Zadanie 8:

8. Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+5x^2} \tag{7}$$

w punktach $-1,\ -1+\frac{1}{32},\ -1+\frac{2}{32},\ \ldots,\ 1-\frac{1}{32},\ 1$, a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (7) w tych węzłach. Narysować wykres wielomianu interpolacyjnego.

Kod w języku C++:

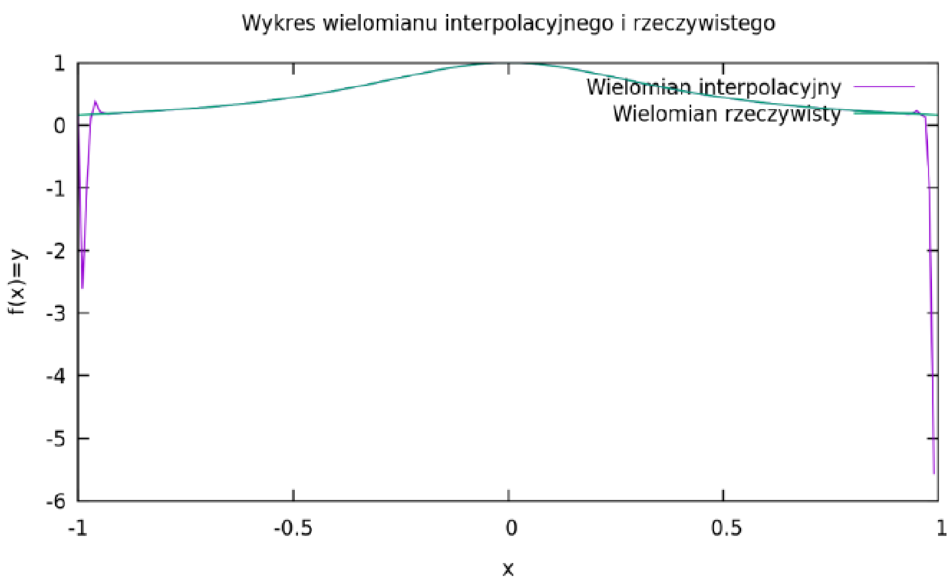
```cpp
#include <iostream>
#include <array> //std::array
#include <fstream> //std::ofstream

using std::cout;
using std::endl;

#define Vector std::array<long double, 65>

long double calcFunction(long double x);
long double base(const Vector &x, int i, long double y);
void solve(const Vector &x, const Vector &y, Vector &a);
long double calculate(const Vector &x, const Vector &a, long double y);
void writeToFile(const Vector &x, const Vector &y, const char *f);


int main(int argc, char const *argv[]){
    Vector x;
    Vector y;
    Vector a;
    //najpierw wypelnianie
    int i = 0;
    for (long double j = -1; j <= 1; j = j + (long double)1.0 / 32){
        x[i] = j;
        y[i] = calcFunction(j);
        i++;
    }

    //teraz obliczanie wspolczynnikow lagrange'a
    solve(x,y,a);

    //zapisywanie punktow obliczonych z wielomianu interpolacyjnego
    std::ofstream file;
    file.open("poly.txt");
    for (long double i = -1; i <=1; i=i+0.01) {
        file<<i<<" "<<calculate(x, a, i)<<endl;
    }
    file.close();

    //zapiywanie wynikow do pliku
    writeToFile(x, y, "function.txt");
```

```
    return 0;
}


//liczy wartosc funkcji dla danego x
long double calcFunction(long double x){
    long double temp = 5 * x * x + 1.0;
    return (1.0 / temp);
}

//zwraca element bazy wektora x(y), gdzie i to i-ty element bazy
long double base(const Vector& x, int i, long double y){
    long double base=1;
    for(int j=0; j<x.size(); j++){
        if(j==i) continue;
      le.open(f);
    for (int i = 0; i < x.size(); i++){
        file << x[i] << " " << y[i] << endl;
    }
}  else base*=(y-x[j]);
    }
    return base;
}

//obliczanie wspolczynnikow wielomianu lagrange'a
void solve(const Vector& x, const Vector& y, Vector& a){
    for(int i=0; i<a.size(); i++){
        a[i]=y[i]/base(x,i,x[i]);
    }
}

//oblicza wartosc funkcji dla x
long double calculate(const Vector& x, const Vector& a, long double y){
    long double result=0;
    for(int i=0; i<a.size(); i++){
        result+=a[i]*base(x,i,y);
    }
    return result;
}


//zapisuje wektor x i wartosci funkcji y do pliku f
void writeToFile(const Vector &x, const Vector &y, const char *f){
    std::ofstream file;
    file.open(f);
    for (int i = 0; i < x.size(); i++){
        file << x[i] << " " << y[i] << endl;
    }
}
```

Skrypt Gnuplota do rysowania wykresu:

```
#skrypt gunplota do stworzenia wykresu

set title "Wykres wielomianu interpolacyjnego i rzeczywistego"
set xlabel "x"
set ylabel "f(x)=y"
set xrange [-1: 1]
plot 'poly.txt' with lines title 'Wielomian interpolacyjny' , 'function.txt'
title 'Wielomian rzeczywisty' with points pointtype 6
```

Wynik działania programu:



Opis rozwiązania:
Metoda Lagrange'a na obliczenie współczynników wielomianu interpolacyjnego potrzebuje $O(n^2)$ czasu. Współczynniki obliczamy z poniższego układu równań i wzorów:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2(x_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{y_0}{\varphi_0(x_0)}$$

$$a_1 = \frac{y_1}{\varphi_1(x_1)}$$

$$...$$

$$a_n = \frac{y_n}{\varphi_n(x_n)}$$

Następnie, aby wyliczyć wartość wielomianu interpolacyjnego dla danego punktu x:

$$W(x) = a_0 * \varphi_0(x) + a_1 * \varphi_1(x) + ... + a_n * \varphi_n(x)) =$$
$$a_0 * (x - x_1) * (x - x_2) * ... * (x - x_n) + ... + a_n * (x - x_0) * (x - x_1) * ... * (x - x_{n-1})$$

Omówienie wyników:

Jak możemy zauważyć na powyższym wykresie metoda Lagrange'a dla podanej funkcji i danej ilości węzłów wywołuje oscylacje Rungego na końcach przedziałów. Jeśli zmniejszylibyśmy ilość węzłów oscylacje były by mniejsze bądź całkowicie zniknęły natomiast dla większej ilości węzłów amplituda oscylacji rośnie.