2017.08.26 Hamachi

元の式（前進差分近似）

$$\frac{F\left(U+h\dot{U},x+h\dot{x},t+h\right)-F(U,x,t)}{h}=-\zeta F(U,x,t)$$

$F(U,x+h\dot{x},t+h)$の項を追加すると，

$$\frac{F\left(U+h\dot{U},x+h\dot{x},t+h\right)-F(U,x+h\dot{x},t+h)}{h}+\frac{F(U,x+h\dot{x},t+h)-F(U,x,t)}{h}=-\zeta F(U,x,t)$$

求めるべき式

$$\frac{F\left(U(t)+h\dot{U}(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h\right)-F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)}{h}$$
$$=-\zeta F(U(t),x(t),t)-\frac{F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)-F(U(t),x(t),t)}{h}$$

計算ステップとしては，

1. $U(0)=U_0, x(0)=x_0$を定義 or 測定
2. $F(U(t),x(t),t)=F(U(0),x(0),0)$を計算
3. $\dot{x}=f(U(t),x(t),t)\approx Ax(t)+Bu(t)$（←線形の場合）を計算
4. $x(t+h)=x(t)+h\dot{x}(t)$を計算
5. $F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)$を計算

   このとき，Fはハミルトン函数の入力微分dH/dUそのものである（制約もひと纏めにした場合）.

   たとえばセミアクティブダンパの場合，現時刻での$F(U(t),x(t),t)$は，

$$F(U(t),x(t),t)=\frac{dH(U(\mathrm{t}),x(t),t)}{dU}$$
$$=\begin{pmatrix} r_1u_1(t)-\left(u_{Max}-2u_1(t)\right)u_3(t)+b\lambda_2(t)x_2(t) \\ 2u_2(t)u_3(t)-r_2 \\ u_2(t)^2+\left(\frac{u_{Max}}{2}-u_1(t)\right)^2-\frac{{u_{Max}}^2}{4} \end{pmatrix}$$

   となる.

   $F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)$は，$x(t+h)\approx x(t)+h\dot{x}(t)$とすると，（$\lambda_2(t+h)$は$dH/dx$から出す）

$$F(U,x+h\dot{x},t+h)=\begin{pmatrix} r_1u_1(t)-\left(u_{Max}-2u_1(t)\right)u_3(t)+b\lambda_2(t+h)x_2(t+h) \\ 2u_2(t)u_3(t)-r_2 \\ u_2(t)^2+\left(\frac{u_{Max}}{2}-u_1(t)\right)^2-\frac{{u_{Max}}^2}{4} \end{pmatrix}$$

   となる．ここで，**Fにtは明示的に含まれてはいないため，無視できると考えている．**† **（この部分は要検証です）．**

†2 行目が，$2u_2(t)u_3(t)-r_2+e^{-pt}$だったりすると，$2u_2(t)u_3(t)-r_2+e^{-p(t+h)}$になるのかなあ.

6. 右辺が求まったので，左辺の$\dot{U}$について解く．

$$\frac{\partial F(U,x,t)}{\partial U}v_k \approx \frac{F(U+hv_k,x,t)-F(U,x,t)}{h}$$

の関係から，

$$\frac{\partial F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)}{\partial U}\dot{U}(t)=\frac{F\big(U(t)+h\dot{U}(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h\big)-F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)}{h}$$

となり，$Ax=b$と等価であるので，GMRES 法で解ける．

7. 結局，求めるべき関係は，以下の通り得られる．

$$\frac{\partial F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)}{\partial U}\dot{U}(t)=-\zeta F(U(t),x(t),t)-\frac{F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)-F(U(t),x(t),t)}{h}$$

これを GMRES により最小化する．つまり，以下を解く．

$$\min_{\dot{U}(t)}\left\|-\frac{\partial F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)}{\partial U}\dot{U}(t)-\zeta F(U(t),x(t),t)-\frac{F(U(t),x(t)+h\dot{x}(t),t+h)-F(U(t),x(t),t)}{h}\right\|$$

反復について

1 回目（ t = 0 ）

1. まず，現在の入力ベクトル$U(0)=U_0$，入力の微分ベクトル$\dot{U}(0)=\dot{U}_0\in\mathbb{R}$，状態ベクトル$x(0)=x_0$を取得する．$\dot{U}_0$はどんな値でもよいが，$\dot{U}_0=U_0$を使用している．

2. 状態ベクトルの微分値$\dot{x}(0)=f(U(0),x(0),t)$を計算する．

3. 次に，初期残差$r_0(0)$を求める．†

$$\begin{aligned}r_0(0)&=-\zeta F(U(0),x(0),0)-\frac{F(U(0),x(0)+h\dot{x}(0),h)-F(U(0),x(0),0)}{h}-\frac{\partial F(U(0),x(0)+h\dot{x}(0),h)}{\partial U}\dot{U}(0)\\&=-\zeta F(U(0),x(0),0)-\frac{F(U(0),x(0)+h\dot{x}(0),h)-F(U(0),x(0),0)}{h}\\&\qquad-\frac{F\big(U(0)+h\dot{U}(0),x(0)+h\dot{x}(0),h\big)-F(U(0),x(0)+h\dot{x}(0),h)}{h}\end{aligned}$$

† この時与える$\dot{U}(0)$は, おそらく**どんな値でも良い**. 毎イテレーションで rand(size($\dot{U}(t)$))でも動きます. ただ，前回値$\dot{U}(t-h)$を使うと収束が速い．はず．このため，現在時刻の$\dot{U}(t)$は必要でない．

4. 操作量$MV(0)=U(0)$としてシステムに入力する．

5. 次のサンプリングでの入力ベクトル$U(h)=U(0)+h\dot{U}(0)$を求める．

2 回目以降

省略