בסעיף זה כי לכל w, x, y, מתקיים –

$$\ell(w_1, \dots w_L, x, y) \geq \Delta_{zo}(f(x; w_1, \dots w_L), y)$$

כנדרש.

סעיף ג. נתון כי קיימים $w_1^\star, \dots, w_L^\star$, שמשיגים טעות אמפירית(טעות על גבי סט האימון) של אפס. במילים אחרות, לכל $i \in [L]$, מתקיים –

$$\Delta_{zo}(f(x_i; w_1^\star, \dots, w_L^\star), y_i) = 0$$

נוכיח כי גם בעבור $w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}$, לכל $i \in [L]$, מתקיים – $\Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right) = 0$.
פיתרון. נוכיח כי מתקיים שיוויון ע"י כך שנוכיח כי מתקיימים שני אי-שיוויונים – $0 \leq \Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right) \leq 0$.

בכיוון הראשון, בו נוכיח כי $0 \leq \Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right)$ הינו מיידי מהגדרת הפונק' $\Delta_{zo}(\cdot,\cdot)$, שכן לכל $y, \hat{y} \in [L]$, מתקיים – $\Delta_{zo}(y, \hat{y}) \in \{0,1\}$, ובפרט אי-שלילי. ולכן $0 \leq \Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right)$, כנדרש בכיוון זה.

בכיוון השני, נדרש להוכיח כי מתקיים $\Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right) \leq 0$. לפי ההנחה, לכל $i \in [L]$, מתקיים –

$$\Delta_{zo}(f(x_i; w_1^\star, \dots, w_L^\star), y_i) = 0 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{\boldsymbol{def\ of} \\ \Delta_{zo}}} \quad f(x_i; w_1^\star, \dots, w_L^\star) = y_i \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{\boldsymbol{def\ of} \\ f}} \quad \underset{y\in[L]}{\operatorname{argmax}}\, w_y \cdot x = y_i$$

$$\Longrightarrow \max_{y\in[L]} w_y \cdot x \leq w_{y_i} \cdot x \quad \Longrightarrow \max_{\substack{y\in[L] \\ y\neq y_i}} w_y \cdot x < w_{y_i} \cdot x$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש- $f(x_i; w_1^\star, \dots, w_L^\star) = \max_{y\in[L]} w_y \cdot x$, ו-$f$ פונק' ולכן חד-ערכית, ולכן לא ייתכנו שני ארגומנטים שהם $maximizers$.
לכל $i \in [L]$, נגדיר –

$$\varepsilon_i = \max_{\substack{y\in[L] \\ y\neq y_i}} w_y \cdot x - w_{y_i} \cdot x$$

ולפי מה שהוכחנו ב-$(*)$, מתקיים לכל $i \in [L]$, $\varepsilon_i < 0$. נגדיר גם כן – $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} := \min_i |\varepsilon_i| > 0}$. כעת, נגדיר את הוקטורים $w_1', \dots, w_L'$, באופן הבא –

$$w_i' = \frac{1}{\varepsilon} \cdot w_i^\star$$

כמו כן, נסתכל על הביטוי – $\max_{y\in[L]} w'_y \cdot x_i - w'_{y_i} \cdot x_i + \Delta_{zo}(y, y_i)$, ונבחין שעבור $y = y_i$, נקבל – $\underbrace{w'_{y_i} \cdot x_i - w'_{y_i} \cdot x_i}_{=0} + \underbrace{\Delta_{zo}(y_i, y_i)}_{=0} = 0$, ולכן ניתן להציג זאת באופן הבא **השקול** –

$$\max_{y\in[L]} w'_y \cdot x_i - w'_{y_i} \cdot x_i + \Delta_{zo}(y, y_i) = max\{0, \max_{\substack{y\in[L]\\ y\neq y_i}} w'_y \cdot x_i - w'_{y_i} \cdot x_i + \Delta_{zo}(y, y_i)\} = max\{0, \max_{\substack{y\in[L]\\ y\neq y_i}} w'_y \cdot x_i - w'_{y_i} \cdot x_i + 1\} \quad (*)$$

ובנוסף, נבחין כי במקרה זה, המקסימום נלקח על גבי איברי הקבוצה $[L]$ **השונים** מ-y_i, ולכן מתקיים – $\Delta_{zo}(y, y_i) = 1$.

מתקיים –

$$\sum_i \Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right) \underbrace{\leq}_{(b)} \sum_i \ell\left(w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}, x_i, y_i\right) \underbrace{\leq}_{\substack{w^{opt}\\ optimizer}} \sum_i \ell(w'_1, \dots, w'_L, x_i, y_i) =$$

$$= \sum_i \max_{y\in[L]} w'_y \cdot x_i - w'_{y_i} \cdot x_i + \Delta_{zo}(y, y_i) \underbrace{=}_{(*)} \sum_i max\{0, \max_{\substack{y\in[L]\\ y\neq y_i}} w'_y \cdot x_i - w'_{y_i} \cdot x_i + 1\} =$$

$$= \sum_i max\{0, 1 + \max_{\substack{y\in[L]\\ y\neq y_i}} \frac{1}{\varepsilon} \cdot w^\star_y \cdot x_i - \frac{1}{\varepsilon} \cdot w^\star_{y_i} \cdot x_i\} = \sum_i max\{0, 1 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \underbrace{\max_{\substack{y\in[L]\\ y\neq y_i}} w^\star_y \cdot x_i - w^\star_{y_i} \cdot x_i}_{=\varepsilon_i}\} =$$

$$= \sum_i max\{0, 1 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon_i\} \underbrace{=}_{(**)} \sum_i max\{0, 1 - \frac{1}{\varepsilon} \cdot |\varepsilon_i|\} \underbrace{\leq}_{(***)} \sum_i max\{0, 0\} = \sum_i 0 = 0$$

כאשר השיוויון המסומן ב-$(**)$, נובע מכך ש-$\varepsilon_i < 0$, ולכן $\varepsilon_i = -|\varepsilon_i|$. אי-השיוויון המסומן ב-$(***)$, נובע מהטיעונים הבאים –

$$\varepsilon = \min_j |\varepsilon_j| \leq |\varepsilon_i| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} \geq \frac{1}{|\varepsilon_i|} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\varepsilon} \leq -\frac{1}{|\varepsilon_i|} \quad \Rightarrow -\frac{1}{\varepsilon} \cdot |\varepsilon_i| \leq -\frac{1}{|\varepsilon_i|} \cdot |\varepsilon_i| \quad \Rightarrow \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot |\boldsymbol{\varepsilon_i}| \leq 1 - \underbrace{\frac{1}{|\varepsilon_i|} \cdot |\varepsilon_i|}_{=1} = 0$$

כלומר, מצאנו כי –

$$\sum_i \Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right) \leq 0$$

וכמו כן, הוכחנו קודם לכן כי – $0 \leq \Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right)$, כלומר שמדובר בסכום של גורמים אי-שליליים החסום ע"י 0, ולכן בפרט ניתן להסיק את הרצוי –

$$\Delta_{zo}\left(f\left(x_i; w_1^{opt}, \dots, w_L^{opt}\right), y_i\right) = 0$$

לכל $i \in [L]$, כנדרש. ■

שאלה 4. Growth Function of Composition.

נתונות $F_1 \subseteq \mathcal{Y}_1{}^{\mathcal{X}}, F_2 \subseteq \mathcal{Y}_2{}^{\mathcal{Y}_1}$, ונגדיר $F = F_2 \circ F_1$, המוגדרת ע"י הרכבה של פונק' מ-F_1 ומ-F_2, כך ש-
$$F = F_2 \circ F_1 = \{f_2 \circ f_1 \mid f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\}$$

נדרש להוכיח כי מתקיים – $\pi_F(m) \leq \pi_{F_1}(m) \cdot \pi_{F_2}(m)$.

פיתרון. תהי $C = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathcal{X}$ תת-קבוצה בגודל m. נגדיר בנוסף $f_1^C = \{f_1(x_1), \dots, f_1(x_m)\} = \{y_1, \dots, y_m \mid \ s.t. \ \ y_i = f(x_i)\} \subseteq \mathcal{Y}_1$, תת-קבוצה של $\mathcal{Y}_1$ בגודל m, שהינה תלויה באמור בבחירת C וכן תלויה ב-$f_1 \in F_1$.
לפי ההגדרה, מתקיים –

$$|F_C| = |\{[f(x_1), \dots, f(x_m)]: f \in F, s.t. C = \{x_1, \dots, x_m\}\}| =$$

$$= \left|\{\left[f_2\left(f_1(x_1)\right), \dots, f_2\left(f_1(x_m)\right)\right]: f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, s.t. \ C = \{x_1, \dots, x_m\}\}\right| =$$

$$= |\{[f_2(y_1), \dots, f_2(y_m)]: f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, s.t. C = \{x_1, \dots, x_m\} \ and \ \ y_i = f_1(x_i)\}| =$$

$$\underset{\substack{def \\ of \\ F_{1_C}}}{=} \left| \bigcup_{[y_1,\dots,y_m] \in F_{1_C}} \{[f_2(y_1), \dots, f_2(y_m)]: f_2 \in F_2\} \right| \leq$$

$$\underset{\substack{Union \\ Bound}}{\leq} \sum_{[y_1,\dots,y_m] \in F_{1_C}} |\{[f_2(y_1), \dots, f_2(y_m)]: f_2 \in F_2\}| =$$

$$= \sum_{[y_1,\dots,y_m] \in F_{1_C}} \left|F_{2_{f_1^C}}\right| \leq \sum_{[y_1,\dots,y_m] \in F_{1_C}} \max_{\substack{C' \subseteq \mathcal{Y}_1 \\ s.t. \ |C'|=m}} \left|F_{2_{C'}}\right| = \sum_{[y_1,\dots,y_m] \in F_{1_C}} \pi_{F_2}(m) =$$

$$= \left|F_{1_C}\right| \cdot \pi_{F_2}(m) \leq \max_{\substack{C' \subseteq \mathcal{X} \\ s.t. \ |C'|=m}} \left|F_{1_{C'}}\right| \cdot \pi_{F_2}(m) = \pi_{F_1}(m) \cdot \pi_{F_2}(m)$$

נבחין כי הקבוצה $C = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathcal{X}$ הינה קבוצה כללית מגודל m, ולכן לכל קבוצה $C \subseteq \mathcal{X}$, מגודל m, מתקיים – $|F_C| \leq \pi_{F_1}(m) \cdot \pi_{F_2}(m)$,
ולפיכך ניתן להסיק כי הא"ש מתקיים גם עבור תת-קבוצה C מגודל m שעבורה $|F_C|$ מקסימלי, כלומר –

$$\underbrace{\max_{\substack{C \subseteq \mathcal{X} \\ s.t. \ |C|=m}} |F_C|}_{=\pi_F(m)} \leq \pi_{F_1}(m) \cdot \pi_{F_2}(m)$$

ואכן קיבלנו את הנדרש – $\pi_F(m) \leq \pi_{F_1}(m) \cdot \pi_{F_2}(m)$, כרצוי. ■

שאלה 5. Gradient Descent on Smooth Function.

נתונה $l:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונק' שהיא β-חלקה($\beta - Smooth$) ואי-שלילית. נסתכל על אלגוריתם GD עבור הפונק' l עם גודל צעד קבוע $\eta > 0$ –

$$\boldsymbol{x_{t+1}} = \boldsymbol{x_t} - \eta \nabla l(\boldsymbol{x_t})$$

עם נק' התחלה של $\boldsymbol{x_0}$. נוכיח שאם $\eta < \frac{2}{\beta}$, אזי מתקיים –

$$\lim_{t\to\infty} ||\nabla l(\boldsymbol{x_t})|| = 0$$

פיתרון. נתון כי l פונק' שהיא β-חלקה, ולכן לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$, מתקיים –

$$l(\boldsymbol{y}) \le l(\boldsymbol{x}) + \nabla l(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \frac{\beta}{2}||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2$$

ובפרט עבור הנקודות $\boldsymbol{x_{t+1}}, \boldsymbol{x_t}$ יתקיים – $\boldsymbol{x_{t+1}} - \boldsymbol{x_t} = -\eta\nabla l(\boldsymbol{x_t})$, וע"י שימוש בכך ש-$l$ פונק' שהיא β-חלקה, נקבל –

$$l(\boldsymbol{x_{t+1}}) \le l(\boldsymbol{x_t}) + \nabla l(\boldsymbol{x_t})^T \underbrace{(\boldsymbol{x_{t+1}} - \boldsymbol{x_t})}_{=-\eta\nabla l(\boldsymbol{x_t})} + \frac{\beta}{2}\underbrace{||\boldsymbol{x_t} - \boldsymbol{x_{t+1}}||^2}_{\substack{=||\boldsymbol{x_{t+1}}-\boldsymbol{x_t}||^2 \\ =||-\eta\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2}} = l(\boldsymbol{x_t}) - \eta\underbrace{\nabla l(\boldsymbol{x_t})^T\nabla l(\boldsymbol{x_t})}_{=||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2} + \eta^2\frac{\beta}{2}||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 =$$

$$= l(\boldsymbol{x_t}) - \eta||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 + \eta^2\frac{\beta}{2}||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 = l(\boldsymbol{x_t}) + (\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta)||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2$$

ומכאן נקבל –

$$(\mathbf{1}) \quad -(\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta)||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 \le l(\boldsymbol{x_t}) - l(\boldsymbol{x_{t+1}})$$

ונבחין כי

$$\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta \underset{\eta<\frac{2}{\beta}}{<} \eta\cdot\underbrace{\frac{2}{\beta}\cdot\frac{\beta}{2}}_{=1} - \eta = \eta - \eta = 0 \qquad \Rightarrow -(\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta) < 0$$

ולכן ע"י חלוקה של אי-השיוויון $(\mathbf{1})$ בגורם $-(\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta)$, נקבל כי מתקיים –

$$||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 \le \underbrace{(-(\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta))}_{const.} \cdot \left(l(\boldsymbol{x_t}) - l(\boldsymbol{x_{t+1}})\right)$$

ואי-שיוויון זה מתקיים כאמור לכל $t \ge 0$ טבעי. נוכיח כי $\sum_{t=0}^{\infty}||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 < \infty$, כלומר מתכנסת, ולכן מכאן לפי ההתכנסות הטור הנ"ל, נסיק כי האיבר הכללי $||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, ולפיכך בהכרח מתקיים $||\nabla l(\boldsymbol{x_t})|| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, כפי שנדרש. על מנת להוכיח התכנסות של הטור, נוכיח התכנסות של סדרת הסכומים החלקיים. מתקיים –

$$\sum_{t=0}^{N}||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 \le \underbrace{\left(-\left(\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta\right)\right)}_{const.} \cdot \sum_{t=0}^{N} l(\boldsymbol{x_t}) - l(\boldsymbol{x_{t+1}}) = \underbrace{\left(-\left(\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta\right)\right)}_{const.} \cdot \left(l(\boldsymbol{x_0}) - l(\boldsymbol{x_{N+1}})\right) \underset{l(\cdot)\ge 0}{\le} \underbrace{\left(-\left(\eta^2\frac{\beta}{2} - \eta\right)\right)\cdot l(\boldsymbol{x_0})}_{\substack{const. \\ \forall N\in\mathbb{N}}}$$

כלומר, מצאנו כי סדרת הסכומים החלקיים חסומה ע"י קבוע. נבחין בנוסף כי סדרת הסכומים החלקיים הינה סדרה מונוטונית עולה, שכן $||\cdot|| \ge 0$, **ולפיכך ניתן להסיק כי סדרת הסכומים מתכנסת שכן היא מונו' עולה וחסומה מלעיל.**

לכן, נסיק כי –

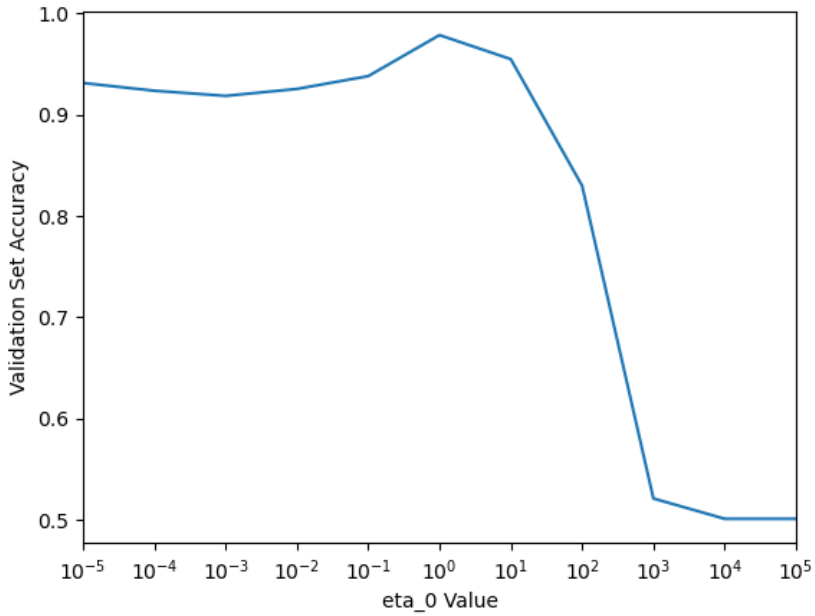
$$\sum_{t=0}^{\infty}||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 < \infty$$

ולכן האיבר הכללי שואף ל-אפס, כלומר $||\nabla l(\boldsymbol{x_t})||^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, ולפיכך נסיק כי – $||\nabla l(\boldsymbol{x_t})|| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, **כנדרש**. ■

.Programming Assignment

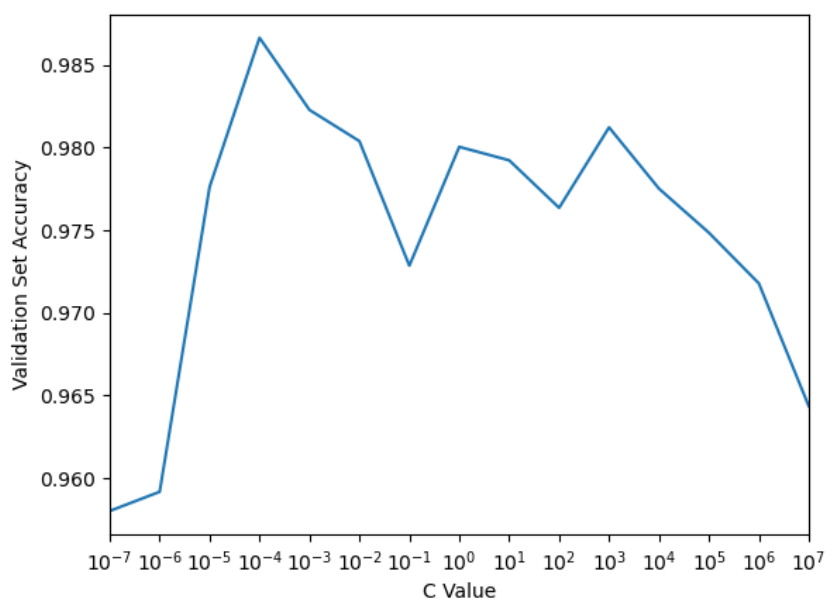
שאלה 1. SGD for Hinge Loss.

סעיף א. נגדיר $T = 1000, C = 1$, ונבצע SGD על גבי $\eta_0 \in \{10^{-5}, 10^{-4}, \dots, 10^{4}, 10^{5}\}$, ונבצע $cross - validation$, כדי לאמוד את טיב ההיפותזה שנלמדה, כדי לקבל את הגרף הבא של דיוק הממוצע על גבי סט הואלידציה($accuracy\ on\ validation\ set$), כפונק' של η_0. התוצאות –



נבחין כי η_0 הטוב ביותר התקבל עבור $\boxed{\eta_0 = 10^0 = 1}$, עפ"י הגרף שהתקבל.

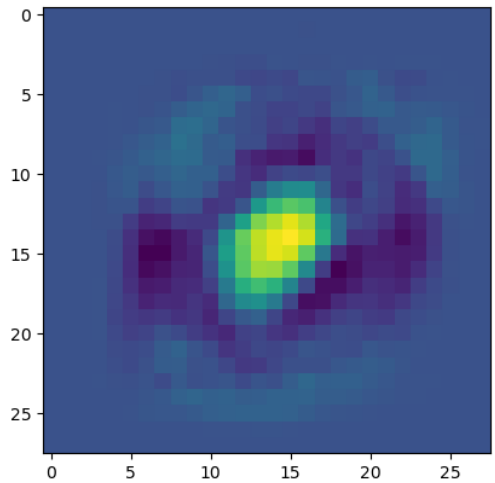
סעיף ב. בסעיף זה נשתמש ב-η_0 הטוב ביותר שהתקבל בסעיף א', $\eta_0 = 1$.
נגדיר גם $T = 1000$, ונבצע SGD על גבי $C \in \{10^{-7}, 10^{-6}, \dots, 10^{6}, 10^{7}\}$, ונבצע $cross - validation$, כדי לאמוד את טיב ההיפותזה שנלמדה, כדי לקבל את הגרף הבא של דיוק הממוצע על גבי סט הואלידציה($accuracy\ on\ validation\ set$), כפונק' של C. התוצאות –



נבחין כי C הטוב ביותר התקבל עבור $\boxed{C = 10^{-4}}$, עפ"י הגרף שהתקבל.

סעיף ג. בסעיף זה נשתמש ב-η_0 הטוב ביותר שהתקבל בסעיף א', $\eta_0 = 1$, וב-C הטוב ביותר שהתקבל בסעיף ב', $C = 10^{-4}$.

נאמן את המסווג עבור $T = 20000$, עם הפרמטרים שמצאנו בסעיפים הקודמים. נציג את w, וקטור המשקלים, המתקבל כתמונה –



ניתן לראות כי ישנו ריכוז במרכז התמונה, כלומר הפיקסלים במרכז התמונה הם הפיקסלים המרכזיים יותר באבחנה בין המספר 0 למספר 8.

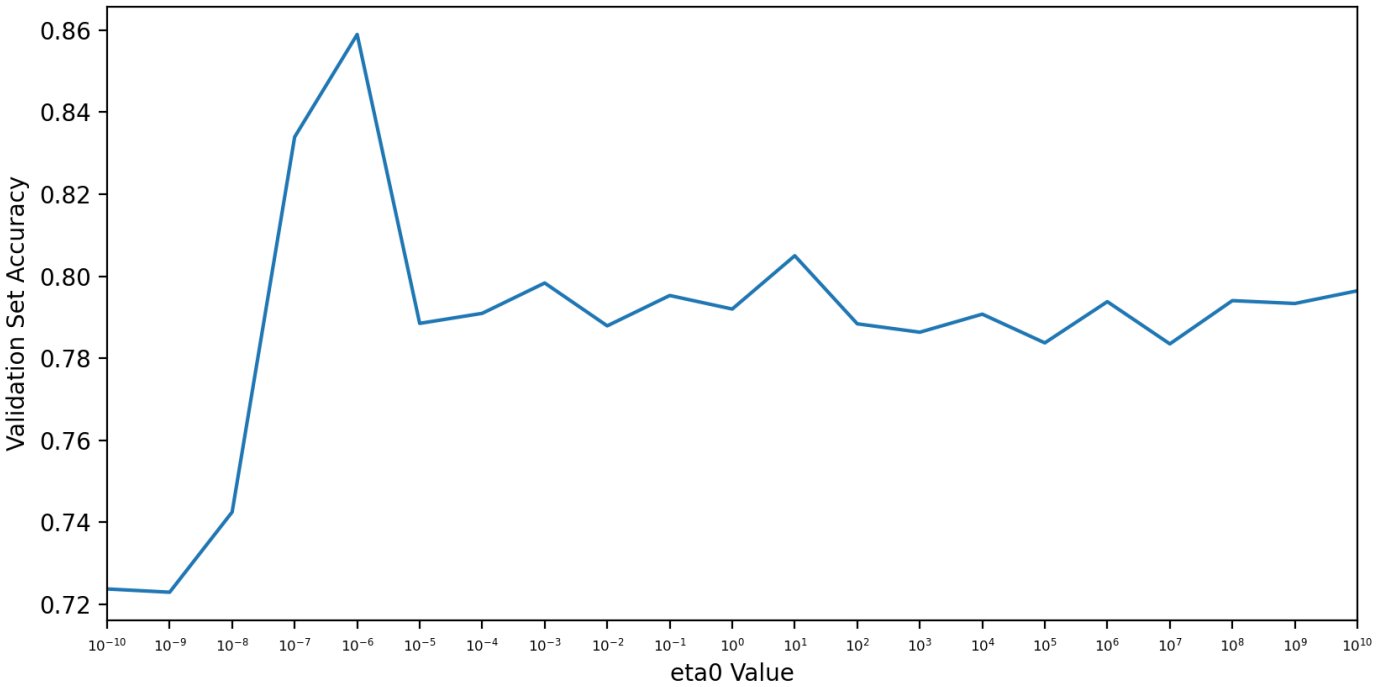
סעיף ד. נחשב את הדיוק של המסווג האופטימלי על גבי ה-$test\ set$.

```
The accuracy of the best classifier on the test set is 0.9923234390992836
```

הדיוק המתקבל הינו $\boxed{0.9923234390992836}$.

שאלה 2. SGD for Multi Class Cross Entropy.

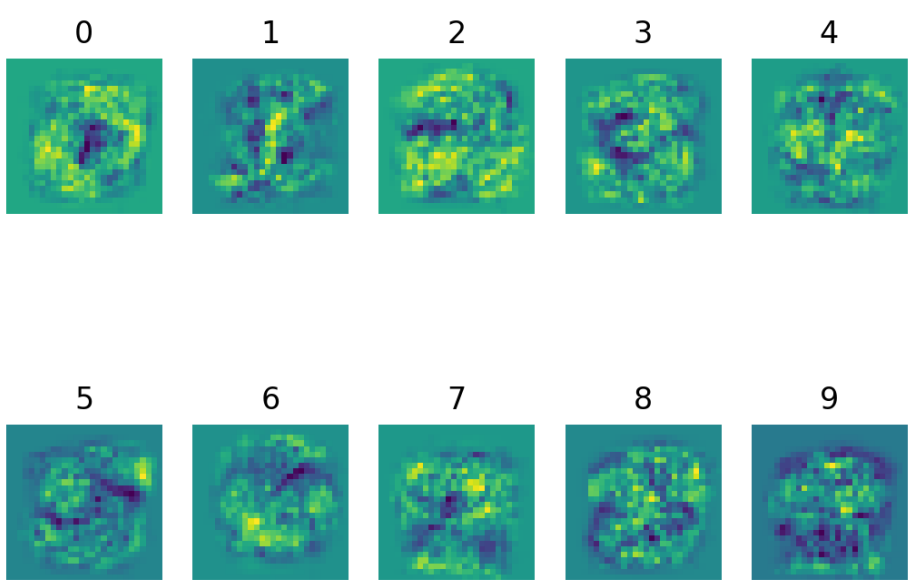
סעיף א. נגדיר $T = 1000$, ונבצע SGD על גבי $\eta_0 \in \{10^{-10}, 10^{-9}, \dots, 10^{9}, 10^{10}\}$, ונבצע $cross - validation$, בדי לאמוד את טיב ההיפותזה שנלמדה, כדי לקבל את הגרף הבא של דיוק הממוצע על גבי סט הואלידציה($accuracy\ on\ validation\ set$), כפונק' של η_0. התוצאות –



נבחין כי η_0 הטוב ביותר התקבל עבור $\boxed{\eta_0 = 10^{-6}}$, עפ"י הגרף שהתקבל.

סעיף ב. בסעיף זה נשתמש ב-η_0 הטוב ביותר שהתקבל בסעיף א', $\eta_0 = 10^{-6}$. נאמן את המסווג עם $\eta_0 = 10^{-6}$ עבור $T = 20000$.

נציג את וקטורי המשקלים $w_0, w_1, \dots, w_9$ שהתקבלו כתמונות –



סעיף ג. נחשב את הדיוק של המסווג האופטימלי על גבי ה-$test\ set$.

```
The accuracy of the best classifier on the test set is 0.869
```

הדיוק המתקבל הינו $\boxed{0.869}$.